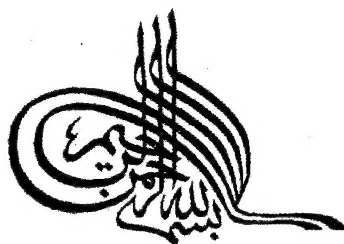
ویرایش هشتم سال ۲۰۰۸

# مبانی فیزیک

## جلد اول: مکانیک و گرما

دیوید هالیدی - رابرت رزنیک - جرل واکر





## ویرایش هشتم سال ۲۰۰۸

# مبـانی فیـزیک

## جلد اول: مکانیک و گرما


نویسندگان

دیوید هالیدی – رابرت رزنیک – جرل واکر

## هدف

مایهٔ سرگرمی و چالشی بزرگ. این چیزی بود که وقتی یکی از دانشجویانم در دروهٔ کارشناسی ناگهان از من پرسید "در زندگی خود با اینها چه کار می‌توانم انجام دهم؟" به ذهنم خطور کرد. البته بلافاصله جواب دادم که این همهٔ آن چیزهایی است که می‌توان در زندگی خود انجام دهی- فیزیک این است.

او مثالی از من پرسید. هرچه فکر کردن نتوانستم خود را به یک مثال قانع کنم. تا این که *سیرک پرندهٔ فیزیک* را هم برای او و هم برای خودم به وجود آوردم چون فهمیدم خواستهٔ او خواستهٔ من نیز هست. شش سال چندین کتاب درسی فیزیک را مرور کردم که با برنامه‌های آموزشی خیلی خوبی نوشته شده بودند ولی هرکدام چیزی کم داشتند. فیزیک جالب‌توجه‌ترین موضوع در جهان است چون دربارهٔ چگونگی کار جهان است، ولی هنوز کتابهای درسی از ارتباط با جهان واقعی دور مانده‌اند و سرگرمی گم شده است.

موارد زیادی از فیزیک جهان واقعی را در این کتاب HRW (هالیدی، رزنیک، واکر) آورده‌ام که به صورت *سیر پرندهٔ فیزیک* در ویرایش جدید آمده است. بسیاری از این مطالب از تدریس HRW حاصل شده است، که می‌توانستم از چهره‌ها و اظهارنظرهای بی‌پرده قضاوت کنم که کدام مطالب اارائه شده به کار می‌آیند و کدامها نمی‌آیند. یادداشت‌های من دربارهٔ موفقیت و عدم موفقیت پایهٔ اصلی این کتاب را تشکیل می‌دهند و پیغام من در اینجا به هر دانشجویی این است که: بلی شما می‌توانید از مفاهیم فیزیک پایه تمام نتیجه‌گیریهای معتبر دربارهٔ جهان واقعی را استدلال کنید و متوجه شوید که جهان واقعی در جایی است که سرگرمی هم وجود دارد.

من از نوشتن این کتاب هدفهای زیادی دارم اما برجسته‌ترین آنها این است که به مدرسان آن ابزاری بدهم که با آن به دانشجویان بیاموزند که چگونه به طور اثر بخش مطالب علمی را بخوانند، مفاهیم بنیادی را شناسایی کنند، برای پرسشهای علمی دلیل بیاورند و مسائل عددی را حل کنند. این فرایند برای دانشجویان یا مدرسان آسان نیست. در واقع درس مربوط به این کتاب می‌تواند یکی از چالش برانگیزترین درسهایی باشد که دانشجو آن را انتخاب کرده است. البته این می‌تواند یک پاداش بزرگ نیز باشد، چون گردش بنیادین جهان را آشکار می‌کند که از آن همهٔ کاربردهای علمی و مهندسی سرچشمه می‌گیرد.

بسیاری از استفاده کنندگان ویرایش هفتم (هم مدرسان و هم دانشجویان) نکته‌ها و پیشنهادهایی جهت اصلاح کتاب ارسال کرده‌اند. این اصلاحها اکنون در متن و مسئله‌ها در سراسر کتاب اعمال شده‌اند. انتشارات جان وایلی و پسران و من این کتاب را به عنوان طرحی رو به پیشرفت تلقی می‌کنیم و به مواردی که از سوی استفاده کنندگان آن دریافت می‌شود دلگرم می‌شویم. می‌توانید پیشنهادها، اصلاحیه‌ها و نظرهای مثبت یا منفی خود را به‌جان‌وایلی و پسران

http:www.wiley.com/college/halliday یا پست الکترونیکی Physics@wiley.com؛یا www.flying circus-ofphysics.com ارسال کنید. ممکن است نتوان به همه پیشنهادها پاسخ داد ولی همهٔ آنها را مطالعه و حفظ می‌کنیم.

## موارد تغییر یافتهٔ مهم

• به چند طریق مطلب سیرک پرنده در متن آمده است: معماگونه‌های آغازین فصل، مسائل نمونه، مثالهای متن و مسئله‌های پایان فصل. هدف آن دوگانه است: (۱) موضوع را جالبتر و ترغیب کننده‌تر سازد، (۲) به دانشجو نشان دهد که جهان اطراف آنها با استفاده از مبانی اصول فیزیک می‌تواند بررسی و درک شود.

•ارتباط به *سیرک پرندهٔ فیزیک* در سراسر مطالب متن و در مسائل انتهای فصل با علامت هواپیمای دو باله نشان داده شده است. در نسخهٔ الکترونیکی این کتاب با کلیک روی این علامت شما در موضوع متناظر با *سیرک پرنده* قرار خواهید گرفت. (کتابنامهٔ سیرک پرنده با بیش از ۱۰۰۰۰ مرجع مجله‌های علمی و مهندسی در www.flying circus of physics یافت می‌شود. )

• قانون گرانش نیوتون، قانون کولن و قانون بیوساوار در نماد برداری معرفی شده‌اند.

• بسیاری از معماگونه‌های آغاز فصل (مثالهای فیزیک کاربردی که جهت جلب توجه خواننده در هر فصلی طراحی شده است) جدید هستند و از مجله‌های پژوهشی در زمینه‌های گوناگون گردآوری شده‌اند.

• چندصد مسئله انتهای فصل جهت بالا بردن ارائه و پاسخ دوباره نویسی شده‌اند. تعدادی مسئله جدید با طبقه بندی مناسب و دشوار اضافه شده‌اند.

## ویژگیهای فصلها

**معماگونه‌های آغازین.** هر فصل با معماگونهٔ شگفت‌انگیزی آغاز و در خلال فصل توضیح داده می‌شود تا دانشجو را برای مطالعهٔ فصل ترغیب کند. این بخشها که مشخصهٔ *مبانی فیزیک* هستند مبتنی بر پژوهشهای جاری است که در مجله‌های علمی، مهندسی، پزشکی و حقوقی گزارش شده‌اند.

**فیزیک چیست؟** توصیفی از هر فصل است که با این پرسش و با پاسخی مرتبط با موضوع فصل آغاز می‌شود (یک وقت لوله‌کشی از من پرسید «برای زندگی چه می‌کنید؟» جواب دادم «من فیزیک درس می‌دهم» او چند دقیقه فکر کرد و سپس پرسید «فیزیک چیست؟» حرفهٔ لوله‌کش کاملاً مبتنی بر فیزیک است ولی او دربارهٔ فیزیک چیزی نمی‌دانست. بسیاری از دانشجویان در فیزیک مقدماتی نمی‌دانند فیزیک چیست و تصور می‌کنند که به حرفهٔ انتخابی آنها ربطی ندارد.)

**نکته‌های وارسی**[1] نقطه‌های توقفی هستند که به طور اثرگذاری از دانشجویان می‌پرسند که «آیا این پرسش را با دلایل مبتنی بر توصیف یا مسئله نمونه‌ای که خوانده‌ای می‌توانی پاسخ دهی؟ «اگر نه بهتر است دانشجو پیش از اینکه در فصل جلوتر برود به مطالب قبلی برگردد. برای مثال نکتهٔ وارسی ۱ در فصل ۴ و نکتهٔ وارسی ۲ در فصل ۱۱ را ببینید. *پاسخ تمام نکته‌های وارسی در پایان کتاب داده شده است.*

**مسئله‌های نمونه** انتخاب شده‌اند تا نشان داده شود که چگونه می‌توان مسئله‌ها را به جای عددگذاری سریع در معادله و بدون

1. Check Point

توجه به معانی معادله، به طور استدلالی حل کرد. مسئله‌های نمونه با علامت «مهارت خود را تقویت کنید» نوعاً طولانی و با راهنمایی بیشتر هستند.

**نکته‌های کلیدی** در مسئله‌های نمونه دانشجو را بر مفاهیم اصلی و ریشه‌ای پاسخ به مسئله‌ای متمرکز می‌کند. در اصل این نکته‌های کلیدی می‌گویند، «پاسخ خود را با استفاده از این مفهوم اصلی شروع می‌کنیم، روشی که ما را برای حل بسیاری از مسائل دیگر آماده می‌کند. با روشی که در آن با عددگذاری سریع در معادله‌ای همراه است شروع نمی‌کنیم، این روشی است که چیزی در پی ندارد».

**تدبیرهای حل مسئله** شامل راهکارهای مفید جهت راهنمایی دانشجویان مبتدی فیزیک است که چگونگی حل مسئله‌ها و پرهیز از خطاهای متداول را می‌آموزد.

**بازنگری و خلاصه** خلاصه‌ای از محتوای هر فصل را ترسیم می‌کند که حاوی مفاهیم اساسی است ولی نمی‌تواند جایگزین مطالعهٔ فصل شود.

**پرسشها** شبیه به نکته‌های وارسی‌اند و به جای محاسبه مستلزم تعقل و درک هستند. **پاسخ پرسشهای فرد در پایان کتاب داده شده است.**

**مسئله‌ها** در زیر عنوانهای بخش به ترتیب سخت بودن طبقه بندی شده‌اند. **پاسخ مسئله‌های فرد در پایان کتاب آمده است.**

**علامتهایی جهت کمک بیشتر.** وقتی پاسخهایی به صورت چاپی یا الکترونیکی جهت مسئله‌های فرد به دست داده شد، مطالبی دربارهٔ این مسائل وجود دارد که با این علامتها محل پاسخها به دانشجو و مدرس نشان داده می‌شوند. راهنمای علامت در آغاز هر مجموعه‌ای از مسایل به صورت زیر داده شده است:

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)

SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها

WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

••• تعداد نقطه‌ها میزان دشواری مسئله را نشان می‌دهد.

اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در www.flying circusof physics.com قابل دسترس است.

## مسئله‌های اضافی

این مسئله‌ها به صورت معینی ترتیب نیافته‌اند به طوری که دانشجو باید مشخص کند کدام بخشها از فصل به آنها مربوط‌اند.

## ویژگیهای اضافی

**استدلال به جای عدد گذاری**[1] نخستین هدف این کتاب آموزش استدلال همراه با موقعیتهای چالش برانگیز به دانشجویان از طریق اصول بنیادی در یک راه حل است. هر چند که در برخی مسئله های این کتاب عدد گذاری لازم است ولی (هدف اصلی) در اغلب مسئله‌ها بر استدلال تأکید دارد.

**فصلها با حجمی منطقی.** برای جلوگیری از بیشتر شدن قطر کتاب که می تواند باعث توقف گلوله‌ای شود (و همین‌طور دانشجو) حجم فصلها را معقول در نظر گرفته‌ایم. مطالب به اندازه‌ای توضیح داده شده است که دانشجو حرکت را آغاز کند ولی نه به اندازه‌ای که دانشجو نتواند دیدگاهها را تحلیل و به هم پیوند دهد. سخن آخر اینکه دانشجو پس از مطالعهٔ این کتاب و گذراندن درس مربوط به آن نیاز به مهارت تحلیل و پیوند دیدگاهها را پیدا خواهد کرد.

**استفاده از ماشین حسابهای با قابلیت برداری.** وقتی محاسبه‌های برداری در مسئلهٔ نمونه‌ای به طور مستقیم در نمایشگر ماشین حساب با قابلیت برداری انجام شد، پاسخ مسئلهٔ نمونهٔ آن واقعیت را مشخص می‌کند ولی هنوز جای تحلیل به شیوهٔ سنتی مؤلفه‌ای وجود دارد. هرگاه محاسبه‌های برداری به طور مستقیم روی نمایشگر انجام نگیرند، علت آن از طریق راه حل معلوم می‌شود.

**نمودارها به عنوان برانگیزندهٔ اندیشه.** اینها مسئله‌هایی هستند که نمودار دارند و در مورد نتیجه‌ای سؤال می‌کنند که مستلزم اطلاعات خیلی بیشتری از مطالعهٔ مربوط به اطلاعات یک نقطه از نمودار است. در اینجا، راه حل مستلزم درکی از وضعیت فیزیکی در مسئله و اصولی است که در پس معادله‌های مربوطه وجود دارند. این مسئله‌ها خیلی شبیه به معماهای شرلوک هلمز[2] هستند چون یک دانشجو حتماً باید تصمیم بگیرد که کدام اطلاعات مهم هستند. به عنوان مثال، مسئلهٔ ۳۸ در فصل ۴، مسئلهٔ ۸ در فصل ۱ و مسئلهٔ ۲۱ در فصل ۹ را ببینید.

**مسئله‌های فیزیک کاربردی** بر اساس پژوهشهای منتشر شده آورده شده‌اند که در آغاز معماگونهٔ فصل، در یک مسئلهٔ نمونه یا در مسئلهٔ تکلیفی قرار داده شده‌اند. به عنوان مثال آغاز فصل ۹ ، مسئلهٔ نمونهٔ ۲ تا ۸ در فصل ۲ و مسئلهٔ تکلیفی ۳۰ در فصل ۹ از این نمونه‌ها هستند. در مورد مثالی از مسئله‌ها که داستان ادامه داری را تشکیل می‌دهد به مسئله‌های ۴، ۳۵ و ۵۳ در فصل ۶ نگاه کنید.

## مسئله‌های داستانی

مسئله ۵۷ در فصل ۵ که مربوط به تمام شدن سوخت پرواز شمارهٔ ۱۴۳ هواپیمایی کانادا در ارتفاع ۷/۹ km است و بی توجهی خدمه به یکای سوخت را نشان می‌دهد یکی از صدها داستان واقعی از این قبیل است (درس بزرگی برای دانشجویانی که یکاها را در نظر نمی‌گیرند.)

## مکملهای دانشجویان

**سایت دانشجویی.** این سایت عبارت است از http://www.wiley.com/college/halliday که برای مبانی فیزیک ویرایش هشتم طراحی شده و دانشجویان را در مطالعه فیزیک کمک می‌کند.

این سایت شامل پاسخهایی برای مسایل انتخابی پایان فصل (که در متن با علامت www مشخص شده است)؛ خودآزمایی کوتاه؛ شبیه‌سازی تمرینها، راهنمایی دربارهٔ استفاده بهتر از ماشین حساب برنامه پذیر؛ و یادگیری تعاملی است.

1. reasoning versus plug-and-chug

2. Sherlock Holmes

# سپاسگزاری

افـراد بزرگی در تهیه ایـن کتـاب سهیم بـوده‌اند. جـی.ریچارد کریستمن[1] از مدرسه عالی حفاظت ساحلی مکملهای بسیار خوبی بـه ایـن کتاب افزوده است. کارهای او در مورد این کتاب بسیار با ارزش است. سن-بن لیاو[2] از آموزشگاه علمی لارنس لیورمور، جیمز وایتنتـون[3] از دانشگاه ایالتی پلی تکنیک جنوبی و جری شی[4] از کالج پاسادنا کار عظیمی را برای حل مسئله‌های کتاب انجام داده‌اند. در انتشارات جـان وایلی، استارت جانسون پشتیبان کتاب بود ویراستاری که کل پروژه را مرور کرد. تام کولسا[5] کسی کـه براسـاس فنـون شـناخته شـده روز بسته‌های نرم‌افزاری را هماهنگی کرد، و جرالدین اسناتو[6] کسی که ابداع بسته‌های مکمل را مدیریت کرد. از الیزابت سواین[7] مدیر تولید که مسؤلیت همه بخشهای کتاب و راهنمایی ما را در فرایند پیچیدۀ تولید برعهده داشته است سپاسگذاریم. تشکر خود را از مـادی لـژور[8] بـه خاطر طراحی متن و جلد کتاب؛ لی گداشتاین[9] برای صفحه آرایی، هلن والدن[10] به خاطر ویرایش نسخه؛ آنا ملهورن[11] به خاطر مـدیریت شکلها؛ و لیلین برادی[12] به خاطر نمونه خوانی ابراز می‌کنیم. هیلاری نیومن[13] در جستجوی عکسهای فوق العاده جالب و الهام بخش بـوده است. انتشارات جان وایلی و پسران و جرل واکر، به خاطر تذکرات و ایده‌های این اشخاص در ویرایش هشتم سپاسگذار هستند: ریچـارد ودارد[14] از دانشگاه فلوریدا؛ دیوید ویک[15] از دانشگاه کلارسون؛ پاتریک راپ[16] از دانشگاه پورتوریکو در مایـاگوئز، نوراتـورنبر[17] از کـالج راریتان والی؛ لورنس. آی. گولد[18] هارت فورد؛ گریگ چیلدرز[19] از دانشگاه ایالتی کالیفرنیا در فولرتون؛ آشـا خـاکپور[20] از دانشـگاه ایـالتی کالیفرنیا در فولرتون؛ جو. اف. مک کولوف[21]، از کالج کالبریلو. در پایان با سپاس از بازنگری کنندگان بیرونی، که نظرات مهم خود را ارائه کرده‌اند، مراتب قدردانی خود را برای تک تک اعضای آن گروه ابراز می‌داریم.

1. J. Richard Christman
2. Sen-Ben Liao
3. James Whitenton
4. Jerry shi
5.Tom Kulesa
6. Geraldine Osnato
7. Elizabeth Swain
8. Maddy Lesure
9. Lee Goldstein
10. Helen Walden
11. Anna Melhorn
12. Lilian Brady
13. Hilary Newman
14. Richard Woodard
15. David Wikk
16. Patrick Rapp
17. NoraThornber
18. Laurence I. Gould
19. Garg Childers
20. Asha Khakpour
21. Joe F.MC Cullough

Maris A. Abolins
*Michigan State University*

Edward Adelson
*Ohio State University*

Barbara Andereck
*Ohio Wasleyan University*

Mark Arnett
*Kirkwood Community College*

Arun Bansil
*Northeastern University*

Albert Bartlett
*University of Colorade*

Michael E. Browne
*University of Idaho*

Timothy J. Burns
*Leeward Community College*

Joseph Buschi
*Manhattan College*

Philip A. Casabella
*Rensselaer Polytechnic Institute*

Randall Caton
*Christopher Newport College*

J. Richard Christman
*U.S. Coast Guard Academy*

Roger Clapp
*University of South Florida*

W. R. Conkie
*Queen's University*

Mike Crivello
*San Diego State University*

Peter Crooker
*University of Hawaii at Manoa*

William P. Crummett
*Montana College of Mineral Science and Technology*

Robert N. Davie, Jr
*St. Petersburg Junior College*

Cheryl K. Dellai
*Glendale Community College*

Eric R. Dietz
*California State University at Chico*

N. John DiNardo
*Drexel University*

Eugene Dunnam
*University of Florida*

Robert Endorf
*University of Cincinnati*

F. Paul Esposito
*University of Cincinnati*

Jerry Finkelstein
*San Jose State University*

Alexander Firestone
*Iowa State University*

Alexander Gardner
*Howard University*

Andrew L. Gardner
*Brigham Young University*

John Gieniec
*Central Missouri State University*

Robert H. Good
*California State University Hayward*

John B. Gruber
*San Jose State University*

Ann Hanks
*American River College*

Randy Harris
*University of California- Davis*

Samuel Harris
*Purdue University*

Harold B. Hart
*Western Illinois University*

Rebecca Hartzler
*Edmonds Community College*

Emily Haught
*Georgia Institute of Technology*

Laurent Hodges
*Iowa State University*

John Hubisz
*North Carolina State University*

Joey Huston
*Michigan State University*

Darrell Huwe
*Ohio University*

Shawn Jackson
*University of Tulsa*

Hector Jimenez
*University of Puerto Rico*

Sudhakar B. Joshi
*York University*

Claude Kacser
*University of Maryland*

Leonard M. Kahn
*University of Rhode Island*

Leonard Kleinman
*University of Texas at Austin*

Earl Kooler
*Stevens Institute of Technology*

Arthur Z. Kovacs
*Rochester Institute of Technology*

Kenneth Krane
*Oregon State University*

Sol Krasner
*University of Illinois at Chicago*

Yuichi Kubota
*Cornell University*

Priscilla Laws
*Dickinson College*

Edbertho Leal
*Polytechnic University of Puerto Rico*

Peter Loly
*University of Manitoba*

Dale Long
*Virginia Tech*

Andreas Mandelis
*University of Toronto*

Robert R. Marchini
*Memphis State University*

David Markowitz
*University of Connecticut*

Paul Marquard
*Caspar College*

Howard C. McAllister
*University of Hawaii at Manoa*

W. Scott McCullough
*Oklahoma State University*

James H. McGuire
*Tulane University*

David M. McKinstry
*Eastern Washington University*

Joe P. Meyer
*Georgia Institute of Technology*

Roy Middleton
*University of Pennsylvania*

Irvin A. Miller
*Drexel University*

Eugene Mosca
*United States Naval Academy*

James Napolitano
*Rensselaer Polytechnic Institute*

Michael O'Shea
*Kansas State University*

Patrick Papin
*San Diego State University*

George Parker
*North Carolina State University*

Robert Pelcovits
*Brown University*

Des Penny
*Southern Utah University*

Oren P. Quist
*South Dakota State University*

Joa Redish
*University of Maryland*

Jonathan Reichart
*SUNY- Buffalo*

Timothy M. Ritter
*University of North Carolina at Pembroke*

Gerardo A. Rodriguez
*Skidmore College*

John Rosendahl
*University of California at Irvine*

Michael Schatz
*Georgia Institute of Technology*

Manuel Schwartz
*University of Louisville*

Darrell Seeley
*Milwaukee School of Engineering*

Bruce Arne Sherwood
*Carnegie Mellon University*

John Spangler
*St. Norbert College*

Ross L. Spencer
*Brigham Young University*

Harold Stokes
*Brigham Young University*

Michael G. Strauss
*University of Oklahoma*

Jay D. Strieb
*Villanova University*

Dan Styer
*Oberlin College*

Marshall Thomsen
*Eastern michigan University*

Fred F. Tomblin
*New Jersey Institute of Technology*

David Toot
*Alfred University*

J. S. Turner
*University of Texas at Austin*

T. S. Venkataraman
*Drexel University*

Gianfranco Vidali
*Syracuse University*

Fred Wang
*Prairie View A & M*

Robert C. Webb
*Texas A & M University*

B. R. Weinberger
*Trinity College*

William M. Whelan
*Ryerson Polytechnic University*

George Williams
*University of Utah*

David Wolfe
*University of New Mexico*

William Zimmerman, Jr
*University of Minnesota*

# فهرست

## فصل ۷



## فصل ۸



## فصل ۹



## فصل ۱۰



## فصل ۱۱

## فصل ۱۲



## فصل ۱۳



## فصل ۱۴



## فصل ۱۵

**فصل ۱۶**



**پیوستها**

# ۱ اندازه‌گیری



هنگامی که زمین لرزه منطقه‌های پرجمعیتی را می‌لرزاند، می‌تواند ساختمانها و بناهای دیگر را تکان دهد یا موجب شود که آنها روی هم واژگون شوند. با وجود این، در بعضی نواحی زلزله می‌تواند موجب شود که ساختمانها در زمین فرو روند و عملاً در زمین غوطه‌ور شوند، گویا ساختمانها به جای بنا روی زمین سفت روی سیالی چگال بوده‌اند.

ساختمان چگونه در زمین فرو می‌رود؟

پاسخ در همین فصل.

## ۱-۱ فیزیک چیست؟

علم ومهندسی مبتنی بر اندازه‌گیریها و مقایسه‌هاست. بنابراین، دربارهٔ اینکه اجسام چگونه اندازه‌گیری یا مقایسه شوند به قواعدی نیاز داریم، و برای برقراری یکاهای این اندازه‌گیریها و مقایسه‌ها به آزمایشهایی نیازمندیم. هدف ما در فیزیک (و مهندسی) طراحی و راهبری این آزمایشهاست.

به عنوان مثال، فیزیکدانان تلاش می‌کنند ساعتهایی با درستی[1] زیاد را تکامل بخشند که هر زمان یا بازهٔ زمانی را بتوان با دقت[2] تعیین و مقایسه کرد. ممکن است موجب تعجب شود که آیا چنین درستی به واقع مورد نیاز است و ارزش تلاش را دارد یا نه. مثال با ارزشی اهمیت آن را روشن می‌کند. بدون ساعتهای بسیار درست، سیستم مکان یابی جهانی[3] که برای دریانوردی و هوانوردی جهانی حیاتی است بلا استفاده خواهد بود.

## ۱-۲ اندازه‌گیری اجسام

با یادگیری اینکه کمیتهای فیزیک چگونه اندازه‌گیری می‌شوند فیزیک را کشف کرده‌ایم. از میان این کمیت‌ها می‌توان طول، زمان، جرم، دما، فشار و جریان الکتریکی را نام برد.

هر کمیت فیزیکی را با یکاهای خود توسط مقایسه با یک **استاندارد** اندازه می‌گیریم. **یکا** نام یگانه‌ای است که به اندازه‌های کمیتی نسبت داده می‌شود، برای مثال متر (m) را برای کمیت طول به کار می‌بریم. استاندارد به طور دقیق با ۱/۰ یکای آن کمیت متناظر است. به گونه‌ای که خواهید دید، استاندارد طول که به طور دقیق متناظر با ۱/۰ m است عبارت است از فاصلهٔ پیموده شده توسط نور در خلأ در کسر معینی از یک ثانیه. یکا و استاندارد آن را به هر روشی مایل باشیم می‌توانیم تعریف کنیم. ولی آنچه اهمیت دارد این است که این تعریف به صورتی انجام گیرد که دانشمندان جهان توافق داشته باشند که تعریفهای ما هم حساس و هم عملی است.

وقتی استانداردی- مانند استاندارد طول- را در نظر گرفتیم، باید روشهایی به کار بریم که به کمک آنها بتوان هر طولی، اعم از شعاع یک اتم هیدروژن، فاصلهٔ میان چرخهای تختهٔ اسکیت، یا فاصله تا یک ستاره را برحسب این استاندارد بیان کرد. خط‌کشها، که وسایلی برای برآورد استاندارد طول هستند، روشی را برای اندازه‌گیری طول به دست می‌دهند. با وجود این بسیاری از مقایسه‌های ما باید غیر مستقیم باشد. به عنوان مثال شما نمی‌توانید از یک خط‌کش برای اندازه‌گیری شعاع یک اتم یا فاصله تا یک ستاره استفاده کنید.

کمیتهای فیزیکی آنقدر زیادند که سازماندهی آنها دشوار است. خوشبختانه همهٔ آنها مستقل نیستند؛ برای مثال سرعت عبارت است از نسبت طول به زمان. بنابراین- با یک توافق بین المللی- تعداد کمی از کمیتهای فیزیکی مانند طول و زمان را انتخاب می‌کنیم و استانداردهایی را به آنها نسبت می‌دهیم. سپس کمیتهای فیزیکی دیگری را برحسب این کمیتهای اصلی و استانداردهای آنها (به نام *استانداردهای اصلی*) تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال سرعت برحسب کمیتهای اصلی طول و زمان و استانداردهای اصلی آنها تعریف می‌شود.

استانداردهای اصلی باید هم دسترس‌پذیر و هم تغییرناپذیر باشند. اگر استاندارد طول را به صورت فاصلهٔ میان نوک بینی تا نوک انگشت اشاره در وضعیت کشیده بودن دست تعریف کنیم، البته یک استاندارد دسترس پذیر خواهیم داشت- ولی از شخصی به شخص متفاوت خواهد بود.

نیاز به دقت در علم و مهندسی ما را در درجهٔ اول به سمت تغییرناپذیر بودن سوق می‌دهد. بنابراین، تلاش زیادی برای نمونه‌سازی از استانداردهای اصلی انجام می‌گیرد تا برای آنانی که نیاز به آنها دارند قابل دسترس باشند.

## ۱-۳ دستگاه بین المللی یکاها

در سال ۱۹۷۱/۱۳۵۰ چهاردهمین مجمع عمومی اوزان و مقیاسها هفت کمیت را به عنوان کمیتهای اصلی انتخاب کرد که اساس دستگاه بین المللی یکاها را تشکیل می‌دهد، که علامت اختصاری SI برای نام فرانسوی آن و عموماً به عنوان ***دستگاه متریک*** شناخته شده است. جدول ۱-۱ یکاهای سه کمیت اصلی- طول، جرم و زمان- را که در فصلهای آیندهٔ این کتاب به کار خواهیم برد نشان می‌دهد. این یکاها طوری تعریف شده‌اند که در یک «مقیاس انسانی» باشند.

**جدول ۱-۱**

یکاهای سه کمیت اصلی SI

| کمیت | نام یکا | نماد یکا |
|---|---|---|
| طول | متر | m |
| زمان | ثانیه | s |
| جرم | کیلوگرم | kg |

بسیاری از یکاهای فرعی SI برحسب این یکاهای اصلی تعریف شده‌اند. به عنوان مثال یکای SI توان، به نام **وات (W)**، برحسب یکاهای اصلی جرم، طول و زمان تعریف شده است. بنابراین، همان‌طور که در فصل ۷ خواهیم دید

$$1\ \text{watt} = 1\,\text{W} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3 \qquad (1-1)$$

---

۱- درستی (accuracy) به توافق نزدیکی یک نتیجه یا مقدار به مقدار واقعی یا مرجع اطلاق می‌شود. (م)

۲- دقت (precise) به توافق نزدیکی نتیجه‌های تکرار شده به یکدیگر اطلاق می‌شود. (م)

3. Global Positioning system (GPS)

که ترکیب نمادهای یکای آخر به صورت کیلوگرم- متر مربع بر مکعب ثانیه خوانده می‌شود.

برای بیان کمیتهای خیلی بزرگ و خیلی کوچک، که اغلب در فیزیک وجود دارند، از *نمادگذاری علمی* استفاده می‌کنیم که از توانهای ۱۰ استفاده می‌کند. در این نماد گذاری داریم

$$۳۵۶۰۰۰۰۰۰۰\,\text{m} = ۳/۵۶ \times ۱۰^{۹}\,\text{m} \qquad (۱-۲)$$

و

$$۰/۰۰۰۰۰۰۴۹۲\,\text{s} = ۴/۹۲ \times ۱۰^{-۷}\,\text{s} \qquad (۱-۳)$$

نماد علمی در رایانه گاه خلاصه‌تر هم می‌شود، مثلاً به صورت ۳/۵۶ E۹ و ۴/۹۲ E-۷ که E به جای «توان ده» است. حتی خلاصه‌تر از این هم در ماشین حسابها وجود دارد که در آن به جای E جای خالی می‌گذارند.

برای راحتی بیشتر وقتی با مقدارهای بسیار بزرگ یا بسیار کوچک سروکار داریم از پیشوندهای فهرست شده در جدول ۱-۲ استفاده می‌کنیم. همان‌طور که می‌بینید هر پیشوندی توان معینی از ۱۰ را نمایش می‌دهد که به صورت ضریب به کار رفته است. با اضافه کردن یک پیشوند به یکایی از SI آن یکا در ضریب مربوط ضرب می‌شود. بنابراین، می‌توان توان الکتریکی معینی را به صورت زیر

$$۱/۲۷ \times ۱۰^{۹}\ \text{وات} = ۱/۲۷\ \text{گیگاوات} = ۱/۲۷\,\text{GW} \qquad (۱-۴)$$

یا بازهٔ زمانی معینی را به صورت زیر

$$۲/۳۵ \times ۱۰^{-۹}\ \text{ثانیه} = ۲/۳۵\ \text{نانوثانیه} = ۲/۳۵\,\text{ns} \qquad (۱-۵)$$

بیان کرد. برخی از پیشوندها مانند میلی متر، سانتی متر، کیلوگرم و مگا بایت احتمالاً برای شما آشنا هستند.

**جدول ۱-۲**

پیشوندهای یکاهای SI

| ضریب | پیشوند[1] | نماد |
|---|---|---|
| $۱۰^{۲۴}$ | یوتا- | Y |
| $۱۰^{۲۱}$ | زتا- | Z |
| $۱۰^{۱۸}$ | اکزا- | E |
| $۱۰^{۱۵}$ | پِتا- | P |
| $۱۰^{۱۲}$ | ترا- | T |
| $۱۰^{۹}$ | **گیگا-** | **G** |
| $۱۰^{۶}$ | **مگا-** | **M** |
| $۱۰^{۳}$ | **کیلو-** | **k** |
| $۱۰^{۲}$ | هکتو- | h |
| $۱۰^{۱}$ | دِکا- | da |
| $۱۰^{-۱}$ | دسی- | d |
| $۱۰^{-۲}$ | **سانتی-** | **c** |
| $۱۰^{-۳}$ | **میلی-** | **m** |
| $۱۰^{-۶}$ | **میکرو-** | **$\mu$** |
| $۱۰^{-۹}$ | **نانو-** | **n** |
| $۱۰^{-۱۲}$ | **پیکو-** | **p** |
| $۱۰^{-۱۵}$ | فمتو- | f |
| $۱۰^{-۱۸}$ | اتو- | a |
| $۱۰^{-۲۱}$ | زپتو- | z |
| $۱۰^{-۲۴}$ | یوکتو- | y |

۱- پیشوندهایی که بیشتر به کار می‌روند با حروف سیاه نشان داده شده‌اند.

## ۱-۴ تبدیل یکاها

اغلب نیاز داریم یکایی را یک کمیت فیزیکی با آن بیان شده است تغییر دهیم. این کار را با تبدیل زنجیره‌ای انجام می‌دهیم. در این روش باید نتیجهٔ اصلی کمیت را در **ضریب تبدیل** (نسبتی از یکاها که برابر با واحد است) ضرب کنیم. برای مثال چون ۱min همان بازهٔ زمانی ۶۰s است، خواهیم داشت

$$\frac{۱\,\text{min}}{۶۰\,\text{s}} = ۱ \qquad \text{و} \qquad \frac{۶۰\,\text{s}}{۱\,\text{min}} = ۱$$

بنابراین، نسبتهای $(۱\,\text{min})/(۶۰\,\text{s})$ و $(۶۰\,\text{s})/(۱\,\text{min})$ می‌توانند به عنوان ضریبهای تبدیل به کار برده شوند. این درستِ نیست که نوشته شود $۱ = \frac{۱}{۶۰}$ یا $۱ = ۶۰$؛ بلکه عدد و یکای آن باید با هم نوشته شود.

چون ضرب هر کمیت در یک آن را تغییر نمی‌دهد، ضریبهای تبدیل را هرگاه مفید باشند اعمال می‌کنیم. در تبدیل زنجیره‌ای از ضریبها برای حذف یکاهای غیر ضروری استفاده می‌کنیم. برای مثال برای تبدیل ۲ min به ثانیه داریم

$$۲\,\text{min} = (۲\,\text{min})(۱) = (۲\,\cancel{\text{min}})\left(\frac{۶۰\,\text{s}}{۱\,\cancel{\text{min}}}\right) = ۱۲۰\,\text{s} \qquad (۱-۶)$$

اگر ضریب تبدیلی را اعمال کنید به طوری که یکاهای غیر ضروری حذف نشوند، ضریب را وارون و دوباره تلاش کنید. در موقع تبدیل کردن، یکاها از همان قاعده‌های جبری مربوط به متغیرها و عددها پیروی می‌کنند.

پیوست ت ضریبهای تبدیل بین SI و دستگاههای دیگر را نشان می‌دهد که هنوز هم در امریکا به کار می‌روند. در این جدولها به جای ضریبهای تبدیل به شکل نسبت به صورت «$۱\,\text{min} = ۶۰\,\text{s}$» استفاده شده است. مسئلهٔ نمونهٔ زیر نشان می‌دهد که چنین نسبت‌هایی چگونه برقرار می‌شوند.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱-۱**

براساس افسانه‌ای، هنگامی که فیدیپیدس[1] برای رساندن خبر پیروزی یونانیان بر ایرانیان در سال ۴۹۰ قبل از میلاد از ماراتون تا آتن دوید، احتمالاً او با سرعت تقریباً ۲۳ راید بر ساعت

1. Pheidippides

(rides/h) می‌دوید. راید یک یکای قدیمی یونانی مانند استادیوم[1] و پلترون[2] برای طول است: یک راید برابر ۱۴ استادیوم و یک استادیوم برابر ۶ پلترون بود که اکنون برحسب یکای جدید، یک پلترون برابر $۳۰/۸\,m$ است. سرعت فیدیپیدس برحسب کیلومتر بر ثانیه (km/s) چقدر بوده است؟

**نکتهٔ کلیدی** در تبدیل زنجیره‌ای نوشتن ضریبهای تبدیل به صورت نسبت است که بدان وسیله یکاهای غیر ضروری حذف شوند.

*محاسبه:*

$$۲۳\,rides/h = \left(۲۳\frac{rides}{h}\right)\left(\frac{۴\,stadia}{۱\,ride}\right)\left(\frac{۶\,plethra}{۱\,stadium}\right)\times\left(\frac{۳۰/۸\,m}{۱\,plethron}\right)\left(\frac{۱\,km}{۱۰۰۰\,m}\right)\left(\frac{۱\,h}{۳۶۰۰\,s}\right)$$

$$= ۴/۷۲۲۷\times۱۰^{-۳}\,km/s \approx ۴/۷\times۱۰^{-۳}\,km/s$$

(پاسخ)

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱-۲**

کران[3] یک یکای انگلیسی حجم برای ماهیهای تازه صید شدهٔ ساردین است: یک کران برابر با $۱۷۰/۴۷۴$ لیتر ماهی، تقریباً ۷۵۰ ماهی ساردین است. فرض کنید برای انجام امور گمرکی در عربستان سعودی حجم یک محمولهٔ ۱۲۵۵ کران باید برحسب کوویدو[4] مکعب انجام شود که کوویدو یکای عربی طول و برابر با $۴۸/۲۶\,cm$ است. اظهارنامهٔ لازم چیست؟

**نکتهٔ کلیدی** از پیوست ت می‌بینیم که $۱L$ معادل با $۱۰۰۰\,cm^۳$ است. برای تبدیل سانتی متر مکعب به کوویدو مکعب، باید نسبت تبدیل بین سانتی متر و کوویدو را به صورت مکعب در بیاوریم.

*محاسبه:* تبدیل زنجیره‌ای زیر را می‌نویسیم:

$$۱۲۵۵\,\text{کران} = (۱۲۵۵\,\text{کران})\left(\frac{۱۷۰/۴۷۴\,L}{۱\,\text{کران}}\right)\left(\frac{۱۰۰۰\,cm^۳}{۱L}\right)\left(\frac{۱\,\text{کوویدو}}{۴۸/۲۶\,cm}\right)^۳$$

$$= ۱/۹۰۳\times۱۰^۳\ \text{کوویدو مکعب}$$ (پاسخ)

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱: رقمهای با معنی و رقمهای اعشاری*

اگر پاسخ مسئلهٔ نمونهٔ ۱-۱ را بدون گرد کردن عدد به طور خودکار توسط ماشین حساب به دست آورده باشید، این عدد به صورت $۴/۷۲۲۶۶۶۶۶۶۷\times۱۰^{-۳}$ در نمایشگر آن ظاهر می‌شود. دقتی که این عدد نشان می‌دهد بی معنی است. این عدد را به صورت $۴/۷\times۱۰^{-۳}\,km/s$ گرد کردیم که دقت بیشتری نسبت به داده‌های مسئله نداشته باشد. سرعت ۲۳ راید بر ساعت دو رقم دارد که **رقمهای با معنی** نام دارند. بنابراین، پاسخ را تا دو رقم با معنی گرد کرده‌ایم. در این کتاب نتیجهٔ نهایی محاسبه‌ها را اغلب تا کمترین تعداد رقم‌های با معنی موجود در داده‌ها گرد می‌کنیم. (با وجود این گاهی رقمهای با معنی بیشتری در نظر گرفته می‌شود.) هرگاه موقع گرد کردن رقمی که قرار است از آن به بعد حذف شود ۵ یا بیشتر از آن باشد، آخرین رقم باقیمانده با یک واحد بیشتر گرد می‌شود؛ در غیر این صورت به صورتی که هست می‌ماند. برای مثال ۱۱/۳۵۱۶ تا سه رقم با معنی به صورت ۱۱/۴ و عدد ۱۱/۳۲۷۹ تا سه رقم با معنی به صورت ۱۱/۳ گرد می‌شود. (پاسخهای مسئله‌های نمونه در این کتاب هرگاه گرد شده باشند به جای نماد $\approx$ با نماد = نمایش داده می‌شوند.

هرگاه در مسئله‌ای عدد به صورت ۳/۱۵ یا $۳/۱۵\times۱۰^۳$ باشد، تعداد رقمهای با معنی آن روشن است، ولی در مورد عدد ۳۰۰۰ چطور؟ آیا این فقط یک رقم با معنی $(۳\times۱۰^۳)$ دارد یا چهار رقم با معنی $(۳/۰۰۰\times۱۰^۳)$؟ در این کتاب فرض می‌کنیم که همهٔ صفرهای عددی مانند ۳۰۰۰ با معنی هستند، ولی بهتر است در جای دیگر این فرض را به کار نبرید.

*رقمهای با معنی* را با *رقمهای اعشاری* اشتباه نکنید. طولهای $۳۵/۶\,mm$، $۳/۵۶\,m$ و $۰/۰۰۳۵۶\,m$ را در نظر بگیرید. همهٔ آنها دارای سه رقم با معنی هستند ولی به ترتیب یک، دو و پنج رقم اعشاری دارند.

## ۱-۵ طول

در سال ۱۷۹۲/۱۱۷۱ در جمهوری فرانسه که تازه تولد یافته بود دستگاه جدیدی از اوزان و مقیاسها بنا نهاده شد. سنگ بنای آن متر بود که به صورت یک ده میلیونیم فاصلهٔ از قطب شمال تا استوا تعریف شده بود. پس از آن به دلایل عملی این استاندارد زمینی کنار گذاشته شد و متر به صورت فاصلهٔ بین دو خراش ظریف در دو انتهای یک میلهٔ پلاتین ایریدیوم، به نام **میلهٔ متر استاندارد** تعریف شد که در سازمان بین‌المللی اوزان و مقیاسها در نزدیکی پاریس نگهداری می‌شود. برای آزمایشگاههای استاندارد کننده در سراسر جهان نسخهٔ مشابهی از این میله فرستاده می‌شد. این **استانداردهای ثانویه** برای ایجاد **استانداردهای دیگری که دسترس پذیر باشند** به کار گرفته می‌شدند، به طوری که در نهایت هر وسیلهٔ اندازه‌گیری اعتبار خود را از طریق زنجیره‌ای از **مقایسه‌های پیچیده از میلهٔ** استاندارد متر کسب می‌کرد.

1. stadium
2. Plethron
3. cran
4. covido

تا اینکه استانداردی خیلی دقیقتر از فاصلهٔ بین دو خراش ظریف روی یک میلهٔ فلزی مورد نیاز شد. در سال ۱۹۶۰/۱۳۳۹ استاندارد جدیدی برای متر مبتنی بر طول موج نور پذیرفته شد. این استاندارد برای متر به صورت ۱۶۵۰۷۶۳/۷۳ برابر طول موج نور نارنجی گسیل شده از اتمهای کریپتون ۸۶ (ایزوتوپ خاص یا نوعی از کریپتون) در یک لامپ تخلیهٔ گازی دوباره تعریف شد. این تعداد نه چندان دلچسب طول موج طوری انتخاب شده بود که استاندارد جدید به استاندارد متر قبلی نزدیک باشد.

تا سال ۱۹۸۳/۱۳۶۲ نیاز برای دقت بیشتر به نقطه‌ای رسید که حتی استاندارد اتم کریپتون ۸۶ قادر به جوابگویی نبود، و در این سال گام مهمی برداشته شد. متر به صورت فاصلهٔ پیموده به وسیلهٔ نور در یک بازهٔ زمانی مشخص دوباره تعریف شد. با بیان هفدهمین مجمع عمومی اوزان و مقیاسها:

> ☞ متر عبارت است از طول راه پیموده شده به وسیلهٔ نور در خلأ در کسر ۱/۲۹۹۷۹۲۴۵۸ ثانیه.

این بازهٔ زمانی طوری انتخاب شده بود که سرعت نور c، به طور دقیق عبارت است از

$$c = ۲۹۹۷۹۲۴۵۸ \text{ m/s}$$

اندازه‌گیریهای سرعت نور بسیار دقیق است به گونه‌ای که این احساس را به وجود آورده است که سرعت نور به عنوان یک کمیت تعریف شده پذیرفته و برای تعریف دوبارهٔ متر به کار برده شود.

جدول ۱-۳ گسترهٔ وسیعی از طولها، از طولهای کیهانی (خط بالا) تا طولهای بسیار کوچک را نشان می‌دهد.

**جدول ۱-۳**

چند طول تقریبی

| اندازه‌گیری | طول برحسب متر |
|---|---|
| فاصله تا اولین کهکشان تشکیل شده | $۲\times۱۰^{۲۶}$ |
| فاصله تا کهکشان امرأة المسلسله | $۲\times۱۰^{۲۲}$ |
| فاصله تا نزدیکترین ستاره (پروکسیما قنطورس) | $۴\times۱۰^{۱۶}$ |
| فاصله تا پلوتو | $۶\times۱۰^{۱۲}$ |
| شعاع زمین | $۶\times۱۰^{۶}$ |
| بلندی قلهٔ اورست | $۹\times۱۰^{۳}$ |
| ضخامت این برگ کاغذ | $۱\times۱۰^{-۴}$ |
| طول یک ویروس نوعی | $۱\times۱۰^{-۸}$ |
| شعاع اتم هیدروژن | $۵\times۱۰^{-۱۱}$ |
| شعاع پروتون | $۱\times۱۰^{-۱۵}$ |

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۲: مرتبهٔ بزرگی*

*مرتبهٔ بزرگی* یک عدد عبارت است از توان ده هرگاه آن عدد به صورت نماد علمی بیان شود. مثلاً اگر $A = ۲/۳\times۱۰^{۴}$ و $B = ۷/۸\times۱۰^{۴}$ باشد آنگاه مرتبه‌های بزرگی $A$ و $B$ برابر ۴ است.

غالباً در حرفه‌های مهندسی و علمی نتیجهٔ یک محاسبه را به *نزدیکترین مرتبهٔ بزرگی* تخمین می‌زنند. در مثال ما نزدیکترین مرتبهٔ بزرگی برای $A$، ۴ و برای $B$، ۵ است. چنین تخمینی وقتی متداول است که جزئیات یا داده‌های دقیق مورد نیاز در محاسبه معلوم نباشد یا به آسانی به دست نیاید. مسئلهٔ نمونهٔ ۱-۳ مثالی در این باره را نشان می‌دهد.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱-۳ مهارت خود را تقویت کنید**

شعاع بزرگترین گلولهٔ نخی جهان تقریباً 2m است. نزدیکترین مرتبهٔ بزرگی کل طول نخ $L$ این گلوله چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** البته می‌توان گلوله را باز کرد و کل طول $L$ را آن را اندازه گرفت ولی این کار زیادی را می‌طلبد و ممکن است سازندهٔ گلوله را ناخشنود سازد. در عوض چون می‌خواهیم فقط با نزدیکترین مرتبهٔ بزرگی مقدار آن را به دست آوریم، می‌توان کمیت مورد نظر را به طور تخمین مشخص کرد.

*محاسبه‌ها:* گلوله را کره‌ای به شعاع $R = ۲\text{m}$ در نظر می‌گیریم. نخ تنگ هم قرار نگرفته است.(شکافهای شمارش ناپذیری بین بخشهای مجاور نخ وجود دارد.) با در نظر گرفتن این فضای خالی، مقطع نخ را مربعی به ضلع $d = ۴\text{mm}$ فرض می‌کنیم. بنابراین، مساحت مقطع $d^۲$ و طول آن $L$ و در نتیجه حجم کل اشغال شده توسط نخ عبارت است از

$$V = (\text{مساحت مقطع}) \times (\text{طول}) = d^۲L$$

این تقریباً برابر با حجم گلوله و برابر است با $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$، که با فرض $\pi = ۳$ مقدار آن $۴R^۳$ می‌شود. پس خواهیم داشت

$$d^۲L = ۴R^۳$$

یا

$$L = \frac{۴R^۳}{d^۲} = \frac{۴(۲\text{m})^۳}{(۴\times۱۰^{-۳}\text{ m})^۲}$$
$$= ۲\times۱۰^{۶}\text{ m} \approx ۱۰^{۶}\text{ m} = ۱۰^{۳}\text{ km} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(توجه کنید که چنین محاسبه‌ای به ماشین حساب نیازی ندارد.) با نزدیکترین مرتبهٔ بزرگی، گلوله از ۱۰۰۰km نخ تشکیل شده است!

## ۱-۶ زمان

زمان دو جنبه دارد. در مسائل مدنی و برخی مقاصد علمی، هر کسی می‌خواهد زمان روز را بداند تا اینکه رویدادها را مرتب کند. در بسیاری از کارهای علمی، دانستن گذشت یک رویداد مهم است. بنابراین، هر زمان استانداردی باید بتواند به دو پرسش پاسخ دهد: «*چه وقت* رخ داده است»؟ و «*زمان تداوم* آن چقدر است»؟ در جدول ۱-۴ چند بازهٔ زمانی داده شده است.

**جدول ۱-۴**

چند فاصلهٔ زمانی تقریبی

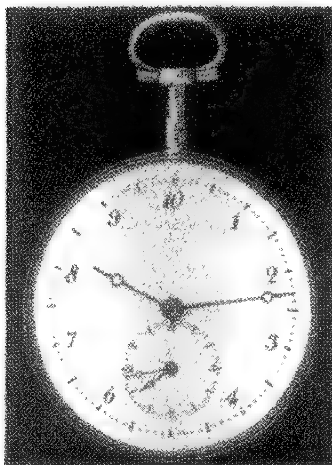
| اندازه‌گیری | فاصلهٔ زمانی برحسب ثانیه |
|---|---|
| عمر پروتون (پیش‌بینی شده) | $1\times10^{40}$ |
| عمر جهان | $5\times10^{17}$ |
| عمر هرم خئوپوس | $1\times10^{11}$ |
| عمر متوسط انسان | $2\times10^{9}$ |
| مدت یک روز | $9\times10^{4}$ |
| زمان بین دو ضربان قلب | $8\times10^{-1}$ |
| عمر میون | $2\times10^{-6}$ |
| کوتاه‌ترین تپ نوری در آزمایشگاه | $1\times10^{-16}$ |
| عمر ناپایدارترین ذره | $1\times10^{-23}$ |
| زمان پلانک[1] | $1\times10^{-43}$ |

۱- این نزدیکترین زمان پس از مهبانگ است که در آن قانونهای فیزیک به صورتی که آنها را می‌شناسیم قابل اعمال هستند.

هر پدیده‌ای که تکرار شود می‌تواند یک استاندارد احتمالی زمان باشد. چرخش زمین که طول روز را تعیین می‌کند، قرنها به این طریق مورد استفاده قرار گرفته است. شکل ۱-۱ مثالی از ساعت جدیدی را نشان می‌دهد که بر پایهٔ چرخش زمین تنظیم شده است. ساعت کوارتز که در آن یک حلقهٔ کوارتز به طور پیوسته نوسان می‌کند، می‌تواند توسط مشاهده‌های اخترشناسی با چرخش زمین کالیبره شود و برای اندازه‌گیری بازه‌های زمانی در آزمایشگاه به کار رود. البته این کالیبراسیون یاد شده را نمی‌توان با درستی خواسته شده در فناوری علمی و مهندسی نوین انجام داد.

برای برآورده ساختن نیاز به یک استاندارد زمانی بهتر، ساعتهای اتمی توسعه یافتند. یک ساعت اتمی در مؤسسه ملی استانداردها و فناوری (NIST)[1] در بولدر کلرادو، استانداردی برای زمان هماهنگ شده جهانی (UTC)[2] در امریکاست. سیگنالهای زمانی آن از طریق موج کوتاه رادیویی (ایستگاههای WWV و WWVH) و توسط تلفن به شمارهٔ (۷۱۱۱-۴۹۹-۳۰۳) قابل دسترس است. سیگنالهای زمانی (و اطلاعات مربوط) از رصدخانهٔ دریایی

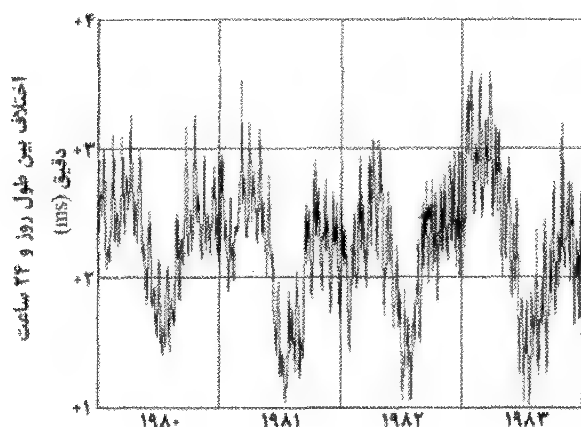
1. National Institute of Standards and Technology (NIST)
2. Coordinated Universal Time



**شکل ۱-۱** هنگامی که دستگاه متریک در سال ۱۷۹۲/۱۱۷۱ پیشنهاد شد، ساعت چنان دوباره تعریف شد تا روز شامل ۱۰ ساعت باشد. از این نظر استقبال نشد. سازندهٔ این ساعت ۱۰ ساعتی خردمندانه عقربهٔ کوچکی درست کرد که زمان ۱۲ ساعت معمولی را هم نشان می‌داد. آیا دو عقربه یک زمان را نشان می‌دهند؟

امریکا[3] در پایگاه http://tycho.usno.navy.mil/time.html نیز قابل دسترس است. (برای تنظیم بسیار درست یک ساعت در مکانی که قرار دارید، باید بازهٔ زمانی لازم برای رسیدن این سیگنالها به آن محل را هم در نظر بگیرید).

شکل ۱-۲ تغییرات طول روز را در یک دورهٔ زمانی ۴ ساله روی زمین نشان می‌دهد، که با مقایسه با ساعت سزیمی (اتمی) تعیین شده است. چون تغییرات نشان داده شده در شکل ۱-۲ فصلی و تکرارشونده هستند به نظر می‌رسد که اختلاف اندازه‌گیری شده توسط ساعتهای زمینی و اتمی به چرخش زمین مربوط باشد. این تغییر ناشی از اثرات جزر و مدی ایجاد شده به وسیلهٔ ماه و بادهای جوی بزرگ مقیاس است.




**شکل ۱-۲** تغییرات در طول روز در یک دورهٔ ۴ ساله. توجه کنید که کل مقیاس عمودی فقط ($= 0.003s$) $3\ ms$ است.

سیزدهمین مجمع عمومی اوزان و مقیاسها در سال ۱۹۶۷/۱۳۴۶ استاندارد ثانیه را بر پایهٔ ساعت سزیمی پذیرفت:

3. United States Naval Observatory

> یک ثانیه عبارت است از زمانی که طول می‌کشد تا نور گسیل شده (با طول موج خاص، از اتم سزیم) ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ نوسان انجام دهد.

درواقع ساعتهای اتمی به اندازه‌ای انطباق دارند که دو ساعت اتمی باید ۶۰۰۰ سال کار کنند تا 1s با هم اختلاف پیدا کنند. حتی چنین درستی در مقایسه با ساعتهایی که به طور دائم تکامل می‌یابند رنگ می‌بازند؛ دقت آنها می‌تواند به اندازهٔ ۱ در $۱۰^{۱۸}$ یعنی 1s در $۱\times۱۰^{۱۸}$ ثانیه (تقریباً $۳\times۱۰^{۱۰}$ سال) باشد.

## ۱-۷ جرم

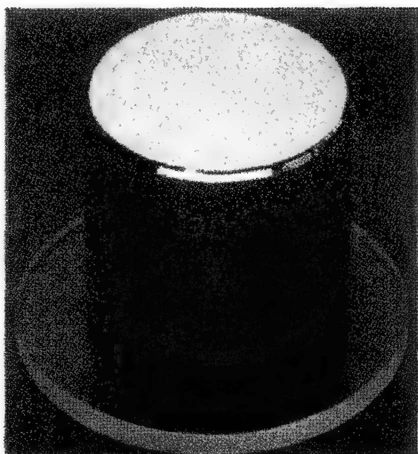
### *استاندارد کیلوگرم*

استاندارد SI جرم یک استوانهٔ پلاتین- ایریدیوم (شکل ۱-۳) است که در سازمان بین المللی اوزان و مقیاسها در نزدیکی پاریس نگهداری می‌شود و بنا به توافق بین المللی به آن جرم 1kg اطلاق شده است. نمونه‌های درست[1] برای آزمایشگاههای استاندارد کنندهٔ سایر کشورها فرستاده می‌شود و جرم سایر اجسام می‌تواند با توزین آنها با یک نمونه تعیین شود. در جدول ۱-۵ تعدادی جرم بر حسب کیلوگرم که نسبت به یکدیگر از مرتبهٔ بزرگی حدود ۸۳ هستند آمده است.

**جدول ۱-۵**

| جسم | جرم برحسب کیلوگرم |
|---|---|
| جهان شناخته شده | $۱\times۱۰^{۵۳}$ |
| کهکشان ما | $۲\times۱۰^{۴۱}$ |
| خورشید | $۲\times۱۰^{۳۰}$ |
| ماه | $۷\times۱۰^{۲۲}$ |
| سیارک اِروس | $۵\times۱۰^{۱۵}$ |
| کوه کوچک | $۱\times۱۰^{۱۲}$ |
| اقیانوس پیما | $۷\times۱۰^{۷}$ |
| فیل | $۵\times۱۰^{۳}$ |
| دانهٔ انگور | $۳\times۱۰^{-۳}$ |
| ذرهٔ غبار | $۷\times۱۰^{-۱۰}$ |
| مولکول پنی سیلین | $۵\times۱۰^{-۱۷}$ |
| اتم اورانیوم | $۴\times۱۰^{-۲۵}$ |
| پروتون | $۲\times۱۰^{-۲۷}$ |
| الکترون | $۹\times۱۰^{-۳۱}$ |

۱. نمونهٔ درست یعنی نسخه‌ای که مقدار آن به مقدار مرجع خیلی نزدیک است، م



شکل ۱-۳ استاندارد 1 kg بین‌المللی جرم، یک استوانه پلاتین- ایریدیوم که ارتفاع و قطر آن ۳/۹ cm است. (با اجازهٔ دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاسها، فرانسه)

نمونهٔ امریکایی کیلوگرم استاندارد در گاوصندوقی در NIST نگهداری می‌شود. به منظور وارسی نمونه‌هایی که در جاهای دیگر به کار می‌روند این نمونه بیش از یک بار در سال جابه‌جا نمی‌شود. از سال ۱۸۸۹/۱۲۶۸ برای مقایسه با استاندارد اولیه فقط دو بار به فرانسه برده شده است.

### *دومین استاندارد جرم*

جرم اتمها را به جای مقایسه با کیلوگرم استاندارد می‌توان به طور خیلی دقیقتر با یکدیگر مقایسه کرد. به همین دلیل استاندارد دیگری برای جرم وجود دارد. مبنای این استاندارد بنا به توافق جهانی اتم کربن ۱۲ است که جرم ۱۲ **یکای اتمی جرم** (u) به آن نسبت داده شده است. رابطهٔ بین این دو یکا عبارت است از

$$۱\text{u} = ۱/۶۶۰۵۳۸۸۶\times۱۰^{-۲۷}\,\text{kg} \qquad (۱-۷)$$

عدم قطعیت در دو رقم آخر اعشاری آن ۱۰± است[2]. دانشمندان بادقت معقول به طور تجربی می‌توانند جرم اتمهای دیگر را نسبت به جرم اتم کربن ۱۲ تعیین کنند. آنچه که امروز کم داریم عبارت است از یک ابزار قابل اعتماد که دقت را به یکاهای متداولتر جرم مانند کیلوگرم تعمیم دهد.

### *چگالی*

همان‌طور که در فصل ۱۴ بیشتر بحث خواهیم کرد، **چگالی** $\rho$ ماده‌ای عبارت است از جرم بر یکای حجم:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (۱-۸)$$

چگالیها نوعاً برحسب کیلوگرم بر متر مکعب یا گرم بر سانتی‌متر مکعب نوشته می‌شوند. چگالی آب (۱/۰۰ گرم بر

۲- یعنی $۱\text{u} = (۱/۶۶۰۵۴۰۲ \pm ۰/۰۰۰۰۰۰۱۰)\times۱۰^{-۲۷}\,\text{kg}$

سانتی‌متر مکعب) اغلب به عنوان یک مقایسه به کار برده می‌شود. چگالی برف تازه تقریباً ۱۰ درصد این چگالی است؛ چگالی پلاتین تقریباً ۲۱ برابر چگالی آب است.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱-۴**

اگر زمین لرزه موجب نرم شدن زمین شود که در آن دانه‌های خاک با لغزیدن روی یکدیگر متحمل اصطکاک اندکی می‌شوند، اجسام سنگین در ضمن زمین لرزه در زمین فرو می‌روند. در این صورت زمین به صورت ماسه روان در می‌آید. احتمال نرم شدن زمین در زمین ماسه‌ای را می‌توان برحسب نسبت فضای خالی $e$ نمونه‌ای از زمین پیش‌بینی کرد:

$$e = \frac{V_{\text{فضای خالی}}}{V_{\text{دانه‌ها}}} \qquad (۱-۹)$$

در اینجا $V_{\text{دانه‌ها}}$ کل حجم دانه‌های ماسه در نمونه و $V_{\text{فضای خالی}}$ حجم کل بین دانه‌ها (در فضاهای خالی) است. اگر $e$ از مقدار بحرانی ۰/۸۰ بیشتر شود، نرم شدن در ضمن زمین لرزه رخ می‌دهد. چگالی ماسه $\rho_{\text{ماسه}}$ مربوطه چقدر است؟ چگالی دی‌اکسید سیلیکون جامد (عنصر اصلی ماسه) $\rho_{SiO_2} = ۲/۶۰۰ \times ۱۰^۳\ \text{kg/m}^۳$ است.

**نکتهٔ کلیدی** چگالی ماسه $\rho_{\text{ماسه}}$ در نمونه‌ای عبارت است از جرم بر یکای حجم- یعنی نسبت جرم کل دانه‌های ماسه $m_{\text{ماسه}}$ بر حجم کل $V_{\text{کل}}$ نمونه:

$$\rho_{\text{ماسه}} = \frac{m_{\text{ماسه}}}{V_{\text{کل}}} \qquad (۱-۱۰)$$

**محاسبه‌ها:** حجم کل $V_{\text{کل}}$ نمونه عبارت است از

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{دانه‌ها}} + V_{\text{فضای خالی}}$$

با قرار دادن به جای $V_{\text{فضای خالی}}$ از معادلهٔ ۱-۹ و حل آن برحسب $V_{\text{دانه‌ها}}$ خواهیم داشت

$$V_{\text{دانه‌ها}} = \frac{V_{\text{کل}}}{1+e} \qquad (۱-۱۱)$$

از معادلهٔ ۱-۸، جرم کل دانه‌های ماسه از $m_{\text{ماسه}}$ عبارت است از ضرب چگالی دی‌اکسید سیلیکون در حجم کل دانه‌های ماسه:

$$m_{\text{ماسه}} = \rho_{SiO_2} V_{\text{دانه‌ها}} \qquad (۱-۱۲)$$

با قرار دادن این عبارت در معادلهٔ ۱-۱۰ و سپس جاگذاری $V_{\text{دانه‌ها}}$ از معادلهٔ ۱-۱۱ خواهیم داشت

$$\rho_{\text{ماسه}} = \frac{\rho_{SiO_2}}{V_{\text{کل}}}\frac{V_{\text{کل}}}{1+e} = \frac{\rho_{SiO_2}}{1+e} \qquad (۱-۱۳)$$

با قرار دادن $\rho_{SiO_2} = ۲/۶۰۰ \times ۱۰^۳\ \text{kg/m}^۳$ و مقدار بحرانی $e = ۰/۸۰$، در می‌یابیم که نرم شدن زمین وقتی رخ می‌دهد که چگالی ماسه بیشتر از مقدار زیر شود:

$$\rho_{\text{ماسه}} = \frac{۲/۶۰۰ \times ۱۰^۳\ \text{kg/m}^۳}{۱/۸۰} = ۱/۸ \times ۱۰^۳\ \text{kg/m}^۳$$

(پاسخ)

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**اندازه گیری در فیزیک** فیزیک بر اندازه گیری کمیتهای فیزیکی مبتنی است. کمیتهای فیزیکی معینی به عنوان **کمیتهای اصلی** انتخاب شده‌اند (مانند طول، زمان و جرم)؛ هر یک از اینها برحسب یک **استاندارد** و **یکای** اندازه‌گیری (مانند متر، ثانیه و کیلوگرم) تعریف شده‌اند. کمیتهای فیزیکی دیگر برحسب کمیتهای اصلی و استانداردها و یکاهای آنها تعریف می‌شوند.

**یکاهای SI** دستگاه یکای تأکید شده در این کتاب دستگاه بین المللی یکاها (SI) است. سه کمیت فیزیکی نشان داده شده در جدول ۱-۱ در فصلهای اولیهٔ این کتاب به کار رفته‌اند. استانداردها که باید قابل دسترس و تغییرناپذیر باشند، برای این کمیتهای اصلی با توافق بین المللی برقرار شده‌اند. این استانداردها هم در مورد کمیتهای اصلی و هم در مورد کمیتهای فرعی دربارهٔ کلیهٔ اندازه‌گیریهای فیزیکی به کار می‌روند. نمادگذاری علمی و پیشوندهای جدول ۱-۲ جهت ساده‌سازی در نمادگذاری اندازه‌گیری به کار می‌روند.

**تبدیل یکاها** تبدیل یکاها را می‌توان با استفاده از تبدیلهای زنجیره‌ای انجام داد که در آن داده‌های اصلی به طور پی‌درپی در ضریبهای تبدیلی مساوی با واحد ضرب می‌شوند و یکاها در کمیتهای جبری شبیه ضرب می‌شوند تا اینکه فقط یکاهای مورد نظر باقی بمانند.

**طول** متر به صورت فاصلهٔ پیموده شده توسط نور در طی یک بازهٔ زمانی دقیقاً مشخص تعریف شده است.

**زمان** ثانیه برحسب نوسانهای نور گسیل شده به وسیلهٔ یک چشمهٔ اتمی (سزیم ۱۳۳) تعریف می‌شود. سیگنالهای درست زمانی توسط سیگنالهای رادیویی که در آزمایشگاههای استاندارد کننده با ساعتهای اتمی میزان شده‌اند به سراسر جهان ارسال می‌شوند.

**جرم** کیلوگرم برحسب یک جرم استاندارد از پلاتین-ایریدیوم تعریف می‌شود که در نزدیکی پاریس نگهداری می‌شود. برای اندازه‌گیری در مقیاس اتمی، معمولاً یکای اتمی جرم که برحسب اتم کربن ۱۲ تعریف می‌شود به کار می‌رود.

**چگالی** چگالی $\rho$ یک ماده عبارت است از جرم بر یکای حجم

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (۱-۸)$$

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
●●● تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

### بخش ۱-۵ طول

●۱- میکرومتر ($1\mu m$) اغلب میکرون نامیده می‌شود. (الف) $1/0 km$ چند میکرون است؟ (ب) چه کسری از یک سانتی‌متر برابر با $1/0\mu m$ است؟ (پ) $1/0 yd$ چند میکرون است؟

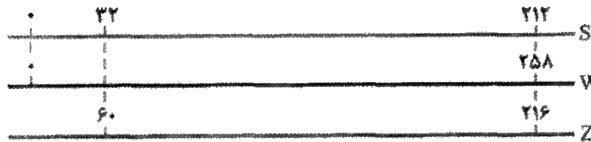
●۲- فاصله‌گذاری در این کتاب معمولاً برحسب یکاهای پوینت[1] و پیکا[2] انجام می‌گیرد که $12 point = 1 pica$ و $6 pica = 1 inch$. اگر در برآورد جای شکلی $0/80 cm$ اشتباه شود، این مقدار برحسب (الف) پیکا و (ب) پوینت چقدر است؟

●۳- در چمنزاری در انگلیس اسبها در مسابقه‌ای به مسافت ۴/۰ فرلانگ[3] شرکت کرده‌اند. مسافت موردنظر برحسب (الف) راد و (ب) چین[4] چقدر است؟ ($1 furlong = 201/168 m$، $1 rod = 5/0292 m$ و $1 chain = 20/117 m$) WWW SSM

●۴- گری[5] یک مقیاس قدیمی انگلیسی برای طول است که به صورت $\frac{1}{10}$ یک لاین[6] و لاین مقیاس قدیمی دیگر انگلیسی طول است که به صورت $\frac{1}{12}$ اینچ تعریف شده است. مقیاس متعارف طول در حرفهٔ چاپ پوینت است که به صورت $\frac{1}{72}$ اینچ تعریف شده است. مساحت $0/50 gry^2$ برحسب مربع پوینت ($points^2$) چقدر است؟

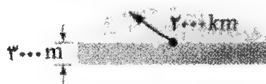
●۵- زمین کره‌ای به شعاع تقریبی $6/37\times10^6 m$ است. (الف) پیرامون آن برحسب کیلومتر چقدر است؟ (ب) مساحت آن برحسب کیلومتر مربع چقدر است؟ (پ) حجم آن برحسب کیلومتر مکعب چقدر است؟ SSM

●●۶- طول پل هاروارد روی رودخانه چارلز که MIT و خانه‌های وابسته‌اش را به هم وصل می‌کند برابر با ۳۶۴/۴ اسموت[7] به علاوهٔ یک گوش است. یکای اسموت مبتنی بر قد الیورید اسموت دانشجوی سال ۱۹۶۲ است که طول پل را با قد خود در راستای پل توسط دوستان خود در آلفاچی لاندا نشانه‌گذاری کرد. این نشانه‌گذاریها در سال دوبار رنگ می‌شد و معمولاً در هنگام بند آمدن ترافیک انجام می‌شد تا پلیس نتواند به آسانی مانع کار شود. (شاید چون اسموت یکای اصلی SI نیست پلیس از آن ناخوشنود بود ولی حالا به نظر می‌رسد که این یکا پذیرفته شده است.) شکل ۱-۴ سه مسیر موازی را نشان می‌دهد که برحسب اسموت (S)، ویلی[8] (W) و زلدا[9] (Z) اندازه‌گیری شده‌اند. طول ۵۰/۰ اسموت چند (الف) ویلی و (ب) چند زلدا است؟




شکل ۱-۴ مسئلهٔ ۶

●●۷- جنوبگان ناحیه‌ای تقریباً نیمدایره‌ای به شعاع $2000 km$ است (شکل ۱-۵). ضخامت میانگین یخ روی آن $3000 m$ است. جنوبگان چند سانتی‌متر مکعب یخ دارد؟ (از خمیدگی زمین چشمپوشی کنید.)




شکل ۱-۵ مسئلهٔ ۷

●●۸- یکاها و اندازه‌های متعارف را به آسانی می‌توانید به طور الکترونیکی اندازه‌گیری کنید، اما هنوز هم باید از یک جدول تبدیل مانند ت استفاده کنید. جدول ۱-۶ بخشی از یک جدول تبدیل یک دستگاه اندازه‌های حجم است که زمانی در اسپانیا متداول بوده است؛ حجم ۱ fanega معادل با $55/501 dm^3$ (دسی متر مکعب) است. برای تکمیل جدول در (الف) ستون cahiz، (ب) ستون fanega، (پ) ستون cuartilla، (ت) ستون almude، به ترتیب از قسمت خالی به بالا چه عددی (با سه رقم با معنی) باید نوشته شود؟ ۷/۰۰almudes را برحسب (ث) medio، (ج) cahize و (چ) سانتی متر مکعب ($cm^3$) بنویسید.

**جدول ۱-۶**
مسئلهٔ ۶

| | cahiz | fanega | cuartilla | almude | medio |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱cahiz= | ۱ | ۱۲ | ۴۸ | ۱۴۴ | ۲۸۸ |
| ۱fanega= | | ۱ | ۴ | ۱۲ | ۲۴ |
| ۱cuartilla= | | | ۱ | ۳ | ۶ |
| ۱almude= | | | | ۱ | ۲ |
| ۱medio= | | | | | ۱ |

●●۹- مهندسان هیدرولیک در امریکا اغلب یکایی از حجم آب به نام اکر- فوت[10] را به کار می‌برند و این حجمی از آب است

1. Point
2. Pica
3. Furlong
4. chain
5. gry
6. line
7. Smoot
8. Willis
9. Zeldas
10. Acre-foot

که یک اکر از زمین به عمق 1ft را می‌پوشاند. در توفان شدیدی ۲/۰in باران در ۳۰min بر شهری به مساحت ۲۶$km^2$ فرو می‌ریزد. چه حجمی از آب برحسب اکر-فوت به این شهر می‌بارد؟ ILW

## بخش ۱-۶ زمان

•۱۰- *Hesperoyucca* گیاهی است با رشد سریع که در ۱۴ روز ۳/۷ m رشد می‌کند. آهنگ رشد آن برحسب میکرون بر ثانیه چقدر است؟

•۱۱- فورت نایت[1] یک مقیاس انگلیسی جالب برای زمان است که برابر با ۲/۰ هفته است (این کلمه مخفف fourteen nights است). این مقدار زمان خوبی برای یک مصاحبت دلپذیر ولی توالی ناخوشایندی از میکروثانیه‌ها برای یک مصاحبت ناخوشایند است. یک فورت نایت چند میکروثانیه است؟

•۱۲- زمان یک تدریس (۵۰min) تقریباً ۱ میکرو قرن است. (الف) یک میکروقرن چند دقیقه است؟ (ب) با استفاده از رابطهٔ زیر

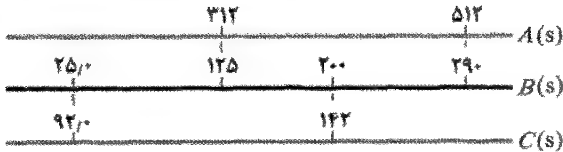
$$\text{درصد اختلاف} = \left(\frac{\text{مقدار تقریبی} - \text{مقدار واقعی}}{\text{مقدار واقعی}}\right) \times ۱۰۰$$

درصد اختلاف این تقریب را پیدا کنید.

•۱۳- تقریباً ۱۰ سال پس از انقلاب فرانسه، دولت فرانسه تلاش کرد که مقیاس اصلی زمان را بر اساس ضریب ده قرار دهد، مثلاً یک هفته ۱۰ روز، یک روز ۱۰ ساعت، یک ساعت ۱۰۰ دقیقه و یک دقیقه ۱۰۰ ثانیه در نظر گرفته شود. نسبتهای (الف) هفتهٔ اعشاری فرانسه به هفتهٔ استاندارد و (ب) ثانیهٔ اعشاری فرانسه به ثانیهٔ استاندارد، چقدر است؟

•۱۴- استانداردهای زمان اکنون بر ساعتهای اتمی استوارند. یک استاندارد نوید بخش دیگر مبتنی بر تپ اخترهاست، که ستارگان نوترونی درحال چرخش هستند. (ستارگانی بسیار چگال که فقط از نوترونها ساخته شده‌اند.) بعضی با آهنگی خیلی پایدار می‌چرخند و با هر چرخش یک علامت رادیویی ارسال می‌کنند که زمین را می‌پیماید و مانند یک چراغ دریایی روشن است. تپ اختر PSR ۱۹۳۷+۲۱ یک نمونه است؛ این تپ اختر در هر ۱/۵۵۷۸۰۶۴۴۸۸۷۲۷۵ ± ۳ ms یک بار می‌چرخد، که ۳± عدم قطعیت آخرین رقم بعد از اعشار آن است (و به معنای ۳ms± نیست). (الف) PSR۱۹۳۷+۲۱ در ۷/۰۰ روز چند بار می‌چرخد؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا این تپ اختر یک میلیون بار بچرخد؟ و (پ) عدم قطعیت آن چقدر است؟

•۱۵- سه ساعت با صفحهٔ نمایش رقمی $A$، $B$ و $C$ با آهنگهای مختلفی کار می‌کنند و در صفر همزمان نیستند. شکل ۱-۶ عددهای هر دو ساعت را در چهار وضع زمانی نشان می‌دهد. (در نزدیکترین وضع ساعت $B$، ۲۵/۰s، $C$، ۹۲/۰s و ساعت $C$ را نشان می‌دهند.) اگر بازهٔ دو رویداد در ساعت $A$ برابر ۶۰۰s باشد، بازهٔ آنها در (الف) ساعت $B$ و (ب) ساعت $C$ چقدر است؟ وقتی ساعت $A$، ۴۰۰s را نشان می‌دهد، ساعت $B$ چه زمانی را نشان‌می‌دهد؟ (پ) وقتی ساعت $C$، ۱۵/۰s را نشان می‌دهد، ساعت $B$ چه زمانی را نشان می‌دهد؟ (برای زمانهای پیش از صفر عدد خوانده شده را منفی در نظر بگیرید.)




شکل ۱-۶ مسئلهٔ ۱۵

•۱۶- تا سال ۱۸۸۳/۱۲۶۲، در امریکا هر شهر و شهرستانی یک ساعت محلی برای خود داشتند. امروزه مسافران ساعتهای خود را فقط هنگامی که تغییر زمان ۱/۰h باشد تنظیم می‌کنند. به طور میانگین، چند درجه طول جغرافیایی باید مسافرت کنید تا تغییر زمان به اندازهٔ ۱/۰h شود؟ (*راهنمایی*: در تقریباً ۲۴ h زمین °۳۶۰ می‌چرخد.)

•۱۷- پنج ساعت در آزمایشگاه مورد آزمون قرار گرفته‌اند. در روزهای متوالی یک هفته، درست هنگامی که علامت زمانی صادر شده از ایستگاه زمانی WWV ظهر را اعلام می‌کند، این ساعتها عددهای جدول را نشان می‌دهند. ساعتها را به ترتیب مقدار نسبی دقت آنها در زمان‌سنجی بنویسید. دلیل انتخاب خود را توجیه کنید. SSM

| ساعت | یکشنبه | دوشنبه | سه‌شنبه | چهارشنبه | پنج‌شنبه | جمعه | شنبه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الف | ۱۲:۳۶:۴۰ | ۱۲:۳۶:۵۶ | ۱۲:۳۷:۱۲ | ۱۲:۳۷:۲۷ | ۱۲:۳۷:۴۴ | ۱۲:۳۷:۵۹ | ۱۲:۳۷:۱۴ |
| ب | ۱۱:۵۹:۵۹ | ۱۲:۰۰:۰۲ | ۱۱:۵۹:۵۷ | ۱۲:۰۰:۰۷ | ۱۲:۰۰:۰۲ | ۱۱:۵۹:۵۶ | ۱۲:۰۰:۰۳ |
| پ | ۱۵:۵۰:۴۵ | ۱۵:۵۱:۴۳ | ۱۵:۵۲:۴۱ | ۱۵:۵۳:۳۹ | ۱۵:۵۴:۳۷ | ۱۵:۵۴:۳۵ | ۱۵:۵۶:۳۳ |
| ت | ۱۲:۰۳:۵۹ | ۱۲:۰۲:۵۲ | ۱۲:۰۱:۴۵ | ۱۲:۰۰:۳۸ | ۱۱:۵۹:۳۱ | ۱۱:۵۸:۲۴ | ۱۱:۵۷:۱۷ |
| ث | ۱۲:۰۳:۵۹ | ۱۲:۰۲:۴۹ | ۱۲:۰۱:۵۴ | ۱۲:۰۱:۵۲ | ۱۲:۰۱:۳۲ | ۱۲:۰۱:۲۲ | ۱۲:۰۱:۱۲ |

••۱۸- چون چرخش زمین به تدریج آهسته می‌شود، طول روزها افزایش می‌یابد. آخرین روز یک قرن به اندازهٔ ۱/۰ms طولانیتر از اولین روز آن قرن است. در مدت ۲۰ قرن مقدار افزایش زمانی روز چقدر است؟

•••۱۹- فرض کنید در حالی که بر نیمکتی در نزدیکی استوا تکیه داده‌اید غروب آفتاب را روی یک اقیانوس بی‌حرکت تماشا می‌کنید، و درست در لحظه‌ای که قسمت بالای خورشید محو می‌شود زمان‌سنجی را به کار می‌اندازید. سپس می‌ایستید و بر اثر این کار چشمان شما به اندازهٔ $H = ۱/۷۰$ m بالا می‌آید و هنگامی که قسمت بالای خورشید دوباره محو می‌شود، زمان‌سنج را متوقف می‌کنید. اگر زمان سپری شده $t = ۱۱/۱$ s باشد، $r$ شعاع زمین چقدر است؟

1. forthnight

### بخش ۱-۷ جرم

••۲۰- طلا که چگالی آن ۱۹/۳۲g/cm$^{3}$ است فلزی است بسیار شکل‌پذیر و می‌تواند به صورت یک برگهٔ نازک یا یک رشتهٔ نازک در آید. (الف) اگر نمونه‌ای از طلا به جرم ۲۷/۶۳g به صورت برگه‌ای با ضخامت ۱/۰۰۰µm در آید، مساحت برگه چقدر است؟ (ب) اگر طلا به صورت یک رشتهٔ استوانه‌ای به شعاع ۲/۵۰۰µm در آید، طول رشته چقدر است؟

•۲۱- (الف) با فرض اینکه چگالی آب دقیقاً ۱g/cm$^{3}$ است، جرم یک متر مکعب آب را برحسب کیلوگرم پیدا کنید. (ب) فرض کنید که خروج ۵۷۰۰m$^{3}$ آب از مخزنی ۱۰/۰h طول می‌کشد «آهنگ شارش جرم» آب از مخزن برحسب کیلوگرم بر ثانیه چقدر است؟ SSM

•۲۲- رکورد ساختن بزرگترین بطری شیشه‌ای در سال ۱۹۹۲/۱۳۷۱ توسط گروهی در میلویل نیوجرسی با دمیدن بطری به حجم ۱۹۳ گالن امریکا ایجاد شد. (الف) این رکورد چقدر از ۱/۰ میلیون سانتی‌متر مکعب کمتر است؟ (ب) اگر این بطری با آهنگ ۱/۸ g/min به آرامی پر شود، عمل پر شدن چقدر طول می‌کشد؟ چگالی آب ۱۰۰۰kg/m$^{3}$ است.

•۲۳- جرم زمین ۵/۹۸×۱۰$^{۲۴}$ kg است. میانگین جرم اتمهایی که زمین را تشکیل می‌دهند ۴۰u است. چند اتم در زمین وجود دارد؟

••۲۴- یک سانتی‌متر مکعب ابر کومولوس نوعی ۵۰ تا ۵۰۰ قطره آب دارد، که شعاع نوعی آنها ۱۰µm است. در این گستره کمترین مقدار و بیشترین مقدار موارد زیر را به دست آورید. (الف) چند متر مکعب آب در ابر کومولوس به صورت استوانه‌ای به ارتفاع ۳/۰km و شعاع ۱/۰km وجود دارد؟ (ب) چند بطری یک لیتری با این آب پر می‌شود؟ (پ) چگالی آب ۱۰۰۰kg/m$^{3}$ است. جرم آب در این ابر چقدر است؟

••۲۵- چگالی آهن ۷/۸۷g/cm$^{3}$ و جرم اتم آن ۹/۲۷×۱۰$^{-۲۶}$ kg است. اگر اتمها کروی شکل و تنگ پکیده باشند، (الف) حجم یک اتم آهن و (ب) فاصلهٔ بین مرکزهای دو اتم مجاور چقدر است؟

••۲۶- یک مول اتم شامل ۶/۰۲×۱۰$^{۲۳}$ اتم است. با نزدیکترین مرتبهٔ بزرگی چند مول اتم در یک گربهٔ خانگی بزرگ وجود دارد؟ جرم یک اتم هیدروژن، یک اتم اکسیژن و یک اتم کربن به ترتیب ۱/۰u، ۱۶u و ۱۲u است. (*راهنمایی*: گربه‌ها در گرفتن موش کور (mole) معروف هستند.)

••۲۷- در گردشی در مالزی گاوی به وزن ۲۸/۹ پیکول[1] برحسب یکای محلی وزن خریداری می‌شود، ۱۰۰ گین[2]=۱پیکول، ۱۶ تاهیل[3] = ۱ گین، ۱۰ چی[4] = ۱ تاهیل و ۱۰ هون[5] = ۱ چی. وزن ۱ هون معادل با جرم ۰/۳۷۹g است. در هنگام بار زدن گاو در کشتی چه جرمی برحسب کیلوگرم را باید در اظهار نامه اعلام کنید؟ (*راهنمایی*: از تبدیلهای زنجیره‌ای استفاده کنید.)

••۲۸- دانه‌های ریز ماسه در ساحل کالیفرنیا کره‌هایی با شعاع میانگین ۵۰µm هستند و از دی اکسید سیلیسیوم ساخته شده‌اند که چگالی آنها ۲۶۰۰kg/m$^{3}$ است. چه جرمی از دانه‌های ماسه دارای مساحتی برابر با مساحت سطح یک مکعب به ضلع ۱/۰۰m است (مساحت کل همهٔ کره‌های منفرد)؟

••۲۹- در ضمن یک بارش شدید، بخشی از کوهستان ۲/۵km به طور افقی، ۰/۸۰km در راستای شیب و ۲/۰m در عمق شسته شده و لایه‌ای از گل و لای را در دره‌ای به وجود آورده است. فرض کنید توزیع گل و لای در سطحی از دره به مساحت ۰/۴km×۰/۴km یکنواخت بوده و چگالی آن ۱۹۰۰kg/m$^{3}$ است. جرم گل و لای رسوب کرده در مساحت ۴/۰m$^{2}$ در کف دره چقدر است؟

••۳۰- آب داخل مخزنی ریخته می‌شود که دارای نشتی است. جرم $m$ آب برحسب تابعی از زمان $t$ با رابطهٔ $m = ۵/۰۰t^{۰/۸} - ۳/۰۰t + ۲۰/۰۰$ داده شده است، که $t \geq ۰$، $m$ برحسب گرم و $t$ برحسب ثانیه است. (الف) در چه زمانی جرم آب بیشترین است، و (ب) بیشترین جرم چقدر است؟ آهنگ تغییر جرم در (پ) $t = ۲/۰۰s$ و (ت) $t = ۵/۰۰s$ برحسب کیلوگرم بر دقیقه چقدر است؟

•••۳۱- یک مخزن عمودی با مساحت قاعدهٔ ۱۴/۰cm در ۱۷/۰cm با قطعه‌های یکسان آب‌نبات هر یک با حجم ۵۰/۰mm$^{3}$ و جرم ۰/۰۲۰۰g پر شده است. فرض کنید که حجم فضای خالی بین آب‌نباتها ناچیز باشد. اگر ارتفاع آب‌نباتها در مخزن با آهنگ ۰/۲۵۰cm/s افزایش یابد، با چه آهنگی (برحسب کیلوگرم بر دقیقه) جرم آب‌نباتها در مخزن افزایش می‌یابد.

### مسئله‌های اضافی

۳۲- در جدول ۱-۷ چند مقیاس قدیمی حجم مایع نشان داده شده است. برای تکمیل جدول، چه عددهایی (با سه رقم با معنی) باید در ستونهای (الف) وی[6]، (ب) چالدرون[7]، (پ) بگ[8]، (ت) پاتل[9]، (ث) گیل[10] با شروع از قسمت خالی بالا نوشته شود؟ (ج) حجم ۱ bag برابر با ۰/۱۰۹۱ m$^{3}$ است. اگر بر اساس یک داستان قدیمی جادوگری مقداری مایع ناخوشایندی

1. picul
2. gin
3. tahil
4. chee
5. hoon
6. way
7. chaldron
8. bag
9. pottle
10. gill

در یک پاتیل به حجم ۱/۵ چالدرون بریزد، مقدار این حجم برحسب متر مکعب چقدر است؟

**جدول ۱-۷**

مسئله ۳۲

| | وی | چالدرون | بگ | پاتل | گیل |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ وی = | ۱ | $\frac{۱۰}{۹}$ | $\frac{۴۰}{۳}$ | ۶۴۰ | ۱۲۰۲۴۰ |
| ۱ چالدرون = | | | | | |
| ۱ بگ = | | | | | |
| ۱ پاتل = | | | | | |
| ۱ گیل = | | | | | |

۳۳- یک شعر قدیمی کودکانهٔ انگلیسی می‌گوید «خانم کوچولو مافت[1] نشسته رو تافت[2]، کشک و پنیر می‌خوره، عنکبوته می‌بینه، میاد پلوش می‌شینه». عنکبوت نه به خاطر کشک و پنیر او، بلکه به خاطر اینکه مافت مخفیگاهی ۱۱ برابر تافت با حشره‌های خشک شده داشت در کنار او نشست. حجم یک تافت با، بوشل انگلیسی ۰/۵۰ = پیک ۲ = تافت ۱ داده می‌شود، که لیتر ۳۶/۳۶۸۷ = بوشل انگلیسی ۱ است. مخفیگاه مافت برحسب (الف) پک، (ب) بوشل انگلیسی و (پ) لیتر چقدر است؟

۳۴- از یک دستنوشتهٔ قدیمی معلوم می‌شود که مالکی در زمان شاه آرتور ۳/۰۰ آکر زمین قابل شخم به علاوهٔ منطقه‌ای برای دامداری به اندازهٔ ۲۵/۰ پرچ[3] در ۴/۰ پرچ داشته است. مساحت کل آن برحسب (الف) یکای قدیمی رود[4] و (ب) یکای جدید مترمربع چقدر بوده است؟ در اینجا آکر برابر با سطحی با ابعاد ۴۰ پرچ در ۴ پرچ، یک رود سطحی به ابعاد ۴۰ پرچ در ۱ پرچ و یک پرچ برابر با ۱۶/۵ ft است.

۳۵- جهانگردی یک اتومبیل از انگلستان می‌خرد و با کشتی به امریکا می‌برد. برچسب اتومبیل نشان می‌دهد که در یک جادهٔ باز مصرف سوخت ۴۰ مایل بر گالن است. این جهانگرد توجه نمی‌کند که گالن انگلیسی و گالن امریکایی تفاوت دارد:

۴/۵۴۵۹۶۳۱ لیتر = ۱ گالن انگلیسی

۳/۷۸۵۳۰۶۰ لیتر = ۱ گالن آمریکایی

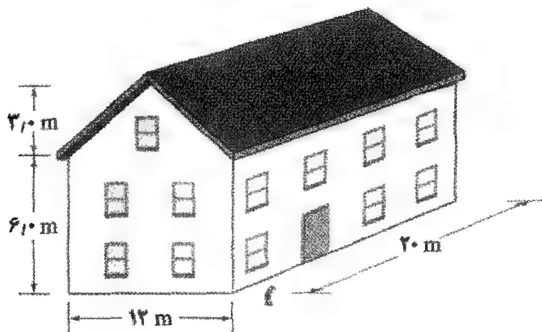
در یک سفر ۷۵۰ مایلی (در امریکا) چند گالن سوخت (الف) بر اثر اشتباه جهانگرد نیاز است و (ب) نیاز واقعی اتومبیل چقدر است؟ SSM

۳۶- دو نوع یکای بشکه در دههٔ ۱۹۲۰/۱۳۰۰ در امریکا مورد استفاده قرار می‌گرفت. بشکهٔ سیب با یک مقدار قانونی حجم برابر با ۷۰۵۶ اینچ مکعب و بشکهٔ زغال اخته برابر با ۵۸۲۶ اینچ مکعب بود. فروشنده‌ای ۲۰ بشکهٔ زغال اخته از محصولی را به مشتری می‌فروشد که به نظر او بشکهٔ سیب تحویل گرفته است. اختلاف حجم این دو برحسب لیتر چقدر است؟

1. muffet
2. tuffet (صندلی)
3. perch
4. rood

۳۷- ادعا می‌شود که برای رنگ خانه‌ای ۴۶۰ $ft^2/gal$ رنگ لازم است. (الف) این کمیت را برحسب مترمربع بر لیتر بیان کنید. (ب) این کمیت را برحسب یکای SI بیان کنید (به پیوستهای الف و ت نگاه کنید.) (پ) معکوس کمیت اصلی چیست؟ و (ت) اهمیت فیزیکی آن چیست؟

۳۸- در امریکا، مقیاس یک خانهٔ عروسکی ۱:۱۲ یک خانهٔ واقعی است (یعنی هر ضلع این خانهٔ ۱:۱۲خانهٔ واقعی است) و مقیاس یک خانهٔ خیلی کوچک برای قرار گرفتن در این خانهٔ عروسکی ۱:۴۴ یک خانهٔ واقعی است. فرض کنید طول یک خانهٔ واقعی (شکل ۱-۷) ۲۰m، عرض آن ۱۲ m و ارتفاع آن ۶/۰m و ارتفاع سقف شیبدار آن (ارتفاع مثلث عمودی بالای دیوار) ۳/۰m است. برحسب مترمکعب حجمهای (الف) یک خانهٔ عروسکی و (ب) یک خانهٔ خیلی کوچک، چقدر است؟




**شکل ۱-۷** مسئلهٔ ۳۸

۳۹- یک کورد[5] عبارت است از حجمی از چوب بریده شده‌ای که برابر با تودهٔ چوبی به طول ۸ ft، عرض ۴ ft و ارتفاع ۴ ft است. ۱/۰ $m^3$ چند کورد است؟ SSM

۴۰- یک مولکول آب ($H_2O$) دارای دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن است. جرم اتم هیدروژن ۱/۰u و جرم یک اتم اکسیژن تقریباً ۱۶ u است. (الف) جرم یک مولکول آب برحسب کیلوگرم چقدر است؟ (ب) اگر جرم کل برآورد شدهٔ اقیانوسهای جهان $۱/۴ \times ۱۰^{۲۱}$ kg باشد، چند مولکول آب در آنها وجود دارد؟

۴۱- یک تن اندازه‌ای از حجم است که معمولاً در بارگذاری کشتی به کار می‌رود، اما در استفاده از آن باید دقت کرد چون سه نوع تن وجود دارد: یک *تن جابه‌جایی* برابر است با ۷ بشکه، یک *تن باری* برابر است با ۸ بشکه، و یک تن سفارشی برابر است با ۲۰ بشکه. بشکه اندازهٔ دیگری از حجم است که ۰/۱۴۱۵ $m^3$ = ۱ بشکه. فرض کنید یک محمولهٔ «۷۳ تنی» از ماده‌ای را در نظر گرفته باشید و مطمئن هستید که فروشنده درخواست مورد نظر را ارسال خواهد کرد ولی او «تن» را به معنای حجمی آن (به جای وزن یا جرم به صورتی که در فصل ۵ گفته خواهد شد) تلقی می‌کند. اگر منظور واقعی فروشنده تن

5. cord

جابه‌جایی باشد، و شما آن را را به صورت (الف) ۷۳ تن باری و (ب) ۷۳ تن سفارشی سفارش دهید، چند باشل امریکایی از این ماده، اضافی خواهید داشت؟ (باشل امریکا $1m^3$=۲۸/۳۷۸) SSM

**۴۲-** برای یک مهمانی بزرگ نوشابه در یک ظرف شیشه‌ای بزرگ با ابعاد داخلی (ارتفاع) $40cm \times 40cm \times 30cm$ تهیه می‌شود. در آغاز ظرف تا لب پر می‌شود. نوشابه را می‌توان در بطریهایی که ابعاد آنها در جدول داده شده است خریداری کرد. خرید یک بطری بزرگ به جای چند بطری کوچک قیمت کلی نوشابه را کم می‌کند. برای کم کردن قیمت (الف) کدام اندازه بطری و چه تعداد باید خریداری شود و اگر ظرف پر شود، چقدر نوشابه برحسب (ب) بطری استاندارد و (پ) لیتر باقی می‌ماند؟

۱ بطری استاندارد
۱ مگنیوم[1] = ۲ بطری استاندارد
۱ جرابوم[2] = ۴ بطری استاندارد
۱ رهوبوم[3] = ۶ بطری استاندارد
۱ متوسلا[4] = ۸ بطری استاندارد
۱ سلمانازار[5] = ۱۲ بطری استاندارد
۱ بالتازار[6] = ۱۶ بطری استاندارد = 11/356 L
۱ نبوچادنزار[7] = ۲۰ بطری استاندارد

**۴۳-** ضلع یک حبه قند ۱ cm است. اگر در یک جعبهٔ مکعبی شکل یک مول قند حبه بریزید، طول ضلع جعبه چقدر خواهد بود؟ (یکا $6/02 \times 10^{23}$ = یک مول).

**۴۴-** با استفاده از تبدیلهای داده شده در متن چه تعداد اتمهای هیدروژن برای به دست آوردن $1/0 kg$ هیدروژن لازم است؟ جرم اتم هیدروژن $1/0 u$ است.

**۴۵-** یکای نجومی (AU) عبارت است از میانگین فاصلهٔ بین زمین و خورشید و تقریباً برابر با $1/50 \times 10^8 km$ است. تندی نور تقریباً $3/0 \times 10^8 m/s$ است. تندی نور را برحسب یکای نجومی بر دقیقه بیان کنید. SSM

**۴۶-** بر شهر مسئله ۹ چه جرمی از آب فرو می‌بارد؟ جرم یک متر مکعب آب برابر با $1/0 \times 10^3 kg$ است.

**۴۷-** در یک پرهیز غذایی شخصی $2/3 kg$ در هفته وزن کم می‌کند. آهنگ از دست دادن جرم را برحسب میلی‌گرم بر ثانیه بیان کنید، در صورتی که شخص کم شدن جرم را ثانیه به ثانیه احساس کند.

**۴۸-** نسبت *غلات- دام* یک عبارت مالی است که در خرید و فروش دام مورد استفاده قرار می‌گیرد و به قیمت تغذیه‌ای یک دام مربوط می‌شود که به اندازهٔ کافی باید بزرگ شود تا به فروش برسد. این به صورت نسبت قیمت فروش دام با جرم ۱۴۶۰ اسلاگ[8] به قیمت فروش یک باشل امریکایی غلات تعریف می‌شود. (کلمه «اسلاگ» از کلمهٔ قدیمی آلمانی به معنای «زدن» گرفته شده است؛ معنی مشابهی برای «اسلاگ» به عنوان یک فعل انگلیسی جدید وجود دارد.) یک باشل امریکا برابر با $35/238 L$ است. اگر نسبت تغذیه- دام در فروشگاهی ۵/۷ نوشته شده باشد، برحسب یکاهای متریک نسبت زیر چقدر می‌شود

$$\frac{\text{قیمت یک کیلوگرم دام}}{\text{قیمت یک لیتر ذرت}} \;?$$

(*راهنمایی*: به جدول جرم در پیوست ت نگاه کنید.)

**۴۹-** به مناسبت جشن غذای مکزیکی برای ۴۰۰ نفر باید شام تهیه شود. برای هر میزی دو فلفل جالاپنو[9] گذاشته می‌شود (یک عدد برای هر نفر). با این وجود فرض کنید که فقط یک فلفل هابانرو[10] در اختیار باشد. تندی فلفل برحسب *یکای اسکویل هیت*[11] (SHU) اندازه‌گیری می‌شود. به طور میانگین یک فلفل جالاپنو دارای تندی 4000SHU و تندی فلفل هابانرو دارای تندی 300000SHU است. برای رسیدن به یک تندی مطلوب چند فلفل هابانرو را باید با فلفل جالاپنو مخلوط کرد تا برای ۴۰۰ نفر شام تهیه شود؟

**۵۰-** یکای مساحت که اغلب برای اندازه‌گیری مساحت زمین به‌کار می‌رود *هکتار* است که به صورت $10^4 m^2$ تعریف شده است. در هر سال ۷۵ هکتار زمین تا عمق ۲۶ m از یک معدن زغال سنگ رو باز کنده می‌شود. در این فاصله زمانی برحسب کیلومتر مکعب چه حجمی از زمین برداشته شده است؟

**۵۱-** (الف) یکایی از زمان که گاه در فیزیک میکروسکوپی به‌کار می‌رود یک *شیک*[12] برابر با $10^{-8} s$ است. آیا شیکهای یک ثانیه بیشتر است یا ثانیه‌های یک سال؟ (ب) بشر تقریباً از $10^6$ سال پیش وجود داشته است، ولی جهان $10^{10}$ سال پیشینه دارد. اگر عمر جهان یک «روز جهانی» تعریف شود، یک روز جهانی همان‌طور که روز معمولی شامل ثانیه‌های معمولی است از «ثانیه‌های جهانی» تشکیل شده است. بشر چند ثانیهٔ جهانی وجود داشته است؟

**۵۲-** جهت تمایز بین قدیم و جدید و بین بزرگ و کوچک موارد زیر را درنظر بگیرید: در روستاهای قدیم انگلیس یک هاید[13] (مساحتی بین ۱۰۰ و ۱۲۰ جریب) مساحت زمینی بود که برای ادارهٔ یک خانواده با یک گاو آهن به مدت یک سال لازم بود. (مساحت یک جریب برابر با $4047 m^2$ است.) هم

1. magnum
2. jeroboam
3. rehoboam
4. methuselah
5. salmanzar
6. balthazar
7. nebuchadnezzar

8. slug
9. jalapeno
10. habanero
11. scoville heat unit
12. shake
13. hide

چنین یک واپن تیک[1] مساحت زمینی بود که برای ۱۰۰ خانواده از این نوع مورد نیاز بود. در فیزیک کوانتومی مساحت سطح مقطع یک هسته (که با احتمال برخورد و جذب یک ذره توسط آن تعریف می‌شود) برحسب یکای بارن[2] اندازه‌گیری می‌شود، که ۱ بارن برابر با $1\times10^{-28}\,m^2$ است. (در اصطلاح فیزیک هسته‌ای، اگر هسته‌ای «بزرگ» باشد، آنگاه پرتاب ذره‌ای به طرف آن مانند پرتاب گلوله‌ای در یک انبار کاه خواهد بود، که مشکل است به آن نخورد.) نسبت ۲۵ و اپن تیک به ۱۱ بارن چقدر است؟

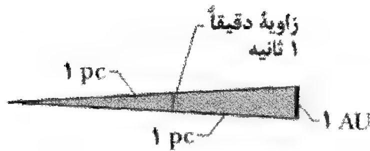
**۵۳-** یکای سنتی طول در ژاپن کن[3] است $(1ken = 1/97\,m)$. نسبتهای (الف) کن مربع به متر مربع، و (ب) کن مکعب به متر مکعب چقدر است؟ حجم یک مخزن استوانه‌ای آب به ارتفاع ۵/۵۰ کن و شعاع ۳/۰۰ کن برحسب (پ) کن مکعب و (ت) متر مکعب چقدر است؟

**۵۴-** دستورهایی از ملوانی که $24/5\,mi$ در شرق شما قرار دارد جهت نجات کشتی دریافت می‌کنید. با این وجود وقتی غواصها اقیانوس را در محل گفته شده جستجو می‌کنند و هیچ اثری از کشتی نمی‌یابند، به منبع اطلاعاتی خود رجوع می‌کنید، معلوم می‌شود که فاصلهٔ ارسال ۲۴/۵ *مایل دریایی* بوده نه مایل عادی. با استفاده از جدول پیوست ت فاصلهٔ افقی از ملوان کشتی را برحسب کیلومتر محاسبه کنید.

**۵۵-** یک راه پلهٔ خانگی پله‌هایی به بلندی (ارتفاع) $19\,cm$ و جای پای (ژرفای افقی) $23\,cm$ دارد. بررسیها نشان می‌دهند که اگر جای پای پله به جای $23\,cm$، $28\,cm$ باشد، پله‌ها برای بالا رفتن ایمن‌تر خواهند بود. اگر این تغییرات را در جای پای پله‌ها انجام دهیم، برای یک راه پله با ارتفاع کل $4/57\,m$ پله در اتاق چقدر بیشتر جلو می‌رود؟

**۵۶-** جرم یک موش کور (mole) نوعاً $75\,g$ است که متناظر با تقریباً ۷/۵ مول اتم است. (یک مول اتم $6/02\times10^{23}$ اتم دارد). برحسب یکای اتمی (u) جرم میانگین اتمهای موش چقدر است؟

**۵۷-** *یکای نجومی* (AU) برابر با میانگین فاصلهٔ زمین تا خورشید و تقریباً $92/9\times10^{6}\,mi$ است. یک *پارسک*[4] (pc) مسافتی است که ۱ AU با زاویه‌ای دقیقاً برابر با ۱ ثانیهٔ قوسی در برگرفته می‌شود. (شکل ۱-۸). یک *سال نوری* (ly) مسافتی است که نور در خلأ با تندی $186000\,mi/s$ در مدت ۱/۰ سال می‌پیماید. فاصلهٔ زمین- خورشید را برحسب (الف) پارسک و (ب) سال نوری بیان کنید. SSM




**شکل ۱-۸ مسئلهٔ ۵۷**

**۵۸-** در خرید غذا برای یک گردهمایی به جای صدف خوراکی پاک کردهٔ آتلانتیک (که در هر پینت[5] امریکا ۸ تا ۱۲ صدف وجود دارد) صدف خوراکی پاک کردهٔ پاسیفیک (که ۸ تا ۱۲ پینت امریکا است) سفارش داده می‌شود. ظرفی که صدف خوراکی در آن ریخته و ارسال می‌شود دارای ابعاد داخلی $1/0\,m\times12\,cm\times20\,cm$ است و پینت امریکا معادل با ۰/۴۷۳۲ لیتر است. چه تعداد صدف خوراکی باید سفارش داده شود؟

**۵۹-** کوبیت[6] یکای قدیمی طول مبتنی بر فاصلهٔ بین آرنج و نوک انگشت میانی است. فرض کنید که این فاصله در گسترهٔ ۴۳ تا ۵۳ سانتی‌متر قرار دارد و فرض کنید که در یک نقاشی قدیمی طول یک ستون استوانه‌ای ۹ کوبیت و قطر آن ۲ کوبیت باشد. در گسترهٔ گفته شده کمترین مقدار و بیشترین مقدار به ترتیب برای (الف) طول استوانه برحسب متر، (ب) طول ستون برحسب میلی‌متر و (پ) حجم استوانه برحسب متر مکعب چقدر است؟

**۶۰-** در یک کتاب آشپزی قدیمی طرز تهیهٔ سوپ نوعی گزنه به این صورت است: مقدارهای زیر از آب‌گوشت را بجوشانید: «یک فنجان صبحانه به علاوهٔ یک فنجان چایخوری به علاوهٔ ۶ قاشق غذا خوری به علاوهٔ ۱ قاشق مربا خوری. با استفاده از دستکش سر گزنه‌ها را جدا کنید تا اینکه مقدار آن به ۰/۵ کوارت[7] برسد و سر گزنه‌ها را به مایع در حال جوش اضافه کنید. ۱ قاشق غذا خوری برنج پخته و ۱ قاشق مخصوص، نمک به آن اضافه کنید و بگذارید ۱۵ دقیقه بجوشد.» در جدول ضریبهای تبدیل مقیاس قدیمی انگلیسی و مقیاس متعارف امریکا پیش از متریک داده شده است. (این مقیاسها نسبت به متریک موجب خنده است.) برای مایعها داریم، یک قاشق چایخوری امریکایی = ۱ قاشق چایخوری انگلیسی. برای جامدها ۲ قاشق چایخوری امریکایی = ۱ قاشق چایخوری انگلیسی و ۱ کوارت امریکایی = ۱ کوارت انگلیسی. برحسب مقیاس امریکایی چقدر (الف) مایع اولیه، (ب) سر گزنه، (پ) برنج و (ت) نمک برای این طرز تهیه لازم است؟

| مقیاسهای قدیمی انگلیسی | مقیاسهای امریکایی |
|---|---|
| قاشق چایخوری = ۲ قاشق مخصوص نمک | قاشق غذاخوری = ۳ قاشق چایخوری |
| قاشق مرباخوری = ۲ قاشق چایخوری | نصف فنجان = ۸ قاشق غذاخوری |
| قاشق غذاخوری = ۲ قاشق مرباخوری | فنجان = ۲ نیمه فنجان |
| فنجان چایخوری = ۸ قاشق غذاخوری | |
| فنجان صبحانه = ۲ فنجان چایخوری | |

1. wapentake
2. barn
3. ken
4. parsec

5- pint
6- cubit
7- quart

# ۲ حرکت در راستای یک خط راست



دارکوب در جستجوی حشراتی برای خوردن با نوک خود به تنهٔ درخت ضربه می‌زند، تا در آن حفره‌ای ایجاد کند، یا با تولید صدا توجه جفتش را به خود جلب کند. حرکت به سمت تنه درخت ممکن است خیلی سریع باشد، اما با رسیدن به تنهٔ درخت توقف فوق‌العاده سریع است که می‌تواند برای یک انسان پرمخاطره باشد. بنابراین، به نظر می‌رسد که پس از هر ضربه دارکوب باید مرده یا بیهوش از درخت بیفتد. اما نه تنها او زنده می‌ماند بلکه به سرعت ضربه زدن را ادامه می‌دهد و صدای تق- تق را به هوا می‌فرستند.

**چرا دارکوب از این ضربه‌ها به درخت جان به در می‌برد؟**

پاسخ در همین فصل

## ۲-۱ فیزیک چیست؟

یک هدف فیزیک مطالعهٔ حرکت اجسام است- برای مثال، آنها چقدر تند حرکت می‌کنند، و در یک زمان معین چقدر حرکت کرده‌اند. مهندسان مؤسسه بین‌المللی ساخت اتومبیل وقتی کارایی اتومبیلهای خود را پیش از مسابقه و پس از آن تعیین می‌کنند، دربارهٔ این جنبه از فیزیک سخت‌گیر هستند. زمین شناسان از این فیزیک برای اندازه‌گیری حرکت صفحهٔ زمینساخت به هنگام تلاش برای پیش‌بینی زمین لرزه‌ها استفاده می‌کنند. پژوهشگران پزشکی برای یافتن چگونگی گردش خون در بیمار به هنگام تشخیص رگ مسدود از این فیزیک استفاده می‌کنند، و رانندگان از این فیزیک برای تعیین این که چگونه سرعت خود را وقتی صدای آشکارساز رادار به آنها هشدار می‌دهد به اندازهٔ کافی کم کنند سود می‌برند. مثالهای بی‌شمار دیگری وجود دارد. در این فصل، مبانی فیزیک حرکت جسمی (ماشین مسابقه، صفحهٔ زمینساخت، یاخته‌های خون، یا هر جسم دیگر) را که فقط در راستای یک محور حرکت می‌کند مطالعه می‌کنیم. چنین حرکتی حرکت *یک بعدی* نامیده می‌شود.

## ۲-۲ حرکت

جهان و هر چیزی که در آن است حرکت می‌کند، با وجود سکون ظاهری چیزها، مانند یک جاده، همراه با دوران زمین حرکت می‌کنند. زمین به دور خورشید، خورشید به دور مرکز کهکشان راه‌شیری و کهکشان راه‌شیری نسبت به کهکشانهای دیگر حرکت می‌کنند. طبقه‌بندی و مقایسهٔ حرکتها (که **سینماتیک** نام دارد) اغلب چالش برانگیز است. دقیقاً چه چیزی را اندازه می‌گیریم و چگونه مقایسه می‌کنیم؟

پیش از تلاش جهت پاسخ گویی، چند خاصیت عمومی حرکت را که به سه مورد محدود هستند بررسی می‌کنیم.

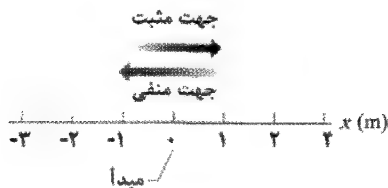
۱- حرکت فقط در راستای یک خط راست باشد. این خط می‌تواند قائم، افقی یا شیبدار، اما حتماً باید مستقیم باشد.

۲- نیروها (هل دادن یا کشیدن) موجب حرکت می‌شوند که تا فصل ۵ دربارهٔ آنها بحث نخواهد شد. در این فصل فقط دربارهٔ خود حرکت و تغییر در حرکت بحث خواهیم کرد. آیا جسم در حال حرکت تند می‌شود، کند می‌شود، می‌ایستد، یا جهت آن معکوس می‌شود؟ اگر تغییری در حرکت ایجاد شود، زمان در این تغییر چگونه دخالت دارد؟

۳- جسم در حال حرکت می‌تواند مانند یک **ذره** باشد (که منظور جسمی ذره گونه مانند یک الکترون است) یا جسمی باشد که مانند یک ذره حرکت می‌کند (مانند وقتی که تمام بخشهای آن در یک جهت و با یک آهنگ حرکت می‌کنند). جسمی را که در راستای مسیر شیبداری به طور مستقیم به پایین می‌لغزد می‌توان مانند یک ذرهٔ متحرک در نظر گرفت؛ ولی گیاه از ریشه کنده شده‌ای را نمی‌توان یک ذره فرض کرد.

## ۲-۳ مکان و جابه‌جایی

تعیین مکان یک جسم به معنای پیدا کردن موضع آن نسبت به یک نقطهٔ مرجع است که اغلب **مبدأ** (یا نقطهٔ صفر) محوری مانند محور $x$ در شکل ۲-۱ در نظر گرفته می‌شود. **جهت مثبت** محور در جهت افزایش عددها (مختصات) است که در شکل ۲-۱ به سمت راست در نظر گرفته شده است. جهت مخالف آن **جهت منفی** است.




**شکل ۲-۱** مکانی که روی یک محور تعیین می‌شود برحسب یکای طول (در اینجا متر) نشانه گذاری می‌شود و در دو جهت تا بی‌نهایت ادامه دارد. نام محور، در اینجا $x$، همیشه در قسمت مثبت مبدأ قرار دارد.

به عنوان مثال، اگر ذره‌ای در $x = 5\,\mathrm{m}$ قرار داشته باشد، به معنای آن است که به فاصلهٔ $5\,\mathrm{m}$ در جهت مثبت مبدأ قرار دارد. اگر نقطه در $x = -5\,\mathrm{m}$ باشد، در این صورت به همان فاصله از مبدأ ولی در جهت مخالف واقع است. روی محور مختصهٔ $-5\,\mathrm{m}$ کوچکتر از مختصهٔ $-1\mathrm{m}$ است و هر دو مختصه از مختصهٔ $+5\mathrm{m}$ کوچکترند. لزومی ندارد علامت مثبت برای مختصه‌ای نشان داده شود ولی علامت منفی حتماً باید نشان داده شود.

تغییر مکان ذره از $x_1$ به مکان دیگر $x_2$ **جابه‌جایی** $\Delta x$ نامیده می‌شود، که برابر است با

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad (۲-۱)$$

(نماد $\Delta$، حرف یونانی دلتای بزرگ، تغییر در یک کمیت را نشان می‌دهد و معنای آن عبارت است از مقدار نهایی آن کمیت منهای مقدار اولیهٔ آن.) هرگاه عددهای مربوط به مکانهای $x_1$ و $x_2$ در معادلهٔ ۲-۱ قرار داده شوند، جابه‌جایی در جهت مثبت (به سمت راست در شکل ۲-۱) همیشه مثبت، و جابه‌جایی در جهت مخالف (به سمت چپ در آن شکل) همیشه منفی است. برای مثال، اگر ذره‌ای از $x_1 = 5\mathrm{m}$ به $x_2 = 12\mathrm{m}$ حرکت کند،

آنگاه $\Delta x = (12\text{m}) - (5\text{m}) = +7\text{m}$. نتیجهٔ مثبت بدان معناست که حرکت در جهت مثبت صورت گرفته است. ولی اگر ذره‌ای از $x_1 = 5\text{m}$ به $x_2 = 1\text{m}$ حرکت کند، آنگاه $\Delta x = (1\text{m}) - (5\text{m}) = -4\text{m}$. نتیجهٔ منفی حاکی از آن است که حرکت در جهت منفی بوده است.

مقدار واقعی مسافت طی شده در یک حرکت مهم نیست، جابه‌جایی فقط به نقطه‌های آغازی و پایانی مربوط می‌شود. برای مثال اگر ذره‌ای از $x = 5\text{m}$ تا $x = 200\text{m}$ حرکت کند و سپس به $x = 5\text{m}$ برگردد، جابه‌جایی از آغاز تا پایان عبارت است از $\Delta x = (5\text{m}) - (5\text{m}) = 0$.

علامت مثبت جابه‌جایی لازم نیست نشان داده شود، ولی علامت منفی باید همیشه نشان داده شود. اگر علامت (و در نتیجه جهت) جابه‌جایی را در نظر نگیریم، **بزرگی** (یا مقدار مطلق) جابه‌جایی را در نظر گرفته‌ایم. به عنوان مثال بزرگی جابه‌جایی $\Delta x = -4\text{m}$ عبارت است از $4\text{m}$.

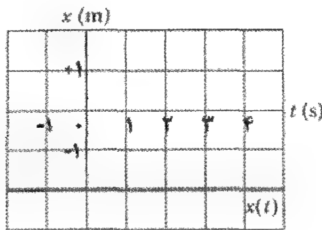
جابه‌جایی مثالی از یک **کمیت برداری** است، که کمیتی است دارای جهت و بزرگی. در فصل ۳ به طور کامل دربارهٔ بردارها بحث خواهیم کرد (در واقع ممکن است بعضی از شما این فصل را قبلاً خوانده باشید)، ولی در اینجا نیاز ما این است که بدانیم جابه‌جایی دو ویژگی دارد: (۱) یکی بزرگی آن است که عبارت است از فاصله (مانند تعداد مترها) بین مکانهای آغازی و پایانی. (۲) دیگری جهت آن است، که از مکان آغازی به مکان پایانی است، که اگر حرکت فقط در راستای یک محور باشد، می‌توان آن را با یک علامت مثبت یا یک علامت منفی نشان داد.

*آنچه در زیر می‌آید نخستین نکتهٔ وارسی است که در این کتاب خواهید دید. هر کدام از اینها شامل یک یا چند پرسش است که پاسخ آنها نیازمند استدلال یا یک محاسبهٔ ذهنی است و هر یک از آنها یک وارسی سریع از درک شما را نشان می‌دهد. پاسخ آنها در پایان کتاب داده شده است.*

✔ ***نکتهٔ وارسی ۱*** در اینجا سه جفت از مکانهای آغازی و پایانی در راستای محور $x$ به ترتیب داده شده‌اند. کدام جفتها، جابه‌جایی منفی به دست می‌دهند: (الف) $-3\text{m}$ و $+5\text{m}$؛ (ب) $-3\text{m}$ و $-7\text{m}$؛ (پ) $-3\text{m}$ و $7\text{m}$؟

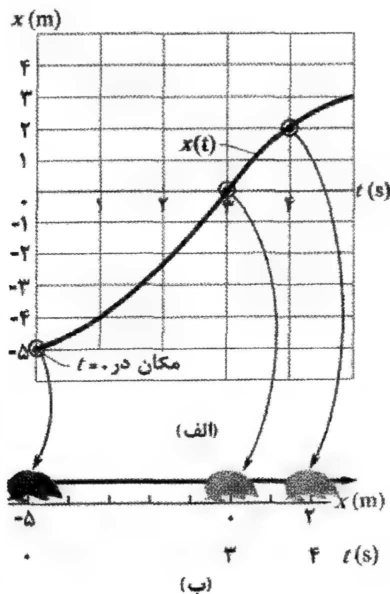
## ۲-۴ سرعت میانگین و تندی میانگین

یک راه ساده برای توصیف مکان عبارت است از ترسیم نمودار مکان $x$ برحسب زمان $t$، یعنی نمودار $x(t)$. [نماد $x(t)$ تابعی از $x$ و $t$ را نشان می‌دهد نه ضرب $x$ در $t$ را]. به عنوان یک مثال، شکل ۲-۲ نمودار $x(t)$ را برای حیوان گورکن ساکنی (که به صورت یک ذره در نظر گرفته می‌شود) در $x = -2\text{m}$ نشان می‌دهد.




**شکل ۲-۲** نمودار $x(t)$ برای گورکنی که در $x = -2\text{m}$ ساکن است. مقدار $x$ برای همهٔ زمانهای $t$، برابر با $-2\text{m}$ است.

شکل ۲-۳ الف دربارهٔ گورکن جالبتر است، چون حرکت آن را نشان می‌دهد. روشن است که گورکن در آغاز در لحظهٔ $t = 0$ در مکان $x = -5\text{m}$ بوده است. این گورکن به طرف $x = 0$ حرکت می‌کند و این نقطه را در لحظهٔ $t = 3s$ پشت سر می‌گذارد و سپس به طرف اندازه‌های بزرگتر و مثبت $x$ حرکت می‌کند. شکل ۲-۳ ب حرکت واقعی گورکن در خط راست را نشان می‌دهد و شبیه چیزی است که شما خواهید دید. نمودار




**شکل ۲-۳** (الف) نمودار $x(t)$ برای گورکن در حال حرکت. (ب) مسیر مربوط به نمودار. مقدارهای زیر محور $x$ زمانهایی را نشان می‌دهند که در آنها گورکن در مکانهای مختلف $x$ قرار دارد.

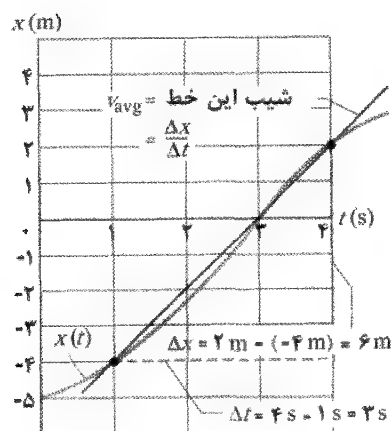
شکل ۲-۳ الف انتزاعی‌تر است و کاملاً متفاوت با چیزی است که دیده می‌شود، ولی اطلاعات زیادی را دربر دارد. این نمودار همچنین نشان می‌دهد که گورکن با چه سرعتی حرکت می‌کند.

در واقع، چندین کمیت به عبارت «با چه سرعتی» مربوط می‌شوند. یکی از آنها، **سرعت میانگین** $v_{avg}$ است و آن نسبت جابه‌جایی $\Delta x$ در بازهٔ زمانی $\Delta t$ بر آن بازهٔ زمانی است.

$$v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad (۲-۲)$$

نماد گذاری به این معنی است که مکان $x_1$ مربوط به لحظهٔ $t_1$ و مکان $x_2$ مربوط به لحظهٔ $t_2$ است. یکای متداول $v_{avg}$ متر بر ثانیه (m/s) است. یکاهای دیگری را در مسئله‌ها خواهید دید ولی همیشه برحسب طول بر زمان هستند.

روی نمودار $x$ برحسب $t$، $v_{avg}$ **شیب** خط راستی است که دو نقطهٔ خاص روی منحنی $x(t)$ را به هم وصل می‌کند: یکی مربوط به $x_2$ و $t_2$ و دیگری مربوط به $x_1$ و $t_1$. مانند جابه‌جایی، $v_{avg}$ هم دارای بزرگی و هم دارای جهت است. (سرعت میانگین کمیت برداری دیگری است.) بزرگی آن، بزرگی شیب خط است. مثبت بودن $v_{avg}$ (و شیب) به معنای این است که خط رو به بالا و به سمت راست شیب دارد و منفی بودن $v_{avg}$ (و شیب) به معنای این است که خط رو به پایین و به سمت چپ است. سرعت میانگین $v_{avg}$ همیشه همان علامت جابه‌جایی را دارد چون $\Delta t$ در معادلهٔ ۲-۲ همیشه مثبت است.




**شکل ۲-۴** محاسبهٔ سرعت میانگین میان $t = ۱\ s$ و $t = ۴\ s$ با استفاده از شیب خطی که نقطه‌های متناظر با این زمانها را روی منحنی $x(t)$ به هم وصل می‌کند.

شکل ۲-۴ نشان می‌دهد که چگونه می‌توان $v_{avg}$ در شکل ۲-۳ را برای بازهٔ زمانی $t = ۱s$ تا $t = ۴s$ پیدا کرد. خط راستی را می‌کشیم که نقطه‌ای از منحنی در آغاز بازه و نقطه‌ای از منحنی در پایان بازه را به هم وصل کند. سپس شیب $\Delta x / \Delta t$ خط راست را پیدا می‌کنیم. در یک بازهٔ زمانی معین، سرعت میانگین عبارت است از

$$v_{avg} = \frac{۶m}{۳s} = ۲m/s$$

**تندی میانگین** $s_{avg}$ روش دیگری برای توصیف «چقدر تند» حرکت کردن یک ذره است. در حالی که سرعت متوسط به جابه‌جایی $\Delta x$ ذره مربوط است، تندی میانگین به مسافت کل پیموده شده (مثلاً تعداد مترهای پیموده شده) بدون توجه به جهت ارتباط دارد. یعنی

$$s_{avg} = \frac{\text{مسافت کل}}{\Delta t} \qquad (۲-۳)$$

چون تندی میانگین جهتی *ندارد*، لذا علامت جبری نیز ندارد. گاهی $s_{avg}$ (به استثنای نداشتن علامت) همان $v_{avg}$ است. با وجود این، همان طور که در مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۱ نشان داده شده است، این دو می‌توانند کاملاً متفاوت باشند.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۱

کامیون سبکی در یک جادهٔ مستقیم با سرعت ۷۰km/h مسافت ۸/۴km را طی می‌کند و در این نقطه سوخت آن تمام می‌شود و کامیون می‌ایستد. رانندهٔ آن ۲/۰km دیگر را تا جایگاه بنزین در مدت ۳۰min پیاده می‌پیماید.

(الف) جابه‌جایی کل از نقطهٔ آغاز تا رسیدن به جایگاه بنزین چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** برای آسانی فرض کنید که راننده در جهت مثبت محور $x$ از مکان اول $x_1 = ۰$ به مکان دوم $x_2$ در جایگاه حرکت می کند. مکان دوم باید $x_2 = ۸/۴km + ۲/۰km = ۱۰/۴km$ باشد. پس جابه‌جایی $\Delta x$ راننده در راستای محور $x$ عبارت است از مکان دوم منهای مکان اول.

***محاسبه:*** از معادلهٔ ۲-۱ داریم

$$\Delta x = x_2 - x_1 = ۱۰/۴km - ۰ = ۱۰/۴km \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، جابه‌جایی کل راننده در جهت مثبت محور $x$ برابر ۱۰/۴km است.

(ب) بازهٔ زمانی $\Delta t$ از آغاز رانندگی تا رسیدن راننده به جایگاه بنزین چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** از قبل می‌دانیم که بازهٔ زمانی پیاده رفتن $\Delta t_{wlk} (= ۰/۵۰h)$ است ولی بازهٔ زمانی رانندگی $\Delta t_{dr}$ را نمی‌دانیم. با وجود این می‌دانیم که جابه‌جایی کامیون یعنی $\Delta x_{dr}$ برابر با ۸/۴km و سرعت میانگین $v_{avg,dr}$ عبارت است از ۷۰km/h. بنابراین، این سرعت میانگین عبارت است از نسبت جابه‌جایی رانندگی بر بازهٔ زمانی رانندگی.

***محاسبه‌ها:*** ابتدا می‌نویسیم

$$v_{avg.dr} = \frac{\Delta x_{dr}}{\Delta t_{dr}}$$

با ترتیب دوباره و قرار دادن داده‌ها خواهیم داشت

$$\Delta t_{dr} = \frac{\Delta x_{dr}}{v_{avg.dr}} = \frac{۸/۴km}{۷۰km/h} = ۰/۱۲h$$

پس

$$\Delta t = \Delta t_{dr} + \Delta t_{wlk} = ۰/۱۲h + ۰/۵۰h = ۰/۶۲h \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) سرعت میانگین $v_{avg}$ راننده از آغاز رانندگی تا رسیدن به جایگاه بنزین چقدر است؟ آن را هم به طور عددی و هم به طور نموداری پیدا کنید.

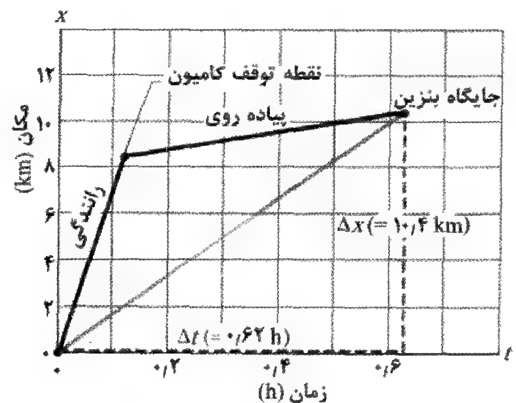
**نکتهٔ کلیدی** از معادلهٔ ۲-۲ می‌دانیم کـه $v_{avg}$ *بـرای کـل سـفر* عبارت است از نسبت جابه‌جایی $10/4\,\text{km}$ *کـل سـفر* بـر بـازهٔ زمانی $0/62\,\text{h}$ *کل سفر.*

***محاسبه:*** در اینجا داریم

$$v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10/4\,\text{km}}{0/62\,\text{h}}$$

$$= 16/8\,\text{km/h} \approx 17\,\text{km/h} \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای پیدا کردن $v_{avg}$ به طور ترسیمی، نخست تـابع $x(t)$ را بـه صورت نشان داده شده در شکل ۲-۵ رسم می‌کـنیم، کـه در آن نقطه‌های شروع و خاتمه روی نمودار عبارت‌اند از مبدأ و نقطه‌ای که با نشانهٔ «جایگاه» مشخص شده است. سرعت میانگین راننده عبارت است از شیب خط راستی که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کند؛ یعنی $v_{avg}$ عبارت است از نسبت *عرض* $(\Delta x = 10/4\,\text{km})$ به *طول* $(\Delta t = 0/62\,\text{h})$، کـه $v_{avg} = 16/8\,\text{km/h}$ را بـه دسـت می‌دهد.




**شکل ۲-۵** خطهای مشخص شده با «رانندگی» و «پیاده روی» نمـودار مکان- زمان مراحل رانندگی و پیاده روی هستند. (در نمـودار مرحلـهٔ پیاده روی فرض شـده است که پیاده روی با آهنگ ثابتی انجام گرفتـه است.) شیب خط راستی که مبدأ و «جایگاه» را به هم وصل مـی‌کنـد، سرعت میانگین سفر از آغاز تا جایگاه است.

(ت) فرض کنید که زمان گرفتن بنزین، پرداخت پول آن و پس از آن برگشت به محل کامیون $45\,\text{min}$ طول کشیده باشد. تندی میانگین از نقطهٔ آغاز رانندگی تا برگشتن به محل کامیون چقـدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** تنـدی میـانگین راننـده عبـارت اسـت از نسـبت مسافت کل پیموده شده بر بازهٔ زمانی کل که حرکت در آن انجام شده است.

***محاسبه:*** مسـافت کـل طـی شـده برابـر اسـت بـا $8/4\,\text{km} + 2/0\,\text{km} + 2/0\,\text{km} = 12/4\,\text{km}$. بازهٔ زمانی کل برابـر اسـت بـا $0/12\,\text{h} + 0/50\,\text{h} + 0/75\,\text{h} = 1/73\,\text{h}$ . بنـابراین، از معادلهٔ ۲-۳ داریم

$$s_{avg} = \frac{12/4\,\text{km}}{1/37\,\text{h}} = 9/1\,\text{km/h} \qquad \text{(پاسخ)}$$

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱: آیا مسئله را فهمیده‌اید؟*

مشکل عمومی به سادگی این است کـه مسـئله فهمیـده نشـود. بهترین آزمایش فهمیدن این است: آیا می‌توانید مسئله را توضیح دهید؟

داده‌ها را با یکاها و با استفاده از نمادهـای معرفـی شـده در فصل بنویسید. [در مسئله نمونهٔ ۲-۱، داده‌های مسـئله بـه شـما کمک می‌کنند تا جابه‌جایی خالص $\Delta x$ در قسمت (الف) و بازهٔ زمانی $\Delta t$ متناظر با آن در قسـمت (ب) را پیـدا کنیـد.] کمیـت مجهول و نماد آن را مشخص کنیـد. [در مسـئلهٔ نمونـه، کمیـت مجهول قسمت (پ) سرعت میانگین $v_{avg}$ راننده است.] سپس رابطهٔ میان کمیت مجهول و داده‌ها را بیابید. (این رابطه با معادلهٔ ۲-۲، تعریف سرعت میانگین، داده شده است.)

### *تدبیر ۲: آیا یکاها درست‌اند؟*

مطمئن شوید که در هنگـام قـرار دادن عـددها در معادلـه‌هـا از مجموعهٔ یکاهای سازگاری استفاده کـرده‌ایـد. در مسـئلهٔ نمونـهٔ ۲-۱ یکاهای منطقی برحسب داده‌ها کیلومتر برای فاصله، ساعت برای بازهٔ زمانی و کیلومتر در ساعت برای سرعتها هستند. گاهی نیاز دارید یکاها را تبدیل کنید.

### *تدبیر ۳: آیا پاسخ شما معقول است؟*

آیا پاسخ شما دارای مفهوم اسـت، یـا خیلـی بـزرگ یـا خیلـی کوچـک اسـت؟ آیـا علامـت آن درسـت اسـت؟ آیـا یکاهـا مناسب‌اند؟ در قسمت (پ) مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۱ مثلاً پاسخ درست $17\,\text{km/h}$ اسـت. اگـر آن را بـه صـورت $0/00017\,\text{km/h}$، $-17\,\text{km/s}$، $17\,\text{km/s}$، یا $17000\,\text{km/s}$ پیدا کنید، بایـد فـوراً متوجه شوید که اشتباهی رخ داده است. اشتباه ممکـن اسـت در روش حل، محاسبه عددهـا یـا در استفادهٔ نادرسـت از ماشـین حساب باشد.

### *تدبیر ۴: خواندن نمودار*

شکلهای ۲-۲، ۲-۳ الف، ۲-۴ و ۲-۵ نمودارهایی هستند که بـه آسانی باید بتوانید آنها را بخوانید. در هـر نمـودار متغیـر محـور افقی زمان $t$ و جهت افزایش زمان به سمت راست است. در هر یک، متغیر روی محور قائم مکان $x$ ذرهٔ متحرک نسبت بـه مبـدأ است و جهت مثبت $x$ به سوی بالاست. همیشه به یکاهـایی کـه متغیرها باید برحسـب آنهـا بیـان شـوند (ثانیـه، دقیقـه، متـر یـا کیلومتر) توجه داشته باشید.

## ۲-۵ سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای

تاکنون برای توصیف این که جسم با چه سرعتی حرکت می‌کند دو روش را دیده‌اید: سرعت میانگین و تندی میانگین، که هر دوی آنها در بازهٔ زمانی $\Delta t$ اندازه‌گیری می‌شوند. اما عبارت «با چه سرعتی» بیشتر به چقدر سریع بودن یک ذره در یک لحظهٔ معین اشاره دارد و این همان **سرعت لحظه‌ای** (یا به طور ساده **سرعت**) $v$ است.

سرعت در هر لحظه از کوتاه کردن بازهٔ زمانی $\Delta t$ در رابطهٔ سرعت میانگین و نزدیک و نزدیکتر کردن $\Delta t$ به صفر، به دست می‌آید. وقتی $\Delta t$ کاهش می‌یابد، سرعت میانگین به یک مقدار حدی می‌رسد که سرعت در آن لحظه است:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (۲-۴)$$

توجه کنید که $v$ آهنگ تغییر مکان $x$ ذره در یک لحظهٔ معین برحسب زمان است؛ یعنی، $v$ مشتق $x$ نسبت به زمان است. همچنین توجه کنید که $v$ در هر لحظه برابر شیب منحنی مکان ذره برحسب زمان در نقطهٔ مربوط به آن لحظه است. سرعت یک کمیت برداری دیگر است و بنابراین دارای جهت است.

**تندی**، بزرگی سرعت است؛ یعنی، تندی عبارت از سرعتی است که هیچ نوع نشانی حاکی از جهت چه به صورت حروف و چه به صورت علامت جبری ندارد. (*دقت کنید:* تندی و تندی میانگین می‌توانند کاملاً متفاوت باشند.) سرعت $+5\,m/s$ و $-5\,m/s$ هر دو دارای تندی $5\,m/s$ هستند. تندی‌سنج اتومبیلها، تندی را اندازه می‌گیرد نه سرعت را (جهت را نمی‌تواند معین کند.)

> ✓ ***نکتهٔ وارسی ۲*** معادله‌های زیر مکان $x(t)$ ذره را در چهار وضعیت نشان می‌دهد (در همهٔ معادله‌ها، $x$ برحسب متر، $t$ برحسب ثانیه و $t>0$ است): (۱) $x = 3t - 2$؛ (۲) $x = -4t^2 - 2$؛ (۳) $x = 2/t^2$ و (۴) $x = -2$. (الف) در کدامیک از این وضعیتها سرعت $v$ ذره ثابت است؟ (ب) در کدامیک $v$ در جهت منفی محور $x$ است؟

**مسئلهٔ نمونه ۲-۲**

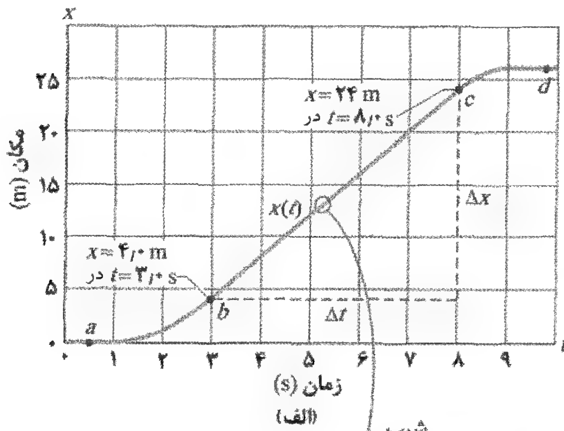
شکل ۲-۶ الف نمودار $x(t)$ را برای اتاقک آسانسوری نشان می‌دهد که در آغاز ساکن بوده است، سپس این آسانسور به طرف بالا (که آن را جهت مثبت محور $x$ می‌گیریم) حرکت می‌کند و پس از آن می‌ایستد. $v(t)$ را رسم کنید.

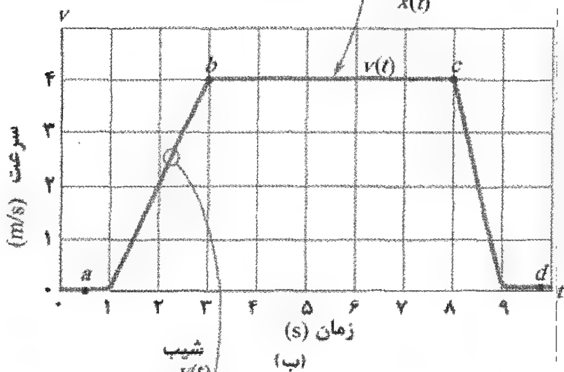
**نکتهٔ کلیدی** سرعت را در هر لحظه از روی شیب منحنی $x(t)$ در آن لحظه می‌توان پیدا کرد.

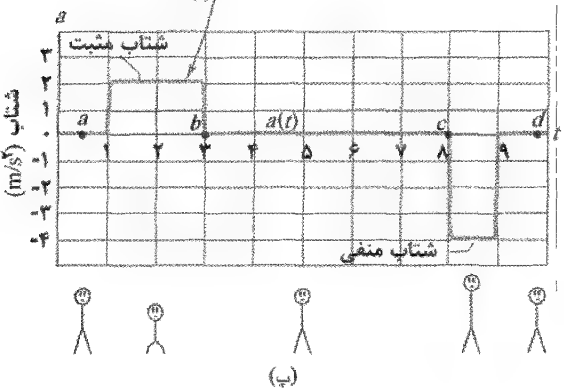
***محاسبه‌ها:*** شیب $x(t)$ و در نتیجه سرعت نیز در بازه‌های زمانی صفر تا ۱ ثانیه و از ۹ ثانیه به بعد صفر است و در نتیجه اتاقک ساکن است. در طول بازهٔ زمانی $bc$، شیب منحنی ثابت و غیر صفر است، بنابراین آسانسور با سرعت ثابتی حرکت می‌کند. پس شیب $x(t)$ را به صورت زیر محاسبه کنیم

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{24\,m - 4.0\,m}{8.0\,s - 3.0\,s} = +4.0\,m/s$$

علامت مثبت نشان می‌دهد که آسانسور در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کند. این بازه‌ها (که در آنها $v=0$ و $v = 4\,m/s$) در شکل ۲-۶ ب رسم شده‌اند. افزون بر آن، هنگامی که اتاقک در آغاز شروع به حرکت می‌کند و پس از آن آهسته شده و




**شکل ۲-۶** (الف) منحنی تابع $x(t)$ برای اتاقک آسانسوری که در راستای محور $x$ به سوی بالا حرکت می‌کند. (ب) منحنی تابع $v(t)$ برای اتاقک آسانسور. توجه کنید که این منحنی مشتق منحنی $x(t)$ است ($v = dx/dt$). (پ) منحنی $a(t)$ برای اتاقک آسانسور. این منحنی مشتق منحنی $v(t)$ است ($a = dv/dt$). آدمکهای زیر شکل احساس شتاب را از نظر مسافر درون آسانسور نشان می‌دهند.

می‌ایستد، $v$ به گونه‌ای که در بازه‌های ۱s تا ۳s و ۸s تا ۹s نشان داده شده است، تغییر می‌کند. بنابراین، شکل ۲-۶ ب نمودار مورد نظر است. (شکل ۲-۶ پ در بخش ۲-۶ مورد بحث قرار می‌گیرد.)

با داشتن نمودار $v(t)$ مانند شکل ۲-۶ ب، می‌توانیم «وارون عمل کنیم» و شکل مربوط به نمودار $x(t)$ را به دست آوریم (شکل ۲-۶ الف). البته، مقدارهای واقعی $x$ را در زمانهای مختلف نمی‌دانیم، زیرا نمودار $v(t)$ فقط *تغییرات* $x$ را نشان می‌دهد. برای یافتن تغییر $x$ در هر بازه‌ای به زبان حسابان، باید مساحت «زیر منحنی» نمودار $v(t)$ را برای همان بازه حساب کنیم. مثلاً، در بازهٔ ۳s تا ۸s که در آن آسانسور دارای سرعت ۴/۰m/s است، تغییر در $x$ عبارت است از

$$\Delta x = (۴/۰\,\mathrm{m/s})(۸/۰\,\mathrm{s} - ۳/۰\,\mathrm{s}) = +۲۰\,\mathrm{m}$$

(این مساحت مثبت است زیرا منحنی $v(t)$ در بالای محور $t$ قرار دارد.) شکل ۲-۶ الف نشان می‌دهد که در این بازهٔ زمانی در واقع $x$ به اندازهٔ ۲۰m افزایش یافته است. با وجود این، شکل ۲-۶ ب *مقدارهای* $x$ را در آغاز و پایان بازه نشان نمی‌دهد. برای آن، اطلاعات بیشتری مانند مقدار $x$ در برخی لحظه‌ها مورد نیاز است.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۳**

مکان ذره‌ای که روی محور $x$ حرکت می‌کند با رابطهٔ زیر داده شده است

$$x = ۷/۸ + ۹/۲t - ۲/۱\,t^{۳} \qquad (۲\text{-}۵)$$

که در آن $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. سرعت ذره در $t = ۳/۵\mathrm{s}$ چقدر است؟ آیا سرعت ثابت است یا به طور پیوسته تغییر می‌کند؟

**نکتهٔ کلیدی** سرعت مشتق اول تابع مکان $x(t)$ (نسبت به زمان) است.

***محاسبه‌ها:*** برای ساده بودن، یکاها را از معادلهٔ ۲-۵ حذف کرده‌ایم، ولی اگر بخواهیم می‌توانیم آنها را با تغییر دادن ضریبها به صورت ۷/۸m، ۹/۲m/s و $-۲/۱\mathrm{m/s^{۳}}$ در معادله قرار دهیم. از معادلهٔ ۲-۵ مشتق می‌گیریم، داریم

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(۷/۸ + ۹/۲t - ۲/۱\,t^{۳})$$

در نتیجه

$$v = ۰ + ۹/۲ - (۳)(۲/۱)t^{۲} = ۹/۲ - ۶/۳t^{۲} \qquad (۲\text{-}۶)$$

در $t = ۳/۵\mathrm{s}$ خواهیم داشت

$$v = ۹/۲ - (۶/۳)(۳/۵)^{۲} = -۶۸\,\mathrm{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

در $t = ۳/۵\mathrm{s}$، ذره با تندی ۶۸m/s در جهت منفی محور $x$ (به علامت منفی توجه کنید) حرکت می‌کند. چون کمیت $t$ در معادلهٔ ۲-۶ ظاهر شده است، سرعت $v$ به $t$ بستگی دارد و بنابراین، به طور پیوسته تغییر می‌کند.

## ۲-۶ شتاب

هرگاه سرعت ذره تغییر کند، گفته می‌شود که ذره **شتاب** گرفته (یا شتابدار شده) است. برای حرکت در راستای یک محور، **شتاب میانگین** $a_{avg}$ در بازهٔ زمانی $\Delta t$ عبارت است از

$$a_{avg} = \frac{v_{۲} - v_{۱}}{t_{۲} - t_{۱}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (۲\text{-}۷)$$

که در آن ذره در لحظهٔ $t_{۱}$ دارای سرعت $v_{۱}$ و در لحظهٔ $t_{۲}$ دارای سرعت $v_{۲}$ است. **شتاب لحظه‌ای** (یا به طور ساده **شتاب**) مشتق سرعت نسبت به زمان است

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (۲\text{-}۸)$$

به بیان دیگر، شتاب یک ذره در هر لحظه عبارت است از آهنگی که با آن سرعت ذره در آن لحظه تغییر می‌کند. به طور ترسیمی، شتاب در هر نقطه شیب منحنی $v(t)$ در آن نقطه است. معادلهٔ ۲-۸ را با معادلهٔ ۲-۴ می‌توان ترکیب کرد و نوشت

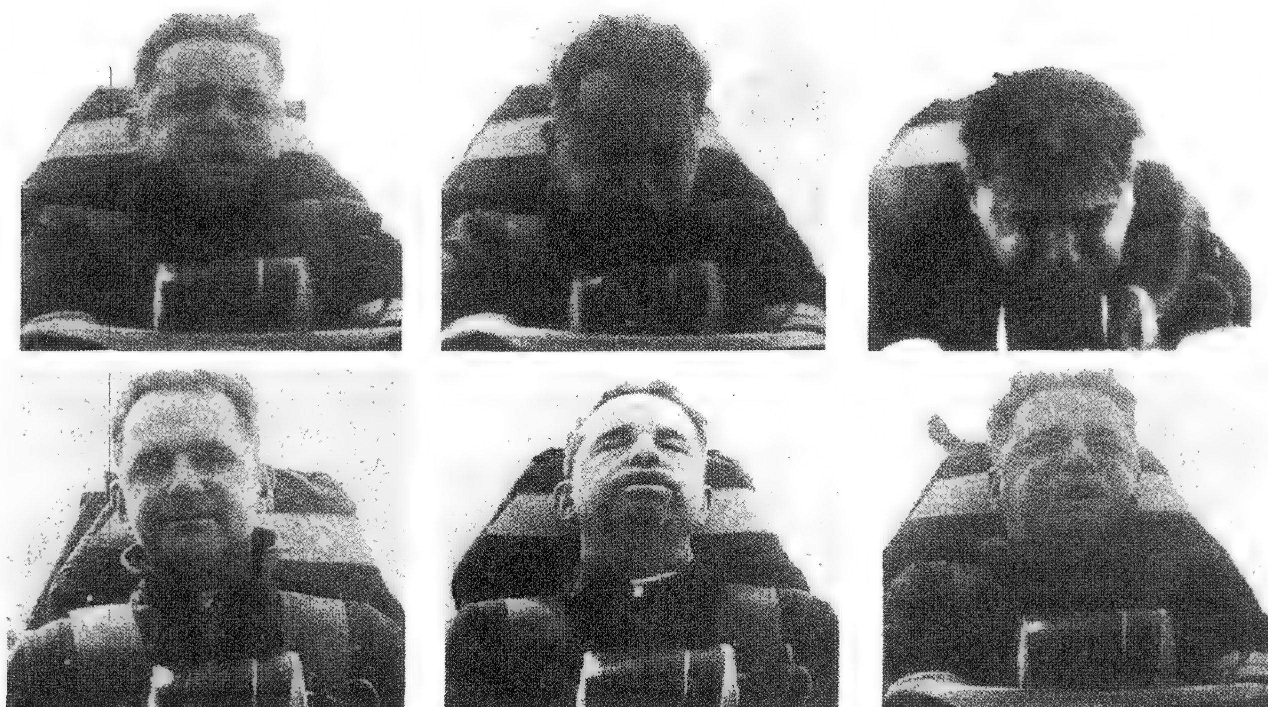
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} \qquad (۲\text{-}۹)$$

به بیان دیگر، شتاب ذره در هر لحظه مشتق دوم مکان آن $x(t)$ نسبت به زمان است.

یکای متداول شتاب متر بر ثانیه بر ثانیه است: $\mathrm{m/(s\cdot s)}$ یا $\mathrm{m/s^{۲}}$. یکاهای دیگر شتاب به شکل (زمان · زمان)/فاصله یا $^{۲}$(زمان)/فاصله هستند. شتاب هم دارای بزرگی و هم جهت است (این نیز کمیت برداری است). علامت جبری آن مانند جابه‌جایی و سرعت جهت آن را روی یک محور نمایش می‌دهد؛ یعنی شتاب با مقدار مثبت در جهت مثبت محور و شتاب با مقدار منفی در جهت منفی آن است.

شکل ۲-۶ پ نمودار شتاب آسانسور مورد بحث در مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۲ است. این منحنی $a(t)$ را با منحنی $v(t)$ مقایسه کنید- هر نقطه روی منحنی $a(t)$ مشتق (شیب) منحنی $v(t)$ در لحظهٔ مربوط است. هرگاه $v$ ثابت باشد (در ۰ یا ۴m/s)، مشتق صفر و شتاب هم صفر است. هنگامی که آسانسور در آغاز شروع به حرکت می‌کند، منحنی $v(t)$ دارای مشتق مثبت است (شیب مثبت)، که به معنای مثبت بودن $a(t)$ است. هنگامی که آسانسور برای ایستادن آهسته می‌شود، مشتق و شیب منحنی $v(t)$ منفی هستند؛ یعنی $a(t)$ منفی است.

حال شیبهای منحنی $v(t)$ را در دو مرحلهٔ شتاب‌گیری مقایسه کنید. شیب وابسته به کم شدن سرعت آسانسور (عموماً «شتاب منفی یا کند شونده» نامیده می‌شود) تندتر است چون آسانسور در مدت زمانی برابر با نصف زمانی که تندی آن افزایش می‌یابد متوقف می‌شود. شیب تندتر به معنای این است که بزرگی شتاب منفی، همان‌طور که در شکل ۲-۶ پ نشان داده شده است، از بزرگی شتاب مثبت بیشتر است.



**شکل ۲-۷** سرهنگ استپ[1] در موشکی که با سرعت زیاد بالا می‌رود (شتاب به سوی خارج از صفحه) و سپس ناگهان ترمز می‌کند (شتاب به درون صفحه).

در شکل ۲-۶ آدمکهای رسم شده در زیر آن احساس انسان موقع سوار بودن در آسانسور را نشان می‌دهند. هنگامی که آسانسور در آغاز شتاب می‌گیرد احساس می‌کنید که به سوی پایین فشرده می‌شوید؛ بعد که آسانسور ترمز می‌کند تا بایستد احساس می‌کنید که به سمت بالا کشیده می‌شوید. در فاصلهٔ بین این دو احساس خاصی ندارید، و به عبارت دیگر بدن شما به شتابها واکنش نشان می‌دهد (به صورت یک شتاب‌سنج عمل می‌کند) ولی به سرعتها واکنش نشان نمی‌دهد (مانند تندی‌سنج عمل نمی‌کند.) هنگامی که در اتومبیلی با سرعت $90\,km/h$ یا در هواپیمایی با $900\,km/h$ حرکت می‌کنید، بدن حرکتی احساس نمی‌کند. ولی اگر اتومبیل یا هواپیما به طور سریع تغییر سرعت دهد از این تغییر به شدت مطلع می‌شوید و حتی شاید وحشت کنید. بخشی از هیجان سواری در پارکهای تفریحی به واسطهٔ تغییرات تند سرعت است که شما در معرض آن قرار می‌گیرید (چون شتابها اثر می‌گذارند نه سرعتها). یک مثال بارز از این نوع در عکسهای شکل ۲-۷ نشان داده شده است. این عکسها در حالی که موشکی به طور سریع شتابدار و سپس به طور سریع متوقف شده است گرفته شده‌اند.

شتابهای بزرگ را در بعضی مواقع برحسب یکای $g$ بیان می‌کنند

$$1g = 9/8\,m/s^2 \qquad (\text{یکای } g) \qquad (2\text{-}10)$$

(به گونه‌ای که در بخش ۲-۹ بحث خواهیم کرد، $g$ شتاب جسمی در حال سقوط در نزدیکی سطح زمین است.) در قطارهای هوایی شهر بازی شتاب در زمان کوتاهی تا $3g$ بالا برده می‌شود که $(3)(9/8\,m/s^2)$ یا تقریباً $29\,m/s^2$ است، که بیشتر از آنی است که بهای سواری گرفتن را توجیه کند.

## تدبیرهای حل مسئله

### تدبیر ۵: علامت شتاب

در گفتگوی عادی، علامت شتاب معنای علمی ندارد: شتاب مثبت به معنای این است که تندی جسم در حال افزایش، و شتاب منفی به معنای این است که تندی جسم در حال کاهش است (جسم شتاب کند کننده دارد). با این وجود، در این کتاب، علامت شتاب نشان دهندهٔ جهت آن است بدون توجه به این که تندی جسمی در حال زیاد شدن یا کم شدن باشد.

برای مثال، اگر اتومبیلی با سرعت اولیهٔ $v = -25\,m/s$ ترمز کند و پس از $5/0\,s$ متوقف شود در این صورت $a_{avg} = +5/0\,m/s^2$ خواهد بود. این شتاب *مثبت* است، ولی تندی اتومبیل کم می‌شود. دلیل این تفاوت در علامت‌هاست: جهت شتاب مخالف با جهت سرعت است.

اینجا روش مناسبی برای تفسیر علامتها ارائه می‌شود:

1. J.P. Stapp

☜ اگر علامتهای سرعت و شتاب ذره یکسان باشند، تندی ذره افزایش می‌یابد. اگر علامتها مخالف باشند. تندی کاهش می‌یابد.

✔ **نکتهٔ وارسی ۳** خرسی در راستای محور $x$ حرکت می‌کند. در حین حرکت، علامت شتاب آن در این حالتها چیست؟ (الف) در جهت مثبت با افزایش تندی، (ب) در جهت مثبت با کاهش تندی، (پ) در جهت منفی با افزایش تندی و (ت) در جهت منفی با کاهش تندی.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۴ مهارت خود را تقویت کنید**

مکان ذره‌ای روی محور $x$ در شکل ۲-۱ با رابطهٔ زیر داده شده است

$$x = 4 - 27t + t^3$$

که در آن $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است.

(الف) چون مکان $x$ تابعی از زمان $t$ است، ذره باید در حرکت باشد. تابع سرعت ذره $v(t)$ و تابع شتاب $a(t)$ آن را به دست آورید.

**نکته‌های کلیدی** (۱) برای به دست آوردن تابع سرعت $v(t)$ باید از تابع مکان $x(t)$ نسبت به زمان مشتق بگیریم. (۲) برای به دست آوردن تابع شتاب $a(t)$ باید از تابع سرعت $v(t)$ نسبت به زمان مشتق بگیریم.

***محاسبه‌ها:*** مشتق تابع مکان به دست می‌دهد

$$v = -27 + 3t^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

که در آن $v$ برحسب متر بر ثانیه است. پس از این، مشتق تابع سرعت به دست می‌دهد

$$a = +6t \qquad \text{(پاسخ)}$$

که در آن $a$ برحسب متر بر مربع ثانیه است.

(ب) در چه زمانی $v = 0$ است؟

***محاسبه:*** با قرار دادن $v(t) = 0$، خواهیم داشت

$$0 = -27 + 3t^2$$

که از حل آن داریم

$$t = \pm 3\,\text{s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، در ۳s پیش و ۳s پس از مبداء زمان سرعت صفر است.

(پ) حرکت ذره را به ازای $t \geq 0$ توصیف کنید.

***استدلال:*** باید رابطه‌های $x(t)$، $v(t)$ و $a(t)$ را بیازمایید.

در $t = 0$، ذره در $x(0) = +4\text{m}$ است و با سرعت $v(0) = -27\text{m/s}$ حرکت می‌کند، یعنی در جهت منفی محور $x$ است. در این موقع شتاب ذره $a(0) = 0$ است چون درست پس از آن سرعت ذره تغییر نمی‌کند.

به ازای $0 < t < 3\text{s}$، سرعت ذره هنوز منفی است، بنابراین در جهت منفی به حرکت ادامه می‌دهد. ولی شتاب آن دیگر صفر نیست بلکه افزاینده و مثبت است. چون علامتهای سرعت و شتاب مخالف یکدیگرند، حرکت ذره باید در حال کند شدن باشد.

در واقع پیشتر دیدیم که ذره به طور لحظه‌ای در $t = 3\text{s}$ می‌ایستد. درست پس از آن ذره در سمت چپ مبدأ در شکل ۲-۱ در حال دور شدن است. با قرار دادن $t = 3\text{s}$ در معادلهٔ مربوط به $x(t)$، دیده می‌شود که ذره در مکان $x = -50\,\text{m}$ قرار دارد و شتاب ذره باز هم مثبت است.

به ازای $t > 3\text{s}$، ذره به سمت راست محور حرکت می‌کند. شتاب آن مثبت می‌ماند و بزرگی آن زیاد می‌شود. سرعت اکنون مثبت است و بزرگی آن افزایش می‌یابد.

## ۲-۷ شتاب ثابت: یک حالت خاص

در بسیاری از انواع حرکت، شتاب ثابت یا تقریباً ثابت است. مثلاً وقتی که چراغ راهنمایی از قرمز به سبز تبدیل می‌شود، ممکن است به اتومبیل با آهنگ تقریباً ثابتی شتاب بدهید. بنابراین، نمودارهای مکان، سرعت و شتاب اتومبیل شبیه شکل ۲-۸ خواهد بود. (توجه کنید که $a(t)$ در شکل ۲-۸ پ ثابت است، و این ایجاب می‌کند که $v(t)$ در شکل ۲-۸ ب شتاب ثابت داشته باشد.) پس از آن هنگامی که برای ایستادن مجبور شوید ترمز کنید، شتاب (یا به بیان کلی شتاب منفی) نیز ممکن است تقریباً ثابت باشد.

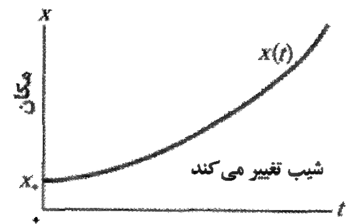
چنین مواردی بقدری عادی‌اند که دستهٔ خاصی از معادله‌ها برای پرداختن به آنها فراهم آمده‌اند. یکی از رویکردها برای به دست آوردن این معادله‌ها در این بخش آورده شده است. رویکرد دیگر در بخش بعد خواهد آمد. در سراسر هر دو بخش و بعداً وقتی که مسئله‌ها را حل می‌کنید به خاطر داشته باشید که *این معادله‌ها فقط برای شتاب ثابت (یا حالتهایی که در آنها بتوانید شتاب را تقریباً ثابت در نظر بگیرید) معتبرند.*

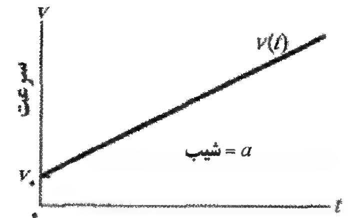
هرگاه شتاب ثابت باشد، شتاب میانگین و شتاب لحظه‌ای برابرند و معادلهٔ ۲-۷ را با کمی تغییر در نماد آن می‌توان به صورت زیر نوشت

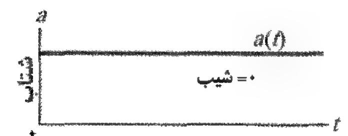
$a = a_{\text{avg}} = \dfrac{v - v_0}{t - 0}$ در اینجا $v_0$ سرعت در زمان $t = 0$ و $v$ سرعت در هر زمان بعدی $t$ است. این معادله را می‌توان به این صورت نوشت

$$v = v_0 + at \qquad (۲\text{-}۱۱)$$

برای امتحان، توجه کنید که این معادله به ازای $t = 0$ همان طور که انتظار دارید به $v = v_0$ ساده می‌شود. برای بررسی بیشتر، مشتق معادلهٔ ۲-۱۱ را در نظر بگیرید. با انجام آن به




**شکل ۲-۸** (الف) مکان $x(t)$ ذره‌ای که با شتاب ثابت حرکت می‌کند. (ب) سرعت $v(t)$ آن در هر نقطه با شیب منحنی $x(t)$ در آن نقطه داده شده است. (پ) شتاب (ثابت) آن برابر با شیب (ثابت) منحنی $v(t)$ است.

$dv/dt = a$ می‌رسید که تعریف $a$ است. شکل ۲-۸ ب نمودار معادلهٔ ۲-۱۱، یعنی نمودار تابع $v(t)$ را نشان می‌دهد؛ که تابعی خطی است و بنابراین، شیب آن یک خط راست است.

با روش مشابهی می‌توان معادلهٔ ۲-۲ را (با کمی تغییرات در نماد) به صورت زیر نوشت

$$v_{avg} = \frac{x - x_0}{t - 0}$$

در نتیجه داریم

$$x = x_0 + v_{avg} t \qquad (۱۲\text{-}۲)$$

که در آن $x_0$ مکان ذره در لحظهٔ $t = 0$ و $v_{avg}$ سرعت میانگین بین $t = 0$ و زمان $t$ پس از آن است.

در مورد تابع خطی سرعت در معادلهٔ ۲-۱۱، سرعت *میانگین* در هر بازهٔ زمانی (مثلاً از $t = 0$ تا هر زمان بعدی $t$) عبارت است از میانگین سرعت در آغاز بازه ($= v_0$) و سرعت در انتهای بازه ($= v$). بنابراین، در بازهٔ $t = 0$ تا زمان بعدی $t$ پس از آن، سرعت میانگین عبارت است از

$$v_{avg} = \frac{1}{2}(v_0 + v) \qquad (۱۳\text{-}۲)$$

با قرار دادن مقدار $v$ از سمت راست معادلهٔ ۲-۱۱ و اندکی تغییر در بازنویسی، داریم

$$v_{avg} = v_0 + \frac{1}{2}at \qquad (۱۴\text{-}۲)$$

سرانجام با قرار دادن معادلهٔ ۲-۱۴ در معادلهٔ ۲-۱۲ خواهیم داشت

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (۱۵\text{-}۲)$$

برای امتحان، توجه کنید که با قرار دادن $t = 0$، همان طور که انتظار می‌رود، $x = x_0$ به دست می‌آید. برای بررسی بیشتر، اگر از معادلهٔ ۲-۱۵ مشتق بگیریم، همان طور که باز هم انتظار داریم، معادلهٔ ۲-۱۱ به دست می‌آید. شکل ۲-۸ الف نمودار معادلهٔ ۲-۱۵ را نشان می‌دهد؛ که تابعی درجهٔ دو و بنابراین، نمودار آن یک منحنی است.

معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵ *معادله‌های اساسی برای شتاب ثابت‌اند*؛ از اینها می‌توان برای حل هر مسئلهٔ شتاب ثابت در این کتاب استفاده کرد. ولی معادله‌های دیگری را می‌توان به دست آورد که در وضعیتهای خاصی می‌توانند مفید باشند. نخست، توجه کنید که در هر مسئله‌ای در مورد شتاب ثابت پنج کمیت مرتبط‌اند- یعنی، $x - x_0$، $v$، $t$، $a$ و $v_0$. معمولاً یکی از این کمیتها در مسئله *وجود ندارد، چه به صورت معلوم یا نامعلوم.* بنابراین، با معلوم بودن سه کمیت باقیمانده چهارمی خواسته می‌شود.

هر یک از معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵ شامل چهار تا از این کمیتها هستند، ولی نه چهار کمیت یکسان. در معادلهٔ ۲-۱۱، «کمیت حذف شده» جابه‌جایی $x - x_0$ است. در معادلهٔ ۲-۱۵، این کمیت سرعت $v$ است. این دو معادله را به سه روش می‌توان ترکیب کرد و سه معادلهٔ اضافی به دست آورد که در هر کدام از آنها «متغیر حذف شده» متفاوت است. نخست $t$ را حذف می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (۱۶\text{-}۲)$$

این معادله وقتی مفید است که $t$ نامعلوم باشد و نیازی هم به یافتن آن نباشد. دوم می‌توانیم شتاب $a$ را بین معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵ حذف کنیم تا معادله‌ای به دست آید که در آن $a$ وجود نداشته باشد

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 - v)t \qquad (۱۷\text{-}۲)$$

سرانجام، می‌توان $v_0$ را حذف کرد تا این معادله به دست آید

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2 \qquad (۱۸\text{-}۲)$$

به تفاوت ظریف میان این دو معادله و معادلهٔ ۲-۱۵ توجه کنید. یکی شامل سرعت اولیهٔ $v_0$ و دیگری شامل سرعت $v$ در زمان $t$ است.

جدول ۲-۱ معادله‌های اساسی حرکت با شتاب ثابت (معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵) و معادله‌های خاصی را که به دست آوردیم نشان می‌دهد. برای حل کردن یک مسئلهٔ شتاب ثابت ساده، می‌توان یکی از معادله‌های این جدول را (اگر این جدول

در اختیار باشد) به کار برد. معادله‌ای را انتخاب کنید که تنها متغیر نامعلوم آن همان متغیر مورد نظر در مسئله باشد. راه ساده‌تر این است که فقط معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵ را به خاطر بسپارید و سپس آنها را به طور همزمان در مواردی که نیاز باشد حل کنید.

**جدول ۲-۱**

معادله‌های حرکت با شتاب ثابت*

| شمارهٔ معادله | معادله | کمیتی که وجود ندارد |
|---|---|---|
| ۲-۱۱ | $v = v_0 + at$ | $x - x_0$ |
| ۲-۱۵ | $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ | $v$ |
| ۲-۱۶ | $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ | $t$ |
| ۲-۱۷ | $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$ | $a$ |
| ۲-۱۸ | $x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$ | $v_0$ |

* پیش از آن که از معادله‌های این جدول استفاده کنید باید از ثابت بودن شتاب مطمئن شوید.

**✓ نکتهٔ وارسی ۴** معادله‌های زیر مکان $x(t)$ ذره‌ای را در چهار وضعیت نشان می‌دهند: (۱) $x = 3t - 4$؛ (۲) $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$؛ (۳) $x = 2/t^2 - 4/t$؛ (۴) $x = 5t^2 - 3$. برای کدامیک از این حالتها معادله‌های جدول ۲-۱ را می‌توان به کار برد.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۵

هنگامی که نوک دارکوب اولین ضربه را به تنهٔ درخت می‌زند، سر او با تندی $7/49\,m/s$ به سمت جلو حرکت می‌کند. نوک پس از $1/87\,mm$ نفوذ در تنهٔ درخت متوقف می‌شود. فرض کنید شتاب ثابت است، بزرگی آن را برحسب g به دست آورید.

**نکتهٔ کلیدی** می‌توانیم از معادله‌های حرکت با شتاب ثابت برای وضعیت خاصی استفاده کنیم؛ می‌توان از معادلهٔ ۲-۱۶، ($v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$) که رابطهٔ بین سرعت و جابه‌جایی است، استفاده کرد.

***محاسبه‌ها:*** وقتی سر دارکوب متوقف شود، سرعت نهایی برابر با $v = 0$ است. سرعت اولیه برابر با $v_0 = 7/49\,m/s$ است و جابه‌جایی در طی این شتاب ثابت برابر است با $x - x_0 = 1/87 \times 10^{-3}\,m$ . با قرار دادن این مقدارها در معادلهٔ ۲-۱۶، داریم

$$0^2 = (7/49\,m/s)^2 + 2a(1/87 \times 10^{-3}\,m)$$

یا

$$a = -1/500 \times 10^4\,m/s^2$$

با تقسیم کردن بر $g = 9/8\,m/s^2$ و در نظر گرفتن مقدار مطلق، بزرگی شتاب سر دارکوب برابر است با

$$a = (1/53 \times 10^3)g \quad \text{(پاسخ)}$$

***تفسیر:*** شتابی به این بزرگی نوعی برای دارکوب تقریباً ۷۰ برابر شتابی است که بر سرهنگ استپ در شکل ۲-۷ وارد می‌شود و مسلماً برای او کشنده خواهد بود. توانایی دارکوب در این که چگونه چنین شتاب بزرگی را تحمل می‌کند، ناشناخته است ولی دو دلیل عمده وجود دارد. (۱) حرکت دارکوب تقریباً در راستای یک خط راست است. برخی پژوهشگران معتقدند که وقتی سر انسانها یا حیوانات (و بدنهٔ مغز) دور گردن بچرخد ضربهٔ سخت مغزی رخ می‌دهد، ولی این حرکت شباهتی به حرکت در راستای خط راست ندارد. (۲) مغز دارکوب به خوبی به کاسهٔ سرش متصل است و حرکت یا نوسان آن درست پس از ضربه وجود ندارد و در نتیجه پارگی بین مغز و کاسهٔ سرش رخ نمی‌دهد.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۶ مهارت خود را تقویت کنید

شکل ۲-۹ سرعت $v$ ذره‌ای را برحسب مکان آن در حین حرکت شتاب ثابت ذره در راستای محور $x$ نشان می‌دهد. سرعت آن در مکان $x = 0$ چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توانیم از معادله‌های حرکت با شتاب ثابت برای وضعیتی خاص استفاده کنیم، می‌توان معادلهٔ ۲-۱۶، $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$، را که رابطهٔ بین سرعت و مکان است به کار برد.

***اولین تلاش:*** معمولاً معادله‌ای را به کار می‌بریم که شامل متغیر خواسته شده باشد. در معادلهٔ ۲-۱۶ می‌توان دید که $x_0$ برابر ۰ و $v_0$ متغیر خواسته شده است. پس از آن می‌توان دریافت که دومین جفت متغیرها $v$ و $x$ هستند. از نمودار، دو جفت از چنین متغیرها را داریم: (۱) $v = 8\,m/s$ و $x = 20\,m$ (۲) $v = 0$ و $x = 70\,m$ . برای مثال، معادلهٔ ۲-۱۶ را می‌توان به صورت زیر نوشت

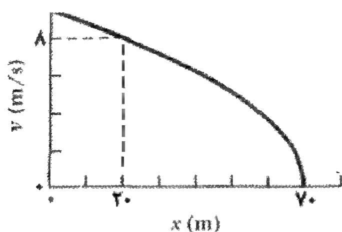
$$(8\,m/s)^2 = v_0^2 + 2a(20\,m - 0) \quad (۲-۱۹)$$

ولی، $v_0$ و $a$ نامعلوم‌اند.

***دومین تلاش:*** به جای این که مستقیماً سراغ متغیر خواسته شده برویم، ابتدا مقدارهای $v_0 = 8\,m/s$ و $x_0 = 20\,m$ به عنوان اولین جفت دادهٔ مسئله و مقدارهای $v = 0\,m/s$ و $x = 70\,m$ را به عنوان دومین جفت دادهٔ مسئله در معادلهٔ ۲-۱۶ قرار می‌دهیم. سپس می‌توان نوشت

$$(0\,m/s)^2 = (8\,m/s)^2 + 2a(70\,m - 20\,m)$$

که $a = -0/64\,m/s^2$ را به دست می‌دهد. با قرار دادن این مقدار




**شکل ۲-۹** سرعت برحسب مکان.

در معادلهٔ ۲-۱۹ و از حل آن برای $v_\circ$ (سرعت مربوط به مکان $x=\circ$) داریم

$$v_\circ = ۹/۵\,\mathrm{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

***تفسیر:*** برخی از مسئله‌ها معادله‌ای را دربر دارند که شامل متغیر خواسته شده است. در مسئلهٔ کمی مشکلتر ابتدا باید معادله‌ای را به کار ببرید که شامل متغیر خواسته شده *نیست* اما مقدار مورد نیاز شما را برای محاسبه آن متغیر به دست می‌دهد. گاهی این روش *جسارت فیزیکی* می‌خواهد زیرا کاملاً غیر مستقیم به نظر می‌رسد. ولی، چنانچه با حل تعداد زیادی مسئله مهارت خود را در حل مسئله ارتقا دهید به تدریج به جسارت کمتری نیاز داشته و حتی یک حل بدیهی به نظر خواهد آمد. حل مسئله از هر نوعی، چه فیزیکی یا اجتماعی به تمرین احتیاج دارد.

## ۲-۸ نگاهی دیگر به شتاب ثابت*

دو معادلهٔ اول در جدول ۲-۱ معادله‌هایی اساسی هستند که معادله‌های دیگر از آنها به دست آمده‌اند. آن دو را می‌توان با انتگرالگیری از شتاب و با فرض این که $a$ ثابت باشد به دست آورد. برای پیدا کردن معادلهٔ ۲-۱۱، تعریف شتاب (معادلهٔ ۲-۸) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$dv = a\,dt$$

سپس از دو طرف *انتگرال نامعین (یا پاد مشتق)* می‌گیریم، خواهیم داشت

$$\int dv = \int a\,dt$$

چون $a$ ثابت است می‌توان آن را از انتگرال بیرون آورد. پس داریم

$$\int dv = a\int dt$$

یا

$$v = at + C \qquad (۲\text{-}۲۰)$$

برای محاسبهٔ ثابت انتگرال $C$، می‌دانیم که در لحظهٔ $t=\circ$ داریم $v=v_\circ$ . با قرار دادن این مقدارها در معادلهٔ ۲-۲۰ (که به‌ازای تمام مقدارهای $t$ از جمله $t=\circ$ برقرار است) خواهیم داشت

$$v_\circ = (a)(\circ) + C = C$$

با قرار دادن این مقدار درمعادلهٔ ۲-۲۰ معادلهٔ ۲-۱۱ به دست می‌آید.

برای به دست آوردن معادلهٔ ۲-۱۵، تعریف سرعت (معادلهٔ ۲-۴) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$dx = v\,dt$$

و سپس از طرفین انتگرال نامعین می‌گیریم، داریم

$$\int dx = \int v\,dt$$

پس از این، با قرار دادن $v$ از معادلهٔ ۲-۱۱، داریم

$$\int dx = \int (v_\circ + at)\,dt$$

چون $v_\circ$ مانند شتاب $a$ ثابت است، این را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int dx = v_\circ \int dt + a\int t\,dt$$

پس از انتگرالگیری، داریم

$$x = v_\circ t + \frac{۱}{۲}at^۲ + C' \qquad (۲\text{-}۲۱)$$

که در آن $C'$ ثابت دیگر انتگرالگیری است. در لحظهٔ $t=\circ$، داریم $x=x_\circ$، با قرار دادن این مقدارها در معادلهٔ ۲-۲۱، $x_\circ = C'$ به دست می‌آید. با قرار دادن $x_\circ$ به جای $C'$ در معادلهٔ ۲-۲۱ معادلهٔ ۲-۱۵ به حاصل می‌شود.

## ۲-۹ شتاب سقوط آزاد

اگر جسمی را به طرف بالا یا پایین بیاندازیم و تا حدی بتوانیم تأثیر هوا را بر حرکت آن از بین ببریم، در می‌یابیم که جسم به طرف پایین با آهنگ ثابت معینی شتاب می‌گیرد. این آهنگ را **شتاب سقوط آزاد** می‌نامند و بزرگی آن را با $g$ نمایش می‌دهند. این شتاب مستقل از مشخصه‌های جسم مانند جرم، چگالی یا شکل آن بوده و برای همهٔ جسمها یکسان است.

شکل ۲-۱۰ دو نمونه از شتاب سقوط آزاد را نشان می‌دهد، که شامل عکسهای استروبوسکوپی متوالی از یک پر و یک سیب است. وقتی این جسمها سقوط می‌کنند، به طرف پایین شتاب می‌گیرند- هر دو با آهنگ $g$ یکسان سقوط می‌کنند. بنابراین، تندی آنها با آهنگ یکسانی افزایش می‌یابد و با هم سقوط می‌کنند.

مقدار $g$ کمی با عرض جغرافیایی و ارتفاع از سطح زمین تغییر می‌کند. در سطح دریا در عرض جغرافیایی میانگین مقدار $g$ برابر با $۹/۸\,\mathrm{m/s^۲}$ (یا $۳۲\,\mathrm{ft/s^۲}$) است، که بهتر است به عنوان مقدار دقیق در مسئله‌های این کتاب مورد استفاده قرار گیرد مگر این که مقدار دیگری ذکر شده باشد.

معادله‌های حرکت با شتاب ثابت در جدول ۲-۱ را برای سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین نیز می‌توان به کار برد. یعنی برای جسمی که در حال حرکت در امتداد قائم چه به طرف پایین و چه به طرف بالاست، زمانی که بتوان از تأثیر هوا چشم پوشید می‌توان از این معادله‌ها استفاده کرد. ولی باید توجه داشت که برای سقوط آزاد: (۱) جهت حرکت به جای این که در راستای محور $x$ باشد در راستای محور قائم $y$ با در نظر گرفتن رو به بالا به عنوان جهت مثبت قرار دارد. (این موضوع برای فصلهای بعد وقتی که ترکیب حرکتهای افقی و قائم را در

* این بخش برای دانشجویانی نوشته شده است که با حسابان آشنا هستند.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۷

در ۲۶ سپتامبر سال ۱۹۹۳ دیوماندی[1] در داخل یک گوی فلزی با سوراخی برای هوا از بالای بخش کانادایی آبشار نیاگارا به اندازهٔ $48\,m$ به داخل آب (و صخره‌ها) سقوط کرد. فرض کنید سرعت اولیهٔ او صفر بوده است و از اثر هوا روی گوی در ضمن سقوط بتوان چشم پوشی کرد.

(الف) چقدر طول کشید تا ماندی به سطح آب برسد؟

**نکته کلیدی** چون سقوط ماندی آزاد بوده است، معادله‌های جدول ۲-۱ را می‌توان به کار برد.

***محاسبه‌ها:*** مسیر سقوط ماندی را در راستای محور $y$ با نقطهٔ شروع در $y = 0$ در نظر می‌گیریم که جهت مثبت آن رو به بالاست، (شکل ۲-۱۱). بنابراین، در راستای این محور شتاب $a = -g$ است، و سطح آب در $y = -48\,m$ (منفی به خاطر این که زیر $y = 0$ واقع است) قرار دارد. شروع سقوط را در زمان $t = 0$ و سرعت اولیه را $v_0 = 0$ در نظر بگیرید.

از جدول ۲-۱، معادلهٔ ۲-۱۵ (ولی با نماد $y$) را انتخاب می‌کنیم چون شامل زمان $t$ مورد نظر است. داریم

$$y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-48\,m - 0 = 0t - \frac{1}{2}(9/8\,m/s^2)t^2$$

$$t^2 = 48/4/9$$

و

$$t = 3/1\,s \qquad \text{(پاسخ)}$$

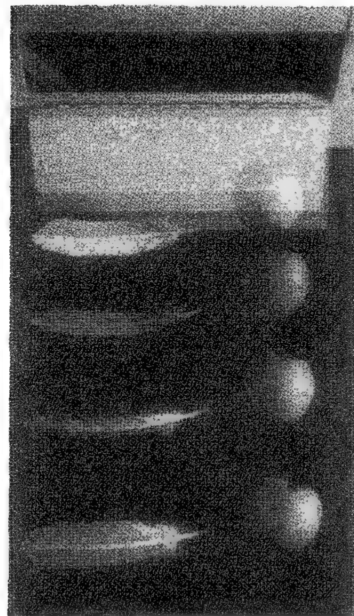
توجه کنید که جابه‌جایی ماندی یعنی $y - y_0$ یک کمیت منفی است- ماندی در جهت *منفی* محور $y$ به طرف پایین سقوط می‌کند (به طرف بالا سقوط نمی‌کند!). همچنین توجه کنید که عدد $48/4/9$ دو ریشهٔ $3/1$ و $-3/1$ دارد. در اینجا ریشهٔ مثبت را انتخاب می‌کنیم چون روشن است که ماندی پس از این که از $t = 0$ شروع به سقوط کرد به سطح آب می‌رسد.

(ب) ماندی توانست زمان ۳ ثانیه را برای سقوط آزاد اندازه بگیرد ولی نمی‌توانست ببیند در هر ثانیه چه مسافتی را طی می‌کند. مکان او را با گذشت هر ثانیه از سقوط تعیین کنید.

***محاسبه‌ها:*** دوباره از معادلهٔ ۲-۱۵ استفاده می‌کنیم ولی این بار مقدارهای $t = 1/0\,s, 2/0\,s, 3/0\,s$ را قرار می‌دهیم و آن را برای مکان ماندی، $y$، حل می‌کنیم. نتیجه در شکل ۲-۱۱ نشان داده شده است.

(پ) سرعت ماندی به هنگام رسیدن به سطح آب چقدر بوده است؟

1. Dave Munday



**شکل ۲-۱۰** یک پر و یک سیب در خلأ با شتاب یکسانی به بزرگی $g$ به طور آزاد سقوط می‌کنند. شتاب فاصلهٔ بین عکسهای متوالی را افزایش می‌دهد. در نبود هوا پر و سیب با هم سقوط می‌کنند.

نظر می‌گیریم اهمیت دارد.) (۲) شتاب سقوط آزاد منفی است- یعنی در راستای محور $y$ رو به پایین و رو به مرکز زمین- و بنابراین، مقدار آن در معادله‌ها $-g$ است.

> ☞ شتاب سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین $a = -g = -9/8\,m/s^2$ و *بزرگی* شتاب $g = 9/8\,m/s^2$ است. $-9/8\,m/s^2$ را به جای $g$ قرار ندهید.

فرض کنید یک گوجه فرنگی را با سرعت اولیهٔ (مثبت) $v_0$ به طور مستقیم رو به بالا پرتاب کنیم و سپس وقتی که به نقطهٔ پرتاب برگشت آن را بگیریم. در ضمن حرکت *سقوط آزاد* آن (درست پس از پرتاب تا درست پیش از گرفتن آن)، معادله‌های جدول ۲-۱ را می‌توان برای حرکت آن به کار برد. شتاب حرکت برابر با $a = -g = -9/8\,m/s^2$ و همیشه منفی و در نتیجه رو به پایین است. ولی همان طور که معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۶ نشان می‌دهند سرعت تغییر می‌کند: در ضمن بالا رفتن، سرعت مثبت است ولی بزرگی آن کاهش می‌یابد تا این که به طور لحظه‌ای به صفر برسد. وقتی گوجه فرنگی سرانجام متوقف می‌شود، در بیشینهٔ ارتفاع خود قرار دارد. در ضمن پایین آمدن، سرعت (که اکنون منفی است) بزرگی‌اش افزایش می‌یابد.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۵*** (الف) اگر توپی را مستقیماً به سمت بالا پرتاب کنید، علامت جابه‌جایی توپ در صعود از نقطهٔ پرتاب تا بالاترین نقطه کدام است؟ (ب) علامت جابه‌جایی در سقوط از بالاترین نقطه تا نقطهٔ پرتاب کدام است؟ (پ) وقتی توپ در بالاترین نقطه است، شتاب آن چقدر است؟

| $t$ (s) | $y$ (m) | $v$ (m/s) | $a$ (m/s²) |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | -۹/۸ |
| ۱ | -۴/۹ | -۹/۸ | -۹/۸ |
| ۲ | -۱۹/۶ | -۱۹/۶ | -۹/۸ |
| ۳ | -۴۴/۱ | -۲۹/۴ | -۹/۸ |
| | -۴۸/۰ | | -۹/۸ |

**شکل ۲-۱۱** مکان، سرعت و شتاب یک جسم در سقوط آزاد، در اینجا گوی فولادی که دیو ماندی با آن ازآبشار نیاگارا سقوط کرده است.

***محاسبه:*** برای پیدا کردن سرعت از داده‌های اولیه بدون استفاده از زمان سقوط در (الف)، معادلهٔ ۲-۱۶ را با نماد $y$ بازنویسی می‌کنیم و داده‌ها را در آن قرار می‌دهیم

$$v^۲ = v_۰^۲ - ۲g(y - y_۰) = ۰ - (۲)(۹/۸ \mathrm{m/s^۲})(-۴۸\mathrm{m})$$

پس

$$v = -۳۰/۶۷\mathrm{m/s} \simeq -۳۱\mathrm{m/s} = -۱۱۰\mathrm{km/h} \qquad \text{(پاسخ)}$$

در اینجا ریشهٔ منفی را اختیار می‌کنیم، چون سرعت در جهت منفی بوده است.

(ت) سرعت ماندی در پایان هر ثانیه چقدر بوده است؟ آیا او این سرعت در حال افزایش را حس می‌کرده است؟

***محاسبه‌ها:*** برای پیدا کردن سرعتها به کمک داده‌های اولیه بدون استفاده از مکانهای به دست آمده در (ب)، در معادلهٔ ۲-۱۱، مقدار $a = -g$ و مقدارهای $t = ۱/۰\mathrm{s}, ۲/۰\mathrm{s}, ۳/۰\mathrm{s}$ را قرار می‌دهیم. داریم

$$v = v_۰ - gt = ۰ - (۹/۸\mathrm{m/s^۲})(۱/۰\mathrm{s}) = -۹/۸\mathrm{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

نتیجه‌های دیگر در شکل ۲-۱۱ نشان داده شده‌اند.

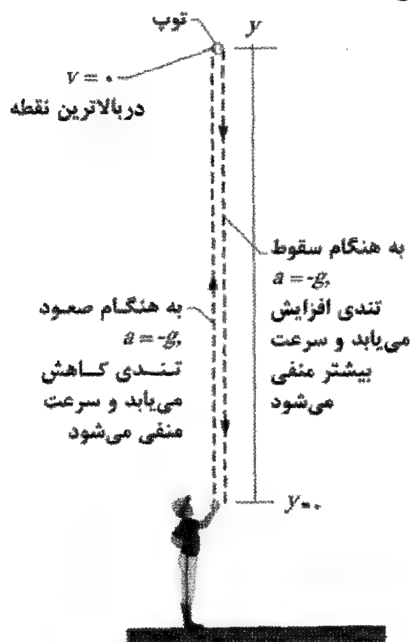
وقتی ماندی در حال سقوط آزاد بود، او از افزایش تندی خود با خبر نبود چون شتاب او در ضمن سقوط همواره $-۹/۸\mathrm{m/s^۲}$ بود که در ستون آخر شکل ۲-۱۱ نشان داده است. البته او به خوبی برخورد به آب را متوجه شد چون شتاب به طور ناگهانی تغییر کرده بود. (ماندی از سقوط جان سالم به در برد ولی به خاطر این بی باکی از طرف قانون به طور سنگینی جریمه شد.)

## مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۸

در شکل ۲-۱۲ یک توپ بیسبال در راستای $y$ با تندی اولیهٔ ۱۲m/s به طرف بالا پرتاب می‌شود.

(الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ به بیشینهٔ ارتفاع خود برسد؟

**نکتهٔ کلیدی** (۱) در زمانی که توپ از دست بازیکن رها می‌شود و سپس به دست او بر می‌گردد، شتاب آن همان شتاب سقوط آزاد $a = -g$ است. چون شتاب ثابت است، از جدول ۲-۱ برای این حرکت می‌توان استفاده کرد. (۲) سرعت $v$ در بیشینهٔ ارتفاع باید صفر باشد.




**شکل ۲-۱۲** یک توپ بیسبال به طرف بالا در هوا پرتاب می‌شود. معادله‌های سقوط آزاد برای حرکت رو به بالا و رو به پایین برقرار است مشروط بر این که هر نوع اثری از هوا قابل چشم پوشی باشد.

***محاسبه:*** با دانستن $a$ ، $v$ و سرعت اولیهٔ $v_۰ = ۱۲\mathrm{m/s}$ و این که باید $t$ را پیدا کنیم، از معادلهٔ ۲-۱۲ که شامل این چهار متغیر است بهره می‌گیریم. خواهیم داشت

$$t = \frac{v - v_۰}{a} = \frac{۰ - ۱۲\mathrm{m/s}}{-۹/۸\mathrm{m/s}} = ۱/۲\mathrm{s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) بیشینهٔ ارتفاع توپ از نقطهٔ پرتاب آن چقدر است؟

***محاسبه:*** نقطهٔ رها شدن توپ را $y_۰ = ۰$ انتخاب می‌کنیم. سپس معادله ۲-۱۶ را با نماد $y$ می‌نویسیم، در آن $y - y_۰ = y$ و $v = ۰$ (در بیشینهٔ ارتفاع) را قرار می‌دهیم و معادله را برای $y$ حل می‌کنیم. داریم

$$y = \frac{v^۲ - v_۰^۲}{۲a} = \frac{۰ - (۱۲\mathrm{m/s})^۲}{۲(-۹/۸\mathrm{m/s^۲})} = ۷/۳\mathrm{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) چقدر طول می‌کشد تا توپ پس از رها شدن به ارتفاع ۵/۰ متری برسد؟

**محاسبه ها:** مقدارهای $v_0$، $a=-g$ وجابه جایی $y-y_0=5/0\,m$ را می‌دانیم و $t$ را می‌خواهیم، از این رو معادلهٔ ۲-۱۵ را انتخاب می‌کنیم. با قرار دادن $y_0=0$ و بازنویسی آن برای $y$ به دست می‌دهد

$$y=v_0 t-\frac{1}{2}gt^2$$

یا

$$5/0\,m=(12\,m/s)t-\left(\frac{1}{2}\right)(9/8\,m/s^2)t^2$$

اگر به طور موقت یکاها را حذف کنیم (با توجه به این که سازگارند) خواهیم داشت

$$4/9t^2-12t+5/0=0$$

حل این معادلهٔ درجهٔ دوم برای $t$، به دست می‌دهد

(پاسخ) $t=1/9\,s$ و $t=0/53\,s$

دو زمان وجود دارد! که تعجب‌آور هم نیست، چون توپ از $y=5/0\,m$ دوبار می‌گذرد، یک بار موقع بالا رفتن و یک بار موقع پایین آمدن.

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۶: معنی علامتهای منفی*

در مسئله‌های نمونهٔ ۲-۷ و ۲-۸ یک محور قائم (محور $y$) را در نظر گرفتیم و جهت رو به بالا را- به طور کاملاً اختیاری- مثبت اختیار کردیم. سپس مبداء محور $y$ (یعنی مکان $y=0$) را مناسب با مسئله برگزیدیم. در مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۷، مبدأ در بالای آبشار و در مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۸، مبدأ دست پرتاب کننده بود. در این صورت مقدار منفی $y$ به این معناست که جسم زیر مبدأ اختیار شده است. سرعت منفی به این معناست که جسم در جهت منفی محور $y$ یعنی رو به پایین حرکت می‌کند. بدون توجه به مکان جسم این گفته درست است.

در مسئله‌های سقوط آزاد شتاب را منفی $(-9/8\,m/s^2)$ در نظر می‌گیریم. شتاب منفی بدان معناست که با گذشت زمان، سرعت جسم اگر مثبت باشد در حال کاهش و اگر منفی باشد در حال افزایش است. این واقعیت درست است، مهم نیست که جسم در کجا واقع شده است و با چه سرعتی و در چه جهتی حرکت می‌کند. در مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۸، شتاب توپ در سراسر مسیر حرکت، چه در موقع بالا رفتن و چه موقع پایین آمدن منفی (رو به پایین) است.

### *تدبیر ۷: پاسخهای دور از انتظار*

گاهی از ریاضیات جوابهایی حاصل می‌شود که نظیر مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۸ پ دور از انتظار به نظر می‌رسند. اگر پاسخهای بیشتری از آنچه که انتظار دارید به دست آورید، آنهایی را که مناسب به نظر نمی‌رسند کنار نگذارید و معنی فیزیکی آنها را به دقت بررسی کنید. اگر زمان متغیر شما باشد، حتی یک مقدار منفی می‌تواند دارای معنی باشد، زمان منفی به زمان پیش از $t=0$ یعنی زمانی (اختیاری) که در آن زمان‌سنج خود را به کار انداخته‌اید اشاره دارد.

## ۲-۱۰ انتگرالگیری نموداری در تحلیل حرکت

هرگاه نموداری از شتاب یک جسم برحسب زمان داشته باشیم، برای به دست آوردن سرعت جسم در هر لحظهٔ معین روی نمودار، می‌توان انتگرال گرفت. چون شتاب $a$ برحسب سرعت به صورت $a=dv/dt$ تعریف می‌شود، از قضیهٔ بنیادی حسابان داریم

$$v_1-v_0=\int_{t_0}^{t_1} a\,dt \qquad (۲-۲۲)$$

سمت راست این معادله یک انتگرال معین است (به جای تابع یک مقدار عددی به دست می‌دهد)، $v_0$ سرعت در لحظهٔ $t_0$، و $v_1$ سرعت در زمان $t_1$ است. انتگرال معین را می‌توان با استفاده از نمودار $a(t)$، مانند آنچه که در شکل ۲-۱۳ الف دیده می‌شود، محاسبه کرد. به ویژه

$$\int_{t_0}^{t_1} a\,dt=\left(\begin{array}{c}\text{مساحت بین منحنی شتاب و}\\ \text{محور زمان، از } t_0 \text{ تا } t_1\end{array}\right) \qquad (۲-۲۳)$$

اگر یکای شتاب $1\,m/s^2$ و یکای زمان $1\,s$ باشد، آنگاه یکای متناظر با مساحت روی نمودار عبارت است از

$$(1\,m/s^2)(1\,s)=1\,m/s$$

که یکای (مناسب) سرعت است. اگر منحنی شتاب بالای محور زمان باشد، مساحت مثبت است؛ هرگاه منحنی زیر محور زمان باشد، مساحت منفی خواهد بود.

به طور مشابه، چون سرعت $v$ برحسب مکان $x$ به صورت $v=dx/dt$ تعریف شده است، پس داریم

$$x_1-x_0=\int_{t_0}^{t_1} v\,dt \qquad (۲-۲۴)$$

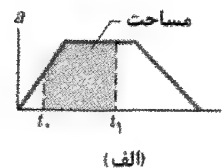
که در آن $x_0$ مکان در لحظهٔ $t_0$ و $x_1$ مکان در لحظهٔ $t_1$ است. انتگرال معین سمت راست معادلهٔ ۲-۲۴ را می‌توان مانند آنچه که در شکل ۲-۱۳ ب نشان داده شده است، از روی نمودار $v(t)$ محاسبه کرد. به ویژه

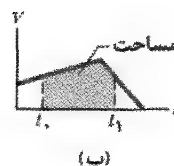
$$\int_{t_0}^{t_1} v\,dt=\left(\begin{array}{c}\text{مساحت بین منحنی سرعت و}\\ \text{محور زمان، از } t_0 \text{ تا } t_1\end{array}\right) \qquad (۲-۲۵)$$

اگر یکای سرعت $1\,m/s$ و یکای زمان $1\,s$ باشد، آنگاه یکای متناظر با مساحت در نمودار عبارت است از

$$(1\,m/s)(1\,s)=1\,m$$

که یکای (مناسب) مکان و جابه‌جایی است. این که این مساحت مثبت یا منفی است به صورتی که برای منحنی $a(t)$ در شکل ۲-۱۳ الف توصیف شد، تعیین می‌شود.




**شکل ۲-۱۳** مساحت بین منحنی رسم شده و محور زمان افقی از زمان $t_0$ تا زمان $t_1$ برای (الف) نمودار شتاب $a$ برحسب $t$ و (ب) نمودار سرعت برحسب $t$، نشان داده شده است.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۹**

«آسیب گردن» معمولاً در برخوردی که اتومبیل از سمت جلو به عقب اتومبیل دیگر می‌خورد، رخ می‌دهد. در سالهای ۱۹۷۰ پژوهشگران نتیجه گرفتند که صدمهٔ وارد شده به خاطر پس رفتن سر از بالای صندلی در حالی است که اتومبیل به سمت جلو رانده شده است. در نتیجهٔ این یافته، محافظهایی برای سر در بالای صندلی تعبیه شده‌اند، با این حال آسیب دیدگی گردن در برخوردهای از عقب کماکان رخ می‌دهد.

اخیراً در آزمایشی برای مطالعهٔ آسیب دیدگی گردن در برخوردهای از عقب، داوطلبی خود را به صندلی بست و سپس جهت شبیه سازی برخورد ناگهان به طرف اتومبیلی که با سرعت ۱۰/۵ km/h در عقب در حال حرکت بود حرکت کرد. شکل ۲-۱۴ الف شتابهای بدن و سر داوطلب را در ضمن برخورد نشان می‌دهد که در لحظهٔ $t = ۰$ شروع شده است. در طی بازهٔ زمانی که پشتی صندلی به داوطلب فشار وارد می‌کند، شتاب بدن ۴۰ms تأخیر داشته است. شتاب سر ۷۰ms اضافی تأخیر دارد. به هنگام شروع شتاب سر، تندی بدن چقدر بوده است؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توانیم تندی بدن را در هر لحظه با پیدا کردن مساحت زیر نمودار $a(t)$ بدن محاسبه کنیم.

***محاسبه‌ها:*** می‌دانیم که در لحظهٔ $t_0 = ۰$ در آغاز «برخورد» تندی اولیهٔ بدن $v_0 = ۰$ است. می‌خواهیم تندی بدن $v_1$ را در زمان $t_1 = ۱۱۰ms$ که شتاب سر شروع می‌شود پیدا کنیم.

با ترکیب معادله‌های ۲-۲۲ و ۲-۲۳ می‌توان نوشت

$$v_1 - v_0 = \begin{pmatrix} \text{مساحت بین منحنی شتاب و} \\ \text{محور زمان، از } t_0 \text{ تا } t_1 \end{pmatrix} \qquad (۲-۲۶)$$

برای سادگی، مساحت را به سه ناحیه تقسیم می‌کنیم (شکل ۲-۱۴ ب). از ۰ تا ۴۰ms در ناحیهٔ $A$ مساحتی وجود ندارد:

$$A \text{ مساحت} = ۰$$

از ۴۰ms تا ۱۰۰ms، شکل ناحیهٔ B مثلثی به مساحت زیر است

$$B \text{ مساحت} = \frac{۱}{۲}(۰/۰۶۰\,s)(۵۰\,m/s^۲) = ۱/۵\,m/s$$

از ۱۰۰ms تا ۱۱۰ms، ناحیهٔ C دارای شکل مستطیلی به مساحت زیر است

$$C \text{ مساحت} = (۰/۰۱۰\,s)(۵۰\,m/s^۲) = ۰/۵۰\,m/s$$

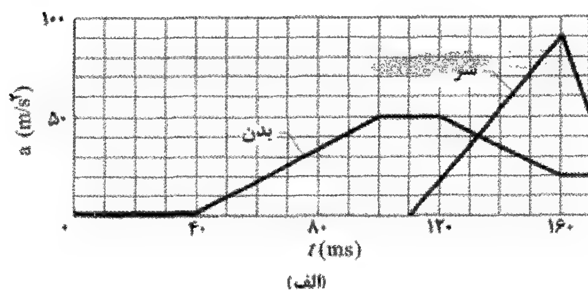
با قرار دادن این مقدارها و $v_0 = ۰$ در معادلهٔ ۲-۲۶ خواهیم داشت

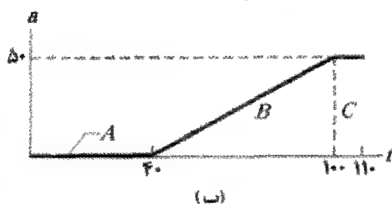
$$v_1 - ۰ = ۰ + ۱/۵\,m/s + ۰/۵۰\,m/s$$

یا

$$v_1 = ۲/۰\,m/s = ۷/۲\,km/h \qquad \text{(پاسخ)}$$

***تفسیرها:*** درست وقتی سر شروع به حرکت رو به جلو می‌کند، بدن قبلاً دارای تندی ۷/۲km/h بوده است. پژوهشگران استدلال می‌کنند که به دلیل این اختلاف تندیها در مرحلهٔ اولیهٔ برخورد از عقب است که گردن آسیب می‌بیند. بعد از آن ضربهٔ شدید سر به عقب به ویژه اگر سر مانعی نداشته باشد آسیب بیشتر می‌شود.




**شکل ۲-۱۴** (الف) منحنی $a(x)$ بدن و سر داوطلبی در شبیه سازی برخورد از عقب. (ب) برای محاسبهٔ مساحت، ناحیهٔ بین منحنی رسم شده و محور زمان را از هم تفکیک کنید.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**مکان** *مکان* $x$ ذره‌ای روی محور $x$ محل ذره را نسبت به **مبدأ** یا نقطهٔ صفر محور مشخص می‌کند. بسته به این که ذره در کدام طرف مبدأ قرار داشته باشد مکان ذره مثبت یا منفی است و اگر در مبدأ باشد صفر خواهد بود. **جهت مثبت** روی محور جهت افزایش عددهای مثبت و جهت مخالف **جهت منفی** است.

**جابه‌جایی** *جابه‌جایی* $\Delta x$ یک ذره تغییر در مکان آن ذره است

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ \qquad (۱-۲)$$

جابه‌جایی کمیتی برداری است. اگر ذره در جهت مثبت محور $x$ حرکت کند، جابه‌جایی مثبت و اگر در جهت منفی حرکت کند جابه‌جایی آن منفی است.

**سرعت میانگین** هرگاه ذره‌ای در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$ از مکان $x_۱$ تا $x_۲$ حرکت کند، سرعت *میانگین* آن عبارت است از

$$v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} \qquad (۲-۲)$$

علامت جبری $v_{\text{avg}}$ جهت حرکت را مشخص می‌کند ($v_{\text{avg}}$ کمیتی برداری است). سرعت میانگین به مسافت واقعی پیموده شده به وسیله ذره بستگی ندارد بلکه به مبدأ و مقصد آن بستگی دارد.

در نمودار $x$ برحسب $t$ سرعت میانگین در یک بازهٔ زمانی $\Delta t$، شیب خط راستی است که نقطه‌های واقع بر منحنی را که نشان دهندهٔ دو انتهای بازه‌اند به هم وصل می‌کند.

**تندی میانگین** *تندی میانگین* $s_{\text{avg}}$ یک ذره به مسافت کل پیموده شده در بازهٔ زمانی $\Delta t$ بستگی دارد

$$s_{avg} = \frac{\text{مسافت کل}}{\Delta t} \qquad (۳-۲)$$

**سرعت لحظه‌ای** *سرعت لحظه‌ای* (یا به طور ساده **سرعت**) $v$ یک ذره عبارت است از

$$v = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (۴-۲)$$

که در آن $\Delta x$ و $\Delta t$ به وسیلهٔ معادلهٔ ۲-۲ تعریف می‌شوند. سرعت لحظه‌ای (در یک زمان معین) را می‌توان به عنوان شیب (در آن زمان معین) نمودار $x$ برحسب $t$ در نظر گرفت. **تندی** بزرگی سرعت لحظه‌ای است.

**شتاب میانگین** *شتاب میانگین* عبارت است از نسبت تغییر سرعت $\Delta v$ به بازهٔ زمانی $\Delta t$ که در آن تغییر سرعت روی می‌دهد

$$a_{\text{avg}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (۷-۲)$$

علامت جبری جهت $a_{\text{avg}}$ را تعیین می‌کند.

**شتاب لحظه‌ای** *شتاب لحظه‌ای* (یا به طور ساده **شتاب**) $a$ مشتق اول سرعت $v(t)$ و مشتق دوم مکان $x(t)$ است

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^۲x}{dt^۲} \qquad (۸-۲ \text{ و } ۹-۲)$$

روی نمودار $v$ برحسب $t$، شتاب $a$ در هر لحظه $t$ شیب منحنی در آن نقطه‌ای است که $t$ را نشان می‌دهد.

**شتاب ثابت** پنج معادله در جدول ۲-۱ حرکت ذره‌ای با شتاب ثابت را توصیف می‌کنند.

$$v = v_۰ + at \qquad (۱۱-۲)$$

$$x - x_۰ = v_۰ t + \frac{۱}{۲}at^۲ \qquad (۱۵-۲)$$

$$v^۲ = v_۰^۲ + ۲a(x - x_۰) \qquad (۱۶-۲)$$

$$x - x_۰ = \frac{۱}{۲}(v_۰ + v)t \qquad (۱۷-۲)$$

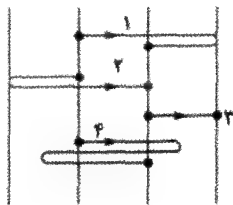
$$x - x_۰ = vt - \frac{۱}{۲}at^۲ \qquad (۱۸-۲)$$

این معادله‌ها هنگامی که شتاب ثابت نباشد اعتبار ندارند.

**شتاب سقوط آزاد** مثال مهمی از حرکت در خط راست با شتاب ثابت بالا رفتن یا پایین آمدن آزادانهٔ جسمی در نزدیکی سطح زمین است. معادله‌های شتاب ثابت این حرکت را توصیف می‌کنند ولی دو تغییر در نماد گذاری باید انجام گیرد: (۱) حرکت رو به *بالا*، در راستای محور قائم $y$ را با جهت $+y$ در نظر می‌گیریم؛ (۲) به جای $a$، $-g$ را در نظر می‌گیریم که $g$ بزرگی شتاب سقوط آزاد است. در نزدیکی سطح زمین $g = ۹/۸\,\text{m/s}^۲ (= ۳۲\,\text{ft/s}^۲)$ است.

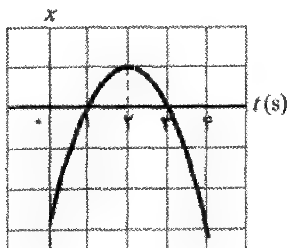
## پرسشها

۱- شکل ۲-۱۵ چهار مسیر حرکت را نشان می‌دهد که در آنها جسمهایی از نقطهٔ شروع تا نقطهٔ پایان را در بازهٔ زمانی یکسانی طی می‌کنند. این مسیرها شبکه‌ای از خطهای راست با فاصلهٔ مساوی را قطع می‌کنند. این مسیرها را به ترتیب بزرگی (الف) سرعت میانگین جسمها و (ب) تندی میانگین آنها مرتب کنید.



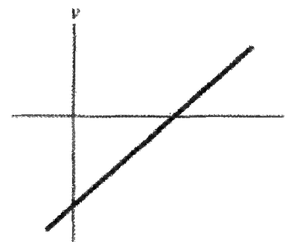

**شکل ۲-۱۵** پرسش ۱

۲- شکل ۲-۱۶ نمودار مکان ذره‌ای در راستای محور $x$ برحسب زمان است. (الف) در لحظهٔ $t = ۰$، علامت مکان ذره چیست؟ آیا سرعت ذره در (ب) $t = ۱\text{s}$، (پ) $t = ۲\text{s}$ و (ت) $t = ۳\text{s}$، مثبت است یا منفی یا صفر است؟ (ث) چقدر طول می‌کشد که ذره به نقطهٔ $x = ۰$ برسد؟



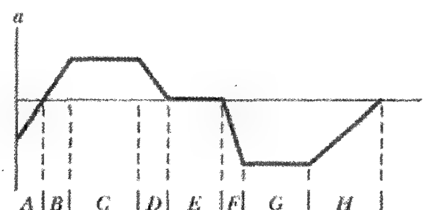

**شکل ۲-۱۶** پرسش ۲

۳ـ شکل ۲-۱۷ سرعت ذره‌ای را نشان می‌دهد که روی محور $x$ حرکت می‌کند. مطلوب است جهت حرکت (الف) اولیه و (ب) نهایی. (پ) آیا ذره به طور لحظه‌ای توقف می‌کند؟ (ت) شتاب مثبت است یا منفی؟ (ث) شتاب ثابت است یا تغییر می‌کند؟




**شکل ۲-۱۷** پرسش ۳

۴ـ شکل ۲-۱۸ شتاب $a(t)$ سگ گله‌ای را نشان می‌دهد که چوپانی را در راستای یک محور تعقیب می‌کند. در کدام دوره از زمان سگ با تندی ثابت حرکت می‌کند؟




**شکل ۲-۱۸** پرسش ۴

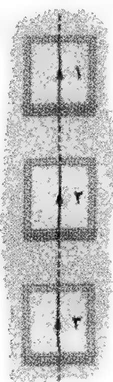
۵ـ شکل ۲-۱۹ سرعت ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محوری حرکت می‌کند. نقطهٔ ۱ بالاترین نقطه روی منحنی است؛ نقطهٔ ۴ در پایینترین نقطه؛ و نقطه‌های ۲ و ۶ در یک ارتفاع قرار دارند. جهت حرکت در (الف) زمان $t=0$ و (ب) نقطهٔ ۴ چگونه است؟ (پ) در کدامیک از شش نقطه جهت حرکت ذره تغییر می‌کند؟ (ت) شش نقطه را به ترتیب بزرگی شتاب مرتب کنید.




**شکل ۲-۱۹** پرسش ۵

۶ـ معادله‌های زیر سرعت $v(t)$ ذره‌ای را در چهار وضعیت به‌دست می‌دهند: (الف) $v=3$؛ (ب) $v=4t^2+2t-6$؛ (پ) $v=3t-4$؛ (ت) $v=5t^2-3$. برای کدامیک از این وضعیتها معادله‌های جدول ۲-۱ به کار برده می‌شوند؟

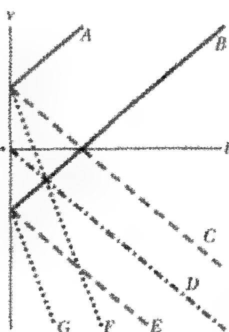
۷ـ در شکل ۲-۲۰، جسمی که به طور مستقیم رو به بالا پرتاب شده است از مقابل سه پنجره که به فاصلهٔ مساوی از یکدیگر با ارتفاع یکسان قرار دارند می‌گذرد. پنجره‌ها را به ترتیب بزرگی (الف) تندی میانگین جسم به هنگام گذشتن از آنها، (ب) زمان لازم برای گذشتن از آنها، (پ) بزرگی شتاب جسم به هنگام گذشتن از آنها، و (ت) تغییر $\Delta v$ در تندی جسم در ضمن گذشتن از آنها مرتب کنید.




**شکل ۲-۲۰** پرسش ۷

۸ـ در $t=0$، ذره‌ای که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند در مکان $x_0=-20\,\text{m}$ است. علامتهای سرعت اولیهٔ $v_0$ ذره (در لحظهٔ $t_0$) و شتاب ثابت $a$ به ترتیب برای چهار وضعیت عبارت‌اند از: (۱) +، +؛ (۲) +، -؛ (۳) -، +؛ (۴) -، -. در کدام وضعیت ذره (الف) به طور لحظه‌ای می‌ایستد، (ب) از مبدأ می‌گذرد، و (پ) هرگز از مبدأ نمی‌گذرد؟

۹ـ با تکیه بر نردهٔ یک پل، تخم مرغی را (بدون سرعت اولیه) رها و همزمان تخم مرغ دومی را به سمت پایین پرتاب می‌کنید. کدام منحنی در شکل ۲-۲۱ سرعت $v(t)$ را برای (الف) تخم مرغ رها شده و (ب) تخم مرغ پرتاب شده نشان می‌دهد؟ (منحنیهای A و B با هم؛ C، D و E با هم و F و G با هم موازی‌اند.)




**شکل ۲-۲۱** پرسش ۹

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)

SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها

WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است

ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

●●● تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.

اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و پایگاه زیر در دسترس است flyingcircusofphysics.com

## بخش ۲-۴ سرعت میانگین و تندی میانگین

●۱- اتومبیلی در جادهٔ مستقیمی با $30km/h$، $40km$ را می‌پیماید. سپس این اتومبیل در همان جهت $40km$ دیگر را با $60km/h$ می‌پیماید. (الف) سرعت میانگین اتومبیل در این سفر $80km$ چقدر است؟ (فرض کنید اتومبیل در جهت مثبت $x$ حرکت می‌کند.) (ب) تندی میانگین آن چقدر است؟ (پ) نمودار $x$ را بر حسب $t$ رسم و مشخص کنید که سرعت میانگین چگونه از روی نمودار پیدا می‌شود؟ SSM WWW

●۲- اتومبیلی با تندی ثابت $40km/h$ رو به بالای تپه‌ای حرکت می‌کند و با تندی ثابت $60km/h$ رو به پایین می‌آید. تندی میانگین حرکت را محاسبه کنید.

●۳- در یک عطسهٔ شدید، چشمهای انسان به مدت $0/5s$ بسته می‌شود. اگر در حال رانندگی با تندی $90km/h$ عطسه کنید، اتومبیل شما در این مدت چقدر حرکت می‌کند؟

●۴- رکورد جهانی تندی برای دوچرخه (با کمک نیروی انسان) توسط کریس هابر[1] در سال ۱۹۹۲/۱۳۷۱ به ثبت رسیده است. او مسافت $200m$ را با این تعبیر که «فکر می‌کنم پس تند می‌رانم» در $6/509s$ پیمود. در سال ۲۰۰۱ سام ویتینگهام[2] رکورد هابر را با $19/0km/h$ بهبود بخشید. زمان ویتینگهام در $200m$ چقدر بوده است؟

●۵- مکان ذره‌ای که راستای محور $x$ حرکت می‌کند با معادلهٔ $x = 3t - 4t^2 + t^3$ داده می‌شود، که $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. مکان جسم را در مقدارهای $t$ زیر پیدا کنید: (الف) $1s$، (ب) $2s$، (پ) $3s$ و (ت) $4s$. (ث) جابه‌جایی ذره بین $t=0$ و $t=4s$ چقدر است؟ (ج) سرعت میانگین آن در بازهٔ زمانی از $t=2s$ تا $t=4s$ چقدر است؟ (چ) نمودار $x$ را برحسب $t$ در بازهٔ $0 \le t \le 4s$ رسم کنید و نشان دهید که پاسخ (ج) چگونه از روی نمودار به دست می‌آید. SSM

●۶- سرعت میانگین خود را در دو مورد زیر محاسبه کنید: (الف) $73/2m$ را با تندی $1/22m/s$ قدم می زنید و سپس $73/2m$ را با تندی $3/05m/s$ در راستای مسیر مستقیمی می‌دوید. (ب) $1/00min$ با تندی $1/22m/s$ قدم می‌زنید و سپس $1/00min$ با $3/05m/s$ در راستای مسیر مستقیمی می‌دوید. (پ) نمودار $x$ را برحسب $t$ برای دو مورد رسم کنید و نشان دهید که چگونه سرعت میانگین از روی نمودار به دست می‌آید.

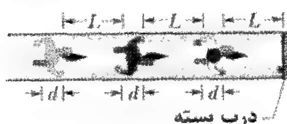
●●۷- در مسابقهٔ $1 km$، دوندهٔ اول در مسیر شماره ۱ (با زمان $2min$ و $27/95s$) به نظر می‌رسد که تندتر از دوندهٔ دوم در مسیر شماره ۲ ($2min$ و $28/15s$) می‌دود. ولی طول $L_2$ مسیر دوم ممکن است قدری بیشتر از طول $L_1$ مسیر اول باشد. بزرگی $L_2 - L_1$ چقدر می‌تواند باشد تا این که نتیجه بگیریم که دوندهٔ اول همچنان تندتر می‌دود؟ ILW

1. Chris Huber
2. Sam Whittingham

●●۸- برای به دست آوردن رکورد سرعت در مسافت معین $d$ (خط راست)، اتومبیل مسابقه باید ابتدا در یک جهت (در مدت زمان $t_1$) و سپس در جهت مخالف (در مدت زمان $t_2$) حرکت کند. (الف) جهت حذف اثر باد و به دست آوردن تندی $v_c$ در شرایط نبود وزش باد، آیا باید میانگین $d/t_1$ و $d/t_2$ را به دست آوریم (روش ۱) یا باید $d$ را بر میانگین $t_1$ و $t_2$ تقسیم کنیم (روش ۲)؟ (ب) اگر باد یکنواختی در امتداد مسیر اتومبیل بوزد و نسبت تندی باد $v_w$ به تندی اتومبیل $v_c$ برابر $0/0240$ باشد، کسر اختلاف دو روش چقدر است؟

●●۹- برای شرکت در جلسه‌ای در شهری دیگر، فاصلهٔ $300km$ را در بزرگراهی رانندگی می کنید. جلسه در ساعت 11:15 پیش از ظهر تشکیل می‌شود. برنامه‌ریزی می‌کنید که با سرعت $100km/h$ برانید و به همین خاطر ساعت 8:00 پیش از ظهر با در نظر گرفتن زمان اضافی منزل را ترک می‌کنید. با تندی بالا $100km$ اول را رانندگی می‌کنید ولی با روبه‌رو شدن با عملیات راه‌سازی $40km$ را با تندی $40km/h$ می‌رانید. کمترین تندی مورد نیاز برای بقیهٔ مسیر باید چقدر باشد تا به موقع به جلسه برسید؟

●●۱۰- *فرار با هول و هراس.* شکل ۲-۲۲ یک وضعیت کلی را نشان می‌دهد که در آن گروهی از مردم به سمت درب خروج هجوم می‌برند و با درب بسته مواجه می‌شوند. مردم با تندی $v_s = 3/50m/s$ به سمت درب حرکت می‌کنند. هر نفر فاصلهٔ $d = 0/25m$ را اشغال کرده است و با نفر بعدی $L = 1/75m$ فاصله دارد. ترتیب نشان داده شده در شکل ۲-۲۲ در زمان $t = 0$ است. (الف) تجمع مردم پشت درب با چه آهنگ میانگینی افزایش می‌یابد؟ (ب) در چه زمانی طول تجمع مردم به $5/0m$ می‌رسد؟ (پاسخها نشان می‌دهند که با چه سرعتی وضعیت بحرانی و خطرناک می‌شود.)

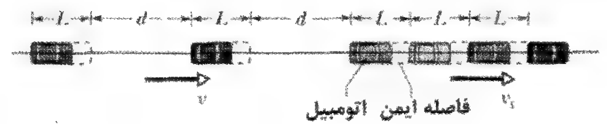



**شکل ۲-۲۲** مسئلهٔ ۱۰

●●۱۱- دو قطار هر یک با تندی $30km/h$ به طور رودررو در مسیر مستقیمی حرکت می‌کنند. پرنده‌ای که با تندی $60km/h$ حرکت می‌کند وقتی که فاصلهٔ دو قطار $60km$ است از جلوی قطار اول بلند می‌شود و به طور مستقیم به طرف قطار دوم پرواز می‌کند. در لحظه‌ای که به قطار دوم می‌رسد دوباره به طرف قطار اول بر می‌گردد و این کار ادامه پیدا می‌کند. (البته از این که پرنده چرا این گونه رفتار می‌کند چیزی نمی‌دانیم.) پیش از رسیدن دو قطار به هم پرنده چه مسافتی را طی کرده است؟

●●●۱۲- *موج ضربه‌ای ترافیک.* کاهش ناگهانی سرعت اتومبیلها در یک ترافیک متراکم می‌تواند مانند یک تپ که آن را *موج ضربه‌ای* می‌نامند در امتداد ردیف اتومبیلها در جهت ترافیک یا

در جهت مخالف گسترش یابد یا این که ساکن باشد. شکل ۲-۲۳ ردیفی از اتومبیلها را با فاصلهٔ یکنواخت نشان می‌دهد که با تندی $v = ۲۵/۰ m/s$ به سمت ردیفی از اتومبیلها که به فاصلهٔ یکنواخت از هم قرار دارند و تندی آهسته‌تر $v_s = ۵/۰۰ m/s$ را دارند حرکت می‌کنند. فرض کنید که هر اتومبیل سریعتر به اندازهٔ $L = ۱۲/۰ m$ (طول اتومبیل به علاوهٔ فاصلهٔ ایمن) موقع رسیدن به ردیف اتومبیلهای کندتر به آن اضافه کند و فرض کنید که در لحظهٔ آخر ناگهان سرعت را کاهش دهد (الف) در چه فاصلهٔ جدایی $d$ بین اتومبیلهای سریعتر موج ضربه‌ای ساکن باقی می‌ماند؟ اگر فاصلهٔ جدایی دو برابر این مقدار باشد، (ب) تندی و (پ) جهت (در جهت حرکت یا در خلاف جهت حرکت) کدام است؟ 




**شکل ۲-۲۳** مسئلهٔ ۱۲

●●●۱۳- در فاصلهٔ بین سان آنتونیو تا هوستون *نصف زمان* را با $۵۵ km/h$ و نصف دیگر را با $۹۰ km/h$ رانندگی می‌کنید. در برگشت *نصف مسافت* را با $۵۵ km/h$ و نصف دیگر را با $۹۰ km/h$ رانندگی می‌کنید. تندی میانگین شما (الف) از سان آنتونیو تا هوستون، (ب) در هنگام برگشت از هوستون به سان آنتونیو و (پ) در کل مسافت، چقدر است؟ (ت) سرعت میانگین شما در کل مسافرت چقدر است؟ (ث) با فرض این که حرکت در جهت مثبت $x$ باشد، نمودار $x$ را برحسب $t$ برای (الف) رسم کنید. نشان دهید که چگونه می‌توان سرعت میانگین را از نمودار به دست آورد. **ILW**

## بخش ۲-۵ سرعت و تندی لحظه‌ای

●۱۴- تابع مکان $x(t)$ ذره‌ای که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند برابر با $x = ۴/۰ - ۶/۰t^۲$ است که در آن $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. (الف) در چه زمانی و (ب) در کجا ذره (به طور لحظه‌ای) توقف می‌کند؟ در کدام (پ) زمان منفی و (ت) زمان مثبت، ذره از مبدأ می‌گذرد؟ (ث) نمودار $x$ را برحسب $t$ برای گسترهٔ $-۵s$ تا $+۵s$ رسم کنید. (ج) برای جابه‌جا کردن منحنی در نمودار به سمت راست، آیا باید جملهٔ $+۲۰t$ یا جملهٔ $-۲۰t$ را به $x(t)$ اضافه کنیم.؟ (چ) آیا این عمل به مقدار $x$ که در آن ذره به طور لحظه‌ای توقف می‌کند، می‌افزاید یا آن را کاهش می‌دهد؟

●۱۵- (الف) اگر مکان ذره ای با $x = ۴ - ۱۲t + ۳t^۲$ داده شده باشد (که در آن $t$ برحسب ثانیه و $x$ برحسب متر است)، سرعت ذره در $t = ۱s$ چقدر است؟ (ب) آیا این ذره درست پس از این زمان در جهت مثبت $x$ حرکت می‌کند یا در جهت منفی آن؟ (پ) تندی ذره درست پس از آن چقدر است؟ (ت) آیا درست پس از این تندی افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (به دو پرسش بعدی بدون محاسبهٔ اضافی پاسخ دهید.) (ث) آیا لحظه‌ای وجود دارد که سرعت در آن صفر باشد؟ اگر چنین است، زمان $t$ آن را پیدا کنید؛ اگر وجود ندارد، پاسخ دهید نه. (ج) آیا زمانی بعد از $t = ۳s$ وجود دارد که ذره در جهت منفی $x$ حرکت کند؟ اگر چنین است، زمان $t$ را پیدا کنید؛ اگر وجود ندارد، پاسخ دهید نه.

●۱۶- مکان الکترونی که در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند با رابطهٔ $x = ۱۶te^{-t} m$ داده شده، که در آن $t$ برحسب ثانیه است. وقتی الکترون به طور لحظه‌ای متوقف شود، فاصلهٔ آن از مبدأ چقدر است؟

●●۱۷- مکان ذره‌ای که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند برحسب سانتی‌متر با رابطهٔ $x = ۹/۷۵ + ۱/۵۰t^۳$ داده می‌شود، که در آن $t$ برحسب ثانیه است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) سرعت میانگین در بازهٔ $t = ۲/۰۰s$ تا $t = ۳/۰۰s$؛ (ب) سرعت لحظه‌ای در $t = ۲/۰۰s$؛ (پ) سرعت لحظه‌ای در $t = ۳/۰۰s$؛ (ت) سرعت لحظه‌ای در $t = ۲/۵۰s$؛ و (ث) سرعت لحظه‌ای وقتی که ذره در نیمهٔ راه بین مکان متناظر با $t = ۲/۰۰s$ و $t = ۳/۰۰s$ قرار دارد. (ج) نمودار $x$ را برحسب $t$ رسم کنید و پاسخهای خود را به طور نموداری نشان دهید.

## بخش ۲-۶ شتاب

●۱۸- (الف) اگر مکان ذره‌ای با رابطهٔ $x = ۲۰t - ۵t^۳$ داده شده باشد، که در آن $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است، در صورت وجود، سرعت ذره چه وقت صفر می‌شود؟ (ب) چه وقت شتاب $a$ صفر می‌شود؟ به ازای چه گسترهٔ زمانی (مثبت یا منفی) $a$ (پ) منفی می‌شود؟ (ت) مثبت می‌شود؟ (ث) نمودارهای $x(t)$، $v(t)$ و $a(t)$ را رسم کنید.

●۱۹- در لحظهٔ معینی تندی ذره‌ای $۱۸ m/s$ است و در راستای مثبت $x$ قرار دارد، و $۲/۴s$ پس از آن تندی به $۳۰ m/s$ در جهت مخالف می‌رسد. شتاب میانگین ذره در ضمن این بازهٔ $۲/۴s$ چقدر است؟ **SSM**

●۲۰- مکان ذره‌ای که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند با رابطهٔ $x = ۱۲t^۲ - ۲t^۳$ داده شده است، که در آن $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. (الف) مکان، (ب) سرعت و (پ) شتاب ذره را در $t = ۳/۰s$ تعیین کنید. (ت) بیشینهٔ مختصهٔ مثبت که ذره به آن می‌رسد چقدر است و (ث) در چه زمانی به آن می‌رسد؟ (ج) بیشینهٔ سرعت مثبتی که ذره به آن می‌رسد چقدر است و (چ) در چه زمانی به آن می‌رسد؟ (ح) شتاب ذره در لحظه‌ای که ذره حرکت نمی‌کند (غیر از $t = ۰$) چقدر است؟ (خ) سرعت میانگین ذره بین $t = ۰$ و $t = ۳s$ چقدر است؟

●●۲۱- مکان ذره‌ای که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند مطابق با معادلهٔ $x = ct^۲ - bt^۳$ به زمان بستگی دارد، که در آن $x$

برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. یکای (الف) ثابت $c$ و (ب) ثابت $b$، چیست؟ مقدارهای عددی این دو ثابت را به ترتیب ۳/۰ و ۲/۰ در نظر بگیرید. (پ) در چه زمانی ذره به بیشینهٔ مکان $x$ مثبت خود می‌رسد؟ از $t=0/0\,s$ تا $t=4/0\,s$، (ت) ذره چه مسافتی را طی می‌کند و (ث) جابه‌جایی آن چقدر است؟ سرعت آن را در (ج) $1/0\,s$ و (چ) $2/0\,s$، (ح) $3/0\,s$ و (خ) $4/0\,s$ پیدا کنید. شتاب آن را در زمانهای (د) $1/0\,s$، (ذ) $2/0\,s$، (ر) $3/0\,s$ و (ز) $4/0\,s$، پیدا کنید. **SSM WWW**

**••۲۲-** مردی از $t=0$ تا $t=5/00\,min$ به حال سکون ایستاده است و از $t=5/00\,min$ تا $t=10/0\,min$ در راستای یک خط راست با تندی ثابت $2/20\,m/s$ قدم می‌زند. (الف) سرعت میانگین $v_{avg}$ و (ب) شتاب میانگین $a_{avg}$ او در بازهٔ $2/00\,min$ تا $8/00\,min$ چقدر است؟ (پ) $v_{avg}$ و (ت) $a_{avg}$ او در بازهٔ زمانی $3/00\,min$ تا $9/00\,min$ چقدر است؟ (ث) نمودار $x$ را برحسب $t$ و $v$ را برحسب $t$ رسم کنید و نشان دهید که چگونه می‌توان پاسخهای (الف) تا (ت) را از نمودارها به دست آورد.

**بخش ۲-۷ شتاب ثابت: یک حالت خاص**

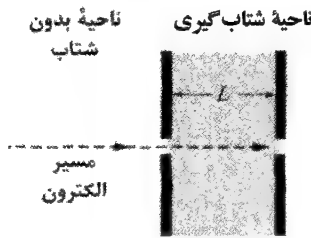
**•۲۳-** شتاب ثابت الکترونی $+3/2\,m/s^2$ است. در لحظهٔ معینی سرعت آن $+9/6\,m/s$ است. سرعت آن در (الف) $2/5\,s$ قبل و (ب) $2/5\,s$ بعد، چقدر است؟

**•۲۴-** میونی (یک ذرهٔ بنیادی) با تندی $5/00\times10^6\,m/s$ وارد ناحیه‌ای شده و سپس با آهنگ $1/25\times10^{14}\,m/s^2$ حرکت آن آهسته می‌شود. (الف) در چه فاصله‌ای میون متوقف می‌شود؟ (ب) نمودار $x$ را برحسب $t$ و $v$ را برحسب $t$ برای میون رسم کنید.

**•۲۵-** فرض کنید یک سفینهٔ فضایی در عمق فضا با شتاب ثابت برابر $9/8\,m/s^2$ حرکت می‌کند، تا احساسی از گرانش عادی را در ضمن پرواز نشان دهد. (الف) اگر سفینه از حالت سکون شروع کرده باشد، چقدر طول می‌کشد تا به تندی یک دهم تندی نور که برابر با $3/0\times10^8\,m/s$ است، برسد؟ (ب) با این سرعت چه مسافتی را طی خواهد کرد؟ **SSM**

**•۲۶-** در جاده‌ای خشک، اتومبیلی با لاستیکهای خوب با شتاب کاهندهٔ ثابت $4/92\,m/s^2$ می‌تواند ترمز کند. (الف) چقدر طول می‌کشد تا اتومبیلی که با سرعت اولیهٔ $24/6\,m/s$ در حال حرکت است، متوقف شود؟ (ب) اتومبیل در این مدت زمان چه مسافتی را طی می‌کند؟ (پ) نمودار $x$ را برحسب $t$ و $v$ را برحسب $t$ برای این شتاب کاهنده رسم کنید.

**•۲۷-** الکترونی با سرعت اولیهٔ $v_0=1/50\times10^5\,m/s$ وارد ناحیه‌ای به طول $L=1/00\,cm$ می‌شود و از نظر الکتریکی شتاب می‌گیرد (شکل ۲-۲۴). الکترون با سرعت $v=5/70\times10^6\,m/s$ از آنجا خارج می‌شود. با فرض ثابت بودن شتاب آن چقدر است؟ **SSM**



**شکل ۲-۲۴** مسئلهٔ ۲۷

**•۲۸-** قارچهای پرتاب کننده. برخی از قارچها تخمکهای خود را با سازوکار پرتاب کردن به اطراف می‌اندازند. هنگامی که آب موجود در هوا روی تخمک متصل به قارچ جمع می‌شود، قطرهٔ آب در یک طرف تخمک افزایش می‌یابد و یک لایهٔ نازک در طرف دیگر رشد می‌کند. تخمک بر اثر وزن قطرهٔ آب خم می‌شود، اما هنگامی که لایه به قطرهٔ آب می‌رسد، قطرهٔ آب ناگهان داخل لایه پخش می‌شود و تخمک فنروار چنان به سرعت به سمت بالا می‌جهد که در هوا پخش می‌شود. به طور معمول، تخمک در فاصلهٔ پرتاب $0/5\,\mu m$ به تندی $1/6\,m/s$ می‌رسد و پس از آن در فاصلهٔ $1/0\,mm$ در هوا تندی‌اش به صفر می‌رسد. با فرض ثابت بودن شتاب و به کار بردن داده‌ها، شتاب را برحسب $g$ در حین (الف) پرتاب و (ب) کاهش تندی حساب کنید.

**•۲۹-** یک وسیلهٔ الکتریکی از حالت سکون با آهنگ $2/0\,m/s^2$ در راستای خط مستقیمی شتاب می‌گیرد و به تندی $20\,m/s$ می‌رسد. سپس حرکت این وسیله با آهنگ ثابت $1/0\,m/s^2$ کند و متوقف می‌شود. (الف) از شروع تا توقف چقدر طول می‌کشد؟ (ب) از نقطهٔ شروع تا توقف این وسیله چه مسافتی را طی کرده است؟

**•۳۰-** رکورد تندی روی زمین در جهان توسط سرهنگ جان استپ هنگامی که در مارس ۱۹۵۴ سورتمه‌ای با موشک واکنشی را با تندی $1020\,km/h$ می‌راند به دست آمد. او و وسیله‌اش در مدت $1/4\,s$ به حالت سکون در آمدند (به شکل ۲-۷ نگاه کنید). برحسب $g$، او موقع توقف چه شتابی را تحمل کرده است؟

**•۳۱-** مسیر کل یک اتاقک آسانسور $190\,m$ و بیشینهٔ تندی آن $305\,m/min$ است و می‌تواند از حالت سکون شتاب بگیرد و سپس با شتاب $1/22\,m/s^2$ به حالت سکون بر گردد. (الف) وقتی آسانسور از حالت سکون تا تندی نهایی‌اش شتاب بگیرد، چقدر حرکت کرده است؟ (ب) اگر مسیر $190\,m$ را بدون توقف با شروع از حالت سکون و برگشت به همین حالت طی کند، چقدر طول می‌کشد؟ **ILW**

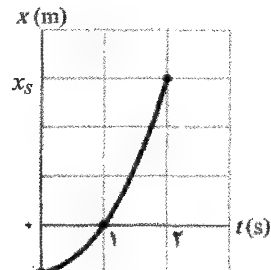
**•۳۲-** ترمز کردن می‌تواند با آهنگ $5/2\,m/s^2$ سرعت اتومبیل را کاهش دهد. (الف) اگر با سرعت $137\,km/h$ در حال حرکت باشید و ناگهان با پلیس روبه‌رو شوید، کمینهٔ زمان مورد نیاز برای این که تندی اتومبیل خود را به حد تندی $90\,km/h$

برسانید چقدر است؟ (این جواب روشن خواهد کرد که ترمز کردن برای فرار از آشکار شدن تخلف توسط رادار یا تفنگ لیزری بی فایده است.) (ب) نمودار $x$ را برحسب $t$ و $v$ را برحسب $t$ برای چنین حرکت کند شونده‌ای رسم کنید.

●**۳۳**- اتومبیلی که با سرعت ۵۶/۰km/h حرکت می‌کند، هنگامی که راننده ترمز می‌کند ۲۴/۰m تا مانعی فاصله دارد. ۲/۰۰s بعد اتومبیل به مانع برخورد می‌کند. (الف) پیش از برخورد بزرگی شتاب ثابت اتومبیل چقدر بوده است؟ (ب) سرعت اتومبیل در موقع برخورد چقدر بوده است؟ **SSM ILW**

●●**۳۴**- اتومبیلی در راستای محور $x$ با شروع از حالت سکون ($x=0$) پس از طی مسافت ۹۰۰m ($x=900\text{m}$) دوباره به حالت سکون در می‌آید. در $\frac{1}{4}$ اول این مسافت، شتاب آن $+2/25\text{m/s}^2$ است. در $\frac{3}{4}$ بعدی این مسافت شتاب آن $-0/750\text{m/s}^2$ است. (الف) زمان حرکت در ۹۰۰m و (ب) تندی بیشینهٔ آن، چقدر است؟ (پ) نمودار مکان $x$، سرعت $v$ و شتاب $a$ را برحسب زمان $t$ برای کل حرکت رسم کنید.

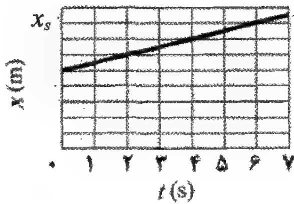
●●**۳۵**- شکل ۲-۲۵ ذره‌ای را که در راستای محور $x$ با شتاب ثابت حرکت می‌کند نشان می‌دهد. در مقیاس عمودی شکل $x_s = 6/0\text{m}$ مشخص شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب ذره را پیدا کنید.




**شکل ۲-۲۵** مسئلهٔ ۳۵

●●**۳۶**- (الف) اگر بیشینهٔ شتابی که برای مسافران یک قطار زمینی قابل تحمل است برابر با $1/34\text{m/s}^2$ و فاصلهٔ دو ایستگاه ۸۰۶m باشد، بیشینهٔ تندی که یک قطار زیر زمینی می‌تواند بین دو ایستگاه داشته باشد، چقدر است؟ (ب) زمان حرکت بین دو ایستگاه چقدر است؟ (پ) اگر قطار به مدت ۲۰s در هر ایستگاه توقف کند، بیشینهٔ تندی میانگین قطار از یک مرحلهٔ شروع تا مرحلهٔ بعدی چقدر است؟ (پ) نمودار $x$، $v$ و $a$ را برحسب $t$ برای بازهٔ از مرحلهٔ شروع تا مرحلهٔ بعدی رسم کنید.

●●**۳۷**- دو اتومبیل A و B در مسیرهای مجاور در یک جهت حرکت می‌کنند. مکان $x$ اتومبیل A از لحظهٔ $t=0$ تا $t=7/0\text{s}$ در شکل ۲-۲۶ داده شده است. در مقیاس عمودی شکل $x_s = 32/0\text{m}$ مشخص شده است. در $t=0$، اتومبیل B با سرعت ۱۲m/s و شتاب ثابت منفی $a_B$ در $x=0$ قرار دارد. (الف) شتاب $a_B$ چقدر باید باشد تا اتومبیلها (به طور لحظه‌ای) در $t=4/0\text{s}$ (به طور لحظه‌ای در مقدار یکسان $x$) پهلو به پهلوی یکدیگر قرار گیرند؟ (ب) به ازای این مقدار $a_B$، چند بار دو اتومبیل به صورت پهلو به پهلو قرار می‌گیرند؟ (پ) مکان $x$ اتومبیل $B$ را برحسب زمان $t$ در شکل ۲-۲۶ رسم کنید. اگر بزرگی شتاب $a_B$ (ت) بیشتر از و (ث) کمتر از پاسخ (الف) باشد، چند بار دو اتومبیل به صورت پهلو به پهلو در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند؟




**شکل ۲-۲۶** مسئلهٔ ۳۷

●●**۳۸**- هنگامی که چراغ راهنمایی زرد روشن می‌شود به طرف آن نزدیک می‌شوید. تندی شما حد تندی قانونی $v_0 = 55\text{km/h}$ است؛ بهترین آهنگ کاهش شتاب شما دارای بزرگی $a = 5/18\text{m/s}^2$ است. بهترین زمان واکنش شما برای ترمز کردن $T = 0/75\text{s}$ است. برای جلوگیری از ورود جلوی اتومبیل به تقاطع پس از این که چراغ قرمز شد، اگر فاصله با تقاطع و زمان روشن ماندن چراغ زرد (الف) ۴۰m و ۲/۸s (ب) ۳۲m و ۱/۸s باشد، آیا شما برای توقف باید ترمز کنید یا با همان تندی ۵۵km/h به حرکت خود ادامه دهید؟ پاسخ دهید ترمز می‌کنم، به حرکت ادامه می‌دهم، یکی از این دو روش (وقتی که یکی از آنها مؤثر است) را نام ببرید یا این که پاسخ دهید هیچ‌کدام (هنگامی که هیچ‌کدام مؤثر نیستند و زمان چراغ زرد کافی نیست).

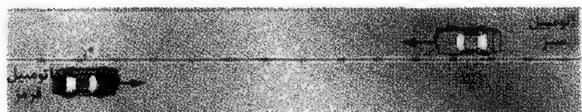
●●**۳۹**- به هنگام حرکت دو قطار در راستای یک مسیر، رانندگان آنها ناگهان متوجه می‌شوند که آنها به طور رودررو به طرف هم حرکت می‌کنند. شکل ۲-۲۷ سرعتهای $v$ آنها را برحسب تابعی از زمان $t$ به هنگام آهسته شدن قطارها نشان می‌دهد. مقیاس عمودی شکل، $v_s = 40/0\text{m/s}$ را نشان می‌دهد. فرایند آهسته شدن زمانی انجام می‌گیرد که قطارها از یکدیگر ۲۰۰m فاصله دارند. فاصلهٔ آنها وقتی که هر دو قطار متوقف شوند چقدر است؟




**شکل ۲-۲۷** مسئلهٔ ۳۹

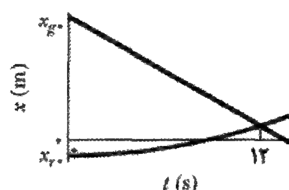
●●**۴۰**- در شکل ۲-۲۸، یک اتومبیل قرمز رنگ و یک اتومبیل سبز رنگ که به غیر از رنگ شبیه یکدیگرند در دو خط مجاور و موازی با محور $x$ به طرف هم حرکت می‌کنند. در لحظهٔ $t=0$، اتومبیل قرمز رنگ در $x_r = 0$ و اتومبیل سبز رنگ در $x_g = 220\text{m}$ قرار دارند. اگر تندی ثابت اتومبیل قرمز رنگ ۲۰km/h باشد، این دو اتومبیل در نقطهٔ $x = 44/5\text{m}$ از

یکدیگر عبور می‌کنند، و اگر تندی ثابت آن 40km/h باشد، آنها در نقطهٔ $x = 76/6m$ از یکدیگر می‌گذرند. (الف) سرعت اولیه و (ب) شتاب اتومبیل سبز رنگ چقدر است؟



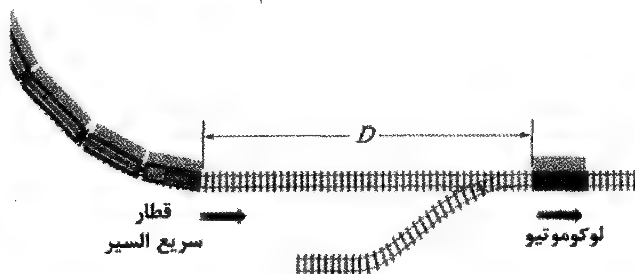

**شکل ۲-۲۸** مسئله‌های ۴۰ و ۴۱

••۴۱- شکل ۲-۲۸ دو اتومبیل قرمز و سبز را نشان می‌دهد که به طرف هم حرکت می‌کنند. شکل ۲-۲۹، نمودار حرکت آنها، در زمان $t = 0$ مکان آنها را در $x_{g0} = 270\ m$ و $x_{r0} = -35/0\ m$ نشان می‌دهد. اتومبیل سبز رنگ دارای تندی ثابت 20/0m/s و اتومبیل قرمز رنگ از حالت سکون شروع می‌کند. بزرگی شتاب اتومبیل قرمز رنگ چقدر است؟




**شکل ۲-۲۹** مسئله ۴۱

•••۴۲- هنگامی که قطار مسافربری سریع السیر پیچی را با 161 km/h دور می‌زند، رانندهٔ آن با ناراحتی متوجه می‌شود که یک لوکوموتیو به طور نامناسبی در فاصلهٔ $D = 676m$ از آن وارد خط آهن شده است (شکل ۲-۳۰). لوکوموتیو با سرعت 29/0km/h حرکت می‌کند. رانندهٔ قطار بی‌درنگ ترمز می‌کند. (الف) بزرگی شتاب ثابت به وجود آمده چقدر باید باشد تا فقط از برخورد جلوگیری شود؟ (ب) فرض کنید که راننده در $x = 0$ در $t = 0$ لوکوموتیو را دیده باشد. نمودار $x(t)$ لوکوموتیو و قطار را در مواردی که از برخورد جلوگیری شده باشد و کاملاً جلوگیری نشده باشد، رسم کنید.




**شکل ۲-۳۰** مسئلهٔ ۴۲

••۴۳- در حالی که به دنبال اتومبیل بدون علامت پلیس به فاصلهٔ 25m در حرکت‌اید با تلفن صحبت می‌کنید؛ هم اتومبیل شما و هم اتومبیل پلیس با تندی 110km/h در حال حرکت‌اند. صحبت شما به مدت 2/0s توجه شما را از پلیس بر می‌گرداند (زمان کافی جهت دیدن تلفن و گفتن این که «من این کار را انجام نمی‌دهم!»). در آغاز 2/0s، افسر پلیس ناگهان با شتاب $5/0m/s^2$ شروع به ترمز می‌کند. (الف) وقتی شما بالاخره متوجه پلیس می‌شوید فاصلهٔ بین دو اتومبیل چقدر است؟ فرض کنید 0/40s دیگر طول می‌کشد که متوجه خطر شده و ترمز می‌کنید. (ب) اگر شما نیز با $5/0m/s^2$ ترمز کنید، تندی شما وقتی که به ماشین پلیس برخورد می‌کنید چقدر است؟

## بخش ۲-۹ شتاب سقوط آزاد

•۴۴- قطره‌های باران از ابری که 1700m بالاتر از سطح زمین قرار دارد به زمین فرو می‌ریزد. (الف) اگر آنها بر اثر مقاومت هوا کند نشوند، سرعت قطره‌ها در هنگام برخورد با زمین چقدر است؟ (ب) آیا قدم زدن در بیرون در هنگام چنین رگباری بی‌خطر است؟

•۴۵- در یک کارگاه ساختمانی، آچاری پس از رها شدن با تندی 24m/s به زمین می‌خورد. (الف) آچار از چه ارتفاعی بر اثر بی‌مبالاتی فرو افتاده است؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر بوده است؟ (پ) نمودارهای $y$، $v$ و $a$ را برحسب $t$ برای آچار رسم کنید. SSM

•۴۶- شخصی سنگی را به طور قائم با تندی اولیهٔ 12/0m/s از بام ساختمانی به ارتفاع 30/0m به پایین می‌اندازد. (الف) چقدر طول می‌کشد تا سنگ به زمین برسد؟ (ب) تندی سنگ در لحظهٔ برخورد با زمین چقدر است؟

•۴۷- (الف) با چه تندی توپی به طور قائم از سطح زمین برای رسیدن به بیشینهٔ ارتفاع 50m باید پرتاب شود؟ (ب) توپ چه مدت در هوا حرکت می‌کند؟ (پ) نمودارهای $y$، $v$ و $a$ را برحسب $t$ برای توپ رسم کنید. روی دو نمودار اول، زمان رسیدن به ارتفاع 50m را نشان دهید. WWW SSM

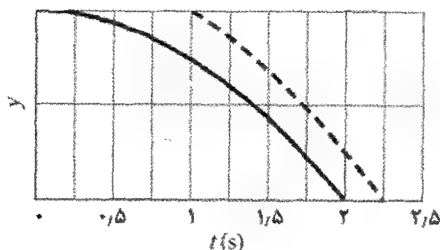
•۴۸- وقتی حیوان گورکن می‌ترسد رو به بالا می‌جهد. فرض کنید در مدت 0/200s تا 0/544m بالا می‌پرد. (الف) تندی اولیهٔ این حیوان در لحظهٔ ترک زمین چقدر بوده است؟ (ب) تندی آن در ارتفاع 0/544m چقدر است؟ (پ) تا چقدر بالاتر می‌جهد؟

•۴۹- یک بالون هوای گرم با آهنگ 12m/s به بالا می‌رود و در ارتفاع 80m بالاتر از زمین بسته‌ای را به طرف زمین می‌اندازد. (الف) چقدر طول می‌کشد تا بسته به زمین برسد؟ (ب) بسته با چه تندی با زمین برخورد می‌کند؟ SSM

•••۵۰- پیچی از یک پل در حال ساخت به ارتفاع 90m به دره‌ای در زیر پل سقوط می‌کند. (الف) در چه مدت زمانی، این پیچ ۲۰ درصد آخر سقوط خود را طی می‌کند؟ تندی آن (ب) در شروع ۲۰ درصد آخر سقوط و (پ) به هنگام رسیدن به ته دره چقدر است؟

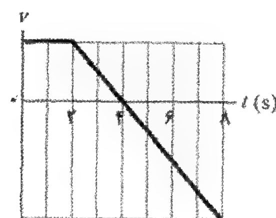
••۵۱- کلیدی از روی پلی که 45m بالاتر از آب آست سقوط می‌کند. این کلید به طور مستقیم به درون قایقی می‌افتد که با سرعت ثابتی حرکت می‌کند و هنگام رها شدن کلید در فاصلهٔ 12m از محل برخورد بوده است، تندی قایق چقدر است؟ ILW SSM

●●۵۲- در لحظهٔ $t=0$، سیب شمارهٔ ۱ از بالای پلی روی جاده‌ای که در زیر قرار دارد فرو می‌افتد، پس از چند لحظه، سیب شمارهٔ ۲ از همان ارتفاع به سمت پایین پرتاب می‌شود. شکل ۲-۳۱ مکانهای قائم سیبها را برحسب زمان سقوط $t$، تا برخورد با زمین نشان می‌دهد. با چه تندی تقریبی سیب شمارهٔ ۲ به سمت پایین پرتاب شده است؟



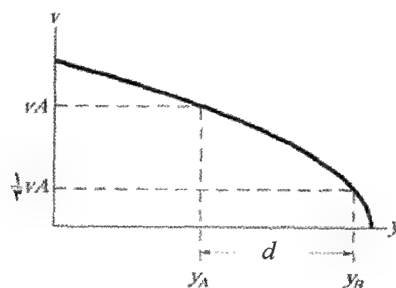

**شکل ۲-۳۱** مسئلهٔ ۵۲

●●۵۳- وقتی که یک بالون علمی با سرعت $19/6 m/s$ بالا می‌رود، یکی از بسته‌های ابزار آن از یکی از طنابها رها می‌شود و به طور آزاد سقوط می‌کند. شکل ۲-۳۲ سرعت قائم بسته را برحسب زمان پیش از رها شدن تا لحظهٔ رسیدن آن به زمین نشان می‌دهد. (الف) بیشینهٔ ارتفاعی که پس از رها شدن بالا می‌رود چقدر است؟ (ب) نقطهٔ رها شدن چقدر از زمین فاصله دارد؟




**شکل ۲-۳۲** مسئلهٔ ۵۳

●●۵۴- شکل ۲-۳۳ تندی $v$ را برحسب ارتفاع $y$ توپی که به طور مستقیم رو به بالا در راستای محور $y$ پرتاب شده است نشان می‌دهد. فاصلهٔ $d$ برابر $0/40$ است. تندی در ارتفاع $y_A$ برابر با $v_A$ است. تندی در ارتفاع $y_B$ برابر با $\frac{1}{3}v_A$ است. تندی $v_A$ چقدر است؟




**شکل ۲-۳۳** مسئلهٔ ۵۴

●●۵۵- یک گلولهٔ گلی از ارتفاع $15/0 m$ به زمین می‌افتد. گلوله پیش از این که ساکن شود به مدت $20/0 ms$ با زمین در حال تماس می‌ماند. (الف) بزرگی شتاب میانگین گلوله در مدتی که با زمین در تماس بوده چقدر است؟ (گلوله را یک ذره در نظر بگیرید.) (ب) شتاب میانگین رو به بالاست یا رو به پایین؟ SSM

●●۵۶- سنگی از روی پل رودخانه‌ای که $43/9 m$ از آب بالاتر است درون آب رها می‌شود. سنگ دیگری $1/00 s$ پس از آن به طور قائم به سمت پایین پرتاب می‌شود. هر دو سنگ در یک زمان به آب برخورد می‌کنند. (الف) تندی اولیهٔ سنگ دوم چقدر بوده است؟ (ب) اگر زمان صفر را لحظهٔ رها شدن سنگ اول در نظر بگیریم، نمودار سرعت را برحسب زمان برای هر کدام از سنگها رسم کنید.

●●۵۷- برای آزمایش کیفیت یک توپ تنیس آن را از ارتفاع $4/00$ متری روی زمین رها می‌کنند. این توپ تا ارتفاع $2/00 m$ بر می‌گردد. اگر زمان تماس توپ با زمین $12/0 ms$ باشد. (الف) بزرگی شتاب میانگین آن در ضمن تماس چقدر است؟ (ب) آیا جهت شتاب میانگین رو به بالاست یا رو به پایین؟ SSM

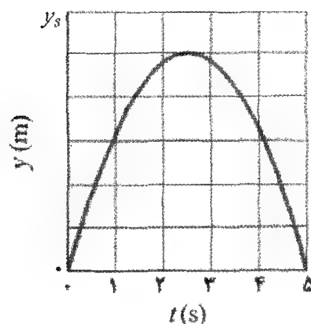
●●۵۸- سنگی به طور قائم از سطح زمین در لحظهٔ $t=0$ رو به بالا پرتاب می‌شود. در لحظهٔ $t=1/5 s$ سنگ از بالای یک ساختمان بلند عبور می‌کند و $1/0 s$ پس از آن به بیشینهٔ ارتفاع خود می‌رسد. ارتفاع ساختمان چقدر است؟

●●۵۹- قطره‌های آب از دهانهٔ دوشی روی کف زمین که $200 cm$ زیر آن قرار دارد می‌افتند. قطره‌های آب در بازه‌های منظم (برابر) سقوط می‌کنند. قطرهٔ اول زمانی به کف برخورد می‌کند که قطرهٔ چهارم شروع به سقوط می‌کند. مکانهای (الف) قطره‌های دوم و (ب) سوم را هنگامی که قطرهٔ اول به کف برخورد می‌کند پیدا کنید.

●●۶۰- جسم ساکنی از ارتفاع $h$ سقوط می‌کند. اگر جسم در $1/00 s$ آخر $0/50 h$ را طی کند، (الف) زمان و (ب) ارتفاع سقوط را پیدا کنید. (پ) دربارهٔ حل فیزیکی غیر قابل قبول معادلهٔ درجه دوم که برحسب $t$ به دست می‌آید توضیح دهید.

●●۶۱- گربه‌ای در حال چرت زدن می‌بیند که گلدانی نخست رو به بالا و سپس رو به پایین از مقابل پنجرهٔ بازی می‌گذرد. گلدان در کل رفت و برگشت به مدت $0/50 s$ در معرض دید بوده و پنجره از بالا تا پایین $2/00 m$ ارتفاع دارد. گلدان تا چه ارتفاعی از لبهٔ بالای پنجره بالاتر رفته است؟

●●●۶۲- توپی از سطح سیاره‌ای به طور قائم و رو به بالا پرتاب می‌شود. نمودار $y$ برحسب $t$ برای این توپ در شکل ۲-۳۴ نشان داده شده است که $y$ ارتفاع توپ از نقطهٔ شروع و $t=0$ لحظه‌ای است که توپ پرتاب شده است. مقیاس قائم شکل را $y_s = 30/0 m$ مشخص کرده است. بزرگی (الف) شتاب سقوط آزاد روی سیاره و (ب) سرعت اولیهٔ توپ چقدر است؟



**شکل ۲-۳۴** مسئلهٔ ۶۲

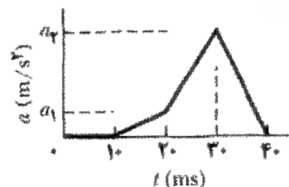
•••۶۳- یک گلولهٔ فولادی از بام ساختمانی پایین می‌افتد و از مقابل پنجره‌ای که فاصلهٔ بالا تا پایین آن $1/20\,m$ است در مدت $0/125s$ می‌گذرد. گلوله پس از برخورد به پیاده‌رو «به طور کامل» به بالا می‌جهد و از پایین پنجره تا بالای آن را در مدت $0/125s$ طی می‌کند. فرض کنید که حرکت رو به بالا درست معکوس فرو افتادن باشد. زمانی که گلوله پایینتر از زیر پنجره بوده $2/00\,s$ است. بلندی ساختمان چقدر است؟

••۶۴- یک بازیکن بسکتبال که برای گرفتن توپ در برگشت از تخته در کنار سبد ایستاده است به طور قائم $76/0\,cm$ به بالا پرش می‌کند. کل زمانی (بالا رفتن و پایین آمدن) که بازیکن (الف) $15/0\,cm$ در بالای این پرش و (ب) $15/0\,cm$ پایین آن بوده، چقدر است؟ آیا پاسخهای شما نشان می‌دهند که چرا به نظر می‌رسد که بازیکنها در بالای پرش خود در هوا معلق می‌مانند؟

## بخش ۲-۱۰ انتگرالگیری نموداری در تحلیل حرکت

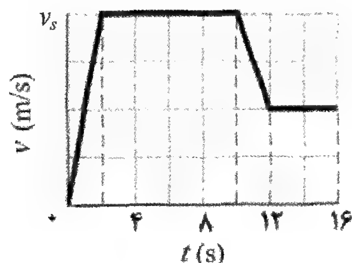
•۶۵- در مسئلهٔ نمونهٔ ۲-۹ در بیشینهٔ شتاب سر، تندی (الف) سر و (ب) بدن چقدر است؟

•۶۶- نوعی سمندر شکارش را با پرتاب کردن زبانش به سمت او شکار می‌کند: سمندر پس از مشاهدهٔ شکار زبانش را که در دهانش به صورت جمع شده است به سمت شکار پرت می‌کند و شکار به زبان چسبناک او می‌چسبد و طعمهٔ سمندر می‌شود. شکل ۲-۳۵ بزرگی شتاب $a$ را برحسب زمان $t$ برای مرحلهٔ شتاب پرتاب در یک وضعیت نوعی نشان می‌دهد. شتابهای نشان داده شده عبارت‌اند از $a_2 = 400\,m/s^2$ و $a_1 = 100\,m/s^2$. تندی به طرف خارج زبان در انتهای مرحلهٔ شتاب‌گیری چقدر است؟



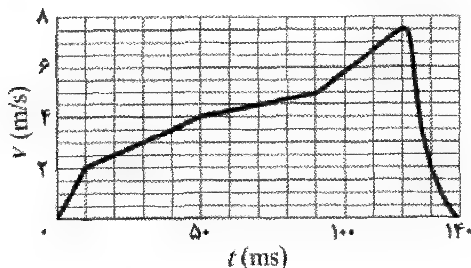
**شکل ۲-۳۵** مسئلهٔ ۶۶

••۶۷- دونده‌ای که نمودار سرعت- زمان آن در شکل ۲-۳۶ نشان داده شده است، در $16s$ چه مسافتی دویده است؟ مقیاس عمودی شکل $v_s = 8/0\,m/s$ را نشان می‌دهد. ILW



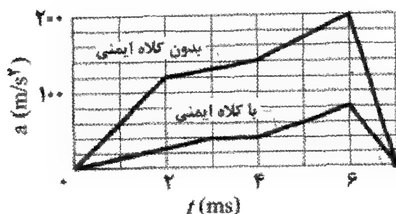
**شکل ۲-۳۶** مسئلهٔ ۶۷

••۶۸- در ضربت رو به جلو در کاراته، مشت در ناحیهٔ کمر از حال سکون شروع می‌کند و با باز شدن کامل بازو خیلی تند به جلو آورده می‌شود. سرعت $v(t)$ مشت برای یک کاراته کار ماهر در شکل ۲-۳۷ داده شده است. (الف) در $t = 50\,ms$ و (ب) وقتی تندی مشت بیشترین مقدار است، مشت چقدر حرکت می‌کند؟



**شکل ۲-۳۷** مسئلهٔ ۶۸

••۶۹- وقتی در بازی راگبی توپ به طرف بازیکنی شوت می‌شود و بازیکن با ضربهٔ «سر» آن را بر می‌گرداند، شتاب سر در ضمن برخورد می‌تواند مهم باشد. شکل ۲-۳۸ شتاب اندازه‌گیری شدهٔ $a(t)$ سر یک بازیکن فوتبال را با سر بدون کلاه ایمنی و با کلاه ایمنی با شروع از حالت سکون نشان می‌دهد. در لحظهٔ $t = 7/0\,ms$، اختلاف بین تندی حاصل شده با سر بدون کلاه ایمنی و تندی حاصل شده با کلاه ایمنی چقدر است؟



**شکل ۲-۳۸** مسئله ۶۹

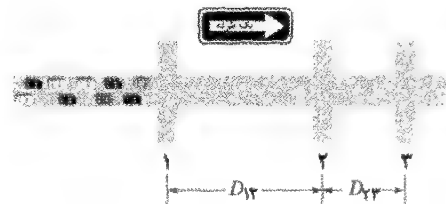
•••۷۰- دو ذره در امتداد محور $x$ حرکت می‌کنند. مکان ذرهٔ ۱ با رابطهٔ $x = 6/00t^2 + 3/00t + 2/00$ (برحسب متر و ثانیه) داده شده است؛ شتاب ذرهٔ ۲ با رابطهٔ $a = -8/00\,t$ (برحسب متر بر مربع ثانیه و ثانیه) داده شده است و در $t = 0$ سرعت آن برابر $20\,m/s$ است. وقتی سرعت دو ذره با هم مساوی می‌شوند، سرعت آنها چقدر است؟

**مسئله‌های اضافی**

۷۱- در لحظه‌ای که چراغ راهنما سبز می‌شود، خودرویی با شتاب ثابت $۲/۲\text{m/s}^۲$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه کامیونی که با تندی ثابت $۹/۵\text{m/s}$ در حال حرکت است از خودرو سبقت می‌گیرد و از آن عبور می‌کند. (الف) در چه فاصله‌ای دورتر از چراغ راهنمایی خودرو از کامیون سبقت می‌گیرد؟ (ب) خودرو در این لحظه با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

۷۲- شکل ۲-۳۹ قسمتی از خیابان را نشان می‌دهد که در آن جریان ترافیک کنترل می‌شود و به گروهی از اتومبیلها اجازه می‌دهد به آرامی در امتداد خیابان حرکت کنند. فرض کنید که اتومبیلهای جلویی درست به تقاطع ۲ می‌رسند جایی که وقتی آنها به فاصلهٔ $d$ از تقاطع بوده‌اند چراغ سبز روشن می‌شود. آنها با تندی معین $v_p$ (تندی مجاز) به حرکت ادامه می‌دهند تا به تقاطع ۳ می‌رسند جایی که وقتی آنها به فاصلهٔ $d$ از تقاطع بوده‌اند چراغ سبز روشن می‌شود. فاصلهٔ بین تقاطعها $D_{۲۱}$ و $D_{۳۲}$ است. (الف) تأخیر زمانی چراغ سبز در تقاطع ۳ نسبت به تقاطع ۲ چقدر باید باشد تا حرکت اتومبیلها به صورت آرام انجام شود؟

حال فرض کنید این گروه با چراغ قرمز تقاطع، متوقف شوند. وقتی چراغ سبز در آنجا روشن می‌شود، اتومبیلهای جلویی به زمان معین $t_r$ برای واکنش به این تغییر و زمان اضافی دیگری برای شتاب گرفتن با آهنگ $a$ احتیاج دارند تا به تندی $v_p$ برسند. (ب) اگر چراغ سبز در تقاطع ۲ وقتی روشن شود که اتومبیلهای جلویی به فاصلهٔ $d$ از آن تقاطع قرار دارند، چه مدت پس از روشن شدن چراغ سبز در تقاطع ۱، باید چراغ سبز در تقاطع ۲ روشن شود؟



**شکل ۲-۳۹** مسئلهٔ ۷۲

۷۳- در یک بازی ویدئویی، نقطه‌ای برای حرکت در صفحهٔ نمایش مطابق با $x = ۹/۰۰t - ۰/۷۵۰t^۳$ برنامه‌ریزی شده است، که در آن $x$ فاصله برحسب سانتی‌متر از لبهٔ سمت چپ صفحهٔ نمایش و $t$ برحسب ثانیه است. وقتی نقطه به لبهٔ صفحهٔ نمایش در $x = ۰$ یا $x = ۱۵/۰\text{cm}$ می‌رسد، $t$ صفر می‌شود و نقطه حرکت را دوباره مطابق با $x(t)$ شروع می‌کند. (الف) در چه زمانی پس از شروع نقطه به طور لحظه‌ای ساکن می‌شود؟ (ب) در چه مقداری از $x$ این رخ می‌دهد؟ (پ) شتاب نقطه (با در نظر گرفتن علامت) در لحظهٔ این رخداد چقدر است؟ (ت) آیا ذره درست پیش از ساکن شدن به طرف راست حرکت می‌کند یا به طرف چپ؟ (ث) درست پس از ساکن شدن چطور؟ (ج) در چه زمان $t > ۰$ نقطه برای اولین بار به لبهٔ صفحهٔ نمایش می‌رسد؟

۷۴- یک گلولهٔ سربی از روی یک تختهٔ شیرجه که $۵/۲۰\text{m}$ بالاتر از آب قرار دارد به درون استخر سقوط می‌کند. گلوله با سرعت معینی با آب برخورد می‌کند و سپس با همین سرعت ثابت به کف استخر فرو می‌رود. گلوله در مدت $۴/۸۰\text{s}$ پس از سقوط به ته آب می‌رسد. (الف) گودی استخر چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت (رو به بالا یا رو به پایین) سرعت میانگین گلوله را در کل سقوط پیدا کنید. فرض کنید که تمام آب استخر تخلیه شود. اکنون گلوله از تختهٔ شیرجه طوری پرتاب می‌شود که باز هم در همان مدت $۴/۸۰\text{s}$ به ته استخر برسد. (ت) بزرگی و (ث) جهت سرعت اولیهٔ گلوله چیست؟

۷۵- تنها کابل نگه‌دارندهٔ یک بالابر خالی ساختمانی هنگامی که به حالت سکون در بالای ساختمان به بلندی $۱۲۰\text{m}$ قرار دارد پاره می‌شود. (الف) بالابر با چه تندی به زمین برخورد می‌کند؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر است؟ (پ) تندی آن هنگامی که از نقطه میانی مسیرش، در حین حرکت رو به پایین، می‌گذرد چقدر است؟ (ت) چقدر طول می‌کشد تا از نقطهٔ میانی مسیرش بگذرد؟

۷۶- دو ذره از حال سکون از یک ارتفاع معین به فاصلهٔ $۱/۰\text{s}$ شروع به سقوط آزاد می‌کنند. پس از چه مدت زمان پس از این که جسم اول شروع به سقوط می‌کند، فاصلهٔ دو جسم به $۱۰\text{m}$ می‌رسد؟

۷۷- اگر پرتاب کنندهٔ بیسبال توپ سریعی را به طور افقی با تندی $۱۶۰\text{km/h}$ پرتاب کند، چقدر طول می‌کشد تا توپ به ناحیهٔ زدن ضربه واقع در $۱۸/۴\text{m}$ دورتر از آن برسد؟

۷۸- پروتونی در راستای محور $x$ بنابر رابطهٔ $x = ۵۰t + ۱۰t^۲$ حرکت می‌کند، که در آن $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. (الف) سرعت میانگین پروتون در طی $۳/۰\text{s}$ اول حرکت آن و (ب) سرعت لحظه‌ای پروتون در $t = ۳/۰\text{s}$ و (پ) شتاب لحظه‌ای پروتون در $t = ۳/۰\text{s}$، چقدر است؟ (ت) نمودار $x$ برحسب $t$ را رسم کنید و نشان دهید که چگونه پاسخ (الف) از این نمودار به دست می‌آید. (ث) پاسخ (ب) را روی نمودار مشخص کنید. (ج) نمودار $v$ برحسب $t$ را رسم و پاسخ (پ) را روی آن مشخص کنید.

۷۹- موتور سواری که با سرعت $۳۰\text{m/s}$ در حرکت است، با گرفتن ترمز شتاب ثابت منفی پیدا می‌کند. در یک بازهٔ $۳/۰\text{s}$ درست پس از ترمز کردن تندی موتور به $۱۵\text{m/s}$ می‌رسد. از

لحظهٔ شروع ترمز گرفتن تا ایستادن، موتور چه مسافتی را می‌پیماید؟

۸۰- خلبانی با سرعت ۱۳۰۰km/h در ارتفاع $h = ۳۵m$ بالاتر از سطح زمین به طور افقی پرواز می‌کند. در لحظهٔ $t = ۰$ خلبان شروع به پرواز روی زمین شیبداری به طرف بالا و با زاویهٔ $\theta = ۴/۳°$ می‌کند (شکل ۲-۴۰). اگر خلبان مسیر هواپیما را تغییر ندهد، پس از چه مدت زمان $t$ هواپیما به زمین برخورد می‌کند؟




**شکل ۲-۴۰** مسئلهٔ ۸۰

۸۱- قرص یک نوع بازی (مثل بازی هاکی) توسط بازیکن با استفاده از چوب مخصوص بازی از حال سکون تا تندی ۶/۰ m/s در مسافت ۱/۸m با آهنگ ثابتی شتابدار می‌شود. در این نقطه، تماس قرص با چوب قطع شده و قرص با آهنگ $۲/۵m/s^۲$ آهسته و متوقف می‌شود. (الف) از لحظهٔ شروع به شتابدار شدن تا توقف قرص چقدر طول می‌کشد؟ (ب) مسافت کل پیموده شده توسط قرص چقدر است؟

۸۲- سر یک مار زنگی موقع ضربه زدن به شکار می‌تواند $۵۰m/s^۲$ شتاب داشته باشد. اگر اتومبیلی بتواند چنین شتابی داشته باشد، چقدر طول می‌کشد تا از حال سکون به تندی ۱۰۰km/h برسد؟

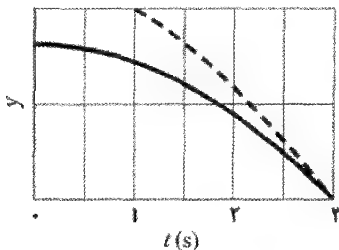
۸۳- یک جمبوجت برای بلند شدن از زمین باید به تندی ۳۶۰km/h برسد. برای بلند شدن از باندی به طول ۱/۸km کمترین شتاب ثابت مورد نیاز چقدر است؟

۸۴- رانندهٔ اتومبیلی در مدت ۰/۵۰min تندی خود را با آهنگ ثابتی از ۲۵km/h تا ۵۵ km/h افزایش می‌دهد. دوچرخه سواری در مدت ۰/۵۰ min تندی خود را با آهنگ ثابتی از حالت سکون به ۳۰km/h افزایش می‌دهد. بزرگی (الف) شتاب راننده و (ب) شتاب دوچرخه سوار چقدر است؟

۸۵- برای توقف اتومبیلی، نخست به زمان واکنش معینی برای ترمز کردن نیاز دارید؛ سپس اتومبیل با آهنگ ثابتی آهسته می‌شود. فرض کنید که مسافت کل طی شده توسط اتومبیل در ضمن این دو مرحله، وقتی تندی اولیه ۸۰/۵km/h است برابر با ۵۶/۷m و وقتی تندی اولیه ۴۸/۳km/h است برابر با ۲۴/۴m باشد. (الف) زمان واکنش و (ب) بزرگی شتاب اتومبیل چقدر است؟

۸۶- قطار قرمز رنگی با تندی ۷۲km/h و قطار سبز رنگی با تندی ۱۴۴km/h در راستای یک خط مستقیم به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. وقتی فاصلهٔ بین آنها ۹۵۰m است هر دو رانندهٔ یکدیگر را مشاهده و اقدام به ترمز می‌کنند. ترمز موجب آهسته شدن آنها با آهنگ $۱/۰m/s^۲$ می‌شود. آیا برخوردی روی می‌دهد؟ اگر برخوردی رخ می‌دهد، تندی قطار قرمز رنگ و تندی قطار سبز رنگ را در لحظهٔ برخورد به دست آورید. اگر برخودی رخ نمی‌دهد، فاصلهٔ بین دو قطار را در لحظهٔ توقف به دست آورید.

۸۷- در لحظهٔ $t = ۰$ ، به طور تصادفی یک میخ کوهنوردی از نقطهٔ بالایی واقع بر دیوارهٔ صخره از دست صخره نورد به دره‌ای در زیر او با سقوط آزاد فرو می‌افتد. پس از زمان کوتاهی همکار صخره نورد که ۱۰m بالاتر از او واقع شده میخ کوهنوردی را به طرف پایین پرتاب می‌کند. مکانهای $y$ میخها برحسب $t$ در ضمن سقوط در شکل ۲-۴۱ داده شده‌اند. میخ دوم با چه تندی پرتاب شده است؟




**شکل ۲-۴۱** مسئلهٔ ۸۷

۸۸- سنگی به طور قائم از لبهٔ بالای ساختمان بلندی به طرف بالا پرتاب می‌شود. این سنگ پس از ۱/۶۰s از پرتاب به بیشینهٔ ارتفاع خود در بالای ساختمان می‌رسد. سپس سقوط می‌کند و پس از عبور از لبهٔ ساختمان، طی مدت ۶/۰۰s از لحظهٔ پرتاب به زمین می‌رسد. برحسب یکاهای SI (الف) این سنگ با چه سرعتی رو به بالا پرتاب شده است؟ (ب) بیشینهٔ ارتفاع قسمت بالای ساختمان که سنگ به آنجا می‌رسد و (پ) ارتفاع ساختمان چقدر است؟

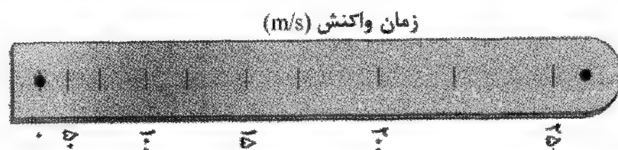
۸۹- شتاب ذره‌ای در راستای محور $x$ عبارت است از $a = ۵/۰t$، که $t$ برحسب ثانیه و $a$ برحسب متر بر مربع ثانیه است. در $t = ۲/۰s$، سرعت ذره +۱۷m/s است. سرعت ذره در $t = ۴/۰s$ چقدر است؟ **SSM**

۹۰- قطاری از حالت سکون شروع و با شتاب ثابت حرکت می‌کند. در یک لحظه با سرعت ۳۰m/s در حرکت بوده و در ۱۶۰m پس از آن با سرعت ۵۰m/s حرکت کرده است. (الف) شتاب، (ب) زمان لازم برای طی کردن ۱۶۰m ذکر شده، (پ) زمان لازم برای رسیدن به تندی ۳۰m/s و (ت) مسافت پیموده شده را از حالت سکون تا زمان رسیدن تندی قطار به ۳۰m/s محاسبه کنید. (ث) نمودار $x$ را برحسب $t$ و $v$ را برحسب $t$ ، از حالت سکون قطار رسم کنید.

۹۱- میله‌ای در مدت ۵/۴s می‌تواند از ۰ تا ۶۰km/h شتاب بگیرد. (الف) در این زمان شتاب میانگین آن برحسب $m/s^2$ چقدر است؟ (ب) با فرض ثابت بودن شتاب در مدت ۵/۴s چقدر حرکت خواهد کرد؟ (پ) اگر شتاب میله در مقدار (الف) حفظ شود، چقدر طول می‌کشد تا از حال سکون به مسافت ۰/۲۵km برسد؟ SSM

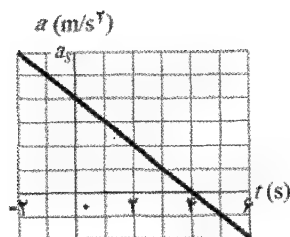
۹۲- سورتمهٔ متحرکی که در مسیر مستقیم همواری حرکت می‌کند برای بررسی اثرهای فیزیولوژیکی شتابهای بالا در انسان به کار می‌رود. یک چنین سورتمه‌ای با شروع از حالت سکون، در مدت ۱/۸s به تندی ۱۶۰۰km/h می رسد. (الف) شتاب (با فرض ثابت بودن) را برحسب g و (ب) مسافت طی شده را پیدا کنید.

۹۳- شکل ۲-۴۲ وسیلهٔ ساده‌ای را نشان می‌دهد که می‌تواند برای اندازه‌گیری زمان واکنش شخص به کار رود. این وسیله عبارت است از نوار نازکی از مقوا که روی آن یک مقیاس و دو نقطهٔ سیاه نشانه‌گذاری شده‌اند. دوست شما با انگشتهای شست و نشانه از نقطهٔ واقع در سمت راست شکل ۲-۴۲ میله را به طور *قائم* نگه می‌دارد. سپس شما انگشتهای شست و نشانهٔ خود را روی نقطهٔ دیگر (در سمت چپ شکل ۲-۴۲) با دقت طوری قرار می‌دهید که با نوار تماس پیدا نکند. دوست شما نوار را رها می‌کند و شما سعی می‌کنید پس از شروع به سقوط نوار هر چه زودتر آن را بگیرید. نشانه در محلی که نوار را با انگشتان خود می‌گیرید، زمان واکنش شما را به دست می‌دهد. (الف) در چه فاصله‌ای از نقطهٔ پایینی باید نشانه ۵۰/۰ms را قرار داد؟ نشانه‌ها را برای (ب) ۱۰۰، (پ) ۱۵۰، (ت) ۲۰۰، (ث) ۲۵۰ میلی ثانیه چقدر باید بالاتر قرار دهید؟ (مثلاً آیا فاصلهٔ نشانهٔ ۱۰۰ms باید دو برابر فاصلهٔ نشانهٔ ۵۰ms از نقطه باشد؟ آیا می‌توانید الگویی برای پاسخها پیدا کنید؟)




شکل ۲-۴۲ مسئلهٔ ۹۳

۹۴- شکل ۲-۴۳ شتاب $a$ را برحسب $t$ برای ذره‌ای که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند، نشان می‌دهد. مقیاس محور $a$ با $a_s = ۱۲/۰\ m/s^2$ مشخص شده است. در $t = -۲/۰s$ سرعت ذره برابر ۷/۰m/s است. سرعت آن در $t = ۶/۰s$ چقدر است؟




شکل ۲-۴۳ مسئلهٔ ۹۴

۹۵- واگن معدنی با تندی ۲۰km/h به بالای تپه‌ای کشیده شده و سپس با تندی ۳۰km/h به طرف پایین تا سطح اولیهٔ آن آورده می‌شود. (زمان لازم برای این که واگن در بالای تپه تغییر جهت دهد ناچیز است.) تندی میانگین واگن در این رفت و برگشت، از سطح اولیه و برگشت به سطح اولیه، چقدر است؟

۹۶- به طور میانگین، زمان یک بار پلک زدن ۱۰۰ms است. اگر سرعت میانگین یک جنگندهٔ میگ ۲۵ برابر با ۳۴۰۰km/h باشد، در مدت یک پلک زدن این جنگنده چقدر حرکت می‌کند؟

۹۷- وقتی سرعت مجاز بزرگراه نیویورک از ۵۵mi/h به ۶۵mi/h افزایش یافت، برای راننده‌ای که فاصلهٔ ۷۰۰km بین بوفالو و نیویورک را با این سرعت مجاز رانندگی می‌کند چقدر زمان صرفه‌جویی شده است؟ SSM

۹۸- شتاب موتورسواری که در راستای محور $x$ به طرف شرق حرکت می‌کند در بازهٔ $۰ \le t \le ۶/۰s$ با $a = (۶/۱ - ۱/۲t) m/s^2$ داده شده است. در $t = ۰$، سرعت و مکان موتور سوار ۲/۷m/s و ۷/۳m است. (الف) بیشینهٔ تندی که موتور سوار به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) مسافتی که موتور سوار بین $t = ۰$ و $t = ۶/۰s$ طی می‌کند، چقدر است؟

۹۹- شعبده‌بازی توپهایی را به طور قائم تا ارتفاع H به هوا می‌اندازد. اگر او بخواهد زمان سپری شدن در هوا دو برابر شود، آنها را چقدر باید بالاتر بیندازد؟ SSM

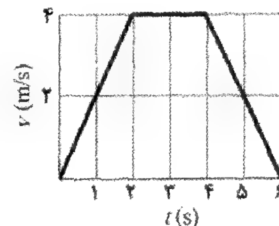
۱۰۰- اتومبیلی با شتاب ثابت فاصلهٔ ۶۰/۰m بین دو نقطه را در ۶/۰۰s می‌پیماید. تندی اتومبیل در هنگام گذشتن از نقطهٔ دوم ۱۵/۰m/s است. (الف) تندی در نقطهٔ اول چقدر بوده است؟ (ب) بزرگی شتاب چقدر بوده است؟ (پ) در چه نقطه‌ای قبل از نقطهٔ اول اتومبیل در حالت سکون بوده است؟ (ت) نمودار $x$ را برحسب $t$ و $v$ را برحسب $t$ از حالت سکون $t = ۰$ برای اتومبیل رسم کنید.

۱۰۱- سنگی از صخره‌ای به ارتفاع ۱۰۰m سقوط می‌کند. چه مدت طول می‌کشد تا (الف) ۵۰m اول را و (ب) ۵۰m دوم را طی کند؟

۱۰۲- دو ایستگاه قطار زیرزمینی به فاصلهٔ ۱۱۰۰m از یکدیگر قرار دارند. اگر در نیمهٔ اول این فاصله قطار از حالت سکون به مقدار $+1/2 m/s^2$ و در نیمهٔ دوم به مقدار $-1/2 m/s^2$ شتاب بگیرد، (الف) زمان حرکت قطار و (ب) تندی بیشینهٔ آن، چقدر است؟ (پ) نمودار $x$ ، $v$ و $a$ را برحسب $t$ برای این حرکت رسم کنید.

۱۰۳- تندی بالای یک قهرمان دو ۱۱/۰m/s است. اگر این دونده از حال سکون شروع کند و با آهنگ ثابتی شتاب بگیرد، او در مسافت ۱۲/۰m به تندی بالای خود می‌رسد. پس از این او می‌تواند این تندی بالا را در ۱۰۰m بقیه نیز حفظ کند. (الف) زمان او برای مسابقهٔ ۱۰۰m چقدر است؟ (ب) برای بهبود این زمان، دونده سعی می‌کند مسافت لازم برای این که به تندی بالای خود برسد را کم کند.اگر او در مسابقه به زمان ۱۰/۰s برسد این مسافت باید چقدر باشد؟

۱۰۴- ذره‌ای در $t=0$ از مبدأ شروع و در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کند. نمودار سرعت ذره برحسب تابعی از زمان در شکل ۲-۴۴ نشان داده شده است؛ مقیاس محور $v$ با $v_s = 4/0 m/s$ مشخص شده است. مطلوب است (الف) مکان ذره در $t=5/0s$ . (ب) سرعت ذره در $t=5/0s$ . (پ) شتاب ذره در $t=5/0s$ . (ت) سرعت میانگین ذره بین $t=1/0s$ و $t=5/0s$ . (ث) شتاب میانگین ذره بین $t=1/0s$ و $t=5/0s$.

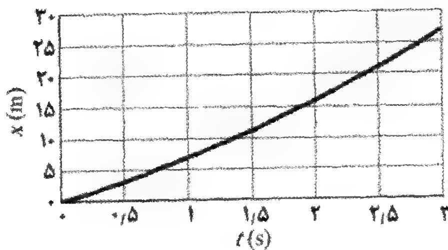


شکل ۲-۴۴ مسئلهٔ ۱۰۴

۱۰۵- سنگی به طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. در این حرکت رو به بالا از نقطهٔ $A$ با تندی $v$ و از نقطهٔ $B$، ۳/۰۰m بالاتر از نقطهٔ $A$ با تندی $\frac{1}{2}v$ می‌گذرد. مطلوب است (الف) تندی $v$ و (ب) بیشینهٔ ارتفاعی که سنگ به بالاتر از نقطهٔ $B$ می‌رسد.

۱۰۶- سنگی (از حال سکون) از بالای ساختمانی به بلندی ۶۰m سقوط می‌کند. در چه فاصله‌ای از زمین سنگ ۱/۲s پیش از رسیدن به زمین قرار دارد؟

۱۰۷- قایقی با سرعت ثابت به سمت شرق حرکت می‌کند که ناگهان تند بادی به مدت ۳/۰s موجب می‌شود که با شتاب ثابت به سمت شرق حرکت کند. نمودار $x$ برحسب $t$ در شکل ۲-۴۵ نشان داده شده است، که $t=0$ لحظهٔ شروع وزیدن باد و محور $x$ به طرف شرق، مثبت در نظر گرفته شده است. (الف) شتاب قایق در بازهٔ ۳/۰s چقدر است؟ (ب) سرعت قایق در انتهای بازهٔ ۳/۰s چقدر است؟ (پ) اگر شتاب در ۳/۰s اضافی دیگر ثابت بماند، این قایق در این بازه ۳/۰s چقدر حرکت می‌کند؟ SSM



شکل ۲-۴۵ مسئلهٔ ۱۰۷

۱۰۸- توپی به طور قائم از بالای ساختمانی به بلندی ۳۶/۶m به طرف پایین پرتاب می‌شود. این توپ از بالای پنجره‌ای که ۱۲/۲m بالاتر از زمین قرار دارد، ۲/۰۰s پس از پرتاب می‌گذرد. تندی توپ وقتی از بالای پنجره می‌گذرد چقدر است؟

۱۰۹- تندی گلوله‌ای وقتی از لولهٔ تفنگی به طول ۱/۲۰m خارج می‌شود برابر با ۶۴۰m/s است. با فرض شتاب ثابت، زمانی را که گلوله پس از شلیک در لوله می‌گذراند، به دست آورید.

۱۱۰- چتربازی بیرون می‌پرد و ۵۰m را به طور آزاد سقوط می‌کند. سپس چتر او باز می‌شود و چترباز با شتاب منفی $2/0 m/s^2$ حرکت می‌کند. چترباز با تندی ۳/۰m/s به زمین می‌رسد. (الف) چترباز چه مدت در هوا بوده است؟ (ب) از چه ارتفاعی سقوط شروع شده است؟

۱۱۱- پژوهش آمادگی گرانش صفر در مرکز پژوهش گلن ناسا[1] دارای یک برج سقوط به بلندی ۱۴۵m است. این یک برج قائم تخلیه شده است و در آن امکاناتی تعبیه شده که می‌توان کره‌ای به قطر ۱m شامل یک بستهٔ آزمایشی را از میان آن پایین انداخت. (الف) کره چه مدت در سقوط آزاد بوده است؟ (ب) تندی آن درست هنگامی که به دستگاه گیرندهٔ آن در ته برج می‌رسد چقدر است؟ (پ) هنگامی که کره گرفته می‌شود و تندی‌اش به صفر می‌رسد، شتاب منفی میانگین $25g$ را تحمل می‌کند. در چه فاصله‌ای با این شتاب منفی حرکت کرده است؟

۱۱۲- توپی با *تندی* اولیهٔ $v_0$ از ارتفاع $h$ به طور قائم به طرف *پایین* پرتاب می‌شود. (الف) تندی آن درست در لحظهٔ پیش از برخورد با زمین چقدر است؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد؟ اگر توپ از همان ارتفاع و با همان تندی اولیه به طرف *بالا* پرتاب می‌شد، پاسخهای (پ) قسمت (الف) و (ت) قسمت (ب)، چقدر می‌شدند؟ پیش از حل معادله‌ها، بگویید که

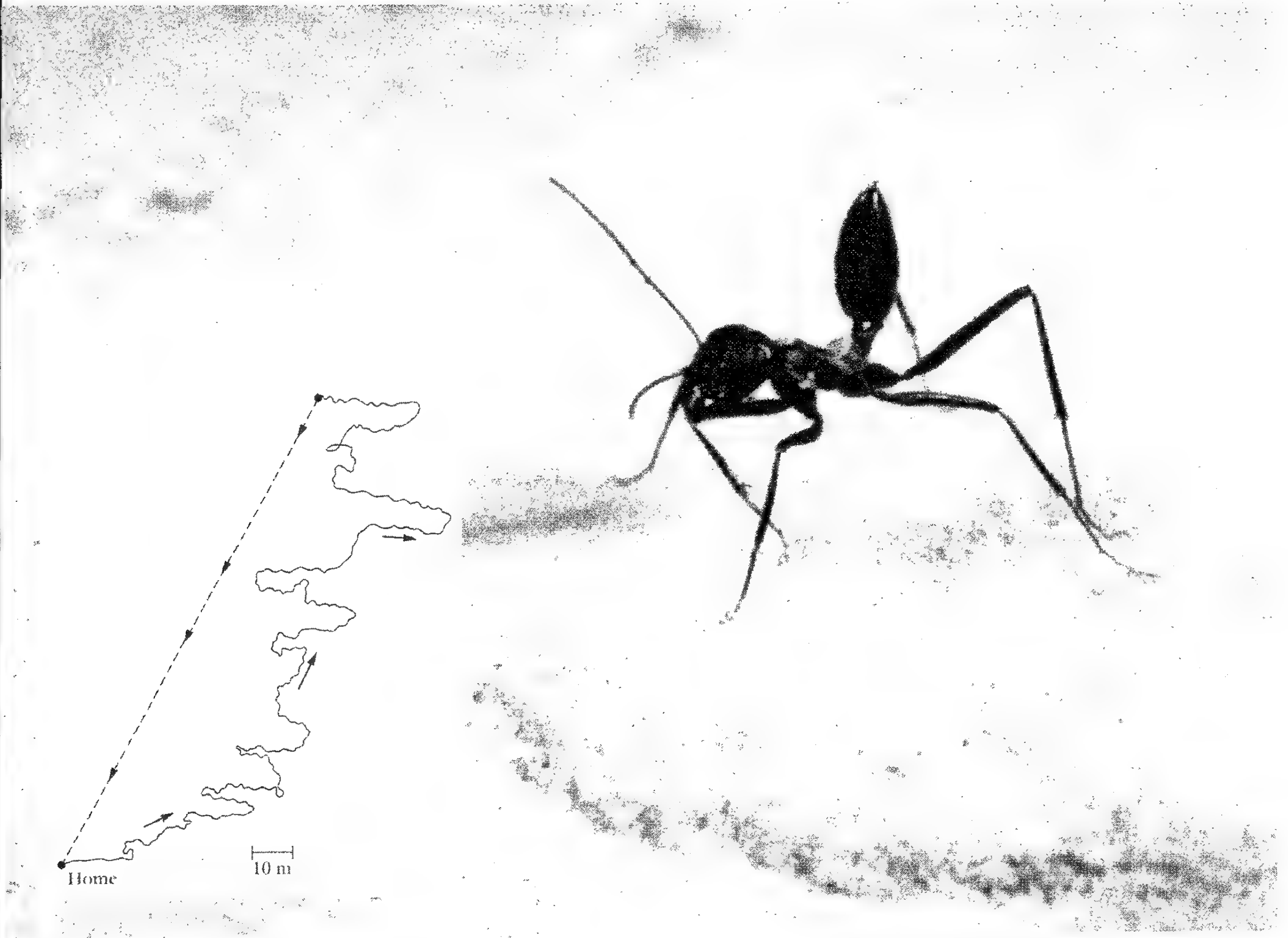
1. NASA Glenn Research Center

پاسخهای (پ) و (ت) آیا کمتر از پاسخهای قسمت (الف) و قسمت (ب) می‌شوند، یا بیشتر یا مساوی‌اند؟

**۱۱۳-** اتومبیلی می‌تواند با ترمز کردن از تندی ۲۰۰km/h در فاصلهٔ ۱۷۰m توقف کند. با فرض این که شتاب ثابت است، بزرگی آن را برحسب (الف) یکاهای SI و (ب) برحسب $g$ پیدا کنید. (پ) چه مدت زمان $T_b$ برای این ترمز لازم است؟ *زمان واکنش* $T_r$ زمان لازمی است تا حادثه‌ای درک شده و پای راننده به طرف ترمز حرکت و شروع به ترمز گرفتن کند. اگر $T_r = ۴۰۰\text{ms}$ باشد، آنگاه (ت) $T_b$ برحسب $T_r$ چقدر است؟ و (ث) بیشترین قسمت زمان لازم صرف واکنش می‌شود یا ترمز کردن؟ عینکهای آفتابی مشکی، نور ارسال شده از چشمها به پوستهٔ دیداری در مغز را با افزایش $T_r$ به تأخیر می‌اندازند. (ج) در حالت حادی که $T_r$ برابر با ۱۰۰ms شود، در راستای یک جاده در ضمن زمان واکنش، اتومبیل چه مسافت بیشتری را طی می‌کند؟

**۱۱۴-** اسکواش ورزشی است که در آن توپ سریعترین حرکت را دارد و تندیهای اندازه‌گیری شده به ۳۰۳km/h می‌رسد. اگر یک بازیکن حرفه‌ای اسکواش با توپی در این تندی روبه‌رو شود و به طور غیر ارادی پلک بزند، او به مدت ۱۰۰ms نخواهد دید. توپ در مدت بسته بودن چشمهای بازیکن چقدر حرکت می‌کند؟

# ۳
# بردارها




**مورچه ها چگونه می توانند مسیر لانهٔ خود را بدون هیچ نشان راهنمایی بر سطح بیابان بیابند؟**

پاسخ در همین فصل.

نوعی مورچه‌های کویری موسوم به کاتاگلیفیس[1] در بیابان صَحَرا[2] زندگی می‌کنند. وقتی یکی از این مورچه‌ها در جستجوی غذاست، از لانه‌اش در مسیری در هم و برهم مشابه آنچه که در شکل نشان داده شده است، حرکت می‌کند. این مورچه ممکن است بیش از ۵۰۰ متر در امتداد چنین مسیر پیچیده‌ای روی شنزار هموار و بی‌شکلی که هیچ ردّی برخود به جای نمی‌گذارد حرکت کند. با این حال، وقتی مورچه می‌خواهد به لانه برگردد، می‌پیچد و سپس به طور مستقیم به سمت لانه‌اش می‌دود.

1. Cataglyphis
2. Sahara (بیابان وسیعی در افریقای شمالی، م.)

## ۳-۱ فیزیک چیست؟

فیزیک علمی است که با کمیتهای بسیار زیادی که هم اندازه و هم جهت دارند سروکار دارد و برای توصیف چنین کمیتهایی به زبان ریاضی ویژه‌ای- زبان بردارها- نیاز داریم. این زبان همچنین در مهندسی، علوم دیگر، و حتی گفتگوهای روزمره به کار گرفته می‌شود. وقتی که شما آدرس محلی را به این ترتیب می‌دهید که: «پنج ساختمان در این خیابان به جلو بروید و سپس به سمت چپ بپیچید» از زبان بردارها استفاده کرده‌اید. در واقع، هر نوع جهت‌یابی بر بردارها مبتنی است، ولی فیزیک و مهندسی برای توصیف پدیده‌هایی مثل چرخش و نیروهای مغناطیسی نیز به روشهای ویژه‌ای از بردارها نیاز دارند، که در فصلهای بعد به آنها خواهیم پرداخت. در این فصل، به زبان مقدماتی بردارها می‌پردازیم.

## ۳-۲ بردارها و نرده‌ایها

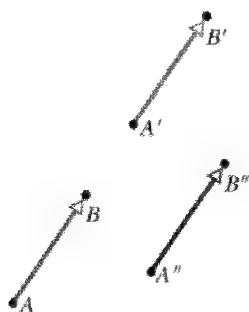
ذره‌ای که بر خط راستی حرکت می‌کند، فقط می‌تواند دو جهت حرکت داشته باشد. حرکت در یکی از این جهتها را مثبت و در جهت دیگر را منفی در نظر می‌گیریم. ولی برای ذره‌ای که در سه بُعد حرکت می‌کند، علامت مثبت یا منفی برای مشخص کردن جهت حرکت آن، دیگر کافی نیست. به جای آن باید از *بردار* استفاده کنیم.

**بردار** دارای بزرگی و جهت است و ترکیب بردارها از قاعده‌های (برداری) معینی پیروی می‌کند که در این فصل به آنها خواهیم پرداخت. **کمیت برداری**، کمیتی است که هم جهت و هم اندازه دارد و بنابراین، می‌تواند با بردار نشان داده شود. برخی از کمیتهای فیزیکی که بردار هستند عبارت‌اند از جابه‌جایی، سرعت و شتاب. در سرتاسر این کتاب تعداد بسیار بیشتری از چنین کمیتهایی را مشاهده خواهید کرد، از اینرو آموختن قاعده‌های ترکیب بردارها در این فصل، به شما در درک مطالب فصلهای بعد کمک زیادی خواهد کرد.

همهٔ کمیتهای فیزیکی جهت ندارند. برای مثال دما، فشار، انرژی، جرم، و زمان جهت خاصی را در فضا نشان نمی‌دهند. چنین کمیتهایی را **نرده‌ای** می‌نامیم و با آنها مطابق قاعده‌های جبری عادی رفتار می‌کنیم. هر تک مقدار همراه با علامت (مانند دمای $-40^\circ F$)، یک کمیت نرده‌ای را مشخص می‌کند.

ساده ترین کمیت برداری، جابه جایی یا تغییر مکان است. برداری که جابه‌جایی را نشان می‌دهد، به طور منطقی **بردار جابه‌جایی** نامیده می‌شود. (به همین ترتیب‌اند بردارهای سرعت و بردارهای شتاب.) اگر ذره‌ای مکانش را در شکل ۳-۱ الف از $A$ به $B$ تغییر دهد، می‌گوییم آن ذره از $A$ به $B$ جابه‌جا شده است و آن را با پیکانی نشان می‌دهیم که از $A$ متوجه $B$ است.

پیکان به طور ترسیمی، بردار را مشخص می‌کند. برای متمایز کردن نمادهای برداری از دیگر پیکانها در این کتاب، آنها را به صورت مثلثی در نوک پیکان نمایش می‌دهیم.




(الف)




(ب)

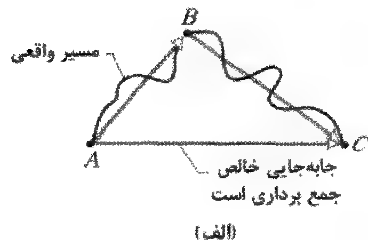
**شکل ۳-۱** (الف) هر سه پیکان بزرگی و جهت یکسانی دارند و بنابراین، جابه‌جایی یکسانی را نشان می‌دهند. (ب) هر سه مسیر که دو نقطه را به هم وصل می‌کنند به بردار جابه‌جایی یکسانی مربوط‌اند.

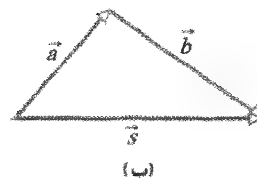
در شکل ۳-۱ الف پیکانهای از $A$ به $B$، از $A'$ به $B'$، و از $A''$ به $B''$ مقدار و جهت یکسانی دارند. بنابراین، آنها بردارهای جابه‌جایی مشابهی را مشخص می‌کنند و *تغییر مکان* یکسانی را برای ذره نشان می‌دهند. اگر طول و جهت یک بردار تغییر نکند، آن بردار را می‌توان بدون تغییر مقدارش انتقال داد.

بردار جابه‌جایی چیزی دربارهٔ مسیر واقعی پیموده شده توسط جسم به دست نمی‌دهد. مثلاً در شکل ۳-۱ ب هر سه مسیری که $A$ را به $B$ وصل می‌کنند به همان بردار جابه‌جایی شکل ۳-۱ الف مربوط‌اند. بردارهای جابه‌جایی فقط نتیجهٔ کلّی حرکت را نشان می‌دهند نه خود حرکت را.

## ۳-۳ جمع کردن بردارها به روش هندسی

مانند نمودار برداری شکل ۳-۲ الف، فرض کنید ذره‌ای از $A$ به $B$ و سپس از $B$ به $C$ حرکت کند. می‌توانیم جابه‌جایی کل ذره را (بدون توجه به اینکه مسیر واقعی آن چیست) با دو بردار جابه‌جایی متوالی $AB$ و $BC$ نمایش دهیم. جابه‌جایی خالص این دو جابه‌جایی، تنها یک جابه‌جایی از $A$ به $C$ است. $AC$ را **جمع برداری** (یا **برایند**) بردارهای $AB$ و $BC$ می‌نامیم. این جمع، یک جمع جبری معمولی نیست.




**شکل ۳-۲** (الف) $AC$ جمع بردارهای $AB$ و $BC$ است.(ب) همان بردارها با نمادگذاری دوباره.

در شکل ۳-۲ ب بردارهای شکل ۳-۲ الف را دوباره کشیده‌ایم و آنها را با نمادی که از حالا به بعد استفاده می‌کنیم، یعنی یک پیکان در بالای یک حرف ایتالیک مثل $\vec{a}$ ، نمایش می‌دهیم. اگر بخواهیم فقط بزرگی بردار را ( که کمیتی بدون علامت یا جهت است) نشان دهیم از نماد یک حرف ایتالیک مثل $a$ ، $b$ و $s$ استفاده می‌کنیم. (می‌توانید از نمادهای دستنویس استفاده کنید.) یک نماد با پیکانی روی آن همیشه بر دو ویژگی بردار، یعنی بزرگی و جهت، دلالت دارد.

رابطهٔ بین سه بردار شکل ۳-۲ ب را می توانیم با *معادلهٔ برداری* زیر نمایش دهیم

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} \qquad (۱-۳)$$

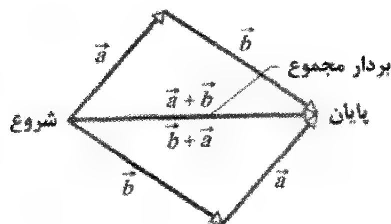
که بیان می‌دارد بردار $\vec{s}$ مجموع برداری بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. نماد + در معادلهٔ ۳-۱ و واژهٔ «مجموع» و «جمع» برای بردارها معانی متفاوتی با آنچه که در جبر معمول است دارند، زیرا بردارها هم بزرگی دارند و هم جهت.

شکل ۳-۲ روشی را برای جمع دو بعدی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به روش هندسی به دست می‌دهد. (۱) روی صفحهٔ کاغذ، بردار $\vec{a}$ را با مقیاسی دلخواه و زاویه‌ای مناسب رسم می‌کنیم. (۲) بردار $\vec{b}$ را با همان مقیاس و با زاویهٔ مناسب دیگری چنان رسم می‌کنیم که ابتدای آن بر انتهای بردار $\vec{a}$ قرار گیرد. (۳) مجموع برداری $\vec{s}$، برداری است که با کشیدن پیکانی از ابتدای $\vec{a}$ به انتهای $\vec{b}$ به دست می‌آید.

جمع برداری، که به این صورت تعریف شد دارای دو ویژگی مهم است. نخست آنکه، ترتیب جمع‌کردن اهمیتی ندارد. جمع کردن $\vec{a}$ با $\vec{b}$ نتیجه‌اش همان جمع کردن $\vec{b}$ با $\vec{a}$ است (شکل ۳-۳)، یعنی

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{(قانون جابه‌جایی)} \qquad (۲-۳)$$

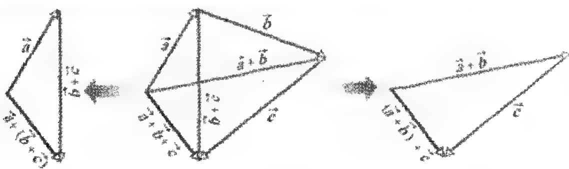
دوم آنکه، وقتی بیش از دو بردار وجود داشته باشد، موقع جمع کردن می‌توانیم آنها را با هر ترتیبی دسته‌بندی کنیم. بنابراین، اگر بخواهیم بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را با هم جمع کنیم، می‌توانیم




**شکل ۳-۳** بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را می‌توان به هر ترتیبی با هم جمع کرد، به شکل ۳-۲ نگاه کنید.

نخست بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با هم جمع و سپس جمع‌برداری آنها را با $\vec{c}$ جمع کنیم. همچنین می‌توانیم نخست بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را با هم جمع کنیم و سپس جمع‌برداری آنها را به $\vec{a}$ بیافزاییم. همانگونه که در شکل ۳-۴ نشان داده شده است، از هر طریق به نتیجهٔ یکسانی می‌رسیم. به عبارت دیگر

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \qquad \text{(قانون شرکت‌پذیری)} \qquad (۳-۳)$$



**شکل ۳-۴** سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را می‌توان موقع جمع‌کردن به هر روشی دسته‌بندی کرد.

بردار $-\vec{b}$ برداری است با همان بزرگی بردار $\vec{b}$ ، ولی در خلاف جهت آن (به شکل ۳-۵ نگاه کنید). با جمع دو بردار شکل ۳-۵ خواهیم داشت:

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = ۰$$




**شکل ۳-۵** بردارهای $\vec{b}$ و $-\vec{b}$ بزرگی یکسان و جهتهای مخالفی دارند.

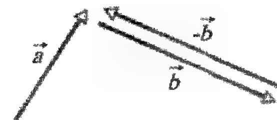
بنابراین، افزودن $-\vec{b}$ همان اثر کاستن $\vec{b}$ را دارد. از این ویژگی برای تعریف اختلاف بین دو بردار استفاده می‌کنیم: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ را در نظر بگیرید. داریم

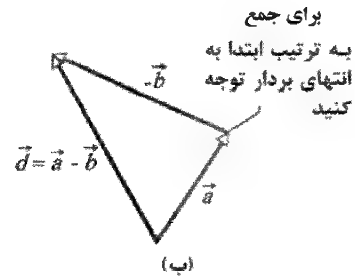
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \qquad \text{(تفریق برداری)} \qquad (۴-۳)$$

یعنی بردار اختلاف $\vec{d}$ از جمع کردن بردار $-\vec{b}$ با بردار $\vec{a}$ حاصل می‌شود. شکل ۳-۶ نشان می‌دهد که این کار چگونه به روش هندسی صورت می‌پذیرد.

مشابه جبر معمول، می‌توانیم یک جمله را که شامل یک نماد برداری است از یک طرف معادله به طرف دیگر آن ببریم، اما باید علامت آن را تغییر بدهیم. برای مثال، اگر بخواهیم معادلهٔ ۳-۴ را برای $\vec{a}$ حل کنیم، می‌توانیم این معادله را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = \vec{d} + \vec{b}$$




**شکل ۳-۶** (الف) بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، و $-\vec{b}$ (ب) تفریق بردار $\vec{b}$ از بردار $a$ معادل افزودن بردار $-\vec{b}$ به بردار $\vec{a}$ است.

به خاطر داشته باشید، هر چند که بردارهای جابه‌جایی را در اینجا به کار بردیم، ولی قاعده‌های جمع و تفریق برای همهٔ انواع بردارها از قبیل سرعتها، شتابها، یا هر کمیت برداری دیگری برقرار است. البته، فقط می‌توانیم بردارهایی از یک نوع را با هم جمع کنیم. برای مثال، می‌توانیم دو جابه‌جایی، یا دو سرعت را با هم جمع کنیم؛ ولی جمع یک جابه‌جایی با یک سرعت بی‌معناست. در حساب نرده‌ایها این مثل جمع کردن ۲۱s با ۱۲ m است.

> **✔ نکتهٔ وارسی ۱** بزرگی جابه‌جاییهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۳m و ۴m و $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ است. با در نظر گرفتن سمتگیری‌های مختلف $\vec{a}$ و $\vec{b}$، (الف) بیشینهٔ بزرگی ممکن $\vec{c}$ و (ب) کمینهٔ بزرگی ممکن آن چقدر است؟

### مسئلهٔ نمونهٔ ۳-۱

در آموزش جهت‌یابی شما می‌خواهید (به فاصله‌ای در خط مستقیم) با انجام سه حرکت در خط مستقیم تا آنجا که ممکن است از اردوگاهی دور شوید. شما می‌توانید جابه‌جاییهای زیر را به هر ترتیبی انجام دهید: (الف) $\vec{a}$، ۲/۰km به سوی شرق (مستقیماً رو به شرق)؛ (ب) $\vec{b}$، ۲/۰km، ۳۰° شمال شرق (با زاویه ۳۰° رو به شمال از سمت شرق)؛ (پ) $\vec{c}$، ۱/۰km به سوی غرب. پیشنهاد دیگر آن است که $-\vec{b}$ را به جای $\vec{b}$، یا $-\vec{c}$ را به جای $\vec{c}$ قرار دهید. بیشترین مسافتی را که می‌توانید از اردوگاه تا انتهای جابه‌جایی سوم طی کنید، چقدر است؟

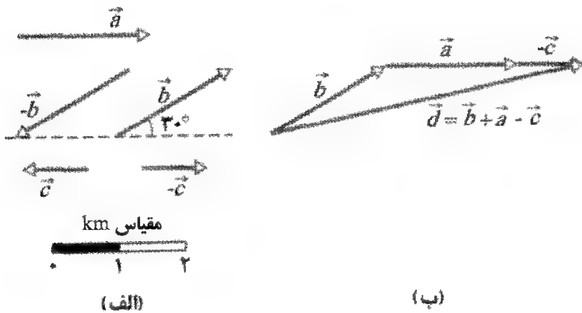
***استدلال:*** با استفاده از مقیاسی مناسب بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$، $-\vec{b}$ و $-\vec{c}$ را مانند شکل ۳-۷ الف رسم می‌کنیم. آنگاه بردارها را به طور ذهنی بر صفحهٔ کاغذ می‌لغزانیم تا با اتصال سه تای از آنها به صورت آرایشهای ابتدا به انتها، جمع‌برداری $\vec{d}$ به دست آید. ابتدای بردار اول نشان‌دهندهٔ اردوگاه است. انتهای بردار سوم نشان‌دهندهٔ نقطهٔ توقف شماست. جمع‌برداری $\vec{d}$ از ابتدای بردار اول تا انتهای بردار سوم است. بزرگی $d$، مسافتی است که شما از اردوگاه تا نقطهٔ پایان طی کرده‌اید.

درمی‌یابیم که فاصلهٔ $d$ برای آرایش ابتدا به انتهای بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $-\vec{c}$ بزرگترین مقدار است. ترتیب این بردارها به هر گونه‌ای می‌تواند باشد، زیرا جمع‌برداری آنها برای هر ترتیبی یکسان است. ترتیب نشان داده شده در شکل ۳-۷ ب برای این جمع‌برداری است

$$\vec{d}=\vec{b}+\vec{a}+(-\vec{c})$$

با استفاده از مقیاس داده شده در شکل ۳-۷ الف، طول $d$ را برای این جمع‌برداری اندازه می‌گیریم. در می‌یابیم

$$d=۴/۸\text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$




**شکل ۳-۷** (الف) بردارهای جابه‌جایی؛ از سه تا استفاده شده است. (ب) فاصلهٔ شما از اردوگاه وقتی بیشترین است که شما جابه‌جاییهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $-\vec{c}$ را به هر ترتیبی انجام دهید.

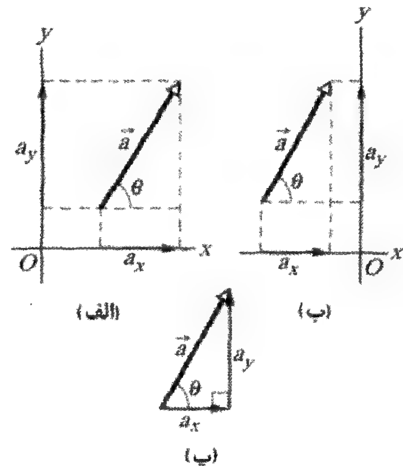
## ۳-۴ مؤلفه‌های بردار

جمع کردن بردارها به روش هندسی ممکن است خسته کننده باشد. روش کارآمدتر و ساده‌تر روش جبری است که در آن بردارها را در دستگاه مختصات راستگوشه قرار می‌دهند. همانگونه که در شکل ۳-۸ الف نشان داده شده است، محورهای $x$ و $y$ معمولاً در صفحهٔ کاغذ رسم می‌شوند. محور $z$ از مبدأ به طور مستقیم از صفحهٔ کاغذ بیرون می‌آید؛ فعلاً از این محور چشمپوشی می‌کنیم و فقط بردارهای دو بعدی را در نظر می‌گیریم.

**مؤلفهٔ** یک بردار، تصویر بردار $\vec{a}$ روی یک محور است. برای مثال، در شکل ۳-۸ الف، $a_x$ مؤلفهٔ بردار $\vec{a}$ روی (یا در امتداد) محور $x$، و $a_y$ مؤلفهٔ آن در امتداد محور $y$ است. برای یافتن تصویر بردار روی یک محور، خطهایی عمود از دو انتهای آن بردار بر محور، مطابق شکل، رسم می‌کنیم. تصویر بردار روی محور $x$، *مؤلفهٔ* $x$ و به همین ترتیب تصویر آن روی محور $y$، *مؤلفهٔ* $y$ نامیده می‌شود. فرایند یافتن مؤلفه‌های بردار، **تجزیهٔ بردار** نامیده می‌شود.

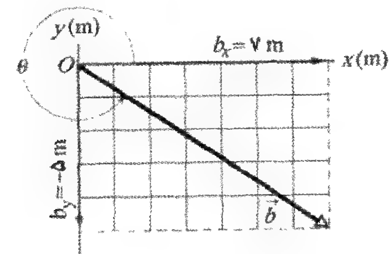
مؤلفهٔ یک بردار (روی یک محور) همان جهت بردار را دارد. در شکل ۳-۸، $a_x$ و $a_y$ هر دو مثبت‌اند، زیرا $\vec{a}$ در جهت مثبت هر دو محور قرار دارد. (توجه کنید که سر پیکانهای کوچک روی مؤلفه‌ها، جهت آنها را نشان می‌دهد). اگر بردار $\vec{a}$ را وارون کنیم، آنگاه هر دو مؤلفه منفی‌اند، و سر

پیکانهای آنها در امتداد منفی محورهای $x$ و $y$ قرار می‌گیرند. تجزیهٔ بردار $\vec{b}$ در شکل ۳-۹ به یک مؤلفهٔ مثبت $b_x$ و یک مؤلفهٔ منفی $b_y$ می‌انجامد.




**شکل ۳-۸** (الف) مؤلفه‌های $a_x$ و $a_y$ بردار $\vec{a}$. (ب) اگر بردار جابه‌جا شود تا زمانی که بزرگی و سمتگیری حفظ شود، مؤلفه‌ها بدون تغییر می‌مانند. (پ) مؤلفه‌ها، دو ضلع یک مثلث راستگوشه را تشکیل می‌دهند که وتر آن بزرگی بردار است.

در حالت کلی، یک بردار سه مؤلفه دارد، اگر چه برای مورد شکل ۳-۸ الف مؤلفه در امتداد محور $z$ صفر است. همانگونه که شکلهای ۳-۸ الف و ب نشان می‌دهند، اگر برداری را چنان جابه‌جا کنیم که جهتش تغییر نکند، مؤلفه‌های آن هم بدون تغییر می‌مانند.




**شکل ۳-۹** مؤلفهٔ بردار $\vec{b}$ روی محور $x$ مثبت و روی محور $y$ منفی است.

مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ در شکل ۳-۸ الف را می‌توانیم به طور هندسی از مثلث راستگوشهٔ شکل به دست آوریم

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{و} \quad a_y = a\sin\theta \qquad (۳-۵)$$

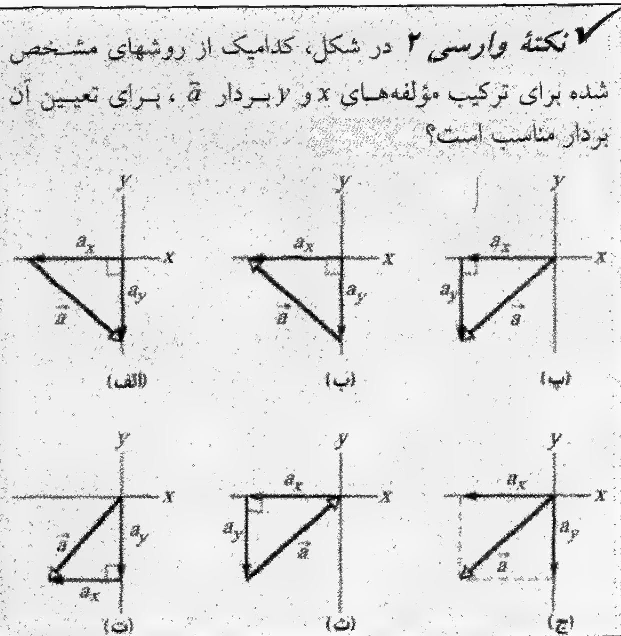
که در آن $\theta$ زاویه‌ای است که بردار $\vec{a}$ با جهت مثبت محور $x$ می‌سازد، و $a$ بزرگی آن است. شکل ۳-۸ پ نشان می‌دهد که $\vec{a}$ و مؤلفه‌های $x$ و $y$ آن یک مثلث راستگوشه تشکیل می‌دهند. همچنین این شکل نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم برداری را از روی مؤلفه‌هایش بسازیم: ابتدای یکی را بر انتهای دیگری قرار می‌دهیم و آنگاه مثلث راستگوشه‌ای را با برداری که در امتداد وتر، یعنی خطی که از ابتدای یک مؤلفه تا انتهای مؤلفهٔ دیگر رسم می‌شود، کامل می‌کنیم.

وقتی که برداری به مؤلفه‌هایش روی محورها تجزیه شود، خود مؤلفه‌ها را می‌توان به عنوان بردار در نظر گرفت. مثلاً بردار $\vec{a}$ در شکل ۳-۸ الف کاملاً با مقدارهای $a$ و $\theta$ معین می‌شود. همچنین می‌توان همین بردار را با مولفه‌های $a_x$ و $a_y$ آن مشخص کرد. هر دو دستهٔ مقدارها، اطلاعات یکسانی به دست می‌دهند. اگر *نمادگذاری مؤلفه‌ای* ($a_x$ و $a_y$) یک بردار را داشته باشیم و بخواهیم *نماد گذاری بزرگی- زاویه* را به دست آوریم، می‌توانیم از معادله‌های زیر استفاده کنیم

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \qquad (۳-۶)$$

در حالت کلی‌تر سه بعدی، به بزرگی و دو زاویه (مثلاً $a$، $\theta$ و $\phi$) یا سه مؤلفه ($a_x$، $a_y$ و $a_z$) برای مشخص‌کردن یک بردار نیاز داریم.

**✓ نکتهٔ وارسی ۲** در شکل، کدامیک از روشهای مشخص شده برای ترکیب مؤلفه‌های $x$ و $y$ بردار $\vec{a}$، برای تعیین آن بردار مناسب است؟




## مسئلهٔ نمونهٔ ۳-۲

هواپیمای کوچکی فرودگاه را در یک روز ابری ترک می‌کند و پس از طی ۲۱۵km از آن، در جهتی که با شرق شمال زاویهٔ °۲۲ می‌سازد دیده می‌شود. در این هنگام، هواپیما نسبت به شرق و شمال چقدر از فرودگاه فاصله دارد؟

**نکتهٔ کلیدی** بزرگی (۲۱۵km) و زاویهٔ (°۲۲ شرق شمال) بردار داده شده‌اند و می‌خواهیم مؤلفه‌های بردار را به دست آوریم.

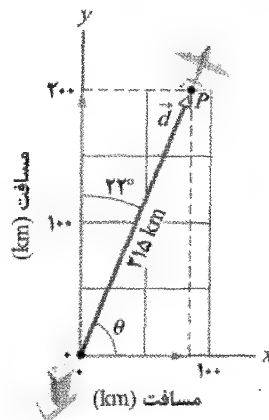
***محاسبه‌ها:*** دستگاه مختصات $xy$ را که سوی مثبت $x$ آن به طرف شرق و سوی مثبت $y$ آن به طرف شمال است، رسم می‌کنیم (شکل ۳-۱۰). برای سادگی، مبداء مختصات در محل فرودگاه قرار داده شده است. بردار جابه‌جایی $\vec{d}$ هواپیما، از مبدأ به طرف نقطه‌ای است که هواپیما دیده شده است.

برای یافتن مؤلفه‌های $\vec{d}$، از معادلهٔ ۳-۵ با $\theta = ۶۸^\circ$ $(=۹۰^\circ - ۲۲^\circ)$ استفاده می‌کنیم

$$d_x = d\cos\theta = (۲۱۵\,\text{km})(\cos ۶۸^\circ) = ۸۱\,\text{km}$$ (پاسخ)

$$d_y = d\sin\theta = (۲۱۵\,\text{km})(\sin ۶۸^\circ) = ۱۹۹\,\text{km} \approx ۲/۰ \times ۱۰^۲\,\text{km}$$ (پاسخ)

بنابراین، هواپیما در نقطهٔ ۸۱km در مشرق و $۲/۰\times۱۰^۲$ km در شمال فرودگاه قرار دارد.




**شکل ۳-۱۰** هواپیما از فرودگاه مبدأ بلند می‌شود و سپس در نقطهٔ P دیده می‌شود.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۳-۳**

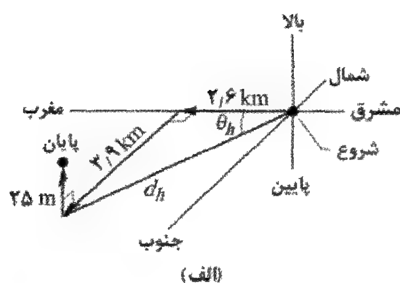
به مدت دو دهه گروه‌های غارشناسی در جستجوی یافتن یک راه ارتباطی بین رشته غارهای *فلینت ریج*[1] و غار *ماموت*[2] بودند که در ایالت کنتاکی واقع‌اند. وقتی سرانجام این راه ارتباطی کشف شد، آنها آن را به عنوان طویلترین غارجهان (با طولی بیش از ۲۰۰km) اعلام کردند. گروهی که این راه ارتباطی را یافتند، در مسیرهای بی‌شماری سینه‌خیز رفتند، صعود کردند و پیچ و تاب خوردند؛ و در طی این مسیرها ۲/۶km به سوی غرب، ۳/۹km به سوی جنوب و ۲۵m رو به بالا حرکت کردند. بردار جابه‌جایی آنها از آغاز تا پایان چقدر بوده است؟

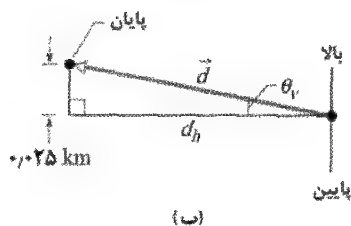
**نکتهٔ کلیدی** مؤلفه‌های یک بردار سه بعدی را داریم و می‌خواهیم بزرگی بردار و دو زاویهٔ تعیین کنندهٔ جهت را بیابیم.

***مؤلفه‌های افقی:*** در ابتدا مؤلفه‌ها را مشابه شکل ۳-۱۱ الف رسم می‌کنیم. مؤلفه‌های افقی (۲/۶km به سمت مغرب و ۳/۹km به سمت جنوب) تشکیل ضلعهای یک مثلث راستگوشهٔ افقی را می‌دهند. جابه‌جایی افقی گروه، وتر مثلث را تشکیل می‌دهد که بزرگی $d_h$ آن از قضیهٔ فیثاغورس به دست می‌آید:

$$d_h = \sqrt{(۲/۶\,\text{km})^۲ + (۳/۹\,\text{km})^۲} = ۴/۶۹\,\text{km}$$

1. Flint Ridge
2. Mammoth




**شکل ۳-۱۱** (الف) مؤلفه‌های جابه‌جایی کل و جابه‌جایی افقی $d_h$ گروه غارشناسی. (ب) نمای جانبی که $d_h$ و بردار جابه‌جایی کل $\vec{d}$ را نشان می‌دهد.

همچنین از مثلث افقی شکل ۳-۱۱ الف در می‌یابیم که این جابه‌جایی در زاویهٔ $\theta_h$ به طرف جنوب غربی انجام می‌گیرد، که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\tan\theta_h = \frac{۳/۹\,\text{km}}{۲/۶\,\text{km}}$$

و از آنجا

$$\theta_h = \tan^{-1}\frac{۳/۹\,\text{km}}{۲/۶\,\text{km}} = ۵۶^\circ$$ (پاسخ)

که این یکی از دو زاویه‌ای است که برای تعیین جهت جابه‌جایی کل نیاز داریم.

***جابه‌جایی کل:*** برای محاسبهٔ مؤلفهٔ عمودی $(۲۵\text{m} = ۰/۰۲۵ = \text{km})$ از نمای جانبی شکل ۳-۱۱ الف در حالی‌که از شمال غرب دیده می‌شود، استفاده می کنیم. در این صورت به شکل ۳-۱۱ ب می‌رسیم که در آن مؤلفه عمودی و جابه‌جایی افقی $d_h$ تشکیل ضلعهای مثلث راستگوشهٔ دیگری را می‌دهند. حال جابه‌جایی کل گروه، وتر این مثلث را می‌سازد و بزرگی $d$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$d = \sqrt{(۴/۶۹\,\text{km})^۲ + (۰/۰۲۵\,\text{km})^۲} = ۴/۶۹\,\text{km} \approx ۴/۷\,\text{km}$$ (پاسخ)

این جابه‌جایی، به سمت بالا و نسبت به جابه‌جایی افقی دارای این زاویه است

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{۰/۰۲۵\,\text{km}}{۴/۶۹\,\text{km}} = ۰/۳^\circ$$ (پاسخ)

بنابراین، بردار جابه‌جایی گروه دارای بزرگی ۴/۷km است و با جنوب غرب زاویهٔ ۵۶° و رو به بالا زاویهٔ ۰/۳° می‌سازد. اگر چه حرکت قائم خالص در مقایسه با حرکت افقی ناچیز بود، ولی این امر برای گروه کار راحتی نبود، چرا که آنها مجبور بودند برای رسیدن به غار به دفعات بی‌شماری بالا و پایین بروند. مسیر واقعی پیموده شده، با بردار جابه‌جایی کاملاً تفاوت داشت.

## تدبیرهای حل مسئله

### تدبیر ۱: زاویه‌ها- درجه و رادیان

زاویه‌هایی که نسبت به جهت مثبت محور $x$ اندازه‌گیری می‌شوند اگر به طور پاد ساعتگرد اندازه‌گیری شوند مثبت و اگر به طور ساعتگرد اندازه‌گیری شوند منفی در نظر گرفته می‌شوند. مثلاً زاویه‌های ۲۱۰° و ۱۵۰°- زاویهٔ یکسانی را نشان می‌دهند.

زاویه‌ها را می‌توان برحسب درجه یا رادیان (rad) اندازه‌گیری کرد. برای تبدیل این دو به یکدیگر یادآوری می‌کنیم که دایرهٔ کامل ۳۶۰° یا $2\pi$ رادیان است، مثلاً برای تبدیل ۴۰° به رادیان می‌نویسیم

$$40° \frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = 0/70 \text{ rad}$$

### تدبیر ۲: تابعهای مثلثاتی

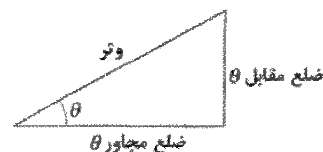
شما لازم است از تعریف تابعهای مثلثاتی معمولی- سینوس، کسینوس و تانژانت - اطلاع داشته باشید؛ چرا که آنها بخشی از زبان علم و مهندسی‌اند. این تابعها در شکل ۳-۱۲ به گونه‌ای که به نمادگذاری مثلث بستگی ندارند، داده شده‌اند.

شما همچنین باید بتوانید چگونگی تغییر تابعهای مثلثاتی با زاویه را رسم کنید تا دریابید که نتیجهٔ ماشین حساب شما معقول است یا خیر. حتی آشنایی با علامت تابعها در ربعهای مختلف می‌تواند چاره‌ساز باشد.

$$\sin\theta = \frac{\theta \text{ ضلع مقابل به}}{\text{وتر}}$$

$$\cos\theta = \frac{\theta \text{ ضلع مجاور به}}{\text{وتر}}$$

$$\tan\theta = \frac{\theta \text{ ضلع مقابل به}}{\theta \text{ ضلع مجاور به}}$$

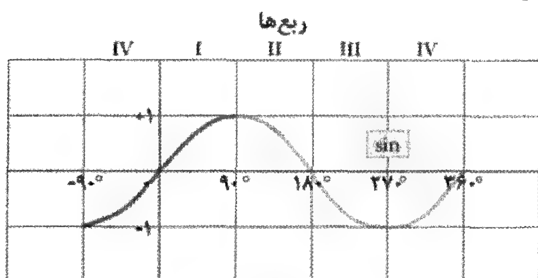



**شکل ۳-۱۲** مثلثی که برای تعریف تابعهای مثلثاتی به کار می‌رود. همچنین پیوست ث را نیز ببینید.

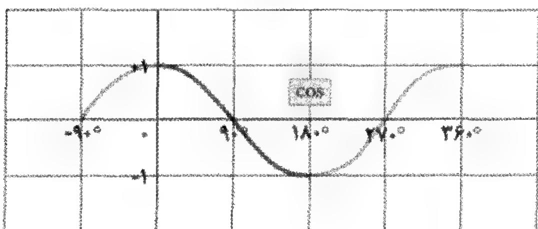
### تدبیر ۳: تابعهای مثلثاتی وارون

هنگامی که تابعهای مثلثاتی وارون $\sin^{-1}$، $\cos^{-1}$، و $\tan^{-1}$ را به ماشین حسابتان می‌دهید باید معقول بودن پاسخ را مورد بررسی قرار دهید؛ زیرا معمولاً پاسخ دیگری نیز ممکن است وجود داشته باشد که ماشین حساب نداده است. گسترهٔ عملکرد یک ماشین حساب در یافتن تابع مثلثاتی وارون در شکل ۳-۱۳ نشان داده شده است. برای مثال $\sin^{-1} 0/5$ به زاویهٔ ۳۰° (که به دلیل گسترهٔ عملکرد ماشین حساب در صفحهٔ آن نمایش داده می‌شود) و زاویهٔ ۱۵۰° مربوط می‌شود. برای دیدن هر دو مقدار، در شکل ۳-۱۳ الف یک خط افقی از ۰/۵ رسم کنید و ببینید که در کجا منحنی سینوس را قطع می‌کند.

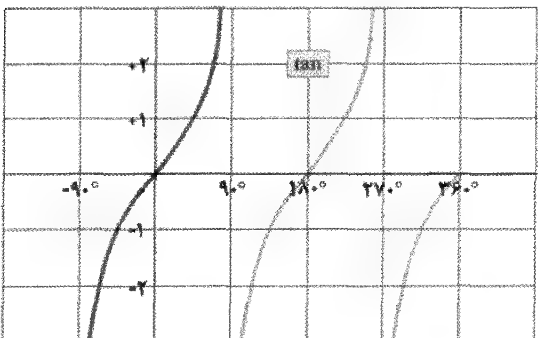
چگونه می‌توان جواب درست را تمیز داد؟ یکی از جوابها برای وضعیت داده شده معقول‌تر است. مثلاً محاسبهٔ $\theta_h$ در مسئلهٔ نمونهٔ ۳-۳ را دوباره در نظر بگیرید که در آن $\tan\theta_h = 3/9/2/6 = 1/5$ می‌شود. اگر $\tan^{-1} 1/5$ را به ماشین حسابتان بدهید، جواب $\theta_h = 56°$ را به شما می‌دهد؛ در حالی که تانژانت $\theta_h = 236° = (180° + 56°)$ نیز برابر ۱/۵ می‌شود. کدامیک درست است؟ با استفاده از وضعیت فیزیکی (شکل ۳-۱۱ الف) در می‌یابیم که ۵۶° معقول و ۲۳۶° به روشنی نامعقول است.




(الف)




(ب)




(ج)

**شکل ۳-۱۳** سه منحنی مفیدی که باید به خاطر سپرده شود. گسترهٔ عملکرد یک ماشین حساب برای یافتن تابع مثلثاتی *وارون* با بخش‌های تیره‌تر نمایش داده شده است.

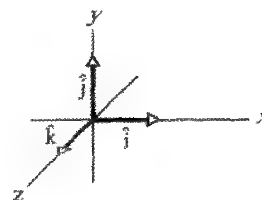
### تدبیر ۴: اندازه‌گیری زاویه‌های بردار

عبارتهای $\cos\theta$ و $\sin\theta$ در معادلهٔ ۳-۵ و $\tan\theta$ در معادلهٔ ۳-۶ تنها وقتی معتبرند که زاویه نسبت به جهت مثبت محور $x$ اندازه‌گیری شده باشد. اگر زاویه نسبت به جهت دیگری اندازه‌گیری شده باشد، آنگاه تابعهای مثلثاتی در معادلهٔ ۳-۵

ممکن است وارون شوند. روش مطمئن‌تر آن است که زاویهٔ داده شده را به زاویه‌ای که از جهت مثبت محور $x$ اندازه‌گیری می‌شود تبدیل کنیم.

## ۳-۵ بردارهای یکه

**بردار یکه** برداری است که بزرگی آن دقیقاً برابر ۱ و سوی آن در جهت خاصی باشد. این بردار بُعد و یکا ندارد. تنها هدف از آن، مشخص کردن یک جهت است. بردارهای یکه در جهتهای مثبت محورهای $x$، $y$ و $z$ با نمادهای $\hat{\mathrm{i}}$، $\hat{\mathrm{j}}$ و $\hat{\mathrm{k}}$ مشخص می‌شوند که در آن نشانهٔ کلاه ^ به آن دلیل به کار رفته که آنها را از سایر بردارها که با پیکانی روی آنها مشخص می‌شوند، متمایز کند (شکل ۳-۱۴). آرایش محورها در شکل ۳-۱۴ **دستگاه مختصات راستگرد** گفته می‌شود. اگر دستگاهی به صورت صلب چرخانده شود، راستگرد باقی می‌ماند. در این کتاب فقط از چنین دستگاه مختصاتی استفاده شده است.




**شکل ۳-۱۴** بردارهای یکه $\hat{\mathrm{i}}$، $\hat{\mathrm{j}}$ و $\hat{\mathrm{k}}$ جهتهای دستگاه مختصات راستگرد را مشخص می‌کنند.

بردارهای یکه برای توصیف بردارهای دیگر نیز بسیار مفیدند؛ برای مثال، بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در شکلهای ۳-۸ و ۳-۹ را می‌توانیم به صورتهای زیر بیان کنیم

$$\vec{a} = a_x\,\hat{\mathrm{i}} + a_y\,\hat{\mathrm{j}} \qquad (۳-۷)$$

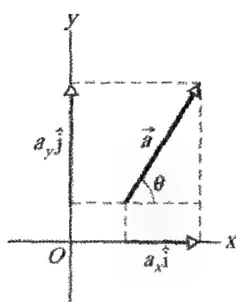
$$\vec{b} = b_x\,\hat{\mathrm{i}} + b_y\,\hat{\mathrm{j}} \qquad (۳-۸)$$

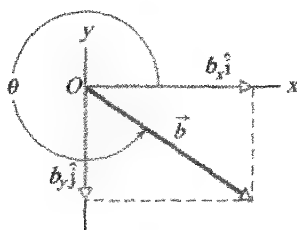
این دو معادله در شکل ۳-۱۵ نشان داده شده‌اند. کمیتهای $a_x\,\hat{\mathrm{i}}$ و $a_y\,\hat{\mathrm{j}}$ بردارهایی هستند که **مؤلفه‌های بردار** $\vec{a}$ نامیده می‌شوند. کمیتهای $a_x$ و $a_y$ نرده‌ای‌هایی هستند که **مؤلفه‌های نرده‌ای** $\vec{a}$ (یا مانند پیشتر به طور ساده **مؤلفه‌های** آن) نامیده می‌شوند.

به عنوان مثال، بردار جابه‌جایی $\vec{d}$ گروه غارشناسی در مسئلهٔ نمونهٔ ۳-۳ را برحسب بردارهای یکه می‌نویسیم. نخست، دستگاه مختصات شکل ۳-۱۴ را روی شکل ۳-۱۱ الف منطبق می‌کنیم. آنگاه جهتهای $\hat{\mathrm{i}}$، $\hat{\mathrm{j}}$ و $\hat{\mathrm{k}}$ به ترتیب به طرف شرق، بالا و جنوب قرار دارند. در نتیجه جابه‌جایی $\vec{d}$ از آغاز تا پایان به طور شسته رفته‌ای برحسب نمادگذاری بردارهای یکه چنین می‌شود

$$\vec{d} = -(۲/۶\,\mathrm{km})\hat{\mathrm{i}} + (۰/۰۲۵\,\mathrm{km})\hat{\mathrm{j}} + (۳/۹\,\mathrm{km})\hat{\mathrm{k}} \qquad (۳-۹)$$

در اینجا $-(۲/۶\,\mathrm{km})\hat{\mathrm{i}}$ مؤلفهٔ برداری $d_x\hat{\mathrm{i}}$ در امتداد محور $x$، و $-(۲/۶\,\mathrm{km})$ مؤلفهٔ نرده‌ای $x$ یعنی $d_x$ است.




**شکل ۳-۱۵** (الف) مؤلفه‌های برداری بردار $\vec{a}$. (ب) مؤلفه‌های برداری بردار $\vec{b}$.

## ۳-۶ جمع‌برداری با استفاده از مؤلفه‌ها

بردارها را می‌توان با استفاده از شکل به روش هندسی با یکدیگر جمع کرد. همچنین در ماشین حسابهایی که قادر به محاسبه‌های برداری‌اند می‌توان جمع آنها را به طور مستقیم بر صفحهٔ نمایشگر مشاهده کرد. راه سوم جمع بردارها، ترکیب محور به محور مؤلفه‌هاست، روشی که در اینجا آن را توضیح می‌دهیم.

برای شروع، عبارت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \qquad (۳-۱۰)$$

که بیان می‌دارد بردار $\vec{r}$ همان بردار $\vec{a}+\vec{b}$ است. بنابراین، هر مؤلفهٔ $\vec{r}$ باید برابر با مؤلفهٔ متناظر آن در $(\vec{a}+\vec{b})$ باشد، یعنی

$$r_x = a_x + b_x \qquad (۳-۱۱)$$

$$r_y = a_y + b_y \qquad (۳-۱۲)$$

$$r_z = a_z + b_z \qquad (۳-۱۳)$$

به عبارت دیگر، دو بردار وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های متناظر آنها با هم برابر باشند. معادله‌های ۳-۱۰ تا ۳-۱۳ بیان می‌دارند که برای جمع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باید (۱) بردارها را به مؤلفه‌های نرده‌ای آنها تجزیه کرد، (۲) برای به‌دست آوردن مؤلفه‌های $\vec{r}$ مجموع، این مؤلفه‌ها را محور به محور ترکیب کرد، و (۳) برای به دست آوردن خود $\vec{r}$، مؤلفه‌های $\vec{r}$ را ترکیب کرد. در مرحلهٔ (۳) یک انتخاب داریم. بردار $\vec{r}$ را می‌توانیم برحسب نمادگذاری بردارهای یکه (مشابه معادلهٔ ۳-۹) یا برحسب نمادگذاری بزرگی- زاویه (مشابه پاسخ مسئلهٔ نمونه ۳-۳) بیان کنیم.

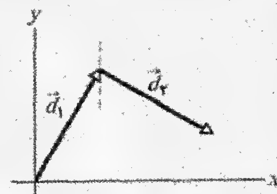
این روش برای جمع‌کردن مؤلفه‌ای بردارها را می‌توان برای تفریق بردارها نیز به کار برد. به یاد بیاورید که تفریقی مثل $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ را می‌توان به صورت $\vec{d}=\vec{a}+(-\vec{b})$ بازنویسی کرد. برای تفریق، مؤلفه‌های $\vec{a}$ و $-\vec{b}$ را با هم جمع می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$d_x=a_x-b_x \quad \text{و} \quad d_y=a_y-b_y \quad \text{و} \quad d_z=a_z-b_z.$$

که در آن

$$\vec{d}=d_x\,\hat{\mathrm{i}}+d_y\,\hat{\mathrm{j}}+d_z\,\hat{\mathrm{k}}$$

**نکتهٔ وارسی ۳** (الف) در شکل، علامت مؤلفه‌های $x$ مربوط به $\vec{d}_۱$ و $\vec{d}_۲$ چیست؟ (ب) علامت مؤلفه‌های $y$ مربوط به $\vec{d}_۱$ و $\vec{d}_۲$ چیست؟ (پ) علامت مؤلفه‌های $x$ و $y$ مربوط به $\vec{d}_۱+\vec{d}_۲$ چیست؟




**مسئلهٔ نمونهٔ ۳-۴**

شکل ۳-۱۶ الف سه بردار زیر را نشان می‌دهد:

$$\vec{a}=(۴/۲\text{m})\hat{\mathrm{i}}-(۱/۵\,\text{m})\hat{\mathrm{j}}$$
$$\vec{b}=(۱/۶\text{m})\hat{\mathrm{i}}-(۲/۹\text{m})\hat{\mathrm{j}}$$
$$\vec{c}=(-۳/۷\text{m})\hat{\mathrm{j}}$$

بردار $\vec{r}$ مجموع را که آن هم نشان داده شده است به دست آورید.

**نکتهٔ کلیدی** می‌توانیم بردار $\vec{r}$ مجموع سه بردار را با جمع مؤلفه‌ها، محور به محور، و سپس ترکیب مؤلفه‌ها به دست آوریم.

***محاسبه‌ها:*** برای محور $x$، مؤلفه‌های $x$ بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را برای به دست آوردن مؤلفهٔ $x$ بردار $\vec{r}$ مجموع، جمع می‌کنیم:

$$r_x=a_x+b_x+c_x$$
$$=۴/۲\,\text{m}-۱/۶\text{m}+۰=۲/۶\,\text{m}$$

به همین ترتیب برای محور $y$ داریم

$$r_y=a_y+b_y+c_y$$
$$=-۱/۵\,\text{m}+۲/۹\text{m}-۳/۷\text{m}=-۲/۳\,\text{m}$$

سپس این مؤلفه‌های $\vec{r}$ را برای نوشتن بردار در نمادگذاری بردارهای یکه با هم ترکیب می‌کنیم

$$\vec{r}=(۲/۶\text{m})\hat{\mathrm{i}}-(۲/۳\,\text{m})\hat{\mathrm{j}} \qquad \text{(پاسخ)}$$

که در آن $(۲/۶\text{m})\hat{\mathrm{i}}$ مؤلفهٔ برداری $\vec{r}$ در امتداد محور $x$ و $-(۲/۳\text{m})\hat{\mathrm{j}}$ مؤلفهٔ برداری آن در امتداد محور $y$ است. شکل ۳-۱۶ ب روشی را برای ترکیب مؤلفه‌های بردار به منظور تشکیل بردار $\vec{r}$ نشان می‌دهد. (آیا می‌توانید به روش دیگری ترسیم کنید؟)

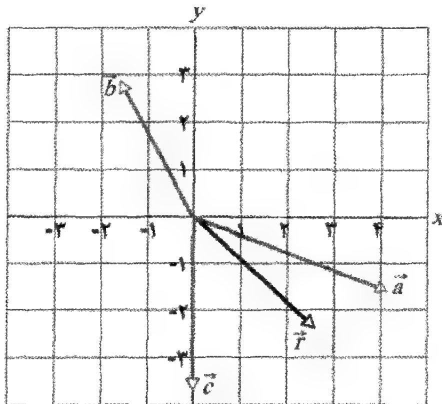
همچنین می‌توانیم به این پرسش با به دست آوردن بزرگی و جهت $\vec{r}$ پاسخ دهیم. از معادلهٔ ۳-۶ بزرگی $\vec{r}$ را به دست می‌آوریم

$$r=\sqrt{(۲/۶\text{m})^۲+(-۲/۳\text{m})^۲}\approx ۳/۵\text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

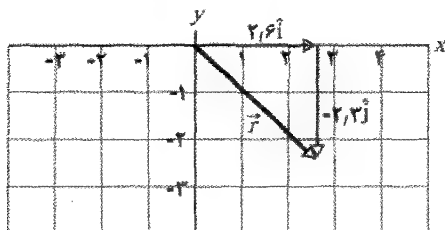
و زاویه (اندازه‌گیری شده نسبت به جهت مثبت محور $x$) چنین می‌شود

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-۲/۳\text{m}}{۲/۶\text{m}}\right)=-۴۱^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$

که علامت منفی بدان معنی است که زاویه ساعتگرد اندازه‌گیری شده است.




(الف)

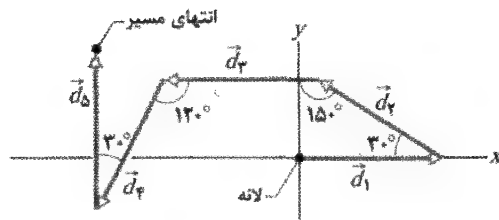


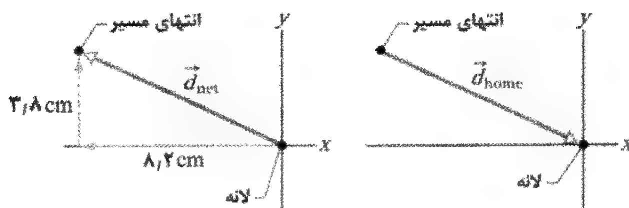

(ب)

شکل ۳-۱۶ بردار $\vec{r}$ جمع برداری سه بردار دیگر است.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۳-۵**

براساس آزمایشهای صورت گرفته، مورچهٔ کویری نشان داده شده در عکس آغازین فصل، مسیر حرکت خود را در امتداد یک دستگاه مختصات ذهنی پی می‌گیرد. هنگامی که مورچه می‌خواهد به لانهٔ خود برگردد، به طور مؤثری جابه‌جاییهای خود در امتداد محورهای این دستگاه را به منظور برآورد برداری که مستقیماً رو به لانه‌اش قرار دارد، جمع می‌کند. به عنوان مثالی از چنین برآوردی، مورچه‌ای را در نظر بگیرید که پنج مسیر ۶/۰cm روی یک دستگاه مختصات $xy$ در جهتهای نشان داده شده در شکل ۳-۱۷ الف با شروع از لانه‌اش طی می‌کند. در انتهای مسیر پنجم، بزرگی و زاویهٔ بردار جابه‌جایی خالص $\vec{d}_{\text{net}}$ و بردار رو به لانه $\vec{d}_{\text{home}}$ که از مکان نهایی مورچه تا لانه‌اش امتداد می‌یابد، چیست؟




**شکل ۳-۱۷** (الف) یک مسیر ذهنی شامل پنج قسمت. (ب) مؤلفه‌های $x$ و $y$ بردار $\vec{d}_{\text{net}}$. (پ) بردار $\vec{d}_{\text{home}}$ که به طرف لانه است.

**نکته‌های کلیدی** (۱) برای یافتن جابه‌جایی خالص $\vec{d}_{\text{net}}$ به جمع پنج بردار جابه‌جایی مجزا نیاز داریم:

$$\vec{d}_{\text{net}} = \vec{d}_۱ + \vec{d}_۲ + \vec{d}_۳ + \vec{d}_۴ + \vec{d}_۵$$

(۲) این مجموع را برای مؤلفه‌های $x$ و $y$ به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم

$$d_{\text{net},x} = d_{۱x} + d_{۲x} + d_{۳x} + d_{۴x} + d_{۵x} \qquad (۳\text{-}۱۴)$$

و

$$d_{\text{net},y} = d_{۱y} + d_{۲y} + d_{۳y} + d_{۴y} + d_{۵y} \qquad (۳\text{-}۱۵)$$

(۳) $\vec{d}_{\text{net}}$ را براساس مؤلفه‌های $x$ و $y$ آن بنا می‌کنیم.

***محاسبه‌ها:*** برای محاسبهٔ معادلهٔ ۳-۱۴، بخش $x$ معادلهٔ ۳-۵ را برای هر قسمت از مسیر به کار می‌بریم:

$$d_{۱x} = (۶/۰\,\text{cm})\cos ۰° = +۶/۰\,\text{cm}$$
$$d_{۲x} = (۶/۰\,\text{cm})\cos ۱۵۰° = -۵/۲\,\text{cm}$$
$$d_{۳x} = (۶/۰\,\text{cm})\cos ۱۸۰° = -۶/۰\,\text{cm}$$
$$d_{۴x} = (۶/۰\,\text{cm})\cos(-۱۲۰°) = -۳/۰\,\text{cm}$$
$$d_{۵x} = (۶/۰\,\text{cm})\cos ۹۰° = ۰$$

آنگاه، معادلهٔ ۳-۱۴ به دست می‌دهد

$$d_{\text{net},x} = +۶/۰\,\text{cm} + (-۵/۲\,\text{cm}) + (-۶/۰\,\text{cm}) + (-۳/۰\,\text{cm}) + ۰ = ۸/۲\,\text{cm}$$

به همین ترتیب، مؤلفه‌های $y$ هر پنج قسمت مسیر را با استفاده از معادلهٔ ۳-۵ محاسبه می‌کنیم. نتایج در جدول ۳-۱ نشان داده شده است. با قرار دادن نتایج در معادلهٔ ۳-۱۵، داریم

$$d_{\text{net},y} = +۳/۸\,\text{cm}$$

بردار $\vec{d}_{\text{net}}$ و مؤلفه‌های $x$ و $y$ آن در شکل ۳-۱۷ ب نشان داده شده‌اند. برای یافتن بزرگی و زاویهٔ $\vec{d}_{\text{net}}$ با استفاده از مؤلفه‌های آن، معادلهٔ ۳-۶ را به کار می‌بریم. بزرگی آن برابر است با

$$d_{\text{net}} = \sqrt{d^۲_{\text{net},x} + d^۲_{\text{net},y}}$$
$$= \sqrt{(-۸/۲\,\text{cm})^۲ + (۳/۸\,\text{cm})^۲} = ۹/۰\,\text{cm}$$

برای یافتن زاویه (که نسبت به جهت مثبت محور $x$ اندازه‌گیری شده است) تانژانت وارون می‌گیریم

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{d_{\text{net},y}}{d_{\text{net},x}}\right)$$
$$= \tan^{-۱}\left(\frac{۳/۸\,\text{cm}}{-۸/۲\,\text{cm}}\right) = -۲۴/۸۶°$$

**جدول ۳-۱**

| مسیر | $d_x$(cm) | $d_y$(cm) |
|---|---|---|
| ۱ | +۶/۰ | ۰ |
| ۲ | −۵/۲ | +۳/۰ |
| ۳ | −۶/۰ | ۰ |
| ۴ | −۳/۰ | −۵/۲ |
| ۵ | ۰ | +۶/۰ |
| خالص | −۸/۲ | +۳/۸ |

***هشدار:*** به یاد آورید که در تدبیر ۳ حل مسئله متذکر شدیم که ممکن است ماشین حساب جواب درستی برای تانژانت وارون به دست ندهد. پاسخ $-۲۴/۸۶°$ نشان‌دهندهٔ آن است که $\vec{d}_{\text{net}}$ در ربع چهارم دستگاه مختصات $xy$ قرار دارد. با این وجود، هنگامی که این بردار را با استفاده از مؤلفه‌هایش بنا کنیم (شکل ۳-۱۷ ب) درمی‌یابیم که جهت $\vec{d}_{\text{net}}$ در ربع دوم است. بنابراین، باید به پاسخ ماشین حساب $۱۸۰°$ بیافزاییم:

$$\theta = -۲۴/۸۶° + ۱۸۰° = ۱۵۵/۱۴° \approx ۱۵۵°$$

پس، جابه‌جایی $\vec{d}_{\text{net}}$ مورچه، بزرگی و زاویهٔ زیر را دارد

$d_{\text{net}} = ۹/۰\,\text{cm}$ و زاویهٔ $۱۵۵°$ (پاسخ)

بردار $\vec{d}_{\text{home}}$ که از مورچه به لانه‌اش امتداد یافته، دارای همان بزرگی $\vec{d}_{\text{net}}$، ولی در جهت مخالف آن است (شکل ۳-۱۷ پ). پیش از این، زاویهٔ $(-۲۴/۸۶° \approx -۲۵°)$ را برای جهت مخالف $\vec{d}_{\text{net}}$ به دست آوردیم. بنابراین، $\vec{d}_{\text{home}}$ بزرگی و زاویهٔ زیر را دارد

$d_{\text{home}} = ۹/۰\,\text{cm}$ و $-۲۵°$ (پاسخ)

یک مورچهٔ کویری که بیش از $۵۰۰\text{m}$ از لانه‌اش دور می‌شود هزاران مسیر مجزا را طی می‌کند. با این حال مورچه (بدون آنکه این فصل را خوانده باشد) به طریقی می‌داند که چگونه $\vec{d}_{\text{home}}$ را محاسبه کند.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۳-۶ مهارت خود را تقویت کنید

در اینجا مسئله‌ای مربوط به جمع‌کردن برداری مطرح می‌شود که ماشین حسابهایی که قادر به محاسبه‌های برداری‌اند از پس آن بر *نمی‌آیند*. دوست شما در خط مستقیم قدم می‌زند و از شما

دور می‌شود (بردار $\vec{A}$) پس از طی مسافتی در راستای خط مستقیم دیگری حرکت می‌کند (بردار $\vec{B}$) و سپس می‌ایستد. شما چه فاصله‌ای را باید در امتداد خط مستقیم (بردار $\vec{C}$) طی کنید تا به او برسید؟

سه بردار (در شکل ۳-۱۸ نشان داده شده‌اند) با رابطهٔ زیر به هم مربوط‌اند

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad (۳-۱۶)$$

بزرگی $\vec{A}$ برابر $۲۲/۰\,\text{m}$ و جهتش با جهت مثبت محور $x$ زاویهٔ $-۴۷/۰°$ (ساعتگرد) می‌سازد. بزرگی $\vec{B}$ برابر $۱۷/۰\,\text{m}$ و جهتش نسبت به جهت مثبت محور $x$ زاویهٔ پادساعتگرد $\phi$ می‌سازد. $\vec{C}$ در جهت مثبت محور $x$ قرار دارد. بزرگی $\vec{C}$ چیست؟

**نکتهٔ کلیدی** با جمع مستقیم بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در ماشین حسابی که قادر به محاسبه‌های برداری است نمی‌توان به این پرسش پاسخ گفت، چرا که با ندانستن مقدار زاویهٔ $\phi$ بردار $\vec{B}$ نمی‌توان شکل نوعی زیر را در چنین ماشین حسابی تشکیل داد

[زاویهٔ $B$ ∠ بزرگی $B$] + [زاویهٔ $A$ ∠ *بزرگی* $A$]

با این وجود *می‌توانیم* معادلهٔ ۳-۱۶ را برحسب مؤلفه‌های آن روی محور $x$ یا محور $y$ بیان کنیم.

***محاسبه‌ها:*** چون $\vec{C}$ در امتداد محور $x$ قرار دارد، این محور را انتخاب می‌کنیم و چنین می‌نویسیم

$$C_x = A_x + B_x$$

سپس هر مؤلفهٔ $x$ را به شکل بخش $x$ معادلهٔ ۳-۵ می‌نویسیم، با قرار دادن داده‌های معلوم، خواهیم داشت

$$C\cos ۰° = ۲۲/۰\cos(-۴۷/۰°) + ۱۷/۰\cos\phi \qquad (۳-۱۷)$$

ولی، این کمک زیادی نمی‌کند زیرا هنوز نمی‌توانیم مقدار $B$ را بدون دانستن زاویهٔ $\phi$ محاسبه کنیم.

حال معادلهٔ ۳-۱۶ را برحسب مؤلفه‌های آن روی محور $y$ بیان می‌کنیم:

$$C_y = A_y + B_y$$

سپس این مؤلفه‌های $y$ را به شکل بخش $y$ معادلهٔ ۳-۵ می‌نویسیم، با قرار دادن داده‌های معلوم، خواهیم داشت

$$C\sin ۰° = ۲۲/۰\sin(-۴۷/۰°) + ۱۷/۰\sin\phi$$

که به دست می‌دهد

$$۰ = ۲۲/۰\sin(-۴۷/۰°) + ۱۷/۰\sin\phi$$

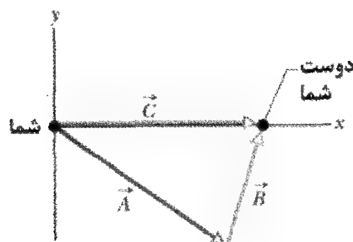
با حل این معادله برای $\phi$، به دست می‌آوریم

$$\phi = -\sin^{-1}\frac{۲۲/۰\sin(-۴۷/۰°)}{۱۷/۰} = ۷۱/۱۷°$$

با قراردادن این نتیجه در معادلهٔ ۳-۱۷ خواهیم داشت

$$C = ۲۰/۵\,\text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

به روش حل توجه کنید: وقتی از مؤلفه‌های محور $x$ استفاده کردیم و با مشکل مواجه شدیم، برای محاسبهٔ $\phi$ از مؤلفه‌های محور $y$ استفاده کردیم. سپس به منظور محاسبهٔ $C$ دوباره به سراغ محور $x$ رفتیم.

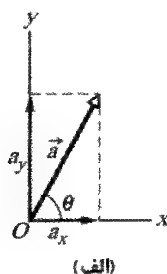



**شکل ۳-۱۸** $\vec{C}$ برابر است با جمع $\vec{A}+\vec{B}$

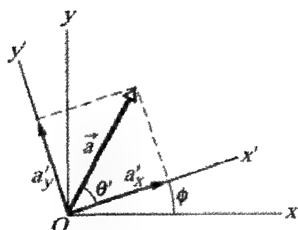
## ۳-۷ بردارها و قانونهای فیزیک

تا اینجا، در هر شکلی که دستگاه مختصات را دربرداشت، محورهای $x$ و $y$ را موازی با دو ضلع صفحهٔ کتاب در نظر گرفتیم. بنابراین، هرگاه بردار $\vec{a}$ مورد نظر باشد، مؤلفه‌های $a_x$ و $a_y$ آن نیز موازی با دو ضلع صفحهٔ کتاب خواهند بود (مانند شکل ۳-۱۹ الف). تنها دلیل برای انتخاب این سمتگیری «مناسب» بودن آنها به نظر می‌رسد؛ هیچ دلیل محکمتری وجود ندارد. به جای این انتخاب، می‌توانستیم محورها (اما نه بردار $\vec{a}$) را به اندازهٔ زاویهٔ $\phi$ مانند شکل ۳-۱۹ ب دوران دهیم، که در این صورت مؤلفه‌ها مقدارهای جدیدی پیدا می‌کردند که آنها را $a'_x$ و $a'_y$ می‌نامیم. چون برای $\phi$ انتخابهای نامحدودی می‌تواند وجود داشته باشد، از اینرو شمار نامحدودی جفت مؤلفه‌های مختلف نیز برای $\vec{a}$ وجود دارند.

در این صورت کدامیک از جفت مؤلفه‌ها «درست» هستند؟ پاسخ این است که همهٔ آنها معتبرند؛ چرا که هر جفت مؤلفه (با محورهایش) دقیقاً راه دیگری برای توصیف همان بردار $\vec{a}$ است، که همهٔ آنها بزرگی و جهت یکسانی را برای آن بردار به دست می‌دهند. از شکل ۳-۱۹ داریم



(الف)



(ب)

**شکل ۳-۱۹** (الف) بردار $\vec{a}$ و مؤلفه‌هایش. (ب) همان بردار، با محورهای دستگاه مختصاتی که به اندازهٔ $\phi$ دوران یافته‌اند.

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{a_x'^2+a_y'^2} \qquad (۱۸-۳)$$

و

$$\theta=\theta'+\phi \qquad (۱۹-۳)$$

نکته این است که چون رابطهٔ میان بردارها به محل مبداء دستگاه مختصات یا به جهت محورها بستگی ندارد، آزادی زیادی در گزینش دستگاه مختصات وجود دارد. این امر برای رابطه‌های فیزیک نیز درست است؛ همهٔ آنها مستقل از انتخاب دستگاه مختصات‌اند. علاوه بر آن، سادگی و غنای زبان بردارها را نیز بیافزایید و دریابید که چرا قانونهای فیزیک تقریباً همیشه با این زبان نمایش داده می‌شوند؛ معادله‌ای، مانند معادلهٔ ۳-۱۰ را می‌توان با سه (یا حتی بیشتر) رابطه مانند معادله‌های ۳-۱۱، ۳-۱۲ و ۳-۱۳ نمایش داد.

## ۳-۸ ضرب کردن بردارها*

بردارها را به سه روش می‌توان در هم ضرب کرد. ولی هیچ یک از آنها دقیقاً مانند ضرب جبری معمولی نیستند. وقتی این فصل را می‌خوانید، به خاطر داشته باشید ماشین حسابی که قادر به محاسبه‌های برداری است تنها در صورتی می‌تواند در ضرب بردارها به شما کمک کند که شما با قاعده‌های مقدماتی ضرب آشنایی داشته باشید.

### ضرب بردار در نرده‌ای

اگر بردار $\vec{a}$ را در نرده‌ای $s$ ضرب کنیم، بردار جدیدی به دست می‌آید. بزرگی این بردار برابر با حاصلضرب بزرگی بردار $\vec{a}$ در قدر مطلق $s$ است. جهت آن در همان جهت $\vec{a}$ است اگر $s$ مثبت باشد و در جهت مخالف $\vec{a}$ است اگر $s$ منفی باشد. برای تقسیم $\vec{a}$ بر $s$، باید $\vec{a}$ را در $\frac{1}{s}$ ضرب کنیم.

### ضرب بردار در بردار

دو راه برای ضرب یک بردار در بردار دیگر وجود دارد: در یک راه، یک نرده‌ای (ضرب *نرده‌ای* نامیده می‌شود) و در راه دیگر، یک بردار حاصل می‌شود (ضرب *برداری* نامیده می‌شود). (معمولاً دانشجویان این دو راه را با هم اشتباه می‌گیرند.)

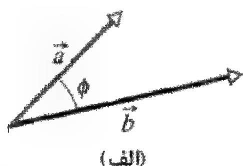
### ضرب نرده‌ای

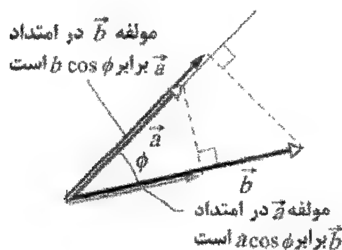
**ضرب نرده‌ای** بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در شکل ۳-۲۰ الف به صورت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نوشته می‌شود و تعریف آن چنین است

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\phi \qquad (۲۰-۳)$$

* از این مبحث فعلاً استفاده نمی‌کنیم (تا فصل ۷ برای ضرب نرده‌ای و فصل ۱۱ برای ضرب برداری) و از اینرو مدرس می‌تواند تدریس این بخش را به آینده موکول کند.

که در آن $a$ بزرگی $\vec{a}$، $b$ بزرگی $\vec{b}$ و $\phi$ زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (یا دقیقتر بگوییم: زاویهٔ بین جهتهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$) است. در واقع دو زاویه میان این دو بردار وجود دارد: $\phi$ و $۳۶۰°-\phi$. چون کسینوس آنها برابر است، هر دو را می‌توان در معادلهٔ ۳-۲۰ به کار برد.




**شکل ۳-۲۰** (الف) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و زاویهٔ میان آنها. (ب) هر بردار دارای مؤلفه‌ای در امتداد بردار دیگر است.

توجه کنید که در سمت راست معادلهٔ ۳-۲۰ فقط نرده‌ایها وجود دارند (که مقدار $\cos\phi$ را نیز شامل می‌شود). بنابراین $\vec{a}\cdot\vec{b}$ در سمت چپ، نمایانگر یک کمیت *نرده‌ای* است. به خاطر نمادگذاری به کار رفته، این ضرب را **ضرب نقطه‌ای** نیز می‌گویند و چنین می‌خوانند: «$a$ نقطه $b$».

ضرب نقطه‌ای را می‌توان به عنوان ضرب دو کمیت در نظر گرفت: (۱) بزرگی یکی از بردارها و (۲) مؤلفهٔ نرده‌ای بردار دوم در امتداد بردار اول. مثلاً در شکل ۳-۲۰ ب، $\vec{a}$ دارای مؤلفهٔ نرده‌ای $a\cos\phi$ در امتداد راستای $\vec{b}$ است؛ توجه کنید که عمود وارد از انتهای $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ این مؤلفه را تعیین می‌کند. به همین ترتیب، $\vec{b}$ دارای یک مؤلفه‌ای نرده‌ای $b\cos\phi$ در امتداد $\vec{a}$ است.

> اگر زاویهٔ $\phi$ بین دو بردار °۰ باشد، مؤلفهٔ یک بردار در امتداد دیگری بیشینه، و در نتیجه ضرب نقطه‌ای بردارها نیز بیشینه است. اگر $\phi$ برابر با °۹۰ باشد، مؤلفهٔ یک بردار در امتداد بردار دیگر صفر و در نتیجه حاصلضرب نقطه‌ای نیز صفر است.

معادله ۳-۲۰ را می‌توان برای تأکید بر مؤلفه‌ها به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a\cos\phi)(b)=(a)(b\cos\phi) \qquad (۲۱-۳)$$

قانون جابه‌جایی دربارهٔ ضرب نقطه‌ای برقرار است، و از اینرو می‌توانیم بنویسیم

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

وقتی دو بردار با نمادگذاری بردارهای یکه نوشته شوند، ضرب نقطه‌ای آنها را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\,\hat{\mathrm{i}} + a_y\,\hat{\mathrm{j}} + a_z\,\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\,\hat{\mathrm{i}} + b_y\,\hat{\mathrm{j}} + b_z\,\hat{\mathrm{k}}) \quad (۳-۲۲)$$

که می‌توانیم آن را طبق قانون توزیع‌پذیری بسط دهیم: هر مؤلفهٔ بردار اول در هریک از مؤلفه‌های بردار دوم به صورت نقطه‌ای ضرب می‌شود. با انجام این کار می‌توانیم نشان دهیم

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (۳-۲۳)$$

**نکتهٔ وارسی ۴** بزرگی بردارهای $\vec{C}$ و $\vec{D}$ به ترتیب ۳ یکا و ۴ یکاست. اگر $\vec{C}\cdot\vec{D}$ برابر (الف) صفر، (ب) ۱۲ یکا و (پ) ۱۲- یکا باشد، زاویهٔ بین جهتهای $\vec{C}$ و $\vec{D}$ چقدر خواهد بود؟

**مسئلهٔ نمونه**

زاویهٔ $\phi$ بین بردارهای $\vec{a} = ۳/۰\,\hat{\mathrm{i}} - ۴/۰\,\hat{\mathrm{j}}$ و $\vec{b} = -۲/۰\,\hat{\mathrm{i}} - ۳/۰\,\hat{\mathrm{k}}$ چقدر است؟ (*هشدار*: اگر چه یک ماشین حساب که قادر به محاسبه‌های برداری است می‌تواند مراحل زیر را از راه کوتاهتری به انجام برساند، با این حال اگر شما این مراحل را طی کنید چیز بیشتری راجع به ضربهای نرده‌ای می‌آموزید.)

**نکتهٔ کلیدی** از تعریف ضرب نرده‌ای که شامل زاویهٔ بین جهت‌های دو بردار است (معادلهٔ ۳-۲۰) استفاده می‌کنیم

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi \quad (۳-۲۴)$$

***محاسبه‌ها:*** در معادلهٔ ۳-۲۴، $a$ بزرگی $\vec{a}$ است یا

$$a = \sqrt{۳/۰^۲ + (-۴/۰)^۲} = ۵/۰۰ \quad (۳-۲۵)$$

و $b$ بزرگی $\vec{b}$ است، یا

$$b = \sqrt{(-۲/۰)^۲ + ۳/۰^۲} = ۳/۶۱ \quad (۳-۲۶)$$

سمت چپ معادلهٔ ۳-۲۴ را می‌توانیم به طور جداگانه و با نوشتن بردارها برحسب بردارهای یکه و با استفاده از قانون توزیع پذیری، محاسبه کنیم

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (۳/۰\,\hat{\mathrm{i}} - ۴/۰\,\hat{\mathrm{j}})\cdot(-۲/۰\,\hat{\mathrm{i}} + ۳/۰\,\hat{\mathrm{k}})\\ &= (۳/۰\,\hat{\mathrm{i}})\cdot(-۲/۰\,\hat{\mathrm{i}}) + (۳/۰\,\hat{\mathrm{i}})\cdot(۳/۰\,\hat{\mathrm{k}})\\ &\quad + (-۴/۰\,\hat{\mathrm{j}})\cdot(-۲/۰\,\hat{\mathrm{i}}) + (-۴/۰\,\hat{\mathrm{j}})\cdot(۳/۰\,\hat{\mathrm{k}}).\end{aligned}$$

سپس معادلهٔ ۳-۲۰ را در مورد هر جملهٔ آخرین رابطه به کار می‌بریم. زاویهٔ میان بردارهای یکه در اولین جمله $(\hat{\mathrm{i}}, \hat{\mathrm{i}})$ برابر $۰^\circ$ و برای سایر جمله‌ها $۹۰^\circ$ است. بنابراین، داریم

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -(۶/۰)(۱) + (۹/۰)(۰) + (۸/۰)(۰) - (۱۲)(۰) = -۶/۰$$

با قرار دادن این نتیجه و نتایج معادله‌های ۳-۲۵ و ۳-۲۶ در معادلهٔ ۳-۲۴، خواهیم داشت

$$-۶/۰ = (۵/۰۰)(۳/۶۱)\cos\phi$$

از آنجا

$$\phi = \cos^{-1}\frac{-۶/۰}{(۵/۰۰)(۳/۶۱)} = ۱۰۹^\circ \approx ۱۱۰^\circ \quad \text{(پاسخ)}$$

## ضرب برداری

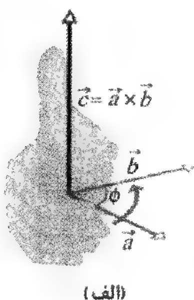
**ضرب برداری** بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که به صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ نوشته می‌شود، بردار سوم $\vec{c}$ را ایجاد می‌کند که بزرگی آن برابر است با

$$c = ab\sin\phi \quad (۳-۲۷)$$

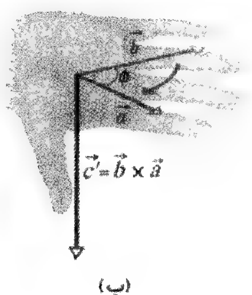
که در آن $\phi$ زاویهٔ کوچکتر میان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. (از دو زاویهٔ میان بردارها باید زاویهٔ کوچکتر را به کار بریم، زیرا از نظر علامت جبری $\sin\phi$ و $\sin(۳۶۰^\circ - \phi)$ با یکدیگر فرق دارند.) به خاطر نمادگذاری، $\vec{a}\times\vec{b}$ به عنوان **ضرب ضربدری** نیز نامیده می‌شود و چنین می‌خوانند: «$a$ ضربدر $b$».

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی یا پادموازی باشند، $\vec{a}\times\vec{b} = ۰$ می‌شود. بزرگی $\vec{a}\times\vec{b}$ که به صورت $|\vec{a}\times\vec{b}|$ نوشته می‌شود زمانی بیشینه است که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر یکدیگر عمود باشند.

راستای $\vec{c}$ بر صفحهٔ شامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. شکل ۳-۲۱ الف چگونگی تعیین جهت $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ را که **قاعدهٔ دست راست** نامیده می‌شود، نشان می‌دهد. بدون تغییر دادن سمتگیری بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ابتدای آنها را بر یکدیگر منطبق می‌کنیم و خط عمود بر صفحه‌ای را که از تقاطع آنها به دست می‌آید در نظر می‌گیریم. وانمود کنید که این خط را با دست *راست* چنان گرفته‌اید که سوی پیچش انگشتانتان از $\vec{a}$ به سمت $\vec{b}$ در جهت زاویهٔ کوچکتر بین آنها باشد. آنگاه شست کشیده شدهٔ شما در جهت $\vec{c}$ خواهد بود.




(الف)




(ب)

**شکل ۳-۲۱** توضیح قاعدهٔ دست راست برای ضرب‌برداری. (الف) چرخش بردار $\vec{a}$ به سمت بردار $\vec{b}$ با انگشتان دست راست. انگشت شست کشیده در جهت بردار $\vec{c} = \vec{b}\times\vec{a}$ است. (ب) نشان‌دادن اینکه جهت $\vec{b}\times\vec{a}$ وارون $\vec{a}\times\vec{b}$ است

ترتیب، در ضرب برداری مهم است. در شکل ۳-۲۱ ب هنگامی که می‌خواهیم جهت $\vec{c}'=\vec{b}\times\vec{a}$ را تعیین کنیم، انگشتان باید طوری قرار گیرند که چرخش $\vec{b}$ به سمت $\vec{a}$ در زاویهٔ کوچکتر باشد. انگشت شست در خلاف جهت قبلی خواهد بود و بنابراین، باید $\vec{c}'=-\vec{c}$ باشد. این بدان معناست که

$$\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (۳-۲۸)$$

به بیان دیگر قانون جابه‌جایی دربارهٔ ضرب برداری برقرار نیست. برحسب بردارهای یکه می‌نویسیم

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}) \qquad (۳-۲۹)$$

که می‌توان آن را بنابر قانون توزیع‌پذیری بسط داد؛ به این معنی که هر مؤلفهٔ بردار اول در هر کدام از مؤلفه‌های بردار دوم به صورت برداری ضرب می‌شود. ضرب برداری بردارهای یکه در پیوست ث («ضرب بردارها» را ببینید) آمده است. برای مثال، در بسط معادلهٔ ۳-۲۹ داریم

$$a_x\hat{i}\times b_x\hat{i}=a_xb_x(\hat{i}\times\hat{i})=0$$

چون دو بردار یکهٔ $\hat{i}$ و $\hat{i}$ موازی‌اند پس ضرب برداری آنها صفر است. به طور مشابه، داریم

$$a_x\hat{i}\times b_y\hat{j}=a_xb_y(\hat{i}\times\hat{j})=a_xb_y\hat{k}$$

در مرحلهٔ آخر، از معادلهٔ ۳-۲۷ برای محاسبهٔ بزرگی $\hat{i}\times\hat{j}$ که برابر واحد است استفاده کرده‌ایم. (بردارهای $\hat{i}$ و $\hat{j}$ برابر واحد و زاویهٔ بین آنها $90^\circ$ است.) همچنین از قاعدهٔ دست راست برای به دست آوردن جهت $\hat{i}\times\hat{j}$ که در سوی مثبت محور $z$ (یعنی در جهت $\hat{k}$) است استفاده کرده‌ایم.

با ادامهٔ بسط معادلهٔ ۳-۲۹ می‌توان نشان داد که

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-b_ya_z)\hat{i}+(a_zb_x-b_za_x)\hat{j}+(a_xb_y-b_xa_y)\hat{k} \qquad (۳-۳۰)$$

از محاسبهٔ یک دترمینان (پیوست ث) یا ماشین حسابی که قادر به محاسبه‌های برداری باشد نیز می‌توان استفاده کرد.

برای بررسی اینکه دستگاه مختصات $xyz$ یک دستگاه مختصات راستگرد است، قاعدهٔ دست راست برای ضرب برداری $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$ را در آن دستگاه به کار می‌بریم. اگرجهت پیچش انگشتان از $\hat{i}$ (جهت مثبت $x$) به $\hat{j}$ (جهت مثبت $y$)، و شست کشیده شده در جهت مثبت محور $z$ باشد، آنگاه آن دستگاه راستگرد است.

**✔ نکتهٔ وارسی ۵** بزرگی بردارهای $\vec{C}$ و $\vec{D}$ به ترتیب ۳ و ۴ یکاست. اگر بزرگی بردار حاصلضرب $\vec{C}\times\vec{D}$ برابر (الف) صفر و (ب) ۱۲ یکا باشد، زاویهٔ میان $\vec{C}$ و $\vec{D}$ چقدر است؟

### مسئلهٔ نمونهٔ ۳-۸

بردار $\vec{a}$ در شکل ۳-۲۲ در صفحهٔ $xy$ واقع است؛ بزرگی آن ۱۸ یکا و در جهت $250^\circ$ نسبت به جهت مثبت محور $x$ قرار دارد. بزرگی بردار $\vec{b}$ نیز برابر ۱۲ یکا و در جهت مثبت محور $z$ است. ضرب برداری $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ را به دست آورید.

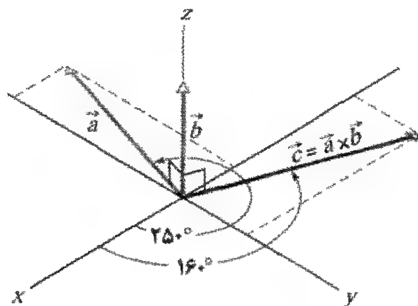
**نکتهٔ کلیدی** وقتی دو بردار با نمادگذاری بزرگی- زاویه داریم، بزرگی حاصلضرب برداری آنها را می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۳-۲۷ محاسبه و جهت حاصلضرب برداری آنها را نیز با استفاده از قاعدهٔ دست راست از روی شکل ۳-۲۱ مشخص کنیم.

***محاسبه‌ها:*** برای بزرگی داریم

$$c=ab\sin\phi=(18)(12)(\sin 90^\circ)=216 \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای تعیین جهت در شکل ۳-۲۲، تصور کنید که انگشتان دست راست خود را دور خط عمود بر صفحهٔ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (خط عمودی که با $\vec{c}$ نشان داده شده) قرار داده‌اید به طوری که انگشتانتان از $\vec{a}$ به سمت $\vec{b}$ خمیده شود. شست کشیده شدهٔ شما جهت $\vec{c}$ را به دست می‌دهد. بنابراین، همان‌طور که در شکل نشان داده شده، $\vec{c}$ در صفحهٔ $xy$ واقع است. چون راستای آن بر راستای $\vec{a}$ نیز عمود است، با جهت مثبت محور $x$ زاویهٔ زیر را می‌سازد

$$250^\circ-90^\circ=160^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$




**شکل ۳-۲۲** بردار $\vec{c}$ (در صفحهٔ $xy$) ضرب برداری (یا ضربدری) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۳-۹

اگر $\vec{a}=3\hat{i}-4\hat{j}$ و $\vec{b}=-2\hat{i}+3\hat{k}$ باشد، $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ را محاسبه کنید.

**نکتهٔ کلیدی** وقتی دو بردار را برحسب نمادگذاری بردارهای یکه داریم، ضرب خارجی آنها را می‌توانیم با استفاده از قانون توزیع‌پذیری به دست آوریم.

***محاسبه‌ها:*** در اینجا می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\vec{c}&=(3\hat{i}-4\hat{j})\times(-2\hat{i}+3\hat{k})\\&=3\hat{i}\times(-2\hat{i})+3\hat{i}\times3\hat{k}+(-4\hat{j})\times(-2\hat{i})\\&\quad+(-4\hat{j})\times3\hat{k}\end{aligned}$$

سپس هر جمله را با معادلهٔ ۳-۲۷ محاسبه و جهت را با استفاده از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌کنیم. برای جملهٔ اول زاویهٔ $\phi$ بین دو بردار ضرب شده برابر با صفر و برای جمله‌های دیگر $\phi$ برابر $90^\circ$ است. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\vec{c}&=-6(0)+9(-\hat{j})+8(-\hat{k})-12\hat{i}\\&=-12\hat{i}-9\hat{j}-8\hat{k}\end{aligned} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این بردار $\vec{c}$ هم بر $\vec{a}$ و هم بر $\vec{b}$ عمود است. این را می‌توانید با نشان دادن اینکه $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ و $\vec{c}\cdot\vec{b}=0$ است بررسی کنید؛ این نتیجه بدین معنی است که هیچ مؤلفه‌ای از $\vec{c}$ در راستای $\vec{a}$ یا $\vec{b}$ قرار ندارد.

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر۵: خطاهای معمول در ضرب‌برداری*

چندین خطا در یافتن ضرب برداری معمول است. (۱) بی‌توجهی به قراردادن بردارها به صورت ابتدا بر ابتدا در هنگامی که بردارها به صورت انتها بر ابتدا نمایش داده شده باشند. در این حالت باید به طور ذهنی (یا اینکه بهتر است دوباره رسم کنید) یک بردار را بدون آنکه سمتگیری آن تغییر کند به آرایش مناسب انتقال دهید. (۲) ناتوانی از استفادهٔ درست از دست راست، هنگامی که این دست در حین به کار بردن قاعدهٔ دست راست ماشین حساب یا قلم را گرفته باشد. (۳) عدم موفقیت در چرخش صحیح بردار اول به سمت بردار دوم وقتی که سمتگیری بردارها به گونه‌ای باشد که چرخش دست برای اعمال قاعدهٔ دست راست مشکل شود یا در مواردی که به جای استفاده عملی از قاعدهٔ دست راست، به طور ذهنی از آن استفاده شود. (۴) کوتاهی در کارکردن با دستگاه مختصات راستگرد، هنگامی که چگونگی رسم چنین دستگاهی فراموش شده باشد. برای یک مورد به شکل ۳-۱۴ نگاه کنید. سایر موارد (موارد صحیح) را مطابق شکل ۳-۲۵ بعنوان تمرین، رسم کنید.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**نرده‌ایهای و بردارها** *نرده‌ایها*، مانند دما، فقط دارای اندازه‌اند. آنها با یک عدد و یک یکا (مثلاً $10°C$) مشخص می‌شوند و از قاعده‌های حساب و جبرمعمولی پیروی می‌کنند. *بردارها*، مانند جابه‌جایی، هم دارای اندازه و هم جهت هستند (مثلاً $5m$، رو به شمال) و از قاعده‌های جبر برداری پیروی می‌کنند.

**جمع بردارها به روش هندسی** دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را می‌توان با رسم آنها در یک مقیاس مشترک و قراردادن ابتدای یکی بر انتهای دیگری به طور هندسی با هم جمع کرد. برداری که ابتدای بردار اولی را به انتهای بردار دوم وصل می‌کند بردار مجموع $\vec{s}$ است. برای تفریق $\vec{b}$ از $\vec{a}$، جهت $\vec{b}$ را وارون می‌کنیم تا $-\vec{b}$ به دست آید؛ آنگاه $-\vec{b}$ را با $\vec{a}$ جمع می‌کنیم. جمع برداری جابه‌جایی‌پذیر است و از قانون توزیع‌پذیری پیروی می‌کند.

**مؤلفه‌های یک بردار** *مؤلفه‌های* (نرده‌ای) $a_x$ و $a_y$ هر بردار دو بعدی $\vec{a}$ با رسم خطهای عمود از سر $\vec{a}$ بر محورهای مختصات به دست می‌آیند. این مؤلفه‌ها چنین داده می‌شوند

$$a_x=a\cos\theta \quad \text{و} \quad a_y=a\sin\theta \qquad (۳\text{-}۵)$$

که در آن $\theta$ زاویهٔ بین جهت مثبت محور $x$ و جهت $\vec{a}$ است. علامت جبری یک مؤلفه، معرف جهت آن در امتداد محور مربوط به آن است. با معلوم بودن مؤلفه‌ها، بزرگی و سمتگیری بردار $\vec{a}$ از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2} \quad \text{و} \quad \tan\theta=\frac{a_y}{a_x} \qquad (۳\text{-}۶)$$

**نماد بردار- یکه** بزرگی *بردارهای یکهٔ* $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ برابر واحد است و به ترتیب در جهتهای مثبت محورهای $x$، $y$ و $z$ یک دستگاه مختصات راستگرد قرار دارند. بردار $\vec{a}$ را می‌توان برحسب بردارهای یکه به صورت زیر نوشت

$$\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k} \qquad (۳\text{-}۷)$$

که در آن $a_x\hat{i}$ ، $a_y\hat{j}$ و $a_z\hat{k}$ **مؤلفه‌های بردار** $\vec{a}$ و $a_x$ ، $a_y$ و $a_z$ **مؤلفه‌های نرده‌ای** آن هستند.

**جمع برداری برحسب مؤلفهٔ‌ها** برای جمع کردن بردارها به صورت مؤلفه‌ای، از قاعده‌های زیر استفاده می‌کنیم

$$r_x=a_x+b_x \quad r_y=a_y+b_y \quad r_z=a_z+b_z \qquad (۳\text{-}۱۱ \text{ تا } ۳\text{-}۱۳)$$

که در اینجا $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهایی هستند که باید با هم جمع شوند و $\vec{r}$ بردار مجموع است.

**ضرب یک نرده‌ای در یک بردار** ضرب نرده‌ای $s$ در بردار $\vec{v}$ ، بردار جدیدی است که بزرگی آن برابر با $sv$ و جهت آن، در صورتی‌که $s$ مثبت باشد، همان جهت $\vec{v}$ و در صورتی که $s$ منفی باشد، مخالف جهت $\vec{v}$ است. برای تقسیم $\vec{v}$ بر $s$، $\vec{v}$ را در $\frac{1}{s}$ ضرب می‌کنیم.

***ضرب نرده‌ای*** **ضرب نرده‌ای** (یا **نقطه‌ای**) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که به صورت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نوشته می‌شود، یک کمیت نرده‌ای است که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\vec{a}.\vec{b}=ab\cos\phi \qquad (۳\text{-}۲۰)$$

که در آن $\phi$ زاویهٔ میان بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. ضرب‌نرده‌ای عبارت است از ضرب بزرگی یک بردار در مؤلفهٔ نرده‌ای بردار دوم در امتداد راستای بردار اول. برحسب بردارهای یکه داریم

$$\vec{a}.\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}).(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}), \qquad (۳\text{-}۲۲)$$

که می‌شود آن را بنابر قانون توزیع‌پذیری بسط داد. توجه کنید که $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ است.

**ضرب برداری** **ضرب برداری** (یا **ضربدری**) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ نوشته می‌شود و حاصل آن *بردار* $\vec{c}$ است که بزرگی آن با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$c=ab\sin\phi \qquad (۳\text{-}۲۷)$$

$\phi$ زاویهٔ کوچکتر بین جهتهای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. راستای $\vec{c}$ بر صفحهٔ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است و همانگونه که در شکل ۳-۲۱ نشان داده شده است با قاعدهٔ دست راست مشخص می‌شود. توجه کنید که $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$ است. برحسب بردارهای یکه داریم

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \times (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}) \quad (۳\text{-}۲۹)$$

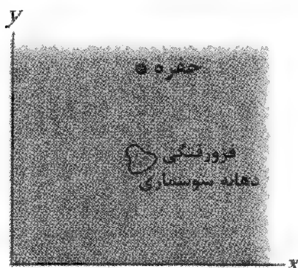
که می‌توان آن را با قانون توزیع‌پذیری بسط داد.

## پرسشها

۱- تیم گلف دانشگاه فلوریدا موسوم به "Gators" باید در زمین چمن گلف که یک فرورفتگی دهانه سوسماری برآن واقع است، بازی کند. شکل ۳-۲۲، نمای از بالای این زمین را که بر آن دستگاه مختصات $xy$ نهاده شده است، نشان می‌دهد. اعضای تیم باید به توپ از مبدأ به سمت حفره که مختصات $xy$ آن ( ۱۲m و ۸m) است، ضربه بزنند. ولی آنها باید فقط از یک یا تعداد بیشتری از جابه‌جایی‌های زیر، یک یا چند بار استفاده کنند

$$\vec{d}_1 = (8\,\mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} + (6\,\mathrm{m})\hat{\mathrm{j}}\ ,\ \vec{d}_2 = (6\,\mathrm{m})\hat{\mathrm{j}}\ ,\ \vec{d}_3 = (8\,\mathrm{m})\hat{\mathrm{i}}$$

محل فرورفتگی در مختصات ( ۶m و ۸m) است. اگر توپ یکی از افراد تیم به داخل فرورفتگی رفته یا از آن عبور کند، آن فرد مستقیماً به تیم رقیب، دانشگاه ایالتی فلوریدا منتقل می‌شود. برای جلوگیری از عبور توپ از فرورفتگی، چه جابه‌جاییهای پی‌درپی باید به کار گرفته شود؟

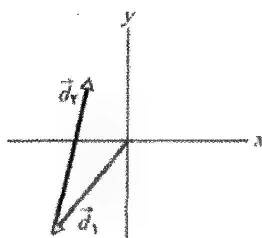



شکل ۳-۲۳ پرسش ۱

۲- معادلهٔ ۳-۲ نشان می‌دهد که جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ جابه‌جایی‌پذیر است. آیا این بدان معناست که تفریق نیز جابه‌جایی‌پذیر است به طوری که $\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$؟

۳- آیا مجموع بزرگیهای دو بردار می‌توانند برابر با بزرگی مجموع همان دو بردار باشد؟ اگر خیر، چرا؟ و اگر بلی، چه وقت؟

۴- دو بردار نشان داده شده در شکل ۳-۲۴ در صفحهٔ $xy$ قرار دارند. علامت مؤلفه‌های $x$ و $y$ رابطه‌های (الف) $\vec{d}_1+\vec{d}_2$ (ب) $\vec{d}_1-\vec{d}_2$ و (پ) $\vec{d}_2-\vec{d}_1$ چیست؟

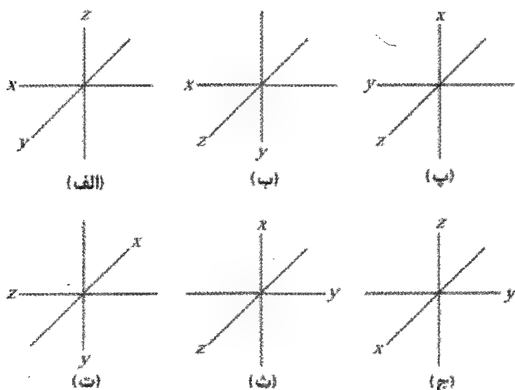



شکل ۳-۲۴ پرسش ۴

۵- اگر $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{c})$ باشد، کدامیک درست است؟ (الف) $\vec{a}+(-\vec{d})=\vec{c}+(-\vec{b})$ (ب) $\vec{a}=(-\vec{b})+\vec{d}+\vec{c}$ و (پ) $\vec{c}+(-\vec{d})=\vec{a}+\vec{b}$؟

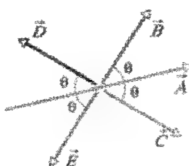
۶- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به گونه‌ای بیان کنید که
(الف) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ و $a+b=c$؛
(ب) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$؛
(ج) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ و $a^2+b^2=c^2$.

۷- کدامیک از آرایشهای محورها در شکل ۳-۲۵ یک «دستگاه مختصات راستگرد» است؟ مطابق معمول، نام قرار داده شده روی هر محور طرف مثبت محور را مشخص می‌کند.



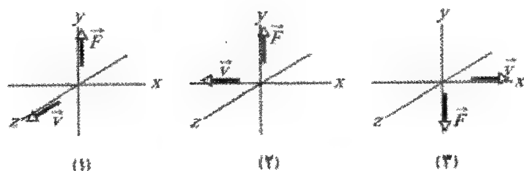

شکل ۳-۲۵ پرسش ۷

۸- شکل ۳-۲۶ بردار $\vec{A}$ و چهار بردار دیگر را که بزرگی یکسان ولی سمتگیری متفاوتی دارند نشان می‌دهد. (الف) کدامیک از این چهار بردار، دارای ضرب نقطه‌ای یکسان با بردار $\vec{A}$ است؟ (ب) کدامیک دارای ضرب نقطه‌ای منفی با $\vec{A}$ است؟




شکل ۳-۲۶ پرسش ۸

۹- اگر $\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B})$ و $\vec{v}$ عمود بر $\vec{B}$ باشد، آنگاه جهت $\vec{B}$ در سه وضعیت نشان داده شده در شکل ۳-۲۷ به کدام طرف است، در صورتی که ثابت $q$ (الف) مثبت و (ب) منفی باشد؟




شکل ۳-۲۷ پرسش ۹

۱۰- اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ باشد، آیا $\vec{b}$ باید با $\vec{c}$ برابر باشد؟

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
●●●- تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

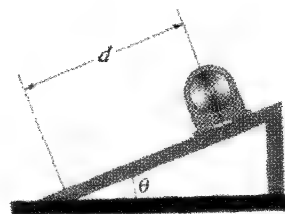
### بخش ۳-۴ مؤلفه‌های بردار

●۱- مؤلفهٔ $x$ بردار $\vec{A}$ برابر $-۲۵/۰\,m$ و مؤلفهٔ $y$ آن $+۴۰/۰\,m$ است. (الف) بزرگی بردار $\vec{A}$ چقدر است؟ (ب) زاویهٔ میان جهت $\vec{A}$ و جهت مثبت محور $x$ چقدر است؟ **SSM**

●۲- این زاویه‌ها را برحسب رادیان بنویسید: (الف) $۲۰/۰^\circ$، (ب) $۵۰/۰^\circ$، (پ) $۱۰۰^\circ$. این زاویه‌ها را به درجه تبدیل کنید: (ت) $۰/۳۳۰\,rad$، (ث) $۲/۱۰\,rad$ (ج) $۷/۷۰\,rad$.

●۳- اگر جهت بردار $\vec{a}$ برابر با $۲۵۰^\circ$ پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور $x$، و بزرگی آن $۷/۳\,m$ باشد، (الف) مؤلفهٔ $x$ و (ب) مؤلفهٔ $y$ بردار $\vec{a}$ در صفحهٔ $xy$ چقدر است؟ **SSM**

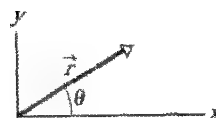
●۴- همان‌طور که در شکل ۳-۲۸ نشان داده شده است، قطعهٔ سنگین وسیله‌ای با لغزاندن در مسافت $d=۱۲/۵\,m$ در امتداد سطحی که با افق زاویهٔ $\theta=۲۰/۰^\circ$ دارد بالا برده می‌شود. (الف) این وسیله تا چه ارتفاعی از محل اولیه بالا برده می‌شود؟ (ب) به طور افقی چقدر فاصله گرفته است؟




**شکل ۳-۲۸** مسئلهٔ ۴

●۵- یک کشتی در جهت شمال عازم نقطه‌ای به فاصلهٔ $۱۲۰\,km$ است. باد غیر منتظره‌ای می‌وزد و کشتی را $۱۰۰\,km$ از نقطهٔ شروع حرکتش به طرف شرق می‌برد. کشتی اینک (الف) چقدر و (ب) در چه جهتی باید حرکت کند تا به مقصد اولیه‌اش برسد؟

●۶- بردار جابه‌جایی $\vec{r}$ در صفحهٔ $xy$ به طول $۱۵\,m$ و مطابق شکل ۳-۲۹ در جهت $\theta=۳۰^\circ$ قرار دارد. مطلوب است (الف) مؤلفهٔ $x$ و (ب) مؤلفهٔ $y$ این بردار.




**شکل ۳-۲۹** مسئلهٔ ۶

●●۷- ابعاد اتاقی $۳/۰۰\,m$(بلندی)$\times ۳/۷۰\,m \times ۴/۳۰\,m$ است. مگسی از یک گوشهٔ اتاق شروع به پرواز می‌کند و به سمت گوشهٔ مقابل در راستای قطر حرکت می‌کند. (الف) بزرگی جابه‌جایی آن چقدر است؟ (ب) آیا طول مسیر آن از این مسافت می‌تواند (پ) کمتر یا (ت) بیشتر شود؟ (ث) مساوی چطور؟ (ج) دستگاه مختصات مناسبی انتخاب و مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی را در آن دستگاه پیدا کنید. (چ) اگر این مگس به جای پرواز راه برود، طول کوتاهترین راه چقدر است؟ (*راهنمایی:* این را می‌توان بدون استفاده از محاسبه‌های ریاضی پاسخ گفت. اتاق مثل یک جعبه است. تای دیواره‌های آن را باز کنید تا بر یک صفحهٔ تخت قرار گیرند.) **SSM WWW**

### بخش ۳-۶ جمع برداری با استفاده از مؤلفه‌ها

●۸- اتومبیلی $۵۰\,km$ رو به شرق و سپس $۳۰\,km$ رو به شمال و سرانجام $۲۵\,km$ در جهت $۳۰^\circ$ شرق شمال حرکت می‌کند. یک نمودار برداری رسم کنید و (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ جابه‌جایی کل اتومبیل از نقطهٔ شروع حرکتش را تعیین کنید.

●۹- اگر $\vec{a}=(۴/۰\,m)\hat{i}+(۳/۰\,m)\hat{j}$ و $\vec{b}=(-۱۳/۰\,m)\hat{i}+(۷/۰\,m)\hat{j}$ باشد، (الف) جمع‌برداری $\vec{a}+\vec{b}$ برحسب بردارهای یکه چه می‌شود؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت $\vec{a}+\vec{b}$ را به دست آورید؟ **SSM**

●۱۰- شخصی به این صورت پیاده روی می‌کند: $۳/۱\,km$ رو به شمال، سپس $۲/۴\,km$ رو به غرب و بالاخره $۵/۲\,km$ رو به جنوب. (الف) یک نمودار برداری رسم کنید که این حرکت را نمایش دهد. (ب) یک پرنده چقدر مسافت و (پ) در چه جهتی باید از همان نقطهٔ شروع و در راستای یک خط راست پرواز کند تا به همان نقطهٔ پایانی برسد؟

●۱۱- شخصی می‌خواهد به نقطه‌ای که $۳/۴۰\,km$ از مکان فعلی‌اش فاصله دارد و در جهت $۳۵/۰^\circ$ شمال شرق قرار دارد برود. ولی او باید در امتداد خیابانهایی حرکت کند که یا شمالی جنوبی‌اند یا شرقی غربی. کمترین فاصله‌ای که او می‌تواند برای رسیدن به مقصد طی کند، چقدر است؟

●۱۲- این بردارها را در نظر بگیرید: $\vec{a}=(۳/۰\,m)\hat{i}+(۴/۰\,m)\hat{j}$ و $\vec{b}=(۵/۰\,m)\hat{i}+(۲/۰\,m)\hat{j}$. (الف) برحسب بردارهای یکه $\vec{a}+\vec{b}$ را به دست آورید (ب) بزرگی و (پ) زاویهٔ آن را (نسبت به $\hat{i}$) محاسبه کنید. (ت) حال $\vec{b}-\vec{a}$ را برحسب بردارهای یکه به دست آورید، (ث) بزرگی و (ج) زاویهٔ آن را محاسبه کنید.

●۱۳- دو بردار به صورت

$$\vec{a}=(۴/۰\,m)\hat{i}-(۳/۰\,m)\hat{j}+(۱/۰\,m)\hat{k}$$

و

$$\vec{b}=(-۱/۰\,m)\hat{i}+(۱/۰\,m)\hat{j}+(۴/۰\,m)\hat{k}$$

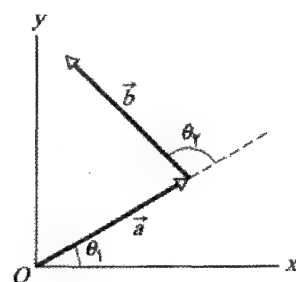
داده شده‌اند. مطلوب است (الف) $\vec{a}+\vec{b}$، (ب) $\vec{a}-\vec{b}$، و (پ) بردار سوم $\vec{c}$ به گونه‌ای که $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=0$ باشد. **SSM**

•۱۴- مطلوب است مؤلفه‌های (الف) $x$، (ب) $y$، و (پ) $z$ بردار $\vec{r}$ که جمع برداری دو بردار جابه‌جایی $\vec{c}$ و $\vec{d}$ است و مؤلفه‌هایشان برحسب متر در سه راستای عمود برهم عبارت‌اند از $c_x = ۷/۴$ ، $c_y = -۳/۸$ ، $c_z = -۶/۱$ ، $d_x = ۴/۴$ ، $d_y = -۲/۰$ ، و $d_z = ۳/۳$.

•۱۵- مورچه‌ای که از گرمای خورشید بعدازظهر تگزاس کلافه شده است با سرعت شروع به حرکت بر یک صفحهٔ $xy$ می‌کند که محورهای آن روی خاک بیابان کشیده شده‌اند. مؤلفه‌های $x$ و $y$ چهار جابه‌جایی متوالی مورچه برحسب cm به این صورت‌اند: (۴۰/۰ ,۳۰/۰)، $(b_x, -۷۰/۰)$، $(-۲۰/۰, c_y)$ و (۸۰/۰- ,۷۰/۰-). مؤلفهٔ‌های $xy$ جابه‌جایی کل چهار حرکت (۱۴۰- ,۲۰/۰-) است. (الف) $b_x$ و (ب) $c_y$ را تعیین کنید. (پ) بزرگی و (ت) زاویه (نسبت به سوی مثبت محور $x$) جابه‌جایی کل چقدر است؟

•۱۶- در جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$، بردار $\vec{A}$ به بزرگی ۱۲/۰m در جهت °۴۰/۰ پادساعتگرد از محور $x+$ و بردار $\vec{C}$ به بزرگی ۱۵/۰m در جهت °۲۰/۰ پادساعتگرد از محور $y-$ قرار دارد. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به سوی مثبت محور$x$) بردار $\vec{B}$ چقدر است؟

•۱۷- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در شکل ۳-۳۰ بزرگی یکسانی برابر ۱۰/۰m دارند و زاویه‌های آنها $\theta_1 = ۳۰°$ و $\theta_2 = ۱۰۵°$ است. مطلوب است (الف) مؤلفهٔ $x$ و (ب) مؤلفهٔ $y$ بردار مجموع $\vec{r}$ ، (پ) بزرگی $\vec{r}$ و (ت) زاویه‌ای که $\vec{r}$ با سوی مثبت محور $x$ می‌سازد.




**شکل ۳-۳۰** مسئلهٔ ۱۷

•۱۸- قرار است شما چهار حرکت راست خط روی سطح تخت زمین انجام دهید. این حرکت از مبداء یک دستگاه مختصات $xy$ شروع می‌شود و در مختصات $xy$ (۱۴۰m,۳۰ m-) به پایان می‌رسد. مؤلفه‌های $x$ و $y$ حرکت‌های شما برحسب متر چنین هستند: (۲۰,۶۰)، سپس $(b_x, -۷۰)$، و بعد $(-۲۰, c_y)$، و سرانجام (۶۰,۷۰-). مؤلفه‌های (الف) $b_x$ و (ب) $c_y$ چه هستند؟ (پ) بزرگی و (ت) زاویهٔ (نسبت به جهت مثبت محور $x$) جابه‌جایی کل چقدر است؟

•۱۹- سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هر یک با بزرگی ۵۰m در صفحهٔ $xy$ قرار دارند و با جهت مثبت محور $x$ به ترتیب زاویه‌های °۳۰، °۱۹۵ و °۳۱۵ می‌سازند. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ چقدر است؟ (پ) بزرگی و (ت) زاویهٔ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ چقدر است؟ (ث) بزرگی و (ج) زاویهٔ بردار چهارم $\vec{d}$ را تعیین کنید به گونه‌ای که $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{c}-\vec{d})=0$ باشد. ILW

•۲۰- (الف) جمع برداری چهار بردار

$\vec{E}$:۶/۰۰m درجهت $+۰/۹۰۰$rad $\vec{F}$:$-۵/۰۰$m درجهت $-۷۵/۰°$

$\vec{G}$:۴/۰۰m درجهت $+۱/۲۰$rad $\vec{H}$:۶/۰۰m درجهت $-۲۱۰/۰°$

برحسب بردارهای یکه چیست؟ (ب) بزرگی، (پ) زاویه برحسب درجه، و (پ) زاویه برحسب رادیان بردار مجموع را محاسبه کنید.

•۲۱- در نوعی بازی شطرنج که مهره‌ها بین مرکز مربعهایی که ضلع هر یک از آنها ۱/۰۰m است حرکت داده می‌شوند، وزیر به روش زیر حرکت داده شده است: (۱) دو مربع رو به جلو، یک مربع به سمت راست؛ (۲) دو مربع به سمت چپ، یک مربع رو به جلو؛ (۳) دو مربع رو به جلو، یک مربع رو به سمت چپ ، (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به «جلو») جابه‌جایی کل وزیر در مجموع این سه حرکت چیست؟

••۲۲- سیاحی که در حال بازگشت به اردوگاه مبداء خود بود، در بوران شدیدی گیر می‌افتد. شدت ریزش برف به حدی بود که سطح زمین از آسمان قابل تمیز نبود. او می‌پنداشت ۵/۶km رو به شمال رفته است، ولی همین که ریزش برف قطع شد، او دریافت که در واقع ۷/۸km در جهت °۵۰ شمال شرق رفته است. او برای آنکه به اردوگاه مبداء خود برسد (الف) چه مقدار و (ب) در چه جهتی باید حرکت کند؟

••۲۳- آبادی $B$ به فاصلهٔ ۲۵km در شرق آبادی $A$ قرار دارد. شتری از آبادی $A$ راه می‌افتد و نخست ۲۴km در جهت °۱۵ جنوب شرق و سپس ۸/۰km روبه شمال می‌رود. سرانجام، شتر در چه فاصله‌ای از آبادی B قرار دارد؟

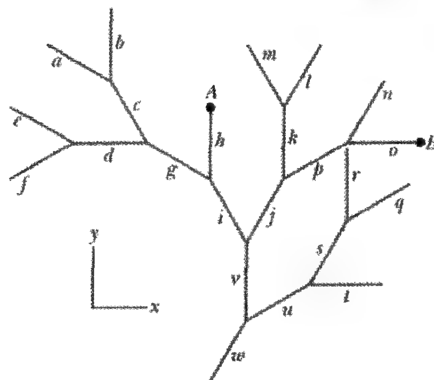
••۲۴- دو سوسک از نقطهٔ یکسانی حرکت خود را بر شنزار تختی آغاز می‌کنند. سوسک اول، ۰/۵m رو به شرق می‌رود و سپس در جهت °۳۰ شمال شرق، ۰/۸m را می‌پیماید. سوسک دوم نیز دو مسیر را طی می‌کند: مسیر اول حرکت آن ۱/۶m در جهت °۴۰ شرق شمال است. در صورتی که سوسک دوم در مکان جدید سوسک اول به حرکتش پایان دهد (الف) بزرگی و (ب) جهت دومین مسیر چیست؟

••۲۵- هرگاه بردار $\vec{B}$ با بردار $\vec{C}=۳/۰\hat{i}+۴/۰\hat{j}$ جمع شود، بردار حاصل در جهت مثبت محور $y$ قرار دارد که بزرگی آن برابر بزرگی $\vec{C}$ است. بزرگی $\vec{B}$ چقدر است؟

••۲۶- بردار $\vec{A}$ که در امتداد محور $x$ است با بردار $\vec{B}$ که بزرگی آن ۷/۰m است جمع شده است. جمع آنها بردار سومی است که در امتداد محور $y$ قرار دارد و بزرگی آن ۳/۰ برابر $\vec{A}$ است. بزرگی $\vec{A}$ چقدر است؟

••۲۷- مورچه‌های معمولی محوطهٔ حیاط اغلب شبکه‌ای از مسیرهای شیمیایی را جهت راهنمایی، ایجاد می‌کنند. آنها به طور مکرر از لانه به طرف خارج شاخه‌هایی از رد خود را با زاویهٔ °۶۰ بین شاخه‌ها به وجود می‌آورند. اگر مورچه دیگری

در این مسیر قرار گیرد می‌تواند بفهمد که هر یک از این شاخه‌ها او را به لانه می‌رساند. اگر او در حال دور شدن از لانه باشد دو انتخاب دارد یکی اینکه یا با زاویهٔ $30^\circ$ به سمت چپ برود و دیگر اینکه با زاویهٔ $30^\circ$ به سمت راست حرکت کند. اگر مورچه به سمت لانه در حرکت باشد فقط یک انتخاب دارد. شکل ۳-۳۱ یک مسیر نوعی مورچه را نشان می‌دهد که طول قسمتهای خط مستقیم برابر $2.0\,\text{cm}$ و زاویه‌ها برابر $60^\circ$ اند. اگر مورچه از نقطهٔ $A$ وارد مسیر شود (روی شکل آن را بیابید). (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به جهت مثبت محور $x$ مشخص شده) جابه‌جایی مورچه از لانه چقدر است. اگر مورچه از نقطهٔ $B$ وارد مسیر شود (پ) بزرگی و (ت) زاویه چقدر است؟




شکل ۳-۳۱ مسئلهٔ ۲۷

●●۲۸- دوبردار زیر داده شده‌اند:

$\vec{a}=(4.0\,\text{m})\hat{i}-(3.0\,\text{m})\hat{j}$ و $\vec{b}=(6.0\,\text{m})\hat{i}+(8.0\,\text{m})\hat{j}$ (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به $\hat{i}$) بردار $\vec{a}$ چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت بردار $\vec{b}$ چیست؟ (ث) بزرگی و (ج) جهت $\vec{a}+\vec{b}$ چیست؟ (چ) بزرگی و (ح) جهت $\vec{a}-\vec{b}$ چیست؟ (خ) زاویهٔ بین دوبردار $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید؟

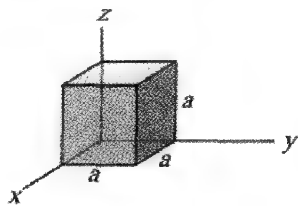
●●۲۹- اگر $\vec{d}_1+\vec{d}_2=5\vec{d}_3$ ، $\vec{d}_1-\vec{d}_2=3\vec{d}_3$ ، و $\vec{d}_3=2\hat{i}+4\hat{j}$ باشد، آنگاه (الف) $\vec{d}_1$ و (ب) $\vec{d}_2$ برحسب بردارهای یکه چه می‌شوند؟

●●●۳۰- جمع چهار بردار زیر را برحسب (الف) بردارهای یکه، و برحسب (ب) بزرگی و (پ) جهت به دست آورید.

$\vec{A}=(2.00\,\text{m})\hat{i}+(3.00)\hat{j}$ $\qquad$ $\vec{B}: 4.00\,\text{m}$ درجهت $-65.0^\circ$

$\vec{C}=(-4.00\,\text{m})\hat{i}-(6.00)\text{m}\hat{j}$ $\qquad$ $\vec{B}: 5.00\,\text{m}$ درجهت $-235^\circ$

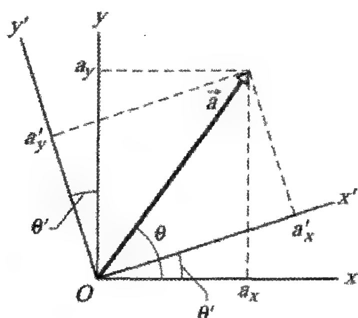
●●●۳۱- (الف) شکل ۳-۳۲، مکعبی به ضلع $a$ را نشان می‌دهد که یکی از گوشه‌های آن در مبداء دستگاه مختصات $xyz$ قرار دارد. *قطر حجمی*، خط مستقیمی است از یک گوشه به گوشهٔ دیگر، که از مرکز می‌گذرد. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، قطر حجمی‌ای که از گوشه‌ای به مختصات (الف) $(0,0,0)$، (ب) $(a,0,0)$، (پ) $(0,a,0)$، و (ت) $(a,a,0)$ امتداد می‌یابد چیست؟ (ث) زاویه‌هایی را که این قطرها با ضلعهای مجاورشان می‌سازند، تعیین کنید. (ج) طول قطرهای حجمی را برحسب $a$ به دست آورید.




شکل ۳-۳۲ مسئلهٔ ۳۱

## بخش ۳-۷ بردارها و قانونهای فیزیک

●۳۲- در شکل ۳-۳۳ بردار $\vec{a}$ به بزرگی $17.0\,\text{m}$ در جهت $\theta=56.0^\circ$ پادساعتگرد از جهت مثبت محور $x$ قرار دارد. مؤلفه‌های (الف) $a_x$ و (ب) $a_y$ این بردار را تعیین کنید. دستگاه مختصات دیگری نسبت به دستگاه پیشین در زاویهٔ $\theta'=18.0^\circ$ قرار دارد. مؤلفه‌های (پ) $a'_x$ و (ت) $a'_y$ در این دستگاه مختصات پریم‌دار چقدر است؟




شکل ۳-۳۳ مسئلهٔ ۳۲

## بخش ۳-۸ ضرب کردن بردارها

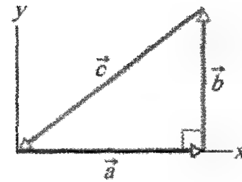
●۳۳- دو بردار $\vec{r}$ و $\vec{s}$ در صفحهٔ $xy$ قرار دارند. بزرگی آنها به ترتیب ۴/۵۰ و ۷/۳۰ یکا و جهت آنها آن از سوی مثبت محور $x$ به ترتیب $320^\circ$ و $85.0^\circ$ پادساعتگرد است. (الف) $\vec{r}\cdot\vec{s}$ و (ب) $\vec{r}\times\vec{s}$ را به دست آورید.

●۳۴- در صورتی که $\vec{d}_1=3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ و $\vec{d}_2=-5\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ باشد، $(\vec{d}_1+\vec{d}_2)\cdot(\vec{d}_1\times 4\vec{d}_2)$ چیست؟

●۳۵- سه بردار $\vec{a}=3.0\hat{i}+3.0\hat{j}-2.0\hat{k}$، $\vec{b}=-1.0\hat{i}-4.0\hat{j}+2.0\hat{k}$ و $\vec{c}=2.0\hat{i}+2.0\hat{j}+1.0\hat{k}$ داده شده‌اند. مطلوب است (الف) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$، (ب) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$، و (پ) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$.

●۳۶- دو بردار $\vec{a}=30\hat{i}+50.0\hat{j}$ و $\vec{b}=2.0\hat{i}+4.0\hat{j}$ داده شده‌اند. مطلوب است (الف) $\vec{a}\times\vec{b}$ ، (ب) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، (پ) $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}$ ، و (ت) مؤلفهٔ $a$ در راستای $\vec{b}$. (*راهنمایی:* برای حل قسمت (ت) معادلهٔ ۳-۲۰ و شکل ۳-۲۰ را در نظر بگیرید.)

●۳۷- برای بردارهای شکل ۳-۳۴، $a=4$ ، $b=3$ و $c=5$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت $\vec{a}\times\vec{b}$ را به دست آورید. (پ) بزرگی و (ت) جهت $\vec{a}\times\vec{c}$ را تعیین کنید. (محور $z$ در شکل نشان داده نشده است.)



شکل ۳-۳۴ مسئله‌های ۳۷ و ۵۰

••۳۸- جابه‌جایی $\vec{d}_1$ که در صفحهٔ $yz$ واقع است و با جهت مثبت محور $y$ زاویهٔ $63°$ می‌سازد؛ دارای مؤلفهٔ $z$ مثبت و بزرگی $4/50\text{m}$ است. جابه‌جایی $\vec{d}_2$ که در صفحهٔ $xz$ واقع است و با جهت مثبت محور $x$ زاویهٔ $30/0°$ می‌سازد، دارای مؤلفه $z$ مثبت و بزرگی $1/40\text{m}$ است. مطلوب است (الف) $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$، (ب) $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$ و (پ) زاویهٔ بین $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$.

••۳۹- با استفاده از تعریف ضرب نرده‌ای $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta$ و اینکه $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ است، زاویهٔ میان‌بردارهای $\vec{a}=3/0\hat{i}+3/0\hat{j}+3/0\hat{k}$ و $\vec{b}=2/0\hat{i}+1/0\hat{j}+3\hat{k}$ را تعیین کنید.
SSM ILW WWW

••۴۰- برای سه بردار زیر

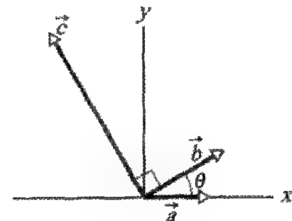
$$\vec{A}=2/00\hat{i}+3/00\hat{j}+4/00\hat{k}$$
$$\vec{B}=-3/00\hat{i}+4/00\hat{j}+2/00\hat{k}$$
$$\vec{C}=7/00\hat{i}-8/00\hat{j}$$

$3\vec{C}\cdot(2\vec{A}\times\vec{B})$ را محاسبه کنید.

••۴۱- بزرگی بردارهای $\vec{A}$, $\vec{B}$ به ترتیب $6/00$ و $7/00$ یکا، و مقدار $\vec{A}.\vec{B}$ برابر $14/0$ است. زاویهٔ بین بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟

••۴۲- در رابطهٔ $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$، فرض کنید $q=2$ و $\vec{v}=2/0\hat{i}-4/0\hat{j}+6/0\hat{k}$ و $\vec{F}=4/0\hat{i}-20\hat{j}+12\hat{k}$. اگر $B_x=B_y$ باشد، آنگاه بردار $\vec{A}$, $\vec{B}$ برحسب بردارهای یکه چه می‌شود؟

••۴۳- بزرگی سه بردار نشان داده شده در شکل ۳-۳۵، $a=3/00\text{m}$، $b=4/00\text{m}$، $c=10/0\text{m}$، و زاویهٔ $\theta=30°$ است. (الف) مؤلفهٔ $x$ و (ب) مؤلفهٔ $y$ بردار $\vec{a}$، (پ) مؤلفهٔ $x$ و (ت) مؤلفهٔ $y$ بردار $\vec{b}$، (ث) مؤلفهٔ $x$ و (ج) مؤلفهٔ $y$ بردار $\vec{c}$ را تعیین کنید. (چ) عدد $P$ و (ح) عدد $q$ را به گونه‌ای پیدا کنید که $\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ باشد.

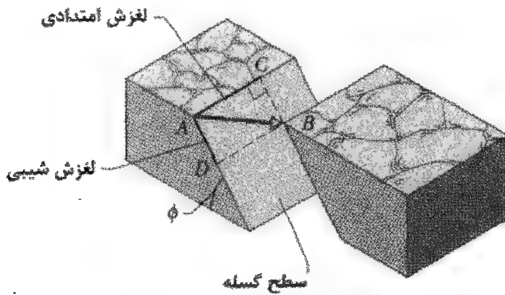


شکل ۳-۳۵ مسئلهٔ ۴۳

••۴۴- در یک نمایش پانتومیم، بازیگر ۱ جابه‌جایی $\vec{d}_1=(4/0\text{m})\hat{i}+(5/0\text{m})\hat{j}$ و بازیگر ۲ جابه‌جایی $\vec{d}_2=(-3/0\text{m})\hat{i}+(4/0\text{m})\hat{j}$ را انجام می‌دهد. مطلوب است (الف) $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$، (ب) $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$، (پ) $(\vec{d}_1+\vec{d}_2)\cdot\vec{d}_2$ و (ت) مؤلفهٔ $\vec{d}_1$ در راستای $\vec{d}_2$. (*راهنمایی*: برای حل قسمت (ت) معادلهٔ ۳-۲۰ و شکل ۳-۲۰ را ببینید.)

## مسئله‌های اضافی

۴۵- *گسله‌های* یک صخره در راستایی که وجوه مقابل صخره نسبت به یکدیگر می‌لغزند، از هم گسیخته می‌شوند. در شکل ۳-۳۶، نقطه‌های $A$ و $B$ پیش از آنکه صخره از طرف جلو به سوی راست بلغزد، بر هم منطبق‌اند. جابه‌جایی خالص $\overrightarrow{AB}$ در راستای سطح گسله است. *لغزش امتدادی* $AC$، مؤلفهٔ افقی $\overrightarrow{AB}$ است. مؤلفهٔ $\overrightarrow{AB}$ که رو به پایین سطح گسله دارد، *لغزش شیبی* $AD$ است. (الف) اگر لغزش امتدادی $22/0\text{m}$ و لغزش شیبی $17/0\text{m}$ باشد، جابه‌جایی خالص $AB$ چقدر است؟ (ب) اگر شیب سطح گسله با افق زاویهٔ $\phi=52/0°$ بسازد، مؤلفهٔ قائم $AB$ چقدر است؟



شکل ۳-۳۶ مسئلهٔ ۴۵

۴۶- مؤلفه‌های بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برحسب متر، عبارت‌اند از $a_x=3/2$ , $a_y=1/6$ , $b_x=0/5$ , $b_y=4/5$. (الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را تعیین کنید. فرض کنید دو بردار $\vec{c}$ و $\vec{d}$ که بزرگی هر دو $5/0\text{m}$ است در صفحهٔ $xy$ بر $\vec{a}$ عمودند. مؤلفهٔ $x$ بردار $\vec{c}$ مثبت و مؤلفهٔ $x$ بردار $\vec{d}$، منفی است. مطلوب است (ب) مؤلفهٔ $x$ و (پ) مؤلفهٔ $y$ بردار $\vec{c}$، و (ت) مؤلفهٔ $x$ و (ث) مؤلفهٔ $y$ بردار $\vec{d}$.

۴۷- بزرگی بردار $\vec{a}$ برابر ۱۰ یکا و بزرگی بردار $\vec{b}$ برابر $6/0$ یکاست و با یکدیگر زاویهٔ $60°$ می‌سازند. مطلوب است (الف) ضرب نرده‌ای دو بردار و (ب) بزرگی ضرب برداری $\vec{a}\times\vec{b}$.
SSM

۴۸- بزرگی بردار $\vec{a}$ برابر $5/0\text{m}$ و جهت آن رو به شرق است. بزرگی بردار $\vec{b}$ برابر $4/0\text{m}$ و در جهت $35°$ غرب شمال است. (الف) بزرگی و (ب) جهت $\vec{a}+\vec{b}$ چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت $\vec{b}-\vec{a}$ چیست؟ (ث) یک نمودار برداری برای هر ترکیب رسم کنید.

۴۹- ذره‌ای در یک صفحه به ترتیب زیر سه جابه‌جایی متوالی می‌یابد: نخست $\vec{d}_1$، $4/00\text{m}$ به طرف جنوب غرب؛ سپس $\vec{d}_2$، $5/00\text{m}$ به طرف شرق؛ و سرانجام $\vec{d}_3$، $6/00\text{m}$ در جهت $60/0°$ شمال شرق. با انتخاب دستگاه مختصاتی که محور $y$ آن به طرف شمال و محور $x$ آن به طرف شرق است، (الف) مؤلفهٔ

x و (ب) مؤلفهٔ y بردار $\vec{d}_1$، (پ) مؤلفهٔ x و (ت) مؤلفهٔ y بردار $\vec{d}_2$، (ث) مؤلفهٔ x و (ج) مؤلفهٔ y بردار $\vec{d}_3$ چیست؟ (چ) مؤلفهٔ x و (ح) مؤلفهٔ y، (خ) بزرگی و (د) جهت جابه‌جایی خالص ذره چیست؟ اگر قرار باشد ذره به طور مستقیم به نقطهٔ شروع بازگردد (ذ) چه مسافتی را و (ر) در چه جهتی باید طی کند؟

**۵۰-** برای بردارهای شکل ۳-۳۴، $a=۴$، $b=۳$ و $c=۵$ است. (الف) $\vec{a}\cdot\vec{b}$، (ب) $\vec{a}\cdot\vec{c}$ و (پ) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ را محاسبه کنید.

**۵۱-** یک قایق بادبانی از سمت آمریکایی *دریاچهٔ اری*[1] به سوی نقطه‌ای در سمت کانادایی آن که در فاصلهٔ ۹۰km شمال سمت آمریکایی واقع است، روانه می‌شود. ولی، قایق به ۵۰km شرق نقطهٔ آغاز حرکتش می‌رسد. برای آنکه قایق به مقصد اولیه‌اش بازگردد، قایقران باید (الف) چه مسافتی را و (ب) در چه جهتی بپیماید؟

**۵۲-** جمع برداری چهار بردار زیر را برحسب (الف) بردارهای یکه، و برحسب (ب) بزرگی و (پ) جهت نسبت به سوی مثبت محور x به دست آورید،

$\vec{P}$: ۱۰/۰m، در ۲۵/۰° پادساعتگرد از محور +x.

$\vec{Q}$: ۱۲/۰m، در ۱۰/۰° پادساعتگرد از محور +y.

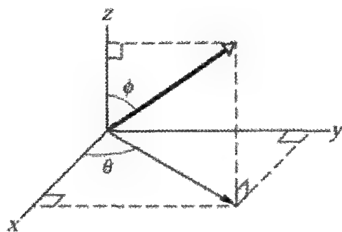
$\vec{R}$: ۸/۰۰m، در ۲۰/۰° پادساعتگرد از محور -y.

$\vec{S}$: ۹/۰۰m، در ۴۰/۰° پادساعتگرد از محور -y.

**۵۳-** بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در صفحهٔ xy قرار دارند. بزرگی بردار $\vec{A}$ برابر با ۸/۰۰ و زاویهٔ آن ۱۳۰° است؛ مؤلفه‌های بردار $\vec{B}$ عبارت‌اند از: $B_x=-۷/۷۲$ و $B_y=-۹/۲۰$. زاویه‌های بین جهت منفی محور y و (الف) جهت $\vec{A}$، (ب) جهت حاصلضرب $\vec{A}\times\vec{B}$، و (پ) جهت $\vec{A}\times(\vec{B}+۳/۰۰\hat{k})$ را به دست آورید.

**۵۴-** سه جابه‌جایی، برحسب متر، به این قرارند:
$\vec{d}_1=۴/۰\hat{i}+۵/۰\hat{j}-۶/۰\hat{k}$ ، $\vec{d}_2=-۱/۰\hat{i}+۲/۰\hat{j}+۳/۰\hat{k}$ ، $\vec{d}_3=۴/۰\hat{i}+۳/۰\hat{j}+۲/۰\hat{k}$. (الف) $\vec{r}=\vec{d}_1-\vec{d}_2+\vec{d}_3$ چیست؟ (ب) زاویهٔ بین $\vec{r}$ و جهت مثبت محور z چقدر است؟ (پ) مؤلفهٔ $\vec{d}_1$ در امتداد راستای $\vec{d}_2$ چیست؟ (ت) مؤلفهٔ $\vec{d}_1$ عمود بر راستای $\vec{d}_2$ و واقع بر صفحهٔ $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$ چیست؟ (*راهنمایی:* برای حل قسمت (پ) معادلهٔ ۳-۲۰ و شکل ۳-۲۰ و برای حل قسمت (ت) معادلهٔ ۳-۲۷ را در نظر بگیرید.)

**۵۵-** بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در صفحهٔ xy قرار دارند. بزرگی بردار $\vec{A}$ برابر با ۸/۰۰ و زاویهٔ آن ۱۳۰° است؛ مؤلفه‌های بردار $\vec{B}$ عبارت‌اند از: $B_x=-۷/۷۲$ و $B_y=-۹/۲۰$. (الف) $۵\vec{A}\cdot\vec{B}$ چیست؟ $۴\vec{A}\times۳\vec{B}$ را برحسب (ب) نمادگذاری بردارهای یکه و (پ) نمادگذاری بزرگی - زاویه در مختصات کروی به دست آورید (شکل ۳-۳۷ را ببینید). (ت) زاویهٔ بین بردارهای $\vec{A}$ و $۴\vec{A}\times۳\vec{B}$ چیست؟ (*راهنمایی:* پیش از هر محاسبهٔ مجدد، کمی فکر کنید.) $\vec{A}+۳/۰۰\hat{k}$ برحسب (ث) نمادگذاری بردارهای یکه و (ج) نمادگذاری بزرگی- زاویه در مختصات کروی، چیست؟




**شکل ۳-۳۷** مسئلهٔ ۵۵

**۵۶-** بردار $\vec{d}_1$ در جهت منفی محور y، و بردار $\vec{d}_2$ در جهت مثبت محور x است. جهتهای (الف) $\vec{d}_2/۴$ و (ب) $\vec{d}_1/(-۴)$ چیست؟ بزرگی حاصلضربهای (پ) $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$ و (ث) $\vec{d}_1\cdot(\vec{d}/۴)$ چقدر است؟ جهت بردار برایند با (ث) $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$ و (ج) $\vec{d}_2\times\vec{d}_1$ چیست؟ بزرگی ضرب برداری در (چ) قسمت (ت) و (ح) قسمت (ج) چقدر است؟ (خ) بزرگی و (د) جهت $\vec{d}_1\times(\vec{d}_2/۴)$ چیست؟

**۵۷-** سه بردار به متر داده شده‌اند:

$$\vec{d}_1=-۳/۰\hat{i}+۳/۰\hat{j}+۲/۰\hat{k}$$
$$\vec{d}_2=-۲/۰\hat{i}-۴/۰\hat{j}+۲/۰\hat{k}$$
$$\vec{d}_3=۲/۰\hat{i}+۳/۰\hat{j}+۱/۰\hat{k}$$

مطلوب است (الف) $\vec{d}_1\cdot(\vec{d}_2+\vec{d}_3)$، (ب) $\vec{d}_1\cdot(\vec{d}_2\times\vec{d}_3)$ ، و (پ) $\vec{d}_1\cdot(\vec{d}_2+\vec{d}_3)$.

**۵۸-** گلف بازی با سه ضربه توپ را به داخل حفره می‌اندازد. اولین ضربه توپ را ۳/۶۶m رو به شمال، دومین ضربه ۱/۸۳m رو به جنوب شرق، و سومین ضربه ۰/۹۱m رو به جنوب غرب، می‌برد. برای آنکه توپ در همان ضربهٔ اول به داخل حفره بیفتد (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی مورد نیاز باید چقدر باشد؟

**۵۹-** بردار $\vec{a}$ را در جهت مثبت x، بردار $\vec{b}$ را در جهت مثبت y، و d را یک نرده‌ای درنظر بگیرید. اگر d (الف) مثبت و (ب) منفی باشد، جهت $\vec{b}/d$ چیست؟ بزرگی (پ) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ و (ت) $\vec{a}\cdot\vec{b}/d$ چیست؟ جهت (ث) $\vec{a}\times\vec{b}$ و (ج) $\vec{b}\times\vec{a}$ چیست؟ (چ) بزرگی ضرب برداری در (ث) $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$ (ج) چیست؟ (ح) بزرگی ضرب‌برداری در (ج) چیست؟ (خ) بزرگی و (د) جهت $\vec{a}\times\vec{b}/d$ را در صورتی که d مثبت باشد، به دست آورید؟

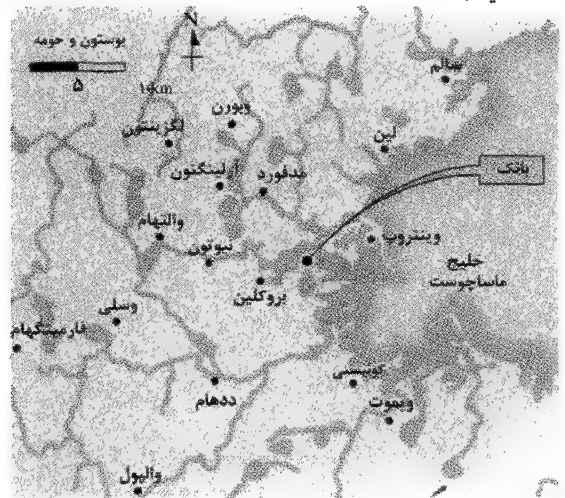
**۶۰-** بردار $\vec{d}$ دارای بزرگی ۲/۵m و به طرف شمال است. (الف) بزرگی و (ب) جهت $۴/۰\vec{d}$ چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) $-۳/۰\vec{d}$ - چیست؟

**۶۱-** $\hat{i}$ را به طرف شرق، $\hat{j}$ را به طرف شمال و $\hat{k}$ را به طرف بالا بگیرید. مقدار ضربهای (الف) $\hat{i}\cdot\hat{k}$، (ب) $(-\hat{k})\cdot(-\hat{j})$، (پ) $\hat{j}\cdot(-\hat{j})$ چقدر است؟ جهتهای (از قبیل شرق یا پایین) ضربهای (ت) $\hat{k}\times\hat{j}$ ، (ث) $(-\hat{i})\times(-\hat{j})$ (ج) $(-\hat{k})\times(-\hat{j})$ چیست؟

1. Lake Erie

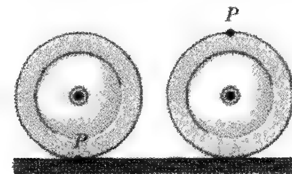
۶۲- دو جابه‌جایی را یکی به بزرگی ۳m و دیگری به بزرگی ۴m در نظر بگیرید. نشان دهید که چگونه می‌توان این دو بردار را با هم ترکیب کرد تا بزرگی جابه‌جایی برایند (الف) ۷m، (ب) ۱m و (ت) ۵m شود.

۶۳- به بانکی در مرکز بوستون دستبرد زده می‌شود (به نقشهٔ شکل ۳-۳۸ نگاه کنید). دزدها برای فرار از پلیس به کمک بالگردی می‌گریزند که با سه پرواز پیاپی، این جابه‌جاییها را انجام می‌دهد: ۳۲km، ۴۵° جنوب شرق؛ ۵۳km، ۲۶° شمال غرب؛ و ۲۶km، ۱۸° شرق جنوب. در پایان پرواز سوم، آنها دستگیر می‌شوند. آنها در چه شهری توقیف شده‌اند؟ (از روش هندسی برای جمع کردن این جابه‌جایی‌های روی نقشه استفاده کنید.)




شکل ۳-۳۸ مسئلهٔ ۶۳

۶۴- چرخی به شعاع ۴۵/۰cm بدون لغزیدن بر امتداد یک سطح افقی می‌غلتد (شکل ۳-۳۹). در لحظهٔ $t_1$، نقطهٔ $P$ واقع در لبهٔ چرخ در نقطهٔ تماس میان چرخ و سطح زمین قرار دارد. در زمان بعدی $t_2$، چرخ به اندازهٔ نیم‌دور چرخیده است. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ جابه‌جایی $P$ (نسبت به سطح زمین) چقدر است؟




شکل ۳-۳۹ مسئلهٔ ۶۴

۶۵- بردار $\vec{A}$ به بزرگی ۱۲/۰m و در زاویهٔ ۶۰/۰° پادساعتگرد از سوی مثبت محور $x$ در دستگاه مختصات $xy$ قرار دارد. همچنین بردار $\vec{B}=(۱۲/۰\,m)\hat{i}+(۸/۰۰\,m)\hat{j}$ در همان دستگاه واقع است. حال این دستگاه را پادساعتگرد حول مبدأ به اندازهٔ ۲۰/۰° می‌چرخانیم و به دستگاه $x'y'$ می‌رسیم. در این دستگاه جدید بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برحسب بردارهای یکه چه می‌شوند؟

۶۶- شخصی ۲۵۰m در جهت ۳۰° شرق شمال، و سپس ۱۷۵m را به طور مستقیم در جهت شرق قدم می‌زند. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ جابه‌جایی نهایی او را از نقطهٔ شروع پیدا کنید. (پ) مسافت طی شده را به دست آورید. (ت) کدامیک بزرگتر است، مسافت طی شده یا بزرگی جابه‌جایی؟

۶۷- اگر $\vec{a}=۵/۰\hat{i}+۴/۰\hat{j}-۶/۰\hat{k}$، $\vec{b}=-۲/۰\hat{i}+۲/۰\hat{j}+۳/۰\hat{k}$ و $\vec{c}=۴/۰\hat{i}+۳/۰\hat{j}-۲/۰\hat{k}$ باشد، (الف) $\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ برحسب بردارهای یکه چیست؟ (ب) زاویهٔ بین $\vec{r}$ و جهت مثبت محور $z$ را محاسبه کنید. (پ) مؤلفهٔ $\vec{a}$ در راستای $\vec{b}$ چیست؟ (ت) مؤلفهٔ $\vec{a}$ عمود بر راستای $\vec{b}$ ولی واقع برصفحهٔ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چیست؟ (*راهنمایی:* برای حل قسمت (پ) معادلهٔ ۳-۲۰ و شکل ۳-۲۰ را ببینید؛ برای حل قسمت (ت) معادلهٔ ۳-۲۷ را ببینید.)

۶۸- اگر $\vec{a}-\vec{b}=۲\vec{c}$، $\vec{a}+\vec{b}=۴\vec{c}$ و $\vec{c}=۳\hat{i}+۴\hat{j}$ باشد، (الف) $\vec{a}$ و (ب) $\vec{b}$ چقدر است؟

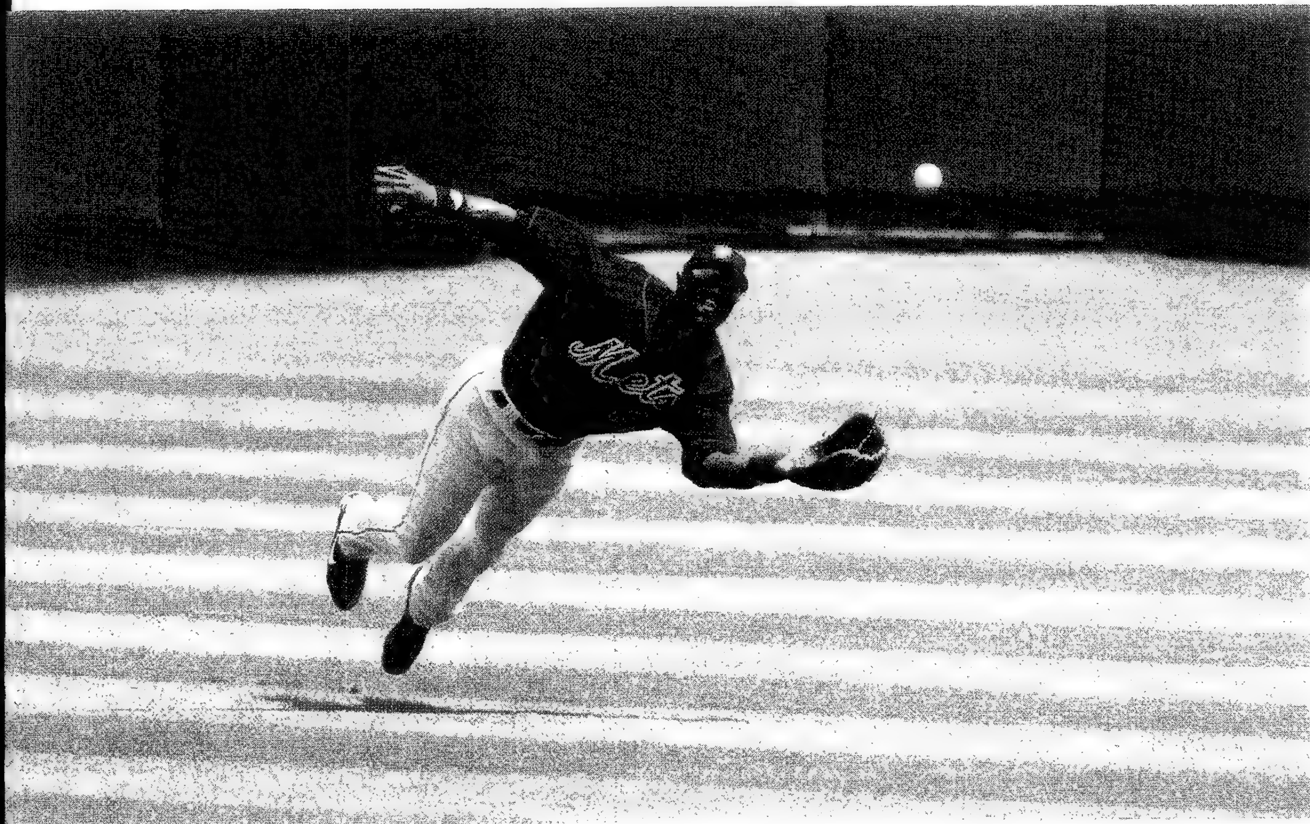
۶۹- معترضی با یک تابلوی اعتراض راهپیمایی خود را از مبداء یک دستگاه مختصات $xyz$ با صفحهٔ افقی $xy$ آغاز می‌کند. او نخست ۴۰m در جهت منفی محور $x$، سپس ۲۰m در امتداد مسیری که عمود بر سمت چپ او است و سرانجام ۲۵m رو به بالا روی یک برج، حرکت می‌کند. (الف) جابه‌جای او از شروع تا پایان، برحسب بردارهای یکه چیست؟ (ب) سرانجام، معترض تابلو را به پایین برج می‌اندازد. بزرگی جابه‌جای تابلو از شروع تا این نقطهٔ پایان جدید چیست؟

۷۰- بزرگی بردار $\vec{d}$ برابر ۳/۰m و جهت آن رو به جنوب است. (الف) بزرگی و (ب) جهت بردار $۵/۰\,m\vec{d}$ چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت بردار $-۲/۰\,\vec{d}$ چیست؟

۷۱- اگر بردار $\vec{B}$ با بردار $\vec{A}$ جمع شود، برایند آنها $۶/۰\hat{i}+۱/۰\hat{j}$ است. اگر $\vec{B}$ از $\vec{A}$ کم شود، برایند $-۴/۰\hat{i}+۷/۰\hat{j}$ است. بزرگی $\vec{A}$ چقدر است؟

۷۲- مورچهٔ آتشی، در جستجوی سس تندی در یک محوطهٔ پیک‌نیک از طریق سه جا به جایی بر سطح زمین راه می‌افتد: $\vec{d}_1$ به اندازهٔ ۰/۴۰m در جهت جنوب غربی (یعنی ۴۵° به طور مستقیم نسبت به جنوب یا نسبت به غرب)، $\vec{d}_2$ به اندازهٔ ۰/۵۰m در جهت شرق، و $\vec{d}_3$ به اندازهٔ ۰/۶۰m در جهت ۶۰° شمال شرق. سوی مثبت محور $x$ را به طرف شرق و سوی مثبت محور $y$ را به طرف شمال بگیرید. (الف) مؤلفهٔ $x$، و (ب) مؤلفهٔ $y$ بردار $\vec{d}_1$ چیست؟ (پ) مؤلفهٔ $x$ و (ت) مؤلفهٔ $y$ بردار $\vec{d}_2$ چیست؟ (ث) مؤلفهٔ $x$ و (ج) مؤلفهٔ $y$ بردار $\vec{d}_3$ چیست؟ (چ) مؤلفهٔ $x$، (ح) مؤلفهٔ $y$، (خ) بزرگی، و (د) جهت جابه‌جایی خالص مورچه چیست؟ اگر مورچه به طور مستقیم به نقطهٔ شروع حرکتش بازگردد (ذ) چه مسافتی را و (ر) در چه جهتی باید طی کند؟

# ۴ حرکت در دو و سه بعد




وقتی توپ بیسبالی پس از ضربه خوردن به سمت قسمت خارجی میدانی می‌رود، بازیکن آن قسمت می‌داند که کجا باید آن را بگیرد. اغلب این بازیکن به طور حساب شده خیز بر می‌دارد یا می‌دود تا درست در جایی که توپ فرود می‌آید آن را بگیرد. تجربه در بازی مسلماً در این امر کمک مؤثری است اما سایر عوامل نیز دخالت دارند.

**چه حکمتی در پس حرکت توپ پنهان است؟**

پاسخ در همین فصل.

# ۴-۱ فیزیک چیست؟

در این فصل بررسی آن جنبه از فیزیک را پی می‌گیریم که به تحلیل حرکت، که می‌تواند در دو یا سه بعد باشد، می‌پردازد. برای مثال، پژوهشگران پزشکی و مهندسان هوانوردی ممکن است به بررسی فیزیک چرخش دو- و سه بعدی هواپیماهای جنگنده در مانورها بپردازند، چون هواپیماهای جت امروزی قادر به چرخش‌های تند هستند که موجب می‌شود خلبان به طور موقت هوشیاری خود را از دست بدهد. یک مهندس ورزشی ممکن است به بررسی فیزیک بسکتبال بپردازد. مثلاً در *پرتاب آزاد* (که بازیکن از فاصلهٔ $4/3\text{m}$ توپ را به سمت سبد پرتاب می‌کند) بازیکن ممکن است توپ را از بالای شانه رها کند، یا ممکن است توپ را مخفیانه از سطح کمر بالا آورد و رها کند. روش اول بین بازیکنان حرفه‌ای بیشتر مرسوم است.

درک حرکت در سه بعد دشوار است. مثلاً، شما ممکن است یک اتومبیل را به خوبی در یک بزرگراه برانید، (حرکت یک بعدی)، ولی اگر آموزشهای کافی ندیده باشید، برای فرود یک هواپیما بر باند فرودگاه (حرکت سه بعدی)، مشکل خواهید داشت.

مطالعهٔ حرکت دو و سه بعدی را با مبحث مکان و جابه‌جایی آغاز می‌کنیم.

# ۴-۲ مکان و جابه‌جایی

یک روش کلی برای مکان‌یابی یک ذره (یا یک جسم ذره‌مانند) استفاده از **بردار مکان** $\vec{r}$ است، و آن برداری است که از یک نقطهٔ مرجع (معمولاً مبداء یک دستگاه مختصات) تا جسم امتداد می‌یابد. با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه در بخش ۳-۵، $\vec{r}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

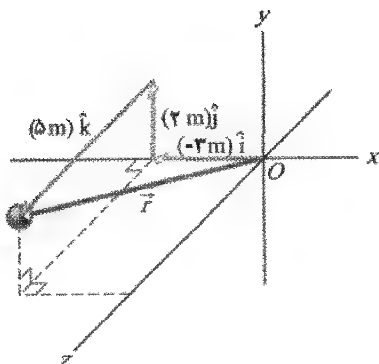
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad (۴-۱)$$

که در آن $x\hat{i}$، $y\hat{j}$، و $z\hat{k}$ مؤلفه‌های برداری $\vec{r}$ و ضریبهای $x$، $y$، و $z$ مؤلفه‌های نرده‌ای آن هستند.

ضریبهای $x$، $y$، و $z$ مکان ذره را در امتداد محورها و نسبت به مبدأ به دست می‌دهند؛ یعنی ذره دارای مختصات راستگوشهٔ $(x,y,z)$ است. مثلاً شکل ۴-۱، ذره‌ای را با بردار مکان زیر نشان می‌دهد

$$\vec{r} = (-3\,\text{m})\hat{i} + (2\,\text{m})\hat{j} + (5\,\text{m})\hat{k}$$

که مختصات راستگوشه آن عبارت‌اند از $(-3\text{m}, 2\text{m}, 5\text{m})$. در امتداد محور $x$، ذره به فاصلهٔ $3\text{m}$ از مبدأ در جهت $-\hat{i}$ است. در امتداد محور $y$، ذره به فاصلهٔ $2\text{m}$ از مبدأ در جهت $+\hat{j}$ است و در امتداد محور $z$، ذره به فاصلهٔ $5\text{m}$ از مبدأ در جهت $+\hat{k}$ قرار دارد.




**شکل ۴-۱** بردار مکان $\vec{r}$ برای یک ذره، جمع برداری مؤلفه‌های برداری آن است.

وقتی ذره‌ای حرکت کند، بردار مکان آن به گونه‌ای تغییر می‌کند که راستای بردار همیشه از نقطهٔ مرجع (مبدأ) به سوی ذره باشد. اگر بردار مکان در یک بازهٔ زمانی مثلاً از $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$ تغییر کند، آنگاه **جابه‌جایی** $\Delta\vec{r}$ در این بازهٔ زمانی چنین می‌شود

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (۴-۲)$$

با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه در معادلهٔ ۴-۱، این جابه‌جایی را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

یا

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \qquad (۴-۳)$$

که در آن مختصات $(x_1, y_1, z_1)$ مربوط به بردار مکان $\vec{r}_1$، و مختصات $(x_2, y_2, z_2)$ مربوط به بردار مکان $\vec{r}_2$ است. همچنین می‌توانیم بردار جابه‌جایی را با قراردادن $\Delta x$ به جای $(x_2 - x_1)$، $\Delta y$ به جای $(y_2 - y_1)$ و $\Delta z$ به جای $(z_2 - z_1)$ چنین بازنویسی کنیم

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k} \qquad (۴-۴)$$

**مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۱**

در شکل ۴-۲، بردار مکان ذره در آغاز

$$\vec{r}_1 = (-3/0\,\text{m})\hat{i} + (2/0\,\text{m})\hat{j} + (5/0\,\text{m})\hat{k}$$

و سپس عبارت است از

$$\vec{r}_2 = (9/0\,\text{m})\hat{i} + (2/0\,\text{m})\hat{j} + (8/0\,\text{m})\hat{k}$$

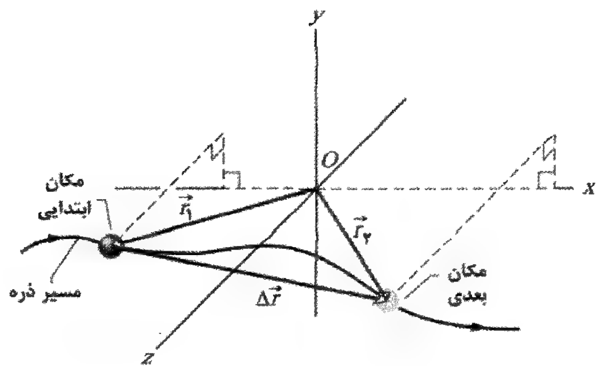
جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ ذره از $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$ چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ از کم کردن بردار مکان $\vec{r}_1$ از بردار مکان $\vec{r}_2$ به دست می‌آید

***محاسبه‌ها:*** تفریق به دست می‌دهد

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= [9/0 - (-3/0)]\hat{i} + [2/0 - 2/0]\hat{j} + [8/0 - 5/0]\hat{k} \\ &= (12\text{m})\hat{i} + (3/0\,\text{m})\hat{k} \qquad \text{(پاسخ)}\end{aligned}$$

از آنجا که بردار جابه‌جایی مؤلفه $y$ ندارد، موازی با صفحهٔ $xz$ است؛



**شکل ۴-۲** جابه‌جایی $\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ از سر بردار مکان ابتدایی $\vec{r}_1$ تا سر بردار مکان بعدی $\vec{r}_2$ امتداد می‌یابد.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۲**

خرگوشی در محوطهٔ یک پارکینگ، که در کمال تعجب روی آن دستگاهی از محورهای مختصات رسم شده است، می دود. مختصات (برحسب متر) مکان خرگوش برحسب تابعی از زمان $t$ (ثانیه) عبارت‌اند از:

$$x=-0/31t^2+7/2t+28 \qquad (4-5)$$

و

$$y=0/22t^2-9/1\,t+30 \qquad (4-6)$$

(الف) بردار مکان خرگوش در $t=15s$، برحسب نمادگذاری بردارهای یکه و نمادگذاری بزرگی- زاویه چیست؟

**نکتهٔ کلیدی** مختصات $x,y$ مکان خرگوش که با معادله‌های (۴-۵) و (۴-۶) داده شده‌اند، مؤلفه‌های نرده‌ای بردار مکان $\vec{r}$ خرگوش هستند.

***محاسبه‌ها:*** می‌توان نوشت

$$\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j} \qquad (4-7)$$

(به جای $\vec{r}$، $\vec{r}(t)$ می‌نویسیم، زیرا مؤلفه‌های $\vec{r}$ تابعی از زمان بوده و در نتیجه $\vec{r}$ نیز تابعی از زمان است.)

در $t=15s$، مؤلفه‌های نرده‌ای عبارت‌اند از

$$x=(-0/31)(15)^2+(7/2)(15)+28=66\text{m}$$

و

$$y=(0/22)(15)^2-(9/1)(15)+30=-57\text{m}$$

در نتیجه داریم

$$\vec{r}=(66\text{m})\hat{i}-(57\text{m})\hat{j} \qquad \text{(پاسخ)}$$

که در شکل ۴-۳ الف رسم شده است. برای به دست آوردن بزرگی و زاویهٔ $\vec{r}$ می‌توانیم از معادلهٔ ۳-۶ استفاده کنیم

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(66\text{m})^2+(-57\text{m})^2}$$
$$=87\text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

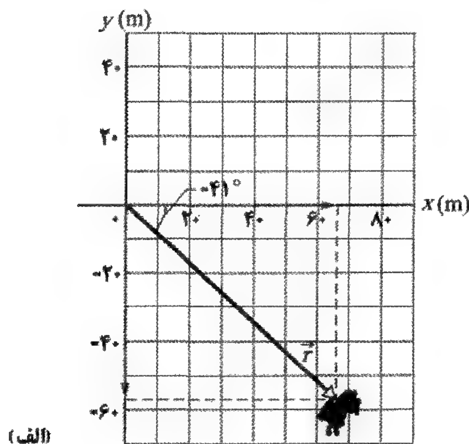
و

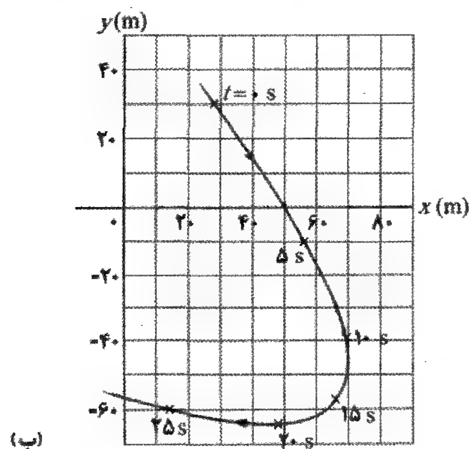
$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\left(\frac{-57\text{m}}{66\text{m}}\right)=-41^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$

***وارسی:*** اگر چه تانژانت زاویه‌های $\theta=139^\circ$ و $\theta=-41^\circ$ با هم برابرند؛ ولی مؤلفه‌های $\vec{r}$ نشان می‌دهند که زاویهٔ موردنظر برابر است با $-41^\circ=-180^\circ-139^\circ$.

(ب) مسیر خرگوش را از $t=0$ تا $t=25s$ رسم کنید.

***ترسیم:*** بخش (الف) را می‌توانیم برای چندین مقدار $t$ تکرار و آنگاه نتیجه‌ها را رسم کنیم. شکل ۴-۳ ب نقطه‌هایی را به ازای پنج مقدار $t$ و مسیری که آنها را به هم می‌پیوندد، نشان می‌دهد. همچنین می‌توانیم معادله‌های ۴-۵ و ۴-۶ را با ماشین حساب گرافیکی رسم کنیم.



**شکل ۴-۳** (الف) مکان $\vec{r}$ خرگوش در زمان $t=15$ s مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{r}$ بر امتداد محورها نشان داده شده است. (ب) مسیر خرگوش و مکان آن به ازای پنج مقدار $t$.

## ۴-۳ سرعت میانگین و سرعت لحظه‌ای

اگر ذره‌ای از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر حرکت کند، ممکن است به میزان تند حرکت کردن نیاز پیدا کنیم. درست مانند فصل ۲، می‌توانیم دو کمیتی را که به «میزان تند حرکت کردن» مربوط‌اند معرفی کنیم: *سرعت میانگین* و *سرعت لحظه‌ای*. البته ما اینجا، باید این کمیتها را به صورت برداری در نظر بگیریم و از نمادگذاری برداری استفاده کنیم.

اگر جابه‌جایی ذره‌ای در بازهٔ زمانی $\Delta t$ برابر $\Delta\vec{r}$ باشد، آنگاه **سرعت میانگین** $\vec{v}_{avg}$ آن عبارت است از

$$\text{سرعت میانگین} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{بازهٔ زمانی}}$$

یا

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (۸-۴)$$

این حاکی از آن است که جهت $\vec{v}_{avg}$ (بردار سمت چپ معادلهٔ ۴-۸) باید در همان جهت جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ (بردار سمت راست معادلهٔ ۴-۸) باشد. با استفاده از معادلهٔ ۴-۴، می‌توانیم معادلهٔ ۴-۸ را برحسب مؤلفه‌های برداری بنویسیم

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} \qquad (۹-۴)$$

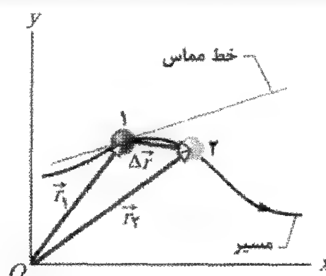
برای مثال، اگر ذرهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۱ از مکان اولیه‌اش به مکان بعدی در مدت زمان ۲/۰ s حرکت کند، آنگاه سرعت میانگین حرکت آن برابر است با

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(۱۲\,\text{m})\hat{i} + (۳/۰\,\text{m})\hat{k}}{۲/۰\,\text{s}} = (۶/۰\,\text{m/s})\hat{i} + (۱/۵\,\text{m/s})\hat{k}$$

این بدین معنی است که سرعت میانگین (یک کمیت برداری) مؤلفه‌ای به بزرگی ۶/۰m/s بر امتداد محور $x$، و مؤلفه‌ای به بزرگی ۱/۵m/s بر امتداد محور $z$ دارد.

وقتی از **سرعت** یک ذره صحبت می‌کنیم، معمولاً منظورمان **سرعت لحظه‌ای** $\vec{v}$ آن ذره در یک لحظه است. سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$، مقدار $\vec{v}_{avg}$ در هنگامی است که بازهٔ زمانی $\Delta t$ در آن لحظه به سمت صفر میل می‌کند. با استفاده از زبان ریاضی می‌توانیم $\vec{v}$ را به صورت مشتق بنویسیم

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (۱۰-۴)$$




**شکل ۴-۴** جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ یک ذره در بازهٔ زمانی $\Delta t$، از مکان ۱ با بردار مکان $\vec{r}_1$ در زمان $t_1$ به مکان ۲ با بردار مکان $\vec{r}_2$ در زمان $t_2$. خط مماس بر مسیر ذره در مکان ۱ نشان داده شده است.

شکل ۴-۴ مسیر ذره‌ای را نشان می‌دهد که محدود به صفحهٔ $xy$ است. وقتی ذره در طول منحنی به سمت راست حرکت کند، بردار مکان آن به طرف راست، جابه‌جا می‌شود. در بازهٔ زمانی $\Delta t$، بردار مکان از $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$ تغییر می‌کند و جابه‌جایی ذره $\Delta\vec{r}$ است.

برای یافتن سرعت لحظه‌ای ذره، مثلاً در لحظهٔ $t_1$ (که ذره در مکان ۱ است)، بازهٔ زمانی $\Delta t$ در حوالی $t_1$ را به سمت صفر میل می‌دهیم. با انجام این کار، سه اتفاق رخ می‌دهد: (۱) بردار مکان $\vec{r}_2$ در شکل ۴-۴ به سوی $\vec{r}_1$ حرکت می‌کند به گونه‌ای که $\Delta\vec{r}$ به سوی صفر میل می‌کند. (۲) راستای $\Delta\vec{r}/\Delta t$ (و در نتیجه $\vec{v}_{avg}$) به سوی راستای خط مماس بر مسیر ذره در مکان ۱، میل می‌کند. (۳) سرعت میانگین $\vec{v}_{avg}$ به سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$ در لحظهٔ $t_1$ میل می‌کند.

در حد، وقتی $\Delta t \to 0$ داریم $\vec{v}_{avg} \to \vec{v}$ و آنچه در اینجا مهم است اینکه $\vec{v}_{avg}$ در راستای خط مماس قرار می‌گیرد. از اینرو $\vec{v}$ نیز همان راستا را دارد:

> راستای سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$ یک ذره همواره در مکان ذره بر مسیر آن مماس است.

این نتیجه در سه بعد نیز برقرار است: $\vec{v}$ همواره بر مسیر ذره مماس است.

برای نوشتن معادلهٔ ۴-۱۰ بر حسب بردارهای یکه، به جای $\vec{r}$ از معادلهٔ ۴-۱ قرار می‌دهیم

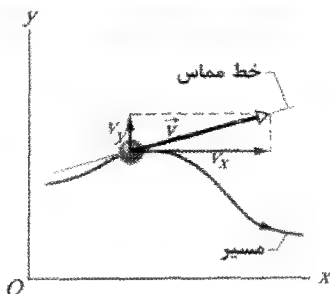
$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

این معادله را می‌توان با نوشتن به صورت

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \qquad (۱۱-۴)$$

کمی ساده‌تر کرد. که در آن مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{v}$ عبارت‌اند از

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (۱۲-۴)$$




**شکل ۴-۵** سرعت $v$ یک ذره، همراه با مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{v}$.

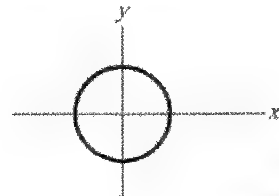
مثلاً، $dx/dt$ مؤلفهٔ نرده‌ای $\vec{v}$ در امتداد محور $x$ است. بنابراین، مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{v}$ را می‌توانیم با مشتق‌گیری از مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{r}$ به دست آوریم.

شکل ۴-۵، بردار سرعت $\vec{v}$ و مؤلفه‌های نرده‌ای $x$ و $y$ آن را نشان می‌دهد. توجه کنید که $\vec{v}$ مماس بر مسیر ذره، در مکان آن است.

***هشدار:*** وقتی بردار مکان را رسم می‌کنیم، مثل شکلهای ۴-۱ تا ۴-۴، آن پیکانی است که از یک نقطه (از «اینجا») به سوی نقطه‌ای دیگر (به «آنجا») امتداد می‌یابد. ولی وقتی بردار سرعت را رسم می‌کنیم، مثل شکل ۴-۵، آن دیگر از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر امتداد *نمی‌یابد*. این شکل، جهت لحظه‌ای حرکت

را برای ذره‌ای که در ابتدای آن واقع است نشان می‌دهد؛ طول آن (که نشان دهندهٔ بزرگی سرعت است) می‌تواند با هر مقیاسی کشیده شود.

**✔ نکتهٔ وارسی ۱** شکل، مسیری دایره‌ای را نشان می‌دهد که توسط ذره‌ای پیموده شده است. اگر سرعت لحظه‌ای ذره $\vec{v}=(2\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}}-(2\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$ باشد، هنگامی که ذره به طور (الف) ساعتگرد و (ب) پادساعتگرد دور دایره را طی می‌کند، در کدام ربع حرکت می‌کند؟ برای هر دو حالت، $\vec{v}$ را روی شکل رسم کنید.




### مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۳

سرعت $\vec{v}$ خرگوش مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۲ را در لحظهٔ $t=15\mathrm{s}$ به‌دست آورید.

**نکتهٔ کلیدی** با مشتق‌گیری از مؤلفه‌های بردار مکان خرگوش می‌توانیم $\vec{v}$ را به دست آوریم.

***محاسبه‌ها:*** با به کار بردن بخش $v_x$ معادلهٔ ۴-۱۲ در معادلهٔ ۴-۵، مؤلفهٔ $x$ بردار $\vec{v}$ را به دست می‌آوریم

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(-0/31t^2+7/2t+28)$$
$$=-0/62t+7/2 \qquad (۴-۱۳)$$

که در $t=15\mathrm{s}$ به دست می‌دهد $v_x=-2/1\mathrm{m/s}$. به همین ترتیب، با استفاده از بخش $v_y$ معادلهٔ ۴-۱۲ در معادلهٔ ۴-۶، مؤلفهٔ $y$ بردار $\vec{v}$ را به دست می‌آوریم

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(0/22t^2-9/1t+30)$$
$$=0/44t-9/1 \qquad (۴-۱۴)$$

که در $t=15\mathrm{s}$ به دست می‌دهد $v_y=-2/5\mathrm{m/s}$. آنگاه از معادلهٔ ۴-۱۱ خواهیم داشت

$$\vec{v}=-(2/1\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}}+(-2/5\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}} \qquad \text{(پاسخ)}$$

که همان‌طور که در شکل ۴-۶ نشان داده شده است، مماس بر مسیر خرگوش و در جهتی است که خرگوش در $t=15\mathrm{s}$، در حال دویدن است.

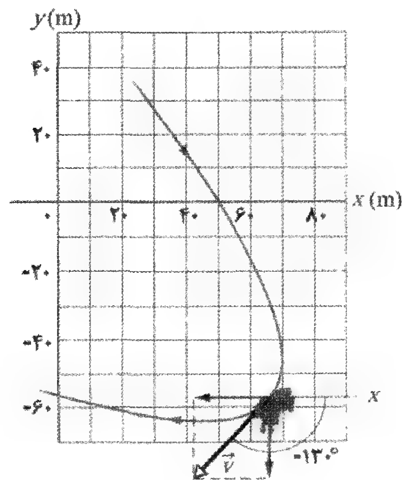
برای به دست آوردن بزرگی و زاویهٔ $\vec{v}$، می‌توانیم از ماشین حسابی که می‌تواند محاسبه‌های برداری انجام دهد استفاده کنیم، یا معادلهٔ ۳-۶ را به صورت زیر بنویسیم

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(-2/1\mathrm{m/s})^2+(-2/5\mathrm{m/s})^2}$$
$$=3/3\mathrm{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

و

$$\theta=\tan^{-1}\frac{v_y}{v_x}=\tan^{-1}\left(\frac{-2/5\mathrm{m/s}}{-2/1\mathrm{m/s}}\right)$$
$$=\tan^{-1}1/19=-130^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$

***وارسی:*** آیا زاویه $-130^\circ$ است یا $-130^\circ+180^\circ=50^\circ$ ؟




**شکل ۴-۶** سرعت $\vec{v}$ خرگوش در لحظه $t=15\ \mathrm{s}$.

## ۴-۴ شتاب میانگین و شتاب لحظه‌ای

هرگاه سرعت ذره‌ای در بازهٔ زمانی $\Delta t$ از $\vec{v}_1$ به $\vec{v}_2$ تغییر کند، شتاب میانگین $\vec{a}_{avg}$ آن در مدت $\Delta t$ عبارت است از

$$\text{شتاب میانگین}=\frac{\text{تغییر سرعت}}{\text{بازهٔ زمانی}}$$

یا

$$\vec{a}_{\mathrm{avg}}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (۴-۱۵)$$

اگر $\Delta t$ را در حوالی یک لحظهٔ معین به سمت صفر میل دهیم، آنگاه در حد $\vec{a}_{\mathrm{avg}}$ به **شتاب لحظه‌ای** (یا **شتاب**) $\vec{a}$ در آن لحظه میل می‌کند؛ یعنی

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (۴-۱۶)$$

اگر سرعت از نظر بزرگی *یا* جهت (یا هر دو) تغییر کند، ذره دارای شتاب است.

اگر $\vec{v}$ را از معادلهٔ ۴-۱۱ در معادلهٔ ۴-۱۶ قرار دهیم، می‌توانیم شتاب را بر حسب بردارهای یکه به دست آوریم

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}(v_x\hat{\mathrm{i}}+v_y\hat{\mathrm{j}}+v_z\hat{\mathrm{k}})$$
$$=\frac{dv_x}{dt}\hat{\mathrm{i}}+\frac{dv_y}{dt}\hat{\mathrm{j}}+\frac{dv_z}{dt}\hat{\mathrm{k}}$$

که می‌توانیم آن را به این صورت بنویسیم

$$\vec{a}=a_x\hat{\mathrm{i}}+a_y\hat{\mathrm{j}}+a_z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۴-۱۷)$$

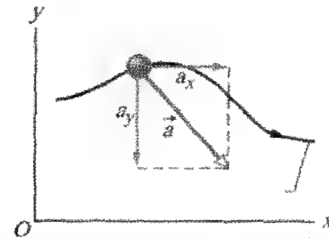
که در آن مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{a}$ عبارت‌اند از

$$a_x=\frac{dv_x}{dt},\quad a_y=\frac{dv_y}{dt},\quad a_z=\frac{dv_z}{dt} \qquad (۴-۱۸)$$

بنابراین، مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{a}$ را می‌توانیم از مشتق‌گیری مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{v}$ به دست آوریم.

شکل ۴-۷ ، بردار شتاب $\vec{a}$ و مؤلفه‌های نرده‌ای آن را برای ذره‌ای که در دو بعد حرکت می‌کند نشان می‌دهد.

*هشدار:* هنگامی که بردار شتاب را رسم می‌کنیم، مثل شکل ۴-۷ ، این بردار از یک مکان به مکان دیگر امتداد نمی‌یابد. بلکه جهت شتاب را برای ذره‌ای که در ابتدای آن واقع است نشان می‌دهد؛ طول آن (که نشان دهندهٔ بزرگی شتاب است) می‌تواند در هر مقیاسی رسم شود.




شکل ۴-۷ شتاب $\vec{a}$ یک ذره و مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{a}$ .

**نکته وارسی ۲** در اینجا چهار توصیف از مکان (در یکای متری) یک گوی که در صفحهٔ $xy$ حرکت می‌کند داده شده است:

(۱) $x=-۳t^۲+۴t-۲$ ، $y=۶t^۲-۴t$

(۲) $x=-۳t^۳-۴t$ ، $y=-۵t^۲+۶$

(۳) $\vec{r}=۲t^۲\hat{i}-(۴t+۳)\hat{j}$

(۴) $\vec{r}=(۴t^۳-۲t)\hat{i}+۳\hat{j}$

برای هر کدام از این توصیفها تعیین کنید که آیا مؤلفه‌های $x$ و $y$ شتاب گوی ثابت است یا خیر و اینکه آیا $\vec{a}$ ثابت است یا خیر.

**مسئلهٔ نمونهٔ**

شتاب $\vec{a}$ خرگوش مسئله‌های نمونهٔ ۴-۲ و ۴-۳ را در لحظهٔ $t=۱۵s$ با استفاده از نماد گذاریهای بردارهای یکه، و بزرگی-زاویه به دست آورید.

می‌توانیم شتاب $\vec{a}$ خرگوش را با مشتق گرفتن از مؤلفه‌های سرعت آن، به دست آوریم.

*محاسبه‌ها:* با استفاده از بخش $a_x$ معادلهٔ ۴-۱۸ در معادلهٔ ۴-۱۳، مؤلفهٔ $x$ بردار $\vec{a}$ به دست می‌آید

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d}{dt}(-۰/۶۲t+۷/۲)=-۰/۶۲\,m/s^۲$$

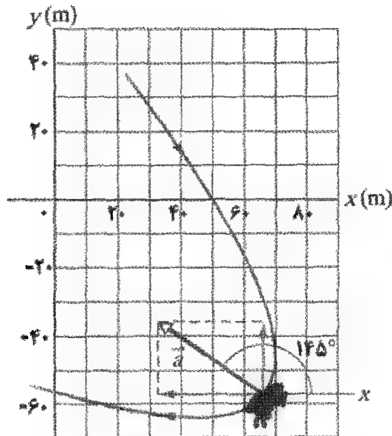
به همین ترتیب، با استفاده از بخش $a_y$ معادلهٔ ۴-۱۸ در معادلهٔ ۴-۱۴ ، مؤلفهٔ $y$ بردار $\vec{a}$ را به دست می‌آوریم

$$a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d}{dt}(۰/۴۴t-۹/۱)=۰/۴۴\,m/s^۲$$

در می‌یابیم که شتاب با زمان تغییر نمی‌کند (ثابت است)؛ زیرا متغیر $t$ در هیچ یک از رابطه‌های مربوط به مؤلفه‌های شتاب وجود ندارد. با استفاده از معادلهٔ ۴-۱۷ خواهیم داشت

$$\vec{a}=(-۰/۶۲m/s^۲)\hat{i}+(۰/۴۴m/s^۲)\hat{j} \qquad \text{(پاسخ)}$$

که در شکل ۴-۸ روی مسیر خرگوش نشان داده شده است.




شکل ۴-۸ شتاب $\vec{a}$ خرگوش در لحظهٔ $t=۱۵\,s$ . خرگوش همین شتاب را در همهٔ نقاط مسیر حرکتش دارد.

برای به دست آوردن بزرگی و زاویهٔ $\vec{a}$ ، می‌توانیم از ماشین حسابی که می‌تواند محاسبه‌های برداری انجام دهد، یا معادلهٔ ۳-۶ استفاده کنیم. برای بزرگی شتاب داریم

$$a=\sqrt{a_x^۲+a_y^۲}=\sqrt{(-۰/۶۲m/s)^۲+(۰/۴۴m/s)^۲}$$
$$=۰/۷۶m/s^۲ \qquad \text{(پاسخ)}$$

و زاویهٔ بردار شتاب برابر است با

$$\theta=\tan^{-1}\frac{a_y}{a_x}=\tan^{-1}\left(\frac{۰/۴۴m/s^۲}{-۰/۶۲m/s^۲}\right)=-۳۵°$$

البته این زاویه که بر صفحهٔ نمایشگر ماشین حساب ظاهر می‌شود، نشان دهندهٔ آن است که $\vec{a}$ در سمت راست و رو به پایین شکل ۴-۸ قرار دارد. با این حال ، از مؤلفه‌های $\vec{a}$ می‌دانیم که $\vec{a}$ باید در سمت چپ و رو به بالا باشد. برای یافتن زاویهٔ دیگری که همان تانژانت را داشته باشد، به این زاویه ۱۸۰° می‌افزاییم

$$-۳۵°+۱۸۰°=۱۴۵° \qquad \text{(پاسخ)}$$

این جواب با مؤلفه‌های $\vec{a}$ سازگار است. توجه کنید که $\vec{a}$ برای همه بخشهای مسیر خرگوش دارای بزرگی و جهت یکسانی است. زیرا همان‌طور که پیشتر توجه دادیم، شتاب ثابت است.

**مسئلهٔ نمونهٔ**

ذره‌ای با سرعت $\vec{v}_۰=-۲/۰\hat{i}+۴/۰\hat{j}$ (برحسب متر بر ثانیه) در لحظهٔ $t=۰$ دارای شتاب ثابت $\vec{a}$ به بزرگی $a=۳/۰m/s^۲$ و زاویهٔ $\theta=۱۳۰°$ نسبت به محور $x$ مثبت است. سرعت $\vec{v}$ ذره در $t=۵/۰s$ چیست؟

چون شتاب ثابت است، معادلهٔ ۲-۱۱ $(v=v_۰+at)$ برقرار است ولی باید آن را به طور جداگانه برای حرکت موازی با محور $x$ و موازی با محور $y$ به کار گیریم.

***محاسبه‌ها:*** مؤلفه‌های سرعت $v_y$ و $v_x$ را از معادله‌های زیر به‌دست می‌آوریم

$$v_x = v_{\circ x} + a_x t \quad , \quad v_y = v_{\circ y} + a_y t$$

در این معادله‌ها، $v_{\circ x}(=-۲/۰\ m/s)$ و $v_{\circ y}(=۴\ m/s)$ مؤلفه‌های $x$ و $y$ سرعت $\vec{v}_\circ$، و $a_x$ و $a_y$ مؤلفه‌های $x$ و $y$ شتاب $\vec{a}$ هستند. برای یافتن $a_x$ و $a_y$ می‌توانیم $\vec{a}$ را یا با ماشین حسابی که بتواند محاسبه‌های برداری انجام دهد یا به کمک معادلهٔ ۳-۵ تجزیه کنیم

$$a_x = a\cos\theta = (۳/۰\ m/s^۲)(\cos ۱۳۰°) = -۱/۹۳ m/s^۲$$
$$a_y = a\sin\theta = (۳/۰\ m/s^۲)(\sin ۱۳۰°) = +۲/۳۰\ m/s^۲$$

هرگاه این مقدارها در معادله‌های $v_x$ و $v_y$ قرار داده شوند، در لحظهٔ $t = ۵/۰ s$ ، خواهیم داشت

$$v_x = -۲/۰\ m/s + (-۱/۹۳ m/s^۲)(۵/۰ s) = -۱۱/۶۵ m/s$$
$$v_y = ۴/۰\ m/s + (۲/۳۰\ m/s^۲)(۵/۰\ s) = -۱۵/۵۰\ m/s$$

بنابراین، در $t = ۵/۰\ s$ ثانیه، پس از گرد کردن عددها خواهیم داشت

$$\vec{v} = (-۱۲\ m/s)\hat{i} + (۱۶\ m/s)\hat{j} \qquad \text{(پاسخ)}$$

با استفاده از یک ماشین حساب که قادر به محاسبه‌های برداری باشد، یا به کمک معادلهٔ ۳-۶ ، بزرگی و زاویهٔ $\vec{v}$ را به دست می‌آوریم

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = ۱۹/۴ = ۱۹\ m/s \qquad \text{(پاسخ)}$$

و

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = ۱۲۷° \approx ۱۳۰° \qquad \text{(پاسخ)}$$

***وارسی:*** آیا $۱۲۷°$ بر صفحهٔ نمایشگر ماشین حساب ظاهر می‌شود یا $-۵۳°$؟ حال برای دیدن اینکه کدامیک معقول است، بردار $\vec{v}$ را با استفاده از مؤلفه‌هایش رسم کنید.

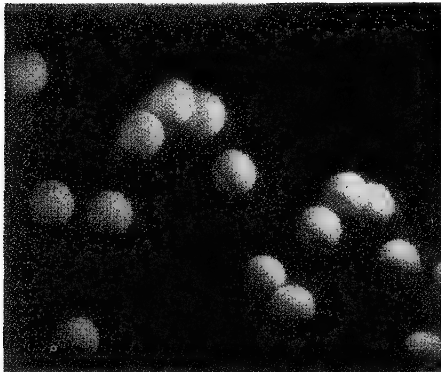
حالت ویژه‌ای از حرکت دو بعدی را در نظر می‌گیریم: ذره‌ای در یک صفحهٔ قائم با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_\circ$ و با شتابی که همواره برابر شتاب سقوط آزاد $\vec{g}$ و رو به پایین است، حرکت می‌کند. چنین ذره‌ای **پرتابه** (یعنی ذرهٔ پرتاب شده)، و حرکت آن را **حرکت پرتابی** می‌نامند. پرتابه ممکن است یک توپ تنیس (شکل ۴-۹) یا یک توپ بیسبال در حال حرکت باشد. ولی هواپیما یا اردک در حال پرواز، پرتابه نیستند.

در اینجا هدف ما تحلیل حرکت پرتابی با استفاده از مطالب مربوط به حرکت دو بعدی است که در بخشهای ۴-۲ تا ۴-۴ ارائه شدند. در همه جا فرض بر این است که هوا هیچ اثری بر حرکت پرتابه ندارد. شکل ۴-۱۰، که در بخش بعدی تحلیل خواهد شد، مسیری را که یک پرتابه در نبود اثر هوا طی می‌کند، نشان می‌دهد. پرتابه با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_\circ$ پرتاب می‌شود که می‌توان آن را به این صورت نوشت

$$\vec{v}_\circ = v_{\circ x}\hat{i} + v_{\circ y}\hat{j} \qquad (۴-۱۹)$$

مؤلفه‌های $v_{\circ y}$ و $v_{\circ x}$ را می‌توان با دانستن زاویهٔ $\theta_\circ$ میان $\vec{v}_\circ$ و جهت مثبت محور $x$ به دست آورد

$$v_{\circ x} = v_\circ \cos\theta_\circ \quad , \quad v_{\circ y} = v_\circ \sin\theta \qquad (۴-۲۰)$$

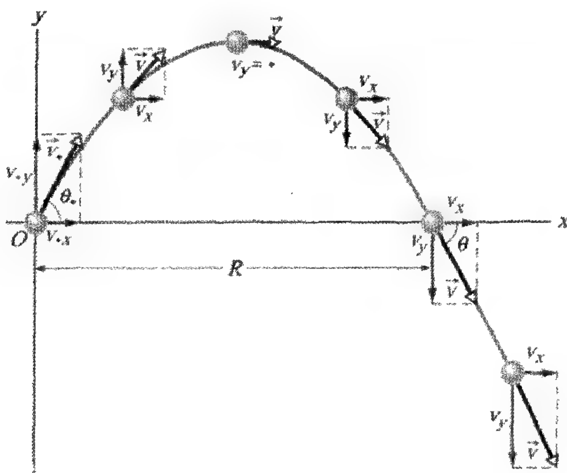


شکل ۴-۹ عکس استروبوسکوپی یک توپ تنیس هنگام برگشتن از یک سطح سخت. در بین برخوردها، توپ حرکت پرتابی انجام می‌دهد.

در حرکت دو بعدی، بردار مکان $\vec{r}$ پرتابه و بردار سرعت $\vec{v}$ آن به طور دائم تغییر می‌کنند، ولی بردار شتاب $\vec{a}$ آن ثابت می‌ماند و *همواره* به طور قائم رو به پایین است. پرتابه هیچ مؤلفهٔ شتاب افقی *ندارد*.

آن‌گونه در شکلهای ۴-۹ و ۴-۱۰ نشان داده شده است، حرکت پرتابی پیچیده به نظر می‌رسد، ولی این حرکت ویژگی ساده کننده‌ای (که از آزمایش معلوم شده است) دارد:

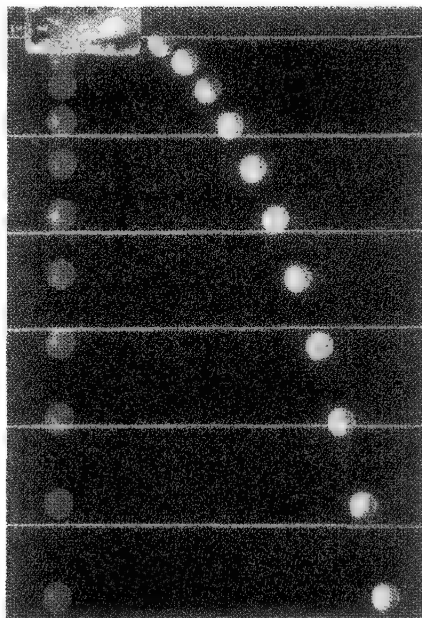
> در حرکت پرتابی، حرکت افقی و حرکت قائم مستقل از یکدیگرند؛ به این معنی که هیچ کدام از دیگری تأثیر نمی‌پذیرند.



این ویژگی به ما امکان می‌دهد که مسئلهٔ حرکت دو بعدی را به دو مسئلهٔ ساده‌تر یک بعدی جداگانه، یکی برای حرکت افقی (*با شتاب صفر*) و دیگری برای حرکت قائم (*با شتاب ثابت رو به پایین*) تجزیه کنیم. در اینجا دو آزمایش ارائه شده است که نشان می‌دهد حرکت افقی و حرکت قائم از یکدیگر مستقل‌اند.

### *دو گوی گلف*

شکل ۴-۱۱ نمودار استروبوسکوپی دو گوی گلف را نشان می‌دهد، که یکی از آنها رها شده و دیگری توسط یک فنر به طور افقی پرتاب شده است. هر دو توپ حرکت قائم یکسانی دارند، و در یک بازهٔ زمانی یکسان، مسافتهای قائم یکسانی را طی می‌کنند. *این واقعیت که یک توپ در حالی که سقوط می‌کند حرکت افقی نیز دارد، هیچ تأثیری بر حرکت قائم آن نمی‌گذارد؛* این بدین معنی است که حرکتهای افقی و *قائم* مستقل از یکدیگرند.



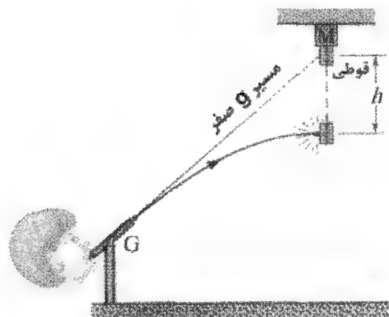
**شکل ۴-۱۱** توپی از حالت سکون، همزمان با توپ دیگری که به طور افقی به سمت راست پرتاب شده است، رها می‌شود. حرکتهای قائم آنها یکسان است.

### *یک آزمایش حیرت انگیز برای دانشجویان*

شکل ۴-۱۲ آزمایشی را نشان می‌دهد که به کلاس فیزیک روح تازه‌ای می‌بخشد. در این آزمایش، با تفنگ فوت کردنی $G$ گلوله‌ای به عنوان پرتابه شلیک می‌شود. هدف، یک قوطی است که از آهنربای $M$ آویزان شده و لولهٔ تفنگ، مستقیماً رو به قوطی نشانه رفته است. آزمایش طوری ترتیب یافته است که درست هنگامی که گلوله از تفنگ خارج می‌شود، آهنربا قوطی را رها کند.

اگر $g$ (بزرگی شتاب سقوط آزاد) صفر می‌بود، گلوله روی مسیر راستخط نشان داده شده در شکل ۴-۱۲ حرکت می‌کرد و قوطی پس از رها شدن از آهنربا، در همانجا معلق می‌ماند و گلوله قطعاً با قوطی برخورد می‌کرد.

ولی با اینکه $g$ *صفر نیست، باز* هم گلوله به قوطی برخورد می‌کند! همان‌طور که شکل ۴-۱۲ نشان می‌دهد، در طی زمان




**شکل ۴-۱۲** گلوله همیشه به قوطی در حال سقوط برخورد می‌کند. هر یک از جایی که در صورت نبودن شتاب سقوط آزاد در آنجا می‌بودند، به اندازهٔ مسافت $h$ سقوط می‌کنند.

پرواز گلوله، هم گلوله و هم قوطی به اندازهٔ یکسان $h$ نسبت به موقعیت‌های $g$ صفرشان سقوط می‌کنند. هر چقدر آزمایشگر شدیدتر در تفنگ فوت کند، سرعت اولیهٔ گلوله بیشتر، زمان پرواز کوتاه‌تر، و مقدار $h$ کوچکتر می‌شود.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۳*** توپی پس از پرتاب در لحظه معینی دارای سرعت $v = 25\hat{i} - 4/9\hat{j}$ است. (محور $x$ افقی، محور $y$ به سمت بالا و $v$ برحسب متر بر ثانیه است. آیا توپ از بالاترین نقطهٔ مسیرش عبور کرده است؟

## ۴-۶ تحلیل حرکت پرتابی

حال می‌توانیم حرکت پرتابی را از نظر حرکتهای افقی و قائم تحلیل کنیم.

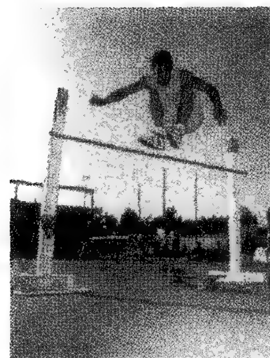
### *حرکت افقی*

همان طور که شکل ۴-۱۰ نشان می‌دهد، چون هیچ *شتابی* در راستای افقی وجود ندارد، مؤلفهٔ افقی $v_x$ سرعت پرتابه در سرتاسر حرکت تغییر نمی‌کند و در همان سرعت اولیهٔ $v_{0x}$ باقی می‌ماند. شکل ۴-۱۳ مثالی از این واقعیت است. در هر لحظهٔ $t$، جابه‌جایی افقی $x - x_0$ پرتابه نسبت به مکان اولیهٔ $x_0$، با معادلهٔ ۲-۱۵ به ازای $a = 0$ داده می‌شود، که آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x - x_0 = v_{0x} t$$

چون $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$ است، داریم

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0) t \qquad (۴\text{-}۲۱)$$



**شکل ۴-۱۳** مؤلفهٔ قائم سرعت اسکیت سوار تغییر می‌کند، ولی مؤلفهٔ افقی سرعت که همان سرعت تختهٔ اسکیت است تغییر نمی‌کند. از اینرو، تخته همواره زیر شخص باقی می‌ماند و او روی آن فرود می‌آید.

## *حرکت قائم*

حرکت قائم پرتابه، همان حرکتی است که در بخش ۲-۹ برای ذره‌ای که در حال سقوط آزاد است مورد بحث قرار گرفت. از همه مهمتر این است که در این حرکت، شتاب ثابت است. بنابراین، می‌توان معادله‌های جدول ۲-۱ را به کار برد، به شرطی که به جای $a$ مقدار $g$ را قرار دهیم و از نماد $y$ به جای x استفاده کنیم. در نتیجه معادلهٔ ۲-۱۵ چنین می‌شود

$$y - y_0 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$= (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (۴-۲۲)$$

که در آن مؤلفهٔ قائم سرعت اولیهٔ $v_{0y}$ با معادلش یعنی $v_0 \sin\theta_0$ جایگزین شده است. به همین ترتیب، معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۶ چنین می‌شوند

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \qquad (۴-۲۳)$$

و

$$v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0) \qquad (۴-۲۴)$$

همان طور که در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده و از معادلهٔ ۴-۲۳ برمی‌آید، مؤلفهٔ قائم سرعت درست مانند سرعت گلوله‌ای که به طور قائم رو به بالا پرتاب شده است رفتار می‌کند. در آغاز سرعت گلوله رو به بالا است و بزرگی سرعت آن به طور پیوسته تا صفر کاهش می‌یابد، که این *بیشینهٔ ارتفاع مسیر را مشخص می‌کند.* سپس جهت سرعت قائم معکوس می‌شود و بزرگی آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

## *معادلهٔ مسیر*

معادلهٔ **مسیر** پرتابه را می‌توانیم با حذف $t$ بین معادله‌های ۴-۲۱ و ۴-۲۲ بیابیم. با حل معادلهٔ ۴-۲۱ برای $t$ و قرار دادن آن در معادلهٔ ۴-۲۲، پس از کمی دستکاری به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$y = (\tan\theta_0) x - \frac{g x^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} \qquad \text{(مسیر)} \qquad (۴-۲۵)$$

این معادلهٔ مسیری است که در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است. در به دست آوردن آن، برای سادگی در معادله‌های ۴-۲۲ و ۴-۲۱، به ترتیب $y_0 = 0$ و $x_0 = 0$ را قرار داده‌ایم. چون $g$، $\theta_0$ و $v_0$ ثابت‌اند، معادلهٔ ۴-۲۵ به صورت $y = ax + bx^2$ است، که در آن $a$ و $b$ ثابت‌اند. این معادلهٔ یک سهمی است و در نتیجه مسیر حرکت *سهموی* است.

## *برد افقی*

*برد افقی* $R$ پرتابه، همان‌گونه که شکل ۴-۱۰ نشان می‌دهد، مسافتی افقی است که پرتابه از نقطهٔ پرتاب تا نقطهٔ بازگشت به سطح پرتاب آغازی طی می‌کند. برای یافتن $R$، در معادلهٔ ۴-۲۱ رابطهٔ $x - x_0 = R$ و در معادلهٔ ۴-۲۲، رابطهٔ $y - y_0 = 0$ را قرار می‌دهیم و از آنجا به دست می‌آوریم

$$R = (v_0 \cos\theta_0) t$$

و

$$0 = (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

با حذف $t$ بین این دو معادله خواهیم داشت

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0$$

با استفاده از رابطهٔ $\sin 2\theta_0 = 2\sin\theta_0 \cos\theta_0$ (پیوست ث را ببینید)، به دست می‌آوریم

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \qquad (۴-۲۶)$$

**هشدار:** در صورتی که ارتفاع نهایی پرتابه با ارتفاع نقطهٔ پرتاب یکی نباشد، این معادله مسافت افقی پیموده شده توسط پرتابه را به دست نمی‌دهد.

توجه داشته باشید که $R$ در معادلهٔ ۴-۲۶ در صورتی بیشینه است که $\sin 2\theta_0 = 1$ باشد، که این به ازای $2\theta_0 = 90°$ یا $\theta_0 = 45°$ حاصل می‌شود.

> ☞ برد افقی $R$، به ازای زاویهٔ $\theta_0 = 45°$ بیشینه است.

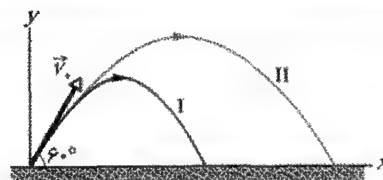
با این وجود، وقتی ارتفاع محل پرتاب و سقوط یکسان نباشد، پرتاب با زاویهٔ $45°$ بیشینهٔ فاصلهٔ افقی را به دست نمی‌دهد.

## *اثرهای هوا*

فرض کرده‌ایم هوایی که در آن پرتابه حرکت می‌کند هیچ اثری روی حرکت پرتابه ندارد. با این حال، در بسیاری از حالتها به دلیل مقاومت هوا که در برابر حرکت بروز می‌کند، تفاوت بین محاسبه و حرکت واقعی پرتابه می‌تواند زیاد باشد. برای مثال، شکل ۴-۱۴ دو مسیر را برای حرکت توپی نشان می‌دهد که با زاویهٔ $60°$ نسبت به افق و با تندی اولیهٔ $44/7\,\text{m/s}$ با یک

چوب بیسبال زده شده‌اند. مسیر I (مسیر توپ یک بازیکن بیسبال) مسیری است که به طور تقریبی بر اساس شرایط طبیعی بازی در هوا حساب شده است. مسیر II (مسیر توپ یک استاد فیزیک) مسیری است که توپ در خلأ طی می‌کند.

> ✔ **نکتهٔ وارسی ۴** یک توپ بیسبال به ناحیهٔ انتهای زمین برخورد می‌کند. در حین پرواز (با چشمپوشی از اثر هوا) برای مؤلفه‌های (الف) افقی و (ب) قائم سرعت توپ، چه رخ می‌دهد؟ مؤلفه‌های (پ) افقی و (ت) قائم شتاب در حین بالا رفتن، پایین آمدن، و در بالاترین نقطهٔ پرواز چیست؟




**شکل ۴-۱۴** (I) مسیر یک توپ بیسبال با درنظر گرفتن مقاومت هوا. (II) مسیر همان توپ در خلأ با استفاده از روش‌های ارائه شده در این فصل. جدول ۴-۱ داده‌های مربوط به هر یک از دو مسیر را نشان می‌دهد.[1]

**جدول ۴-۱**

دو توپ بیسبال*

| | مسیر I (درهوا) | مسیر II (در خلأ) |
|---|---|---|
| برد | ۹۸/۵m | ۱۷۷m |
| بیشینهٔ ارتفاع | ۵۳/۰m | ۷۶/۸m |
| مدت زمان پرواز | ۶/۶s | ۷/۹s |

* به شکل ۴-۱۴ نگاه کنید. زاویهٔ پرتاب ۶۰° و تندی پرتاب ۴۴/۷m/s است.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۶

در شکل ۴-۱۵، یک هواپیمای نجات در ارتفاع ثابت ۵۰۰m، با تندی ۱۹۸km/h(=۵۵/۰ m/s) به سوی نقطه‌ای که دقیقاً بر فراز محلی است که در آن شخصی از یک قایق حادثه دیده در حال غرق شدن است، پرواز می‌کند. خلبان می‌خواهد بستهٔ وسایل نجات را به گونه‌ای رها کند که در نزدیکی شخص حادثه دیده، به آب برخورد کند.

(الف) در هنگام رها شدن بسته، زاویهٔ خط دید $\phi$ خلبان نسبت به شخص حادثه دیده باید چقدر باشد؟

**نکته‌های کلیدی** بسته به محض رهاشدن یک پرتابه است و از اینرو حرکتهای افقی و قائم آن مستقل از یکدیگرند و می‌توان آنها را به طور مجزا بررسی کرد. (لازم نیست مسیر خمیدهٔ واقعی بسته در نظر گرفته شود).

***محاسبه‌ها:*** در شکل ۴-۱۵ می‌بینیم که زاویهٔ $\phi$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\phi = \tan^{-1}\frac{x}{h} \qquad (۴\text{-}۲۷)$$

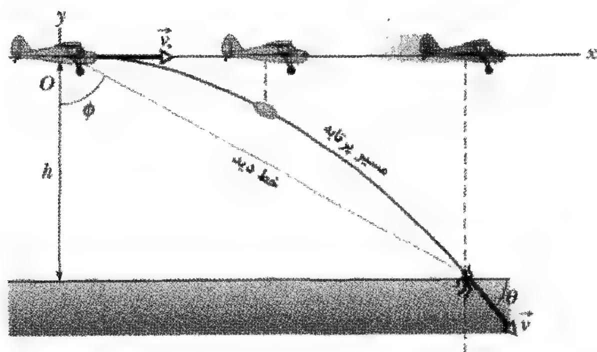
که در آن $x$ مختصهٔ افقی شخص حادثه دیده (و محل بسته در لحظهٔ برخورد با آب) و $h=۵۰۰\text{m}$ است. می‌توانیم به کمک معادلهٔ ۴-۲۱، $x$ را بیابیم

$$x - x_\circ = (v_\circ \cos\theta_\circ)t \qquad (۴\text{-}۲۸)$$

چون مبدأ در نقطهٔ رهاشدن قرار داده شده است، $x_\circ = \circ$ است. و چون بسته از هواپیما *رها* شده و پرتاب نشده است، سرعت اولیهٔ $\vec{v}_\circ$ آن برابر با سرعت هواپیماست. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که بزرگی سرعت اولیهٔ بسته $v_\circ = ۵۵/۰\text{m/s}$ و زاویهٔ آن $\theta_\circ = \circ°$ است (نسبت به جهت مثبت محور $x$). ولی مدت زمان $t$ حرکت بسته از هواپیما تا شخص حادثه دیده را نمی‌دانیم.

برای یافتن $t$، حرکت قائم و به ویژه معادلهٔ ۴-۲۲ را در نظر می‌گیریم

$$y - y_\circ = (v_\circ \sin\theta_\circ)\, t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (۴\text{-}۲۹)$$




**شکل ۴-۱۵** هواپیمایی که در سطح پرواز با سرعت ثابت حرکت می‌کند، بستهٔ نجاتی را رها می‌کند. در زمانی که بسته در حال سقوط است، مؤلفهٔ افقی سرعتش برابر با سرعت هواپیما باقی می‌ماند.

در اینجا جابه‌جایی قائم بسته $y - y_\circ$ برابر با ۵۰۰m- است (مقدار منفی معرف آن است که بسته *رو به پایین* حرکت می‌کند). با قراردادن این مقدار و سایر مقدارهای به دست آمده در معادلهٔ ۴-۲۹، خواهیم داشت

$$-۵۰۰\text{m} = (۵۵/۰\,\text{m/s})(\sin ۰°)t - \frac{1}{2}(۹/۸\text{m/s}^2)t^2$$

با حل این معادله برای $t$ داریم $t = ۱۰/۱\text{s}$. با قراردادن این مقدار در معادلهٔ ۴-۲۸ خواهیم داشت

$$x - ۰ = (۵۵/۰\,\text{m/s})(\cos ۰°)(۱۰/۱\text{s})$$

یا

$$x = ۵۵۵/۵\text{m}$$

و از آنجا، معادلهٔ ۴-۲۷ به دست می‌دهد

$$\phi = \tan^{-1}\frac{۵۵۵/۵\text{m}}{۵۰۰\text{m}} = ۴۸/۰° \qquad \text{(پاسخ)}$$

1. The Trajectory of a Fly Ball by Peter J.Brancazio, *The physics Teacher*, January 1985.

(ب) وقتی بسته به سطح آب می‌رسد، سرعت $\vec{v}$ آن برحسب نمادگذاریهای بردار یکه و بزرگی- زاویه چیست؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت بسته مستقل از یکدیگرند. (۲) مؤلفهٔ افقی $v_x$ از مقدار اولیه‌اش یعنی $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$ تغییر نمی‌کند؛ زیرا هیچ شتاب افقی وجود ندارد. (۳) مؤلفهٔ قائم سرعت $v_y$ نسبت به مقدار اولیه‌اش یعنی $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$ تغییر می‌کند؛ زیرا یک شتاب قائم وجود دارد.

***محاسبه‌ها:*** وقتی که بسته به سطح آب می‌رسد داریم

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (۵۵/۰\,\text{m/s})(\cos ۰°) = ۵۵/۰\,\text{m/s}$$

با استفاده از معادلهٔ ۴-۲۳ و زمان سقوط بسته $t = ۱۰/۱\text{s}$، مؤلفهٔ قائم سرعت بسته را در هنگام رسیدن به سطح آب به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin\theta_0 - gt \\ &= (۵۵/۰\,\text{m/s})(\sin ۰°) - (۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۱۰/۱\text{s}) \\ &= -۹۹/۰\,\text{m/s} \end{aligned}$$

بنابراین وقتی که بسته به سطح آب می‌رسد، سرعت آن چنین است

$$\vec{v} = (۵۵/۰\,\text{m/s})\hat{i} - (۹۹/۰\,\text{m/s})\hat{j} \qquad \text{(پاسخ)}$$

با استفاده از معادلهٔ ۳-۶ به عنوان راهنما، یا ماشین حسابی که بتواند محاسبه‌های برداری را انجام دهد، بزرگی و زاویهٔ $\vec{v}$ به دست می‌آید

$$v = ۱۱۳\ \text{m/s}\ ,\ \theta = -۶۰/۹° \qquad \text{(پاسخ)}$$

## مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۷

مطابق شکل ۴-۱۶ کشتی دزدان دریایی به فاصلهٔ $۵۶۰\text{m}$ از دژ دفاعی واقع در ورودی بندرگاه جزیره‌ای قرار دارد. یک توپ پدافند که در سطح دریا واقع است گلوله‌هایی را با تندی اولیهٔ $v_0 = ۸۲\text{m/s}$ شلیک می‌کند.

(الف) برای آنکه گلوله به کشتی برخورد کند، با چه زاویهٔ $\theta_0$ نسبت به افق باید شلیک شود؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) گلولهٔ شلیک شده، یک پرتابه است، و بنابراین معادله‌های حرکت پرتابی برای آن برقرار است. ما به دنبال معادله‌ای هستیم که زاویهٔ پرتاب $\theta_0$ را به جابه‌جایی افقی گلولهٔ شلیک شده به کشتی مربوط کند. (۲) چون توپ و کشتی هر دو در یک ارتفاع واقع‌اند، جابه‌جایی افقی همان برد گلوله است.

***محاسبه‌ها:*** می‌توانیم زاویهٔ پرتاب $\theta_0$ را به برد $R$ با معادلهٔ ۴-۲۶ ($R = \frac{v_0^۲}{g}\sin ۲\theta_0$) مربوط کنیم که به دست می‌دهد

$$\theta_0 = \frac{۱}{۲}\sin^{-۱}\frac{gR}{v_0^۲} = \frac{۱}{۲}\sin^{-۱}\frac{(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۵۶۰\,\text{m})}{(۸۲\text{m/s})^۲} = \frac{۱}{۲}\sin^{-۱} ۰/۸۱۶ \qquad (۴\text{-}۳۱)$$

یک پاسخ $\sin^{-۱}(۵۴/۷°)$ است که ماشین حساب نشان می‌دهد و اگر آن را از $۱۸۰°$ کم کنیم پاسخ دیگر $(۱۲۵/۳°)$ به دست می‌آید. بنابراین، معادلهٔ ۴-۳۱ دو پاسخ زیر را می‌دهد

$$\theta_0 = \frac{۱}{۲}(۵۴/۷°) = ۲۷° \qquad \text{(پاسخ)}$$

و

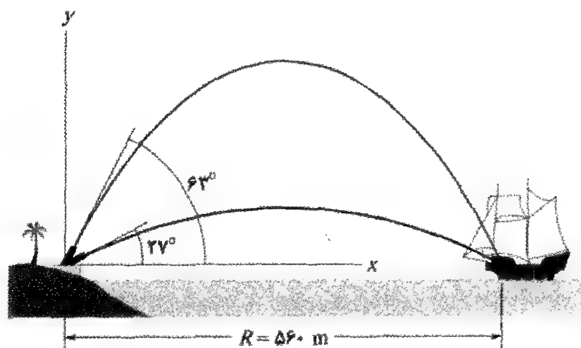
$$\theta_0 = \frac{۱}{۲}(۱۲۵/۳°) \approx ۶۳° \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) بیشینهٔ برد توپ چقدر است؟

***محاسبه‌ها:*** دیده‌ایم که بیشینهٔ برد، مربوط به زاویهٔ رو به بالای $\theta_0 = ۴۵°$ است. بنابراین،

$$\begin{aligned} R &= \frac{v_0^۲}{g}\sin ۲\theta_0 = \frac{(۸۲\text{m/s})^۲}{۹/۸\,\text{m/s}^۲}\sin(۲\times ۴۵°) \\ &= ۶۸۶\text{m} \approx ۶۹۰\,\text{m} \end{aligned} \qquad \text{(پاسخ)}$$

هنگامی که کشتی دزدان دریایی دور می‌شود، دو زاویهٔ رو به بالایی که با آنها کشتی می‌تواند مورد هدف قرار گیرد به یکدیگر نزدیک و سرانجام در زاویهٔ $\theta_0 = ۴۵°$ با هم یکی می‌شوند. در این هنگام کشتی $۶۹۰\,\text{m}$ از توپ فاصله دارد. در بیشتر از این فاصله، کشتی در امان می‌ماند.




**شکل ۴-۱۶** کشتی دزدان دریایی مورد هدف قرار می‌گیرد.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۸

فرض کنید بازیکن $B$ بیسبال به توپ ضربه می‌زند و توپ مستقیماً به سمت بازیکن $F$ در داخل زمین حرکت می‌کند، سرعت اولیهٔ برابر $v_0 = ۴۰\text{m/s}$ و زاویهٔ پرتاب برابر $\theta_0 = ۳۵°$ است. در طول حرکت، امتداد بازیکن $F$ و توپ با زمین زاویهٔ $\phi$ می‌سازد. با فرض اینکه بازیکن $F$ برای گرفتن توپ قبلاً در نقطه‌ای به فاصلهٔ $۶/۰\text{m}$ خیلی نزدیک به محل پرتاب و $۶/۰\text{m}$ خیلی دور از نقطهٔ پرتاب، جاگیری کرده باشد تغییرات زاویهٔ ارتفاع $\phi$ برحسب زمان را رسم کنید.

**نکته‌های کلیدی** (۱) اگر از مقاومت هوا چشمپوشی کنیم، توپ پرتابه‌ای است که حرکت قائم و حرکت افقی آن را می‌توان جداگانه بررسی کرد. (۲) با فرض اینکه توپ در همان ارتفاعی که پرتاب شده توسط بازیکن $F$ گرفته شود، مسافت افقی طی شدهٔ توپ برابر برد آن است، که با معادلهٔ ۴-۲۶ $[R = (v_0^۲/g)\sin ۲\theta_0]$ داده شده است.

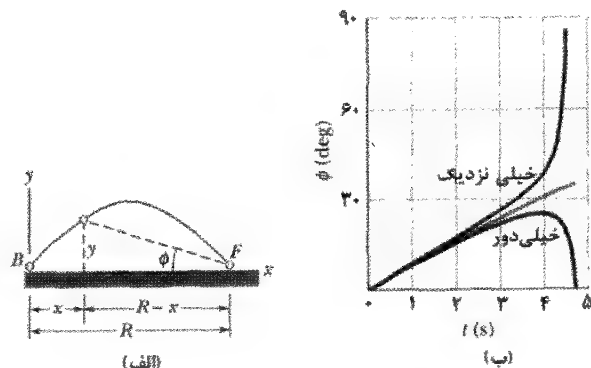
***محاسبه‌ها:*** اگر فاصلهٔ بازیکن $F$ از بازیکن $B$ برابر برد $R$ توپ باشد، او می‌تواند توپ را بگیرد. با استفاده از معادلهٔ ۴-۲۶، داریم

$$R=\frac{v_\circ^{۲}}{g}\sin ۲\theta_\circ=\frac{(۴\circ\,\text{m/s})^{۲}}{۹/۸\,\text{m/s}^{۲}}\sin(۷\circ^\circ)=۱۵۳/۴۲\,\text{m} \quad (۴\text{-}۳۲)$$

شکل ۴-۱۷ الف یک عکس فوری از توپ در حین حرکت را نشان می‌دهد که توپ در ارتفاع $y$ و فاصلهٔ افقی $x$ از بازیکن $B$ (که در مبدأ است) قرار دارد. فاصلهٔ افقی توپ از بازیکن $F$ برابر $R-x$ و زاویهٔ ارتفاع $\phi$ این بازیکن با رابطهٔ $\phi=y/(R-x)$ ، داده می‌شود. برای ارتفاع $y$ ، از معادلهٔ ۴-۲۲، $[y-y_\circ=(v_\circ\sin\theta_\circ)t-\frac{1}{۲}gt^{۲}]$ ، با قرار دادن $y_\circ=\circ$ استفاده می‌کنیم. برای فاصلهٔ افقی $x$ در معادلهٔ ۴-۲۱ $[x-x_\circ=(v_\circ\cos\theta_\circ)t]$ قرار می‌دهیم $x_\circ=\circ$ . بنابراین، با به کار بردن $v_\circ=۴\circ\,\text{m/s}$ و $\theta_\circ=۳۵^\circ$ ، داریم

$$\phi=\tan^{-1}\frac{(۴\circ\sin ۳۵^\circ)t-۴/۹t^{۲}}{۱۵۳/۴۲-(۴\circ\cos ۳۵^\circ)t} \quad (۴\text{-}۳۳)$$

با رسم این تابع برحسب $t$ نمودار وسطی در شکل ۴-۱۷ ب به دست می‌آید. مشاهده می‌کنیم که در حین حرکت زاویهٔ توپ از دید بازیکن $F$ تقریباً با آهنگ یکنواختی افزایش می‌یابد. اگر بازیکن $F$ ، ۶/۰m خیلی نزدیک به بازیکن $B$ باشد مسافت ۱۵۳/۴۲m را در معادلهٔ ۴-۳۳ با $۱۵۳/۴۲\,\text{m}-۶/\circ\,\text{m}=۱۴۷/۴۲\,\text{m}$




**شکل ۴-۱۷** زیاد شدن زاویهٔ $\phi$ برای توپی که به طرف بازیکن $F$ می‌رود (الف) تعریف شده و (ب) برحسب زمان $t$ رسم شده است.

جایگزین می‌کنیم. با رسم مجدد تابع، نمودار «خیلی نزدیک» در شکل ۴-۱۷ ب به دست می‌آید. اکنون زاویهٔ ارتفاع توپ در حین اوج گرفتن توپ از بالای سر بازیکن $F$ ، به سرعت افزایش می‌یابد. اگر بازیکن $F$ ، ۶/۰m خیلی دور از بازیکن $B$ باشد، مسافت ۱۵۳/۴۲m در معادلهٔ ۴-۳۳ را با ۱۵۹/۴۲m جایگزین می‌کنیم. نمودار حاصل، در شکل با «خیلی دور» مشخص شده است: زاویه در ابتدا افزایش و سپس سریعاً کاهش می‌یابد. بنابراین، اگر توپ مستقیماً به طرف بازیکن $F$ پرتاب شود، بازیکن از تغییر زاویهٔ ارتفاع $\phi$ می‌تواند بگوید که باید سر جایش بایستد، به سمت بازیکن $B$ بدود یا از بازیکن $B$ دور شود.

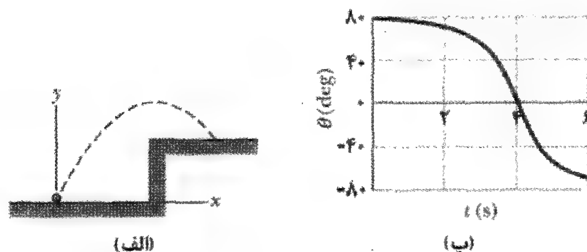
## مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۹ مهارت خود را تقویت کنید

در $t=\circ$ ، یک توپ گلف مطابق شکل ۴-۱۸ الف از سطح زمین به هوا شوت می‌شود. زاویهٔ $\theta$ بین جهت حرکت توپ و جهت مثبت محور $x$ برحسب $t$ در شکل ۴-۱۸ ب داده شده است. توپ در $t=۶/\circ\circ\,\text{s}$ فرود می‌آید. بزرگی $v_\circ$ ، سرعت پرتاب توپ چقدر است، در چه ارتفاع $(y-y_\circ)$ بالای سطح پرتاب توپ فرود می‌آید و جهت توپ درست در لحظهٔ فرود، چیست؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) توپ یک پرتابه است و از اینرو حرکت افقی و قائم آن را می‌توان به طور جداگانه بررسی کرد. (۲) مؤلفهٔ افقی $v_x(=v_\circ\cos\theta_\circ)$ سرعت توپ در طول حرکت تغییر نمی‌کند. (۳) مؤلفهٔ قائم $v_y$ سرعت توپ تغییر می‌کند و وقتی توپ به بالاترین نقطه می‌رسد برابر صفر است. (۴) جهت حرکت توپ در هر لحظه از مسیرش در زاویهٔ بردار سرعت $\vec{v}$ توپ در آن لحظه است. این زاویه با رابطهٔ $\tan\theta=v_y/v_x$ داده می‌شود، با مؤلفه‌های سرعت که در آن لحظه محاسبه می‌شوند.

***محاسبه‌ها:*** وقتی توپ به بیشینهٔ ارتفاع می‌رسد، $v_y=\circ$ است. بنابراین، سرعت $\vec{v}$ ، در زاویهٔ $\theta=\circ^\circ$ ، افقی است. از نمودار مشاهده می‌کنیم که این شرط در $t=۴/\circ\,\text{s}$ رخ می‌دهد. همچنین مشاهده می‌کنیم که زاویهٔ پرتاب $\theta_\circ$ (در لحظهٔ $t=\circ$) برابر $۸\circ^\circ$ است. با استفاده از معادلهٔ ۴-۲۳ $(v_y=v_\circ\sin\theta_\circ-gt)$ و قرار دادن $t=۴/\circ\,\text{s}$ ، $g=۹/۸\,\text{m/s}^{۲}$ ، $\theta_\circ=۸\circ^\circ$ و $v_y=\circ$ داریم

$$v_\circ=۳۹/۳۸\approx ۴\circ\,\text{m/s} \quad \text{(پاسخ)}$$




**شکل ۴-۱۸** (الف) نمودار پرتاب توپ گلف به سمت یک سطح مرتفع. (ب) زاویهٔ $\theta$ که جهت حرکت توپ را در حین حرکت به دست می‌دهد برحسب زمان رسم شده است.

توپ در $t=۶/\circ\circ\,\text{s}$ فرود می‌آید. با استفاده از معادلهٔ ۴-۲۲ $[y-y_\circ=(v_\circ\sin v_\circ)-\frac{1}{۲}gt^{۲}]$ و قرار دادن $t=۶/\circ\circ\,\text{s}$ ، داریم

$$y-y_\circ=۵۸/۷۷\,\text{m}\approx ۵۹\,\text{m} \quad \text{(پاسخ)}$$

درست در لحظهٔ فرود توپ، سرعت افقی $v_x$ باز هم $v_\circ\cos\theta_\circ$ است؛ با جایگزینی برای $v_\circ$ و $\theta_\circ$ به دست می‌دهد $v_x=۶/۹۱۱\,\text{m/s}$ ، درست در این موقع، با استفاده از معادلهٔ ۴-۲۳ $(v_y=v_\circ\sin\theta_\circ-gt)$ با $t=۶/\circ\circ\,\text{s}$ سرعت قائم آن را به دست می‌آوریم که برابر است با $v_y=-۱۹/۶\circ\,\text{m/s}$. بنابراین، زاویهٔ جهت حرکت توپ در موقع فرود برابر است با

$$\theta=\tan^{-1}\frac{v_y}{v_x}=\tan^{-1}\frac{-۱۹/۶\circ\,\text{m/s}}{۶/۹۱۱\,\text{m/s}}\approx -۷۱^\circ \quad \text{(پاسخ)}$$

## ۴-۷ حرکت دایره‌ای یکنواخت

یک ذره وقتی در **حرکت دایره‌ای یکنواخت** است که روی یک دایره یا یک کمان دایره‌ای با تندی ثابت (*یکنواخت*) حرکت کند. اگرچه تندی تغییر نمی‌کند، با این حال *ذره شتاب دارد* چون جهت سرعت تغییر می‌کند.

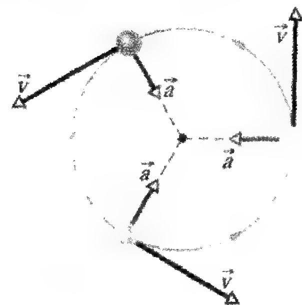
شکل ۴-۱۹، رابطهٔ بین بردارهای سرعت و شتاب را در مرحله‌های مختلفی از حرکت دایره‌ای یکنواخت نشان می‌دهد. هر دو بردار در حین حرکت دارای بزرگی ثابتی هستند ولی جهت آنها دائماً تغییر می‌کند، سرعت، همواره مماس بر دایره در جهت حرکت است. شتاب همواره به طور *شعاعی رو به* مرکز قرار دارد. به این دلیل است که شتاب وابسته به حرکت دایره‌ای، **شتاب مرکزگرا** (به معنی «رو به مرکز») نامیده می‌شود. همان طور که بعداً اثبات می‌کنیم، بزرگی این شتاب برابر است با

$$a=\frac{v^2}{r} \quad \text{(شتاب مرکزگرا)} \qquad (۴\text{-}۳۴)$$

که در آن $r$ شعاع دایره و $v$ تندی ذره است.

به علاوه، در حین چنین شتابی که در آن تندی ثابت می‌ماند، ذره پیرامون دایره (مسافتی به طول $2\pi r$) را در زمان زیر طی می‌کند

$$T=\frac{2\pi r}{v} \quad \text{(دوره)} \qquad (۴\text{-}۳۵)$$



**شکل ۴-۱۹** بردارهای سرعت و شتاب برای حرکت دایره‌ای یکنواخت

$T$ *دورهٔ* چرخش یا به طور ساده *دورهٔ* حرکت نامیده می‌شود. در حالت کلی، این زمان عبارت از زمانی است که در آن ذره دور یک مسیر بسته را دقیقاً یک بار می‌پیماید.

### *اثبات معادلهٔ ۴-۳۴*

برای یافتن بزرگی و جهت شتاب در حرکت دایره‌ای یکنواخت، شکل ۴-۲۰ را در نظر می‌گیریم. در شکل ۴-۲۰ الف، ذرهٔ $P$ با تندی ثابت $v$ به دور دایره‌ای به شعاع $r$ حرکت می‌کند. در لحظهٔ نشان داده شده، مختصات $p$ عبارت‌اند از $y_p$ و $x_p$.

از بخش ۴-۳ به یاد داریم که سرعت $\vec{v}$ یک ذرهٔ در حال حرکت همواره مماس بر مسیر ذره، در مکان آن است. در شکل ۴-۲۰ الف، این بدان معنی است که $\vec{v}$ بر شعاع $r$ رسم شده به سوی مکان ذره عمود است. بنابراین، زاویهٔ $\theta$ که $\vec{v}$ با خط عمود بر $p$ می‌سازد با زاویه‌ای که شعاع $r$ با محور $x$ می‌سازد، برابر است.

مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{v}$ در شکل ۴-۲۰ ب نشان داده شده‌اند. از آنجا می‌توانیم بردار سرعت $\vec{v}$ را چنین بنویسیم

$$\vec{v}=v_x\hat{\mathrm{i}}+v_y\hat{\mathrm{j}}=(-v\sin\theta)\hat{\mathrm{i}}+(v\cos\theta)\hat{\mathrm{j}} \qquad (۴\text{-}۳۶)$$

حال با استفاده از مثلث راستگوشهٔ شکل ۴-۲۰ الف می‌توانیم $\sin\theta$ را با $y_p/r$ و $\cos\theta$ را با $x_p/r$ جایگزین کنیم

$$\vec{v}=\left(-\frac{vy_p}{r}\right)\hat{\mathrm{i}}+\left(\frac{vx_p}{r}\right)\hat{\mathrm{j}} \qquad (۴\text{-}۳۷)$$

برای یافتن شتاب $\vec{a}$ ذره، باید از این معادله نسبت به زمان مشتق بگیریم. توجه کنید که تندی $v$ و شعاع $r$ با زمان تغییر نمی‌کنند و در نتیجه داریم

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\hat{\mathrm{i}}+\left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{r}\right)\hat{\mathrm{j}} \qquad (۴\text{-}۳۸)$$

حال توجه کنید که آهنگ تغییر $y_p$، یعنی $dy_p/dt$، برابر با مؤلفهٔ سرعت $v_y$ است. به همین ترتیب، $dx_p/dt=v_x$ است، و باز با توجه به شکل ۴-۲۰ ب درمی‌یابیم که $v_x=-v\sin\theta$ و $v_y=v\cos\theta$ است. با قراردادن این رابطه‌ها در معادلهٔ ۴-۳۸ به دست می‌آوریم

$$\vec{a}=\left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{\mathrm{i}}+\left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\hat{\mathrm{j}} \qquad (۴\text{-}۳۹)$$

این بردار و مؤلفه‌هایش در شکل ۴-۲۰ پ نشان داده شده‌اند. با استفاده از معادلهٔ ۳-۶ خواهیم داشت

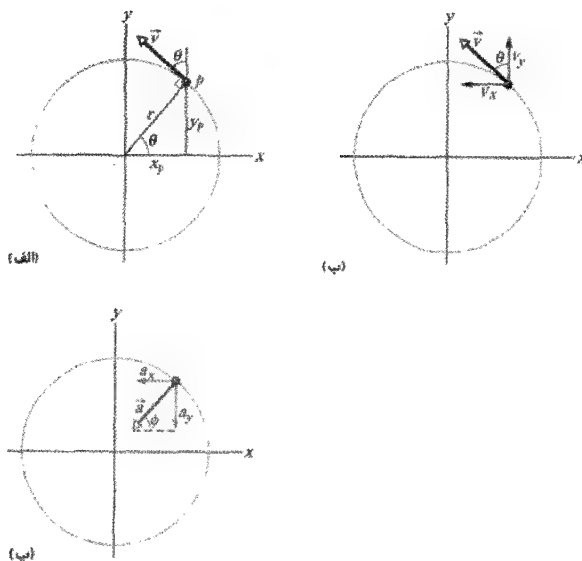
$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}=\frac{v^2}{r}\sqrt{1}=\frac{v^2}{r}$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. برای یافتن جهت $\vec{a}$، زاویهٔ $\phi$ نشان داده شده در شکل ۴-۲۰ پ را به دست می‌آوریم

$$\tan\phi=\frac{a_y}{a_x}=\frac{-(v^2/r)\sin\theta}{-(v^2/r)\cos\theta}=\tan\theta$$

بنابراین، $\phi=\theta$ است که به معنی آن است که $\vec{a}$ در امتداد شعاع $r$ شکل ۴-۲۰ الف و جهت آن رو به مرکز دایره است؛ همان چیزی که می‌خواستیم اثبات کنیم.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۵*** جسمی با تندی ثابت روی یک مسیر دایره‌ای واقع بر صفحهٔ افقی $xy$ که مرکز آن در مبدأ است، حرکت می‌کند. وقتی جسم در $x=-2\text{m}$ است، سرعت آن $-(4\text{m/s})\hat{\mathrm{j}}$ است. (الف) سرعت و (ب) شتاب جسم را در $y=2\text{m}$ به دست آورید.




**شکل ۴-۲۰** ذرهٔ $p$ به طور پاد ساعتگرد در حرکت دایره‌ای یکنواخت است. (الف) نمودار مکان و سرعت $\vec{v}$ آن در یک لحظهٔ معین. (ب) نمودار سرعت $\vec{v}$ و (پ) نمودار شتاب $\vec{a}$.

**مسئلهٔ نمونه ۴-۱۰**

خلبانان هواپیماهای شکاری در چرخشهای سریع دچار اضطراب می‌شوند. هنگامی که بدن خلبان که سر او در مرکز انحنای چرخش است تحت تأثیر شتاب مرکزگرایی قرار می‌گیرد، فشار خون در مغزش کاهش می‌یابد و این، به اختلال در کار مغز می‌انجامد.

چند علامت هشدار دهنده وجود دارد هنگامی که شتاب مرکزگرا به $2g$ یا $3g$ برسد خلبان احساس سنگینی می‌کند. در شتاب حدود $4g$ خلبان اشیاء را سیاه و سفید می‌بیند و به ناحیهٔ «دید تونلی» محدود می‌شود. اگر این شتاب به همین اندازه باقی بماند یا افزایش یابد، بینایی او مختل و پس از آن خلبان بیهوش می‌شود. این حالت به شرایط $g$-LOG معروف است که مخفف «فقدان هوشیاری بر اثر افزایش g»[1] است.

برای خلبانی که هواپیمای او با سرعت $\vec{v}_i = (۴۰۰\hat{i} + ۵۰۰\hat{j})\text{m/s}$ وارد مسیری دایره‌ای و افقی شده و پس از $۲۴/۰\text{s}$ با سرعت $\vec{v}_f = (-۴۰۰\hat{i} - ۵۰۰\hat{j})\text{m/s}$ از این مسیر خارج می‌شود، بزرگی شتاب هواپیما، برحسب $g$، چقدر بوده است؟

**نکته‌های کلیدی** فرض می‌کنیم که دور زدن با حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام گرفته باشد. در این صورت، شتاب خلبان مرکزگرا و بزرگی $a$ با رابطهٔ ۴-۳۴ $(a = v^۲/R)$ داده می‌شود که $R$ شعاع دایره است. همچنین، زمان لازم برای یک دور کامل، دورهٔ تناوب است که با رابطهٔ ۴-۳۵ $(T = ۲\pi R/v)$ داده می‌شود.

***محاسبه‌ها:*** چون شعاع $R$ را نمی‌دانیم، پس معادلهٔ ۴-۳۵ را برای $R$ حل و در معادلهٔ ۴-۳۴ جایگزین می‌کنیم، خواهیم داشت

$$a = \frac{۲\pi v}{T}$$

در اینجا تندی $v$ (ثابت) برابر بزرگی سرعت در حین دور زدن است. مؤلفه‌های سرعت اولیه را در معادلهٔ ۳-۶ قرار می‌دهیم

$$v = \sqrt{(۴۰۰\text{m/s})^۲ + (۵۰۰\text{m/s})^۲} = ۶۴۰/۳۱\text{m/s}$$

برای به دست آوردن دورهٔ تناوب $T$ حرکت، ابتدا توجه کنید که سرعت نهایی وارون سرعت اولیه است. این بدان معنی است که هواپیما قسمت مقابل دایره نسبت به نقطهٔ اولیه را ترک می‌کند و باید نصف دایره را در $۲۴/۰\text{s}$ طی کرده باشد. بنابراین، برای یک دایرهٔ کامل $T = ۴۸/۰\text{s}$ طول خواهد کشید. با جایگزینی این مقدارها در معادله برای $a$، داریم

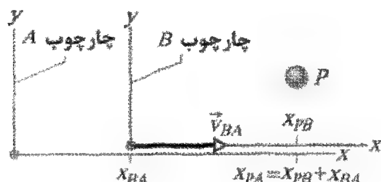
$$a = \frac{۲\pi(۶۴۰/۳۱\text{m/s})}{۴۸/۰\text{s}} = ۸۳/۸۱\text{m/s}^۲ \approx ۸/۶g \quad \text{(پاسخ)}$$

## ۴-۸ حرکت نسبی در یک بعد

فرض کنید که یک مرغابی با تندی $۳۰\text{km/h}$ رو به شمال پرواز می‌کند. از دید مرغابی دیگری که [با همان تندی] در کنار آن پرواز می‌کند، مرغابی اول ساکن به نظر می‌رسد. به عبارت دیگر، سرعت یک ذره به **چارچوب مرجعی** که مشاهده یا اندازه‌گیری در آن انجام می‌شود بستگی دارد. برای منظور ما، چارچوب مرجع، یک شیء فیزیکی است که دستگاه مختصات خود را به آن متصل می‌کنیم. این شیء فیزیکی در زندگی روزمرهٔ ما زمین است. برای مثال، تندی ثبت شده در یک برگهٔ جریمهٔ رانندگی همواره نسبت به زمین اندازه‌گیری شده است. اگر افسر پلیس در هنگام اندازه‌گیری سرعت اتومبیل شما در حال حرکت باشد، تندی اتومبیل نسبت به او تغییر خواهد کرد.

فرض کنید شخصی (واقع در مبداء چارچوب مرجع $A$ در شکل ۴-۲۱) در کنار یک بزرگراه پارک کرده است؛ او اتومبیل $P$ «ذره» را مشاهده می‌کند که به سرعت از کنارش می‌گذرد. شخص دیگری (واقع در مبداء چارچوب مرجع $B$) که در حال رانندگی در امتداد بزرگراه با تندی ثابت است نیز اتومبیل $P$ را مشاهده می‌کند. فرض کنید که هر دو آنها مکان اتومبیل را در یک لحظهٔ معین اندازه‌گیری کنند. از شکل ۴-۲۱ درمی‌یابیم که

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA} \qquad (۴-۴۰)$$




**شکل ۴-۲۱** اشخاص واقع در چارچوب $A$ و چارچوب $B$ در حالی اتومبیل $P$ را مشاهده می‌کنند که $B$ و $P$ با سرعتهای متفاوتی بر امتداد محور $x$ مشترک دو چارچوب حرکت می‌کنند. در لحظهٔ نشان داده شده، $x_{BA}$ مختصهٔ $B$ در چارچوب $A$ است. همچنین $x_{PB}$ مختصهٔ $P$ در چارچوب $B$ و $x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$ مختصهٔ $P$ در چارچوب $A$ است.

---
1. g-induced loss of consciousness

این معادله چنین خوانده می‌شود: «$x_{PA}$، مختصهٔ اندازه‌گیری شدهٔ اتومبیل $P$ توسط $A$ *برابر است با* $x_{PB}$ ، مختصهٔ اندازه‌گیری شدهٔ اتومبیل $P$ توسط $B$ بعلاوهٔ $x_{BA}$ ، مختصهٔ اندازه‌گیری شدهٔ $B$ توسط $A$.» توجه کنید که این طرز خواندن چگونه بر اساس ترتیب زیرنویسها صورت می‌گیرد.

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از معادلهٔ ۴-۴۰، به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dt}(x_{PA})=\frac{d}{dt}(x_{PB})+\frac{d}{dt}(x_{BA})$$

بنابراین، مؤلفه‌ها و سرعت با رابطهٔ زیر به هم مربوط‌اند

$$v_{PA}=v_{PB}+v_{BA} \qquad (۴-۴۱)$$

این معادله چنین خوانده می‌شود: «$v_{PA}$، سرعت اندازه‌گیری شدهٔ اتومبیل $P$ توسط $A$ *برابر است با* $v_{PB}$ ، سرعت اندازه‌گیری شدهٔ اتومبیل $P$ توسط $B$، به علاوهٔ $v_{BA}$ ، سرعت اندازه‌گیری شدهٔ $B$ توسط $A$.»جملهٔ $v_{BA}$ سرعت چارچوب $B$ نسبت به چارچوب $A$ است.

در اینجا فقط چارچوبهایی را که با سرعت ثابت نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند، در نظر می‌گیریم. در مثال ما، این بدان معناست که چارچوب $B$ همواره با سرعت ثابت $v_{BA}$ نسبت به چارچوب $A$ حرکت می‌کند. با این حال، اتومبیل $P$ (یا همان ذرهٔ در حال حرکت) می‌تواند تندی و جهت حرکتش را تغییر دهد. (به این معنی که می‌تواند شتاب بگیرد.)

برای آنکه شتاب $P$ نسبت به دو چارچوب را به هم مربوط کنیم، از معادلهٔ ۴-۴۱ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$\frac{d}{dt}(v_{PA})=\frac{d}{dt}(v_{PB})+\frac{d}{dt}(v_{BA})$$

چون $v_{BA}$ ثابت است، آخرین جمله صفر می‌شود و خواهیم داشت

$$a_{PA}=a_{PB} \qquad (۴-۴۲)$$

به عبارت دیگر:

> ناظرهای واقع در چارچوبهای مرجع مختلف که با سرعت ثابت نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند، برای یک ذرهٔ در حال حرکت، شتاب یکسانی را اندازه می‌گیرند.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۱۱

در شکل ۴-۲۱ فرض کنید سرعت شخص واقع در چارچوب $B$ نسبت به شخص واقع در چارچوب $A$ مقدار ثابت $v_{BA}=۵۲\text{km/h}$ است و اتومبیل $P$ در جهت منفی محور $x$ حرکت می‌کند.

(الف) اگر شخص واقع در چارچوب $A$ برای اتومبیل $P$ سرعت ثابت $v_{PA}=-۷۸\text{km/h}$ را اندازه بگیرد، سرعت $v_{PB}$ که شخص واقع در چارچوب $B$ اندازه می‌گیرد چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** می‌توانیم چارچوب مرجع $A$ را به شخص واقع در ان و چارچوب مرجع $B$ را به شخص واقع در آن متصل کنیم. به علاوه، به دلیل اینکه دو چارچوب با سرعت ثابتی نسبت به یکدیگر در امتداد محور $x$ حرکت می‌کنند، می‌توانیم از معادلهٔ ۴-۴۱ $(v_{PA}=v_{PB}+v_{BA})$ برای ربط دادن $v_{PB}$ به $v_{PA}$ و $v_{BA}$ استفاده کنیم.

***محاسبه‌ها:*** داریم

$$-۷۸\text{km/h}=v_{PB}+۵۲\text{km/h}$$

و از آنجا

$$v_{PB}=-۱۳۰\ \text{km/h} \qquad \text{(پاسخ)}$$

***اظهار نظر:*** اگر اتومبیل $P$ توسط طنابی پیچیده شده به دور قرقره به اتومبیل شخص واقع در چارچوب $B$ متصل شده بود، در هنگام دورشدن اتومبیلها از همدیگر، طناب با تندی ۱۳۰ km/h از قرقره باز می‌شد.

(ب) اگر اتومبیل $P$ نسبت به $A$ (و در نتیجه نسبت به زمین) ترمز بگیرد و پس از زمان $t=۱۰\text{s}$ متوقف شود، شتاب ثابت $a_{PA}$ اتومبیل $P$ نسبت به $A$ چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** برای محاسبهٔ شتاب اتومبیل $P$ *نسبت به چارچوب* $A$، باید از سرعتهای اتومبیل *نسبت به چارچوب* $A$ استفاده کنیم. چون شتاب ثابت است می‌توانیم از معادلهٔ ۲-۱۱ $(v=v_۰+at)$ برای ربط دادن شتاب به سرعتهای اولیه و نهایی $P$ استفاده کنیم.

***محاسبه‌ها:*** سرعت اولیهٔ $P$ نسبت به $A$ برابر $v_{PA}=-۷۸\text{km/h}$ و سرعت نهایی آن صفر است. بنابراین، معادلهٔ ۲-۱۱ به دست می‌دهد

$$a_{PA}=\frac{v-v_۰}{t}=\frac{۰-(-۷۸\text{km/h})}{۱۰\text{s}}\ \frac{۱\text{m/s}}{۳/۶\text{km/h}}=۲/۲\text{m/s}^۲ \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) شتاب $a_{PB}$ اتومبیل $P$ نسبت به چارچوب $B$ در حین ترمز گرفتن چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** برای محاسبهٔ شتاب اتومبیل $P$ *نسبت به چارچوب* $B$، باید از سرعتهای اتومبیل *نسبت به چارچوب* $B$ استفاده کنیم.

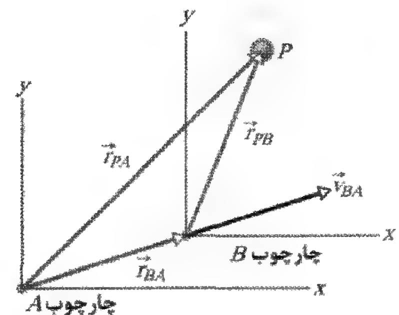
***محاسبه‌ها:*** سرعت اولیهٔ $P$ نسبت به چارچوب $B$ را از قسمت (الف) می‌دانیم: $v_{PB}=-۱۳۰\ \text{km/h}$. سرعت نهایی $P$ نسبت به چارچوب $B$ برابر $-۵۲\text{km/h}$ است (این سرعت اتومبیل ترمز گرفته نسبت به چارچوب $B$ در حال حرکت است) بنابراین،

$$a_{PB}=\frac{v-v_۰}{t}=\frac{-۵۲\text{km/h}-(-۱۳۰\ \text{km/h})}{۱۰\text{s}}\ \frac{۱\text{m/s}}{۳/۶\text{km/h}}=۲/۲\text{m/s}^۲ \qquad \text{(پاسخ)}$$

***اظهار نظر:*** ما باید این نتیجه را پیش‌بینی می‌کردیم: چون شخص واقع در چارچوب $A$ و شخص واقع در چارچوب $B$ سرعت نسبی ثابتی دارند، آنها برای اتومبیل شتاب یکسانی را اندازه می‌گیرند.

## ۴-۹ حرکت نسبی در دو بعد

دوباره دو ناظر، ذرهٔ در حال حرکت $P$ را از مبدأهای چارچوبهای مرجع $A$ و $B$، در حالی که $B$ نسبت به $A$ با سرعت ثابت $\vec{v}_{BA}$ حرکت می‌کند، مشاهده می‌کنند. (محورهای وابسته به این دو چارچوب موازی باقی می‌مانند.) شکل ۴-۲۲ یک لحظهٔ معین از حرکت را نشان می‌دهد. در این لحظه، بردار مکان مبداء $B$ نسبت به مبداء $A$، $\vec{r}_{BA}$ است. همچنین بردارهای مکان ذرهٔ $P$ نسبت به مبدأهای $A$ و $B$ به ترتیب $\vec{r}_{PA}$ و $\vec{r}_{PB}$ است. با ترکیب بردارها به صورت نهادن ابتدای یک بردار بر انتهای دیگری، می‌توانیم بردارهای مکان این بردارها را چنین به یکدیگر مربوط کنیم




**شکل ۴-۲۲** چارچوب $B$ سرعت دو بعدی ثابت $v_{BA}$ را نسبت به چارچوب $A$ دارد. بردار مکان چارچوب $B$ نسبت به چارچوب $A$، $\vec{r}_{BA}$ است. بردارهای مکان ذرهٔ $P$ نسبت به چارچوبهای $A$ و $B$، به ترتیب $\vec{r}_{PA}$ و $\vec{r}_{PB}$ است.

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} \qquad (۴-۴۳)$$

با گرفتن مشتق نسبت به زمان از این معادله، می‌توانیم سرعتهای $\vec{v}_{PA}$ و $\vec{v}_{PB}$ ذرهٔ $P$ نسبت به ناظرها را به هم مربوط کنیم

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \qquad (۴-۴۴)$$

با گرفتن مشتق نسبت به زمان از این معادله، می‌توانیم شتابهای $\vec{a}_{PA}$ و $\vec{a}_{PB}$ ذرهٔ $P$ نسبت به ناظرها را به هم مربوط کنیم. ولی توجه داشته باشید که چون $\vec{v}_{BA}$ ثابت است، مشتق آن نسبت به زمان صفر است. بنابراین داریم

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} \qquad (۴-۴۵)$$

مثل حالت حرکت یک بعدی، قاعدهٔ زیر برقرار است: ناظرهای واقع در چارچوبهای مرجعی که با سرعت ثابت نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند، شتاب *یکسانی* را برای یک ذرهٔ در حال حرکت اندازه می‌گیرند.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۱۲**

در شکل ۴-۲۳ الف در حالی که خلبان، هواپیما را در یک هوای بادی که باد به طور یکنواخت رو به شرق شمال می‌وزد، به سمت نقطه‌ای در جنوب شرق تنظیم می‌کند، هواپیما رو به شرق حرکت می‌کند. سرعت هواپیما نسبت به باد $\vec{v}_{PW}$، بزرگی آن (تندی نسبت به باد) $۲۱۵ km/h$ و با جنوب شرق زاویهٔ $\theta$ دارد. سرعت باد نسبت به زمین $\vec{v}_{WG}$ با تندی $۶۵/۰ km/h$ است و با شرق شمال زاویهٔ $۲۰°$ دارد. بزرگی سرعت $\vec{v}_{PG}$ هواپیما نسبت به زمین و زاویهٔ $\theta$ چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** این وضعیت، مشابه مورد شکل ۴-۲۲ است. در اینجا ذرهٔ متحرک $P$ هواپیما است، چارچوب $A$ متصل به زمین ($G$ بنامید)، و چارچوب $B$ متصل به باد است ($W$ بنامید). لازم است که یک نمودار برداری مشابه شکل ۴-۲۲، ولی این بار با استفاده از سه بردار سرعت بنا کنیم.

***محاسبه‌ها:*** نخست جمله‌ای که این سه بردار در شکل ۴-۲۲ ب را به هم مربوط می‌کند تشکیل می‌دهیم

| سرعت باد نسبت به زمین (WG) | + | سرعت هواپیما نسبت به باد (PW) | = | سرعت هواپیما نسبت به زمین (PG) |
|---|---|---|---|---|

این رابطه را می‌توان برحسب نمادگذاری برداری چنین نوشت

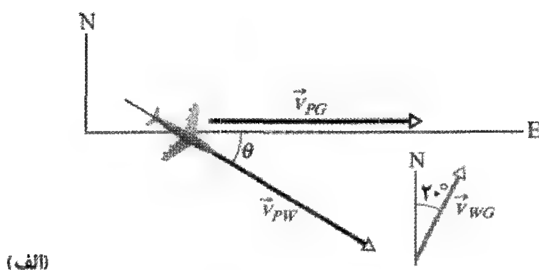
$$\vec{v}_{PG} = \vec{v}_{PW} + \vec{v}_{WG} \qquad (۴-۴۶)$$

ما به دنبال این هستیم که بردارها را در دستگاه مختصات شکل ۴-۲۳ ب به مؤلفه‌ها تجزیه کنیم و آنگاه معادلهٔ ۴-۴۶ را به صورت محور به محور حل کنیم. برای مؤلفه‌های $y$ داریم

$$v_{PG,y} = v_{PW,y} + v_{WG,y}$$

یا

$$۰ = -(۲۱۵ km/h)\sin\theta + (۶۵/۰ km/h)(\cos ۲۰°)$$







**شکل ۴-۲۳** هواپیمایی در یک هوای بادی حرکت می‌کند.

با حل این معادله برای $\theta$ خواهیم داشت

$$\theta = \sin^{-1}\frac{(۶۵/۰\,\text{km/h})(\cos ۲۰°)}{۲۱۵\,\text{km/h}} = ۱۶/۵° \qquad \text{(پاسخ)}$$

به همین ترتیب، برای مؤلفه‌های $x$ داریم

$$v_{PG,x} = v_{PW,x} + v_{WG,x}$$

در اینجا چون $\vec{v}_{PG}$ موازی محور $x$ است، مؤلفهٔ $v_{PG,x}$ برابر با بزرگی $v_{PG}$ است. با قراردادن این نمادگذاری و مقدار $\theta = ۱۶/۵°$، خواهیم داشت

$$v_{PG} = (۲۱۵\,\text{km/h})(\cos ۱۶/۵°) + (۶۵/۰\,\text{km/h})(\sin ۲۰°) = ۲۲۸\,\text{km/h} \qquad \text{(پاسخ)}$$

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**بردار مکان** مکان یک ذره نسبت به مبداء یک دستگاه مختصات با *بردار مکان* $\vec{r}$ مشخص می‌شود که برحسب نمادگذاری بردارهای یکه چنین است

$$\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۴-۱)$$

در اینجا $x\hat{\mathrm{i}}$ ، $y\hat{\mathrm{j}}$ و $z\hat{\mathrm{k}}$ مؤلفه‌های برداری مکان $\vec{r}$، و $x$، $y$ و $z$ مؤلفه‌های نرده‌ای آن (یا همان مختصات ذره) هستند. بردار مکان یا با بزرگی و یک یا دو زاویه برای جهت‌گیری یا مؤلفه‌های نرده‌ای بردار توصیف می‌شود.

**جابه‌جایی** اگر یک ذره به گونه‌ای حرکت کند که بردار مکان آن از $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$ تغییر کند، *جابه‌جایی* $\Delta\vec{r}$ ذره چنین است

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (۴-۲)$$

جابه‌جایی را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\mathrm{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathrm{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathrm{k}} \qquad (۴-۳)$$

$$= \Delta x\hat{\mathrm{i}} + \Delta y\hat{\mathrm{j}} + \Delta z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۴-۴)$$

**سرعت میانگین و سرعت لحظه‌ای** اگر ذره‌ای در بازهٔ زمانی $\Delta t$ به اندازهٔ $\Delta\vec{r}$ جابه‌جا شود، *سرعت میانگین* $\vec{v}_{\text{avg}}$ برای این بازهٔ زمانی چنین است

$$\vec{v}_{\text{avg}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (۴-۸)$$

وقتی $\Delta t$ در معادلهٔ ۴-۸ به سمت صفر میل کند، $\vec{v}_{\text{avg}}$ به حدی موسوم به سرعت یا سرعت *لحظه‌ای* $\vec{v}$ میل می‌کند

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (۴-۱۰)$$

که برحسب نمادگذاری بردارهای یکه می‌توان آن را چنین نوشت

$$\vec{v} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} + v_z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۴-۱۱)$$

که در آن $v_x = dx/dt$ ، $v_y = dy/dt$ و $v_z = dz/dt$ است. سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$ یک ذره همواره بر مسیر ذره در مکان آن مماس است.

**شتاب میانگین و شتاب لحظه‌ای** اگر سرعت یک ذره در بازهٔ زمانی $\Delta t$ از $\vec{v}_1$ به $\vec{v}_2$ تغییر کند، *شتاب میانگین* آن در طی زمان $\Delta t$ چنین است

$$\vec{a}_{\text{avg}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (۴-۱۵)$$

وقتی $\Delta t$ در معادلهٔ ۴-۱۵ به سمت صفر میل کند، $\vec{a}_{\text{avg}}$ به یک مقدار حدی موسوم به *شتاب* یا *شتاب لحظه‌ای* $\vec{a}$ میل می‌کند

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (۴-۱۶)$$

که برحسب بردارهای یکه چنین است

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۴-۱۷)$$

که در آن $a_x = dv_x/dt$ ، $a_y = dv_y/dt$ و $a_z = dv_z/dt$ است.

**حرکت پرتابی** *حرکت پرتابی*، حرکت ذره‌ای است که با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_0$ پرتاب شده است، به گونه‌ای که در حین پرواز شتاب افقی ذره صفر و شتاب قائم آن، شتاب سقوط آزاد g- باشد. (سوی بالا به عنوان جهت مثبت در نظر گرفته شده است.) اگر $\vec{v}_0$ برحسب بزرگی (تندی $v_0$) و زاویهٔ $\theta_0$ (نسبت به افق) بیان شود، معادله‌های حرکت در امتداد محورهای افقی و قائم عبارت‌اند از

$$x - x_0 = (v_0\cos\theta_0)t\,, \qquad (۴-۲۱)$$

$$y - y_0 = (v_0\sin\theta_0)t - \frac{۱}{۲}gt^2\,, \qquad (۴-۲۲)$$

$$v_y = v_0\sin\theta_0 - gt\,, \qquad (۴-۲۳)$$

$$v_y^2 = (v_0\sin\theta_0)^2 - ۲g(y - y_0)\,. \qquad (۴-۲۴)$$

**مسیر** ذره در حرکت پرتابی سهموی است و در صورتی که $x_0$ و $y_0$ در معادله‌های ۴-۲۱ تا ۴-۲۴ صفر باشند، با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{۲(v_0\cos\theta_0)^2} \qquad (۴-۲۵)$$

**برد افقی $R$** ذره مسافت افقی از نقطهٔ پرتاب تا نقطه‌ای است که ذره به سطح پرتاب بازمی‌گردد و عبارت است از

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin ۲\theta_0 \qquad (۴-۲۶)$$

**حرکت دایره‌ای یکنواخت** اگر ذره‌ای با تندی ثابت $v$ روی یک دایره یا یک کمان دایره‌ای به شعاع $r$ حرکت کند، در *حرکت دایره‌ای یکنواخت* است و شتاب $\vec{a}$ به بزرگی زیر را دارد

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (۴-۳۴)$$

جهت $\vec{a}$ به سوی مرکز دایره یا کمان دایره‌ای است، و از اینرو به $\vec{a}$ *شتاب مرکزگرا* گفته می‌شود. زمان یک بار دور زدن کامل دایره عبارت است از

$$T = \frac{۲\pi r}{v} \qquad (۴-۳۵)$$

$T$ *دورهٔ چرخش* یا ساده‌تر *دورهٔ حرکت* نامیده می‌شود.

**حرکت نسبی** هرگاه دو چارچوب مرجع $A$ و $B$ با سرعت ثابتی نسبت به یکدیگر حرکت کنند، سرعت ذرهٔ $P$ که توسط ناظری در چارچوب $A$ اندازه‌گیری شده است، با سرعت اندازه‌گیری شده در چارچوب $B$ متفاوت است. دو سرعت اندازه‌گیری شده با رابطهٔ زیر به هم مربوط‌اند

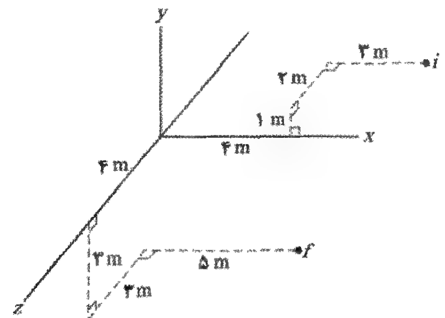
$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}, \qquad (۴۴-۴)$$

که در آن $\vec{v}_{BA}$ سرعت $B$ نسبت به $A$ است. هر دو ناظر، شتاب یکسانی را اندازه می‌گیرند:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} \qquad (۴۵-۴)$$

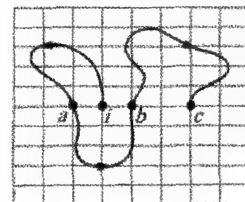
## پرسشها

۱- شکل ۴-۲۴ مکان اولیهٔ $i$ و مکان نهایی $f$ یک ذره را نشان می‌دهد. برحسب بردارهای یکه (الف) بردار مکان اولیهٔ $\vec{r}_i$ و (ب) بردار مکان نهایی $\vec{r}_f$ را به دست آورید. (پ) مؤلفهٔ $x$ بردار جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ ذره را تعیین کنید.




شکل ۴-۲۴ پرسش ۱

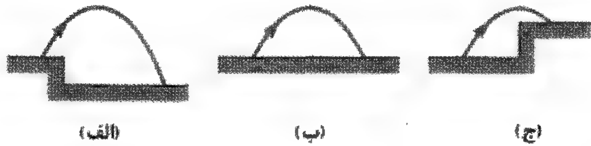
۲- شکل ۴-۲۵ مسیر حرکت یک راسو را که در جستجوی غذا از نقطهٔ ابتدایی $i$ راه افتاده است، نشان می‌دهد. راسو برای رفتن از هر نقطهٔ نشان داده شده به نقطهٔ نشان داده شده بعدی، زمان یکسان $T$ را طی می‌کند. نقطه‌های $a$، $b$ و $c$ را بنابر بزرگی سرعت میانگین راسو برای رسیدن به آنها از نقطهٔ آغازین $i$، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.




شکل ۴-۲۵ پرسش ۲

۳- فرض کنید موشکی از روی زمین با یکی از بردارهای سرعت اولیهٔ زیر شلیک می‌شود: (۱) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} + 70\hat{j}$، (۲) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} + 70\hat{j}$، (۳) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} - 70\hat{j}$، (۴) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} - 70\hat{j}$. در دستگاه مختصات انتخابی، $x$ در سطح افقی زمین و $y$ رو به بالا افزایش می‌یابد. (الف) بردارها را بنابر تندی شلیک موشک، از بیشترین تا کمترین، مرتب کنید. (ب) بردارها را بنابر زمان پرواز موشک، از بیشترین تا کمترین، مرتب کنید.

۴- شکل ۴-۲۶ سه وضعیت را نشان می‌دهد که در آنها پرتابه‌های مشابهی با تندیها و زاویه‌های اولیهٔ یکسانی از زمین (در یک تراز یکسان) پرتاب شده‌اند. با این حال، پرتابه‌ها در همان سطح تراز اولیه به زمین برخورد نمی‌کنند. این سه وضعیت را بنابر تندیهای نهایی پرتابه‌ها درست پیش از برخورد به زمین، از بیشترین تا کمترین، مرتب کنید.

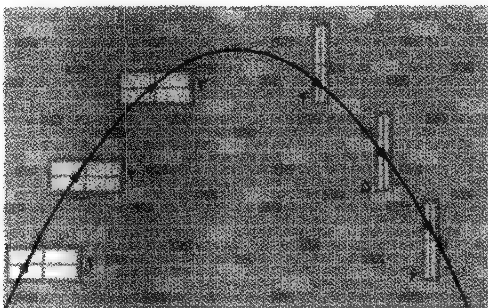



شکل ۴-۲۶ پرسش ۴

۵- وقتی شهر پاریس در جنگ جهانی اول از فاصلهٔ ۱۰۰ کیلومتری به وسیلهٔ توپ بمباران می‌شد، توپها با زاویه‌ای بزرگتر از $45°$ شلیک می‌شدند تا برد بیشتری داشته باشند، حتی تا دو برابر برد با زاویهٔ $45°$. آیا این نتیجه بدان معناست که چگالی هوا در ارتفاعهای بالا با ارتفاع افزایش می‌یابد یا کاهش؟

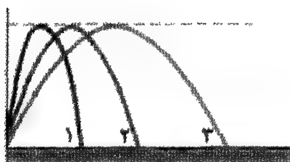
۶- در شکل ۴-۲۷ یک نارنگی پرتاب شده از پنجره‌های هم اندازهٔ ۱، ۲ و ۳ که در فاصله‌های عمودی منظمی قرار گرفته‌اند عبور می‌کند. پنجره‌ها را بنابر (الف) زمانی که نارنگی از آنها می‌گذرد و (ب) تندی میانگین نارنگی در حین عبور، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.

سپس نارنگی رو به پایین از پنجره‌های هم اندازهٔ ۴، ۵ و ۶ که در فاصله‌های افقی به طور نامنظمی قرار گرفته‌اند می‌گذرد. پنجره‌ها را بنابر (پ) زمانی که نارنگی از آنها می‌گذرد و (ت) تندی میانگین نارنگی در حین عبور، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.



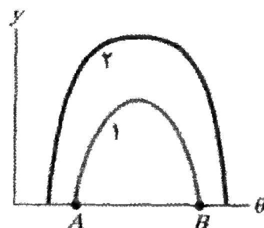

شکل ۴-۲۷ پرسش ۶

۷- شکل ۴-۲۸ سه مسیر را برای توپ فوتبالی که از سطح زمین شوت شده است نشان می‌دهد. با چشمپوشی از اثر هوا، مسیرها را بنابر (الف) زمان پرواز، (ب) مؤلفهٔ قائم سرعت اولیه، (پ) مؤلفهٔ افقی سرعت اولیه و (ت) تندی اولیه، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.




شکل ۴-۲۸ پرسش ۷

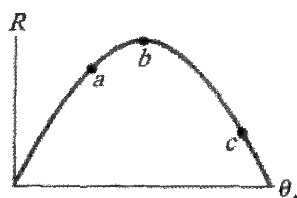
۸- تنها استفادهٔ مناسب از یک میوهٔ گندیده، پرتاب آن است. منحنی ۱ در شکل ۴-۲۹، ارتفاع $y$ یک میوهٔ پرتاب شده را برحسب زاویهٔ $\theta$ بین بردار سرعت و بردار شتاب آن در حین پرواز به دست می‌دهد. (الف) کدامیک از نقطه‌های مشخص شده با حرفهای $A$ و $B$ مربوط به برخورد میوه با زمین است؟ (ب) منحنی ۲، منحنی مشابهی است که در آن تندی پرتاب یکسان، ولی زاویهٔ پرتاب متفاوت است. آیا اکنون میوهٔ پرتاب شده در نقطه‌ای دورتر از نقطهٔ پرتاب، با زمین برخورد می‌کند یا نزدیکتر؟



**شکل ۴-۲۹** پرسش ۸

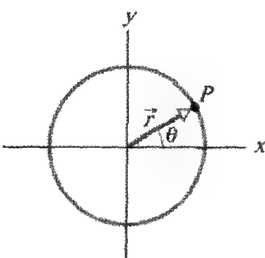
۹- هواپیمایی که با تندی ثابت $350 km/h$ بالای سطح زمین به طور افقی پرواز می‌کند، بستهٔ غذایی را رها می‌کند. از اثر هوا روی بسته چشمپوشی کنید. مؤلفه‌های (الف) قائم و (ب) افقی سرعت اولیهٔ بسته چیست؟ (پ) مؤلفهٔ افقی سرعت بسته درست پیش از برخورد با زمین چیست؟ (ت) اگر تندی هواپیما $450 km/h$ باشد، آیا مدت زمان سقوط بسته نسبت به قبل بیشتر می‌شود یا کمتر، یا با آن مساوی است؟

۱۰- توپی از سطح زمین با تندی اولیهٔ معینی شوت شده است. شکل ۴-۳۰، برد $R$ توپ را بر حسب زاویهٔ پرتاب $\theta_0$ نشان می‌دهد. سه نقطهٔ مشخص شده با حروف در شکل را بنابر (الف) زمان پرواز کلّ توپ و (ب) تندی توپ در ارتفاع بیشینه، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.



**شکل ۴-۳۰** پرسش ۱۰

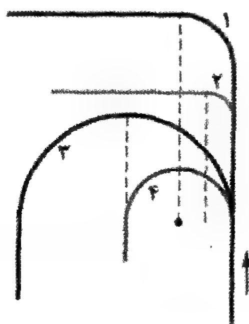
۱۱- در شکل ۴-۳۱، ذرهٔ $P$ در حال حرکت دایره‌ای یکنواختی است که مرکز آن در مبداء دستگاه مختصات $xy$ قرار دارد. در چه مقدارهایی از $\theta$، بزرگی مؤلفهٔ قائم $r_y$ بردار مکان بیشترین است؟ (ب) در چه مقدارهایی از $\theta$، بزرگی مؤلفهٔ قائم $v_y$ سرعت ذره بیشترین است؟ (پ) در چه مقدارهایی از $\theta$، بزرگی مؤلفهٔ قائم $a_y$ شتاب ذره بیشترین است؟



**شکل ۴-۳۱** پرسش ۱۱

۱۲- (الف) آیا ممکن است ذره‌ای در حین حرکت با تندی ثابت، شتاب داشته باشد؟ آیا ممکن است یک منحنی را با (ب) شتاب صفر و (پ) یک شتاب با بزرگی ثابت دور زد؟

۱۳- شکل ۴-۳۲، چهار مسیر (نیم یا ربع دایره) را نشان می‌دهد که یک قطار می‌تواند با تندی ثابت روی آنها حرکت کند. مسیرها را بنابر بزرگی شتاب وارد به قطار در هر یک از آنها، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.



**شکل ۴-۳۲** پرسش ۱۳

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
●●●- تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

### بخش ۴-۲ مکان و جابه‌جایی

●۱- پوزیترونی جابه‌جایی $\Delta\vec{r}=(2/0\,m)\hat{i}-(3/0\,m)\hat{j}+(6/0\,m)\hat{k}$ را انجام می‌دهد و در بردار مکان نهایی $\vec{r}=(3/0\,m)\hat{j}-(4/0\,m)\hat{k}$ متوقف می‌شود. بردار مکان اولیهٔ پوزیترون چه بوده است؟

●۲- مختصات تخم هندوانه‌ای به این قرار است: $z=0\,m$، $y=8/0\,m$ و $x=-5/0\,m$. بردار مکان آن را (الف) برحسب نمادگذاری بردارهای یکه و به صورت (ب) بزرگی و (پ) زاویه نسبت به محور $x$ مثبت به دست آورید. (ت) این بردار را در دستگاه مختصات راستگرد رسم کنید. اگر این تخم هندوانه به مختصات $(3/0\,m, 0\,m, 0\,m)$ برده شود، جابه‌جایی آن (ث) برحسب بردارهای یکه و به صورت (ج) بزرگی و (چ) زاویه نسبت به محور $x$ مثبت چه می‌شود؟

●۳- بردار مکان یک الکترون $\vec{r}=(5/0\,m)\hat{i}-(3/0\,m)\hat{j}+(2/0\,m)\hat{k}$ است. (الف) بزرگی $\vec{r}$ را پیدا کنید. (ب) این بردار را در دستگاه مختصات راستگرد رسم کنید.

●●۴- اندازهٔ عقربهٔ دقیقه شمار یک ساعت دیواری از نوک عقربه تا محوری که حول آن می‌چرخد، $10\,cm$ است. می‌خواهیم بزرگی و زاویهٔ بردار جابه‌جایی نوک عقربه را برای سه بازهٔ زمانی تعیین کنیم. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ از یک ربع پس از یک ساعت تا نیم ساعت پس از آن چیست؟ (پ)

بزرگی و (ت) زاویهٔ در نیم ساعت بعدی چیست؟ (ث) بزرگی و (ج) زاویه در یک ساعت بعدی چیست؟

**بخش ۴-۳ سرعت میانگین و سرعت لحظه‌ای**

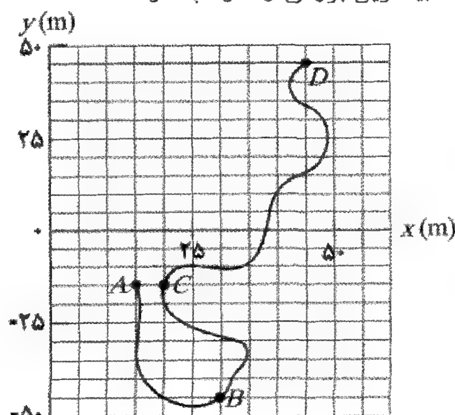
●۵- بردار مکان یک یون در آغاز $\vec{r}=5/0\hat{i}-6/0\hat{j}+2/0\hat{k}$ و ۱۰ ثانیه پس از آن $\vec{r}=-2/0\hat{i}+8/0\hat{j}-2/0\hat{k}$، همگی برحسب متر، است. $\vec{v}_{avg}$ در طی زمان 10s برحسب بردارهای یکه چیست؟

●۶- مکان الکترونی با $\vec{r}=3/00t\hat{i}-4/00t^2\hat{j}+2/00\hat{k}$، که در آن $t$ برحسب ثانیه و $\vec{r}$ برحسب متر است، داده شده است. (الف) سرعت الکترون $\vec{v}(t)$ برحسب بردارهای یکه چیست؟ در $t=2/00s$، $\vec{v}$ (ب) برحسب بردارهای یکه و به صورت (پ) بزرگی و (ت) زاویه نسبت به محور $x$ مثبت چیست؟

●۷- قطاری با تندی ثابت 60/0km/h به مدت 40/0min رو به شرق، سپس به مدت 20/0min در جهت 50/0° شرق شمال، و سرانجام به مدت 50/0min رو به غرب حرکت می‌کند. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ سرعت میانگین قطار در طی این سفر چقدر است؟ SSM

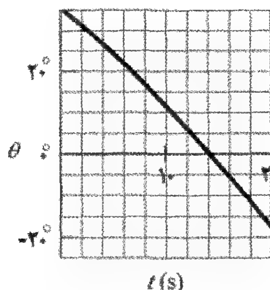
●●۸- هواپیمایی از شهر $A$ به شهر $B$ در مدت 45/0min به اندازهٔ 483km رو به شرق، و سپس از شهر $B$ به شهر $C$ در مدت 1/50h به اندازهٔ 966km رو به جنوب پرواز می‌کند. برای کل سفر، (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ جابه‌جایی هواپیما چقدر است؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت سرعت میانگین، و (ث) تندی میانگین هواپیما را به دست آورید.

●●۹- شکل ۴-۳۳ مسیر حرکت سنجابی را که روی سطح زمین از نقطهٔ $A$ (در زمان $t=0$)، به نقطه‌های $B$ (در زمان $t=5/00min$)، $C$ (در زمان $t=10/0min$)، و سرانجام $D$ (در زمان $t=15/0min$) می‌رود نشان می‌دهد. سرعت‌های میانگین سنجاب از نقطهٔ $A$ به هر یک از سه نقطهٔ دیگر را در نظر بگیرید. از این سه سرعت میانگین، (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ آنکه کمترین بزرگی را دارد چقدر است؟ (پ) بزرگی و (ت) زاویهٔ آنکه بیشترین بزرگی را دارد چقدر است؟



شکل ۴-۳۳ مسئلهٔ ۹

●●●۱۰- بردار مکان $\vec{r}=5/00t\hat{i}+(et+ft^2)\hat{j}$، مکان ذره‌ای را برحسب زمان $t$ مشخص می‌کند. بردار $\vec{r}$ برحسب متر، $t$ برحسب ثانیه، و ضریبهای $e$ و $f$ ثابت‌اند. شکل ۴-۳۴، زاویهٔ $\theta$ جهت حرکت ذره را برحسب تابعی از زمان به دست می‌دهد. ($\theta$ نسبت به سوی مثبت محور $x$ اندازه‌گیری شده است). (الف) ضریب $e$ و (ب) ضریب $f$ را به همراه یکاهایشان به دست آورید.



شکل ۴-۳۴ مسئلهٔ ۱۰

**بخش ۴-۴ شتاب میانگین و شتاب لحظه‌ای**

●۱۱- ذره‌ای چنان حرکت می‌کند که معادلهٔ مکان آن (به متر) برحسب تابعی از زمان (به ثانیه) چنین است: $\vec{r}=\hat{i}+4t^2\hat{j}+t\hat{k}$. عبارتهایی برای (الف) سرعت ذره و (ب) شتاب آن بر حسب تابعهایی از زمان بنویسید. SSM

●۱۲- پروتونی در آغاز دارای $\vec{v}=4/0\hat{i}-2/0\hat{j}+3/0\hat{k}$ و پس از 4/0s دارای $\vec{v}=-2/0\hat{i}-2/0\hat{j}+5/0\hat{k}$ (برحسب متر بر ثانیه) است. برای آن 4/0s، مطلوب است (الف) بزرگی شتاب میانگین $a_{avg}$ پروتون برحسب نمادگذاری بردار یکه، (ب) بزرگی $a_{avg}$ و (پ) زاویهٔ بین $a_{avg}$ و جهت مثبت محور $x$.

●۱۳- مکان $\vec{r}$ ذره‌ای که در حال حرکت در صفحهٔ $xy$ است با رابطهٔ $\vec{r}=(2/00t^3-5/00t)\hat{i}+(6/00-7/00t^4)\hat{j}$ داده می‌شود که $\vec{r}$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه (الف) $\vec{r}$، (ب) $\vec{v}$، و (پ) $\vec{a}$ را به ازای $t=2/00s$ محاسبه کنید. (ت) زاویهٔ بین محور $x$ مثبت و خط مماس بر مسیر ذره در $t=2/00s$ چیست؟

●۱۴- در یک لحظهٔ معین، دوچرخه سواری که به فاصلهٔ 40m از فوارهٔ یک پارک رو به شرق قرار دارد، رو به جنوب با تندی 10/0m/s شروع به حرکت می‌کند. 30/0s بعد که دوچرخه سوار به فاصلهٔ 40/0m رو به شمال پارک است، با تندی 10/0m/s رو به شرق حرکت می‌کند. در این بازهٔ 30/0s (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی، (پ) بزرگی و (ت) سرعت میانگین، (ث) بزرگی و (ج) جهت شتاب میانگین دوچرخه سوار چیست؟

●●۱۵- ارابهٔ کوچکی روی صفحهٔ $xy$ با مؤلفه‌های شتاب $a_x=4/0m/s^2$ و $a_y=-2/0m/s^2$ حرکت داده می‌شود. مؤلفه‌های سرعت اولیهٔ آن $v_{0x}=8/0m/s$ و $v_{0y}=12m/s$

است. سرعت ارابه هنگامی که به بزرگترین مختصهٔ $y$ خود می‌رسد، چیست؟

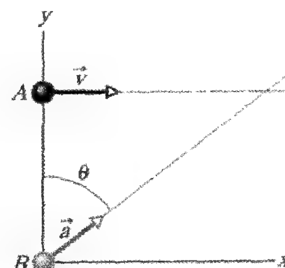
••۱۶– باد ملایمی ریگ کوچکی را بر صفحهٔ افقی $xy$ با شتاب ثابت $\vec{a}=(۵/۰۰\,m/s^۲)\hat{i}+(۷/۰۰\,m/s^۲)\hat{j}$ ، شتاب می‌دهد. در لحظهٔ $t=۰$ ، سرعت ریگ $(۴/۰۰\,m/s)\hat{i}$ است. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ سرعت ریگ را هنگامی که به اندازهٔ $۱۲/۰\,m$ موازی با محور $x$ جابه‌جا شده است، به دست آورید.

••۱۷– ذره‌ای مبدأ را با سرعت اولیهٔ $\vec{v}=(۳/۰۰\hat{i})\,m/s$ و شتاب ثابت $\vec{a}=(-۱/۰۰\hat{i}-۰/۵۰۰\hat{j})\,m/s^۲$ ترک می‌کند. وقتی که ذره به بیشینهٔ مختصهٔ $x$ خود می‌رسد، (الف) سرعت و (ب) بردار مکان آن چیست؟ SSM ILW

••۱۸– سرعت $\vec{v}$ ذره‌ای که در صفحهٔ $xy$ حرکت می‌کند با $\vec{v}=(۶/۰t-۴/۰t^۲)\hat{i}+۸/۰\hat{j}$ داده شده است که $\vec{v}$ برحسب متر بر ثانیه و $t(>۰)$ برحسب ثانیه است. (الف) شتاب در $t=۳/۰s$ چیست؟ (ب) چه موقع (در صورت وجود) شتاب صفر می‌شود؟ (پ) چه موقع (در صورت وجود) سرعت صفر می‌شود؟ (ت) چه موقع (در صورت وجود) تندی برابر با $۱۰\,m/s$ می‌شود؟

•••۱۹–شتاب ذره‌ای واقع بر صفحهٔ $xy$ افقی با $\vec{a}=۳t\hat{i}+۴t\hat{j}$ داده می‌شود، که در آن $\vec{a}$ برحسب متر بر مجذور ثانیه و $t$ برحسب ثانیه است. در لحظهٔ $t=۰$ ، بردار مکان ذره $\vec{r}=(۲۰/۰\,m)\hat{i}+(۴۰/۰\,m)\hat{j}$ و بردار سرعت آن $\vec{v}=(۵/۰۰\,m/s)\hat{i}+(۲/۰۰\,m/s)\hat{j}$ است. در لحظهٔ $t=۴/۰۰s$، (الف) بردار مکان ذره برحسب بردارهای یکه و (ب) زاویهٔ بین جهت حرکت ذره با سوی مثبت محور $x$ چیست؟

•••۲۰–در شکل ۴-۳۵، ذرهٔ $A$ در امتداد خط $y=۳۰\,m$ با سرعت ثابت $\vec{v}$ به بزرگی $۳/۰\,m/s$ و موازی محور $x$ حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که ذرهٔ $A$ از محور $y$ می‌گذرد، ذرهٔ $B$ از مبدأ با تندی اولیهٔ صفر و شتاب ثابت $\vec{a}$ به بزرگی $۰/۴۰\,m/s$ شروع به حرکت می‌کند. زاویهٔ $\theta$ بین $\vec{a}$ و سوی مثبت محور $y$ که در نتیجهٔ برخورد این دو ذره به وجود می‌آید چقدر است؟




شکل ۴-۳۵ مسئلهٔ ۲۰

**بخش ۴-۶ تحلیل حرکت پرتابی**

•۲۱–گلوله‌ای از تفنگی که $۴۵/۰\,m$ بالاتر از سطح صاف زمین قرار دارد با تندی $۲۵۰\,m/s$ به طور افقی شلیک می‌شود. (الف) پرتابه چه مدت در هوا می‌ماند؟ (ب) در چه فاصلهٔ افقی از نقطهٔ شلیک به زمین برخورد می‌کند؟ (پ) بزرگی مؤلفهٔ قائم سرعت آن هنگام برخورد با زمین چقدر است؟

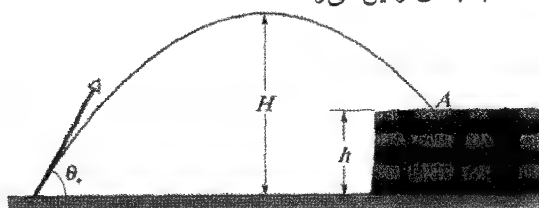
•۲۲– در مسابقه‌های جهانی دو میدانی به سال ۱۹۹۱/۱۳۷۰ در توکیو، *مایک پاول*[1] با پرش $۸/۹۵m$ رکورد ۲۳ سالهٔ پرش طول متعلق به *باب بیمون*[2] را به اندازهٔ $۵cm$ کامل شکست. فرض کنید تندی خیز پاول $۹/۵m/s$ (تقریباً برابر با تندی یک قهرمان دو سرعت)، و شتاب گرانشی در توکیو $g=۹/۸۰\,m/s^۲$ باشد. برد افقی پاول چقدر کمتر از بیشینهٔ برد افقی ذره‌ای است که با همان تندی پرتاب شده باشد؟

•۲۳– رکورد فعلی پرش با موتور سیکلت $۷۷/۰\,m$ است. فرض کنید که قهرمان این رشته با زاویهٔ $۱۲/۰^\circ$ نسبت به افق برخیزد و ارتفاع در موقع برخاستن و فرود آمدن یکسان است. تندی برخاستن را حساب کنید.

•۲۴–یک توپ کوچک که به طور افقی می‌غلتد از لبهٔ میزی به بلندی $۱/۲۰\,m$ فرو می‌افتد. توپ در نقطه‌ای به فاصلهٔ افقی $۱/۵۲m$ از لبهٔ میز به کف زمین برخورد می‌کند .(الف) توپ چه مدت در هوا بوده است؟ (ب) تندی توپ در لحظهٔ جداشدن از میز چقدر بوده است؟

•۲۵–در بازی دارت نیزهٔ کوچک به طور افقی با تندی اولیهٔ $۱۰\,m/s$ به سوی نقطهٔ $P$ واقع بر صفحهٔ هدف پرتاب شده است. نیزهٔ کوچک $۰/۱۹s$ بعد به نقطهٔ $Q$ واقع بر پیرامون [دایره‌ای به مرکز هدف] که به طور قائم زیر نقطهٔ $P$ است برخورد می‌کند. (الف) فاصلهٔ $PQ$ چقدر است؟ (ب) از چه فاصله‌ای از هدف، نیزه رها شده است؟

•۲۶–در شکل ۴-۳۶، سنگی به بالای صخره‌ای به بلندی $h$ با تندی اولیهٔ $۴۲/۰\,m/s$ و زاویهٔ $\theta_0=۶۰/۰^\circ$ بالای افق پرتاب شده است. سنگ $۵/۵۰s$ پس از پرتاب با نقطهٔ $A$ برخورد می‌کند. مطلوب است (الف) بلندی $h$ صخره، (ب) تندی سنگ درست پیش از آنکه به $A$ برخورد کند، و (پ) ارتفاع بیشینهٔ $H$ که سنگ به بالای زمین می‌رسد.

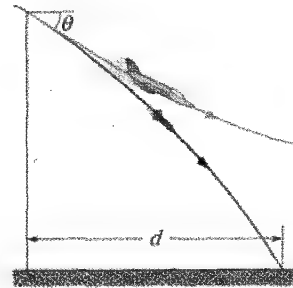



شکل ۴-۳۶ مسئلهٔ ۲۶

•۲۷–هواپیمایی که با تندی $۲۹۰/۰\,km/h$ حرکت می‌کند، در حالی که با زاویهٔ $\theta=۳۰/۰^\circ$ زیر افق شیرجه می‌رود یک تلهٔ رادار را رها می‌کند (شکل ۴-۳۷ را ببینید). فاصلهٔ افقی بین نقطهٔ رها شدن و نقطه‌ای که تله به زمین می‌خورد $d=۷۰۰\,m$

1. Mike Powell
2. Bob Beamon

است. (الف) تله چه مدت در هوا بوده است؟ (ب) تله در لحظهٔ پرتاب شدن در چه ارتفاعی بوده است؟ ILW



شکل ۴-۳۷ مسئلهٔ ۲۷

●۲۸- سنگی از یک قلاب سنگ در زمان $t=0$ با سرعت اولیه‌ای به بزرگی ۲۰/۰m/s و با زاویهٔ ۴۰/۰° بالای افق پرتاب شده است. مؤلفه‌های (الف) افقی و (ب) قائم جابه‌جایی از محل قلاب سنگ در زمان $t=1/10\,s$ چیست؟ مؤلفه‌های (پ) افقی و (ت) قائم جابه‌جایی را این بار برای زمان $t=1/80\,s$ به دست آورید. مؤلفه‌های (ث) افقی و (ج) قائم جابه‌جایی سنگ در $t=5/00\,s$ چقدر است؟

●●۲۹- شناگری از لبهٔ سکوی شیرجه به ارتفاع ۱۰/۰m از سطح آب، به طور افقی با تندی ۲/۰۰m/s شیرجه می‌رود. ۰/۸۰۰s پس از شیرجه رفتن (الف) شناگر در چه فاصلهٔ افقی از لبهٔ سکو و (ب) در چه فاصلهٔ عمودی از سطح آب قرار دارد؟ (پ) در لحظهٔ برخورد شناگر به آب، او در چه فاصلهٔ افقی از لبهٔ سکو قرار دارد؟ SSM WWW

●●۳۰- منجنیق وسیله‌ای است که در حمله به دیوار یک قلعهٔ تحت محاصره از آن استفاده می‌شود. سنگ بزرگی را می‌توان برای تخریب دیوار به سمت آن پرتاب کرد. این دستگاه در کنار دیوار قرار نمی‌گیرد چون در تیررس افراد بالای دیوار قلعه قرار دارد. از اینرو آن را در جایی قرار می‌دهند که سنگ پس از پرتاب و عبور از اوج به دیوار اصابت کند. فرض کنید سنگ با تندی اولیهٔ $v_0=28/0\,m/s$ و با زاویهٔ $\theta_0=40/0°$ پرتاب شود. اگر سنگ به دیوار اصابت کند، تندی سنگ (الف) درست در بالای مسیر سهمی شکل و (ب) وقتی در نیمهٔ ارتفاع اوج قرار دارد، چقدر است؟ (پ) برحسب درصد، سنگ در بخش (ب) چقدر تندتر از بخش (الف) حرکت می‌کند؟

●●۳۱- هواپیمایی که با زاویهٔ ۵۳/۰° نسبت به قائم شیرجه می‌رود، پرتابه‌ای را از ارتفاع ۷۳۰m رها می‌کند. پرتابه ۵/۰۰s پس از رها شدن به زمین برخورد می‌کند. (الف) تندی هواپیما چقدر است؟ (ب) در مدت پرواز، پرتابه چه مسافتی را به طور افقی پیموده است؟ مؤلفه‌های (پ) افقی و (ت) قائم سرعت پرتابه درست پیش از برخورد با زمین چقدر است؟ SSM

●●۳۲- در یک مسابقهٔ تنیس، بازیکنی سرویسی را با تندی ۲۳/۶m/s می‌زند و مرکز توپ، راکت را که در ارتفاع ۲/۳۷m بالاتر از سطح زمین بازی قرار دارد، به طور افقی ترک می‌کند. تور به فاصلهٔ ۱۲m قرار دارد و بلندی آن ۰/۹۰m است. وقتی که توپ به تور می‌رسد (الف) آیا از آن رد می‌شود؟ و (ب) فاصلهٔ بین مرکز توپ تا بالای تور چقدر است؟ حال فرض کنید که باز سرویسی مانند حالت قبل زده شود، ولی این بار مرکز توپ، راکت را با زاویهٔ ۵/۰۰° زیر افق ترک کند. وقتی که توپ به تور می‌رسد (پ) آیا از آن رد می‌شود و (ت) اکنون فاصلهٔ بین مرکز توپ از بالای تور چقدر است؟

●●۳۳- در بازی والیبال، وقتی بازیکن برای ضربه زدن می‌پرد و سعی می‌کند توپ را به گونه‌ای بزند که در زمین مقابل فرود می‌آید. کنترل کردن زاویهٔ ضربه زدن کار مشکلی است. فرض کنید توپ از ارتفاع ۲/۳۰m با تندی اولیهٔ ۲۰/۰m/s با زاویهٔ ۱۸/۰° زیر افق زده شود. اگر به توپ با زاویهٔ ۸/۰° زیر افق ضربه زده شود در چه فاصلهٔ دورتری در زمین مقابل به زمین خواهد خورد؟

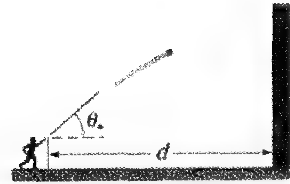
●●۳۴- توپ فوتبالی با تندی اولیهٔ ۱۹/۵m/s و با زاویهٔ رو به بالای ۴۵° شوت می‌شود. بازیکنی که در فاصلهٔ ۵۵m قرار دارد در همان لحظه برای رسیدن به توپ در راستای پرتاب، شروع به دویدن می‌کند. برای آنکه او به توپ درست پیش از برخورد با زمین برسد، تندی میانگین او باید چقدر باشد؟

●●۳۵- تندی پرتاب یک پرتابه پنج برابر تندی آن در ارتفاع بیشینه است. زاویهٔ پرتاب $\theta_0$ را پیدا کنید.

●●۳۶- فرض کنید تیراندازی گلوله را با تندی $v_0=15/00\,m/s$ و در ارتفاع ۲/۱۶۰m شلیک می‌کند. اگر زاویهٔ پرتاب $\theta_0$، (الف) ۴۵/۰۰° و (ب) ۴۲/۰۰° باشد، گلوله چه فاصلهٔ افقی را طی خواهد کرد؟ پاسخها مشخص می‌کنند که زاویهٔ ۴۵°، که به ازای آن برد حرکت بیشینه است، وقتی ارتفاع پرتاب و فرود یکسان نباشند، فاصلهٔ افقی بیشینه را به دست نمی‌دهد.

●●۳۷- توپی از سطح زمین به هوا شوت شده است. در ارتفاع ۹/۱m، سرعت توپ $\vec{v}=(7/6\hat{i}+6/1\hat{j})\,m/s$ است که $\hat{i}$ افقی و $\hat{j}$ رو به بالاست. (الف) توپ تا چه ارتفاع بیشینه‌ای بالا می‌رود؟ (ب) کل مسافت افقی پیموده شده توسط توپ چقدر است؟ (پ) بزرگی و (ت) زاویهٔ (زیر افق) سرعت توپ، درست پیش از برخورد با زمین چقدر است؟ ILW

●●۳۸- توپی با تندی ۲۵/۰m/s و زاویهٔ $\theta_0=40/0°$ بالای افق پرتاب شده است (شکل ۴-۳۸). فاصلهٔ دیوار از نقطهٔ پرتاب $d=22/0\,m$ است. (الف) در چه مسافتی بالاتر از نقطهٔ پرتاب، توپ با دیوار برخورد می‌کند؟ مؤلفه‌های (ب) افقی و (پ) قائم سرعت توپ در زمان برخورد با دیوار چیست؟ (ت) آیا هنگامی که توپ با دیوار برخورد می‌کند از بالاترین نقطهٔ مسیرش گذشته است؟

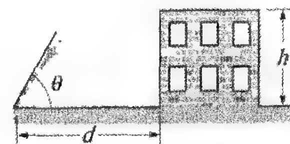


شکل ۴-۳۸ مسئلهٔ ۳۸

●●۳۹- تفنگی گلوله‌ای را با تندی $460\,m/s$ به سوی هدفی در فاصلهٔ $45/7\,m$ شلیک می‌کند. اگر مرکز هدف هم‌تراز با تفنگ باشد، چقدر بالاتر از هدف باید نشانه‌گیری کرد تا گلوله به مرکز آن برخورد کند؟ SSM

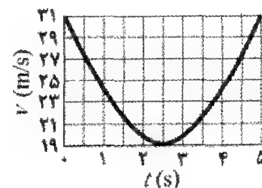
●●۴۰- پرتاب کنندهٔ توپ بیسبال آن را به طور افقی و با تندی $161\,km/h$ پرتاب می‌کند. فاصلهٔ او با ضربه زننده به توپ $18/3\,m$ است. (الف) چقدر طول می‌کشد که توپ نیمهٔ اول مسیر را طی کند؟ (ب) نیمهٔ دوم را چطور؟ (پ) در نیمهٔ اول مسیر، توپ چقدر به طور آزاد سقوط می‌کند؟ (ت) در نیمهٔ دوم چطور؟ (ث) چرا پاسخهای (پ) و (ت) با هم برابر نیستند؟

●●۴۱- در شکل ۴-۳۹ توپی از لبهٔ چپ بام خانه‌ای به بلندی $h$ رو به سمت چپ پرتاب شده است. توپ $1/50\,s$ پس از پرتاب، در فاصلهٔ $d=25/0\,m$ از ساختمان و با زاویهٔ $\theta=60/0°$ بالای افق به زمین برخورد می‌کند. (الف) $h$ را بیابید. (*راهنمایی:* یک راه برای حل این است که حرکت را مثل یک نوار ویدئو به عقب برگردانیم.) (ب) بزرگی و (پ) زاویهٔ سرعت نسبت به افق در لحظهٔ پرتاب توپ چه بوده است؟ (ت) آیا این زاویه رو به بالای افق است یا پایین؟



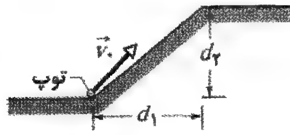
شکل ۴-۳۹ مسئلهٔ ۴۱

●●۴۲- به توپ گلفی روی سطح زمین ضربه‌ای وارد شده است. تندی توپ گلف بر حسب تابعی از زمان در شکل ۴-۴۰ نشان داده شده است، که در آن $t=0$ لحظه‌ای است که به توپ ضربه زده شده است. (الف) تا پیش از بازگشت توپ به سطح زمین، مسافتی که توپ به طور افقی حرکت می‌کند، چقدر است؟ (ب) بیشینهٔ ارتفاعی که توپ به آن می‌رسد چقدر است؟



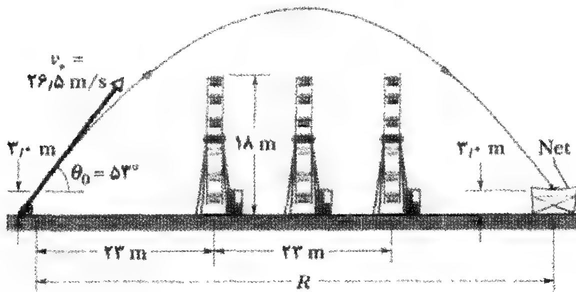
شکل ۴-۴۰ مسئلهٔ ۴۲

●●۴۳- در شکل ۴-۴۱ توپی با سرعتی به بزرگی $10/0\,m/s$ با زاویهٔ $50/0°$ نسبت به بالای افق پرتاب شده است. نقطهٔ پرتاب در مبداء شیب‌راهه‌ای با طول افقی $d_1=6/00\,m$ و بلندی $d_2=3/60\,m$ قرار دارد. بخش مسطحی در بالای شیب‌راهه قرار گرفته است. (الف) آیا توپ روی شیب‌راهه فرود می‌آید یا بر سطح مسطح؟ وقتی که توپ فرود آید (ب) بزرگی و (ت) زاویهٔ جابه‌جایی از نقطهٔ پرتاب چقدر است؟



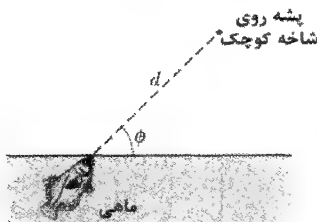
شکل ۴-۴۱ مسئلهٔ ۴۳

●●۴۴- در سال ۱۹۳۹ یا ۱۹۴۰، امانوئل زاخینی خودش را جای گلولهٔ توپ قرار داد: پس از شلیک او از روی سه چرخ و فلک عبور کرد و داخل توری که تعبیه شده بود افتاد. (شکل ۴-۴۲). (الف) او را یک ذره فرض کنید و ارتفاع او را از بالای اولین چرخ و فلک به دست آورید. (ب) اگر او در بالای چرخ و فلک میانی به بیشینهٔ ارتفاع خود برسد، در چه ارتفاعی از بالای چرخ و فلک قرار دارد؟ (پ) مرکز تور در چه فاصله‌ای از توپ قرار داده شده است؟



شکل ۴-۴۲ مسئلهٔ ۴۴

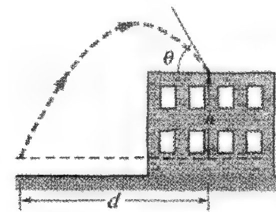
●●۴۵- پشه‌ای روی شاخهٔ کوچکی در بالای آب به طور آویزان قرار دارد و یک ماهی تیرانداز سعی می‌کند با پرتاب یک قطره آب به سمت آن، او را به داخل آب بیندازد (شکل ۴-۴۵). اگرچه ماهی پشه را در خط مستقیم با زاویهٔ $\phi$ و فاصلهٔ $d$ می‌بیند، اما پرتاب قطره آب باید با زاویهٔ دیگر $\theta_0$ انجام شود تا با طی مسیر سهمی شکل به پشه برخورد کند. اگر $\phi=36/0°$، $d=0/900\,m$ و تندی پرتاب $3/56\,m/s$ باشد، زاویهٔ $\theta_0$ باید چقدر باشد تا قطرهٔ آب در بالاترین نقطهٔ مسیر سهمی شکل روی پشه فرود آید؟



شکل ۴-۴۳ مسئلهٔ ۴۵

●●۴۶- در شکل ۴-۴۴ توپی رو به بالا به سمت بام خانه‌ای پرتاب شده است. توپ $4/00\,s$ بعد، در ارتفاع $h=20/00\,m$ بالای نقطهٔ پرتاب فرود می‌آید. مسیر توپ درست پیش از فرود زاویهٔ $\theta=60/0°$ را با بام می‌سازد. (الف) فاصلهٔ افقی $d$ پیموده

شده را به دست آورید (به راهنمایی مسئلهٔ ۴۱ نگاه کنید.) (ب) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به افق) سرعت اولیهٔ توپ چقدر بوده است؟

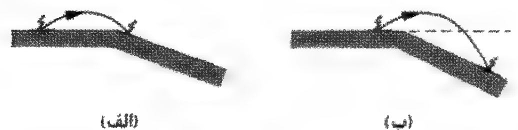


شکل ۴-۴۴ مسئلهٔ ۴۶

●●۴۷- ضربه زنندهٔ توپ در بازی بیسبال، به توپ پرتاب شده‌ای که مرکزش ۱/۲۲m بالای سطح زمین است ضربه می‌زند. زاویهٔ جداشدن توپ °۴۵ و برد افقی آن (پس از بازگشت به سطح *ارتفاع پرتاب*) ۱۰۷m است. (الف) آیا توپ از مانعی به بلندی ۷/۳۲m که به فاصلهٔ افقی ۹۷/۵m از نقطهٔ پرتاب است عبور می‌کند؟ (ب) وقتی که توپ به مانع رسید، فاصلهٔ بین بالای مانع و مرکز توپ چقدر است؟ SSM WWW

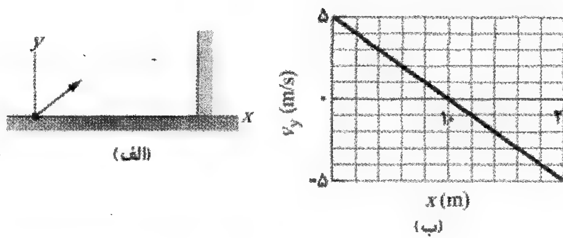
●●۴۸- در بسکتبال، خیز سه قدم بازیکن به سمت سبد با پنداری نادرست اینگونه به نظر می‌رسد که او شتاب گرانش را روی خودش کاهش می‌دهد. این پندار نادرست بستگی به توانایی بازیکن ماهر دارد که چگونه خیلی سریع در حین پرش توپ را بین دستانش جابه‌جا کند، ولی همچنین به فاصلهٔ افقی بیشتری که بازیکن در قسمت بالای پرش از قسمت پایین پرش حرکت می‌کند بستگی دارد. اگر بازیکن با تندی اولیهٔ $v_0 = ۷/۰۰\text{m/s}$ و با زاویهٔ $\theta_0 = ۳۵/۰°$ پرش کند، چند درصد برد پرش را بازیکن در نیمهٔ بالایی پرش طی کرده است (فاصلهٔ بین بیشینهٔ ارتفاع و نیمهٔ بیشینهٔ ارتفاع)؟

●●۴۹- یک اسکی‌باز ماهر می‌داند که قبل از رسیدن به یک شیب باید به بالا پرش کند. پرشی را در نظر بگیرید که تندی پرتاب برابر $v_0 = ۱۰\text{m/s}$ و زاویهٔ پرتاب برابر $\theta_0 = ۹/۰°$ و مسیر اولیه تقریباً مسطح و زاویهٔ مسیر شیبدار برابر °۱۱/۳ است. شکل ۴-۴۵ الف یک *پیش پرشی* را نشان می‌دهد که امکان می‌دهد تا اسکی‌باز در قسمت بالایی شیب فرود می‌آید. شکل ۴-۴۵ ب پرش در لبهٔ شیب را نشان می‌دهد. در شکل ۴-۴۵ الف اسکی‌باز تقریباً در همان سطح پرتاب، فرود آمده است. (الف) در فرود، زاویهٔ $\phi$ بین مسیر اسکی‌باز و شیب چقدر است؟ در شکل ۴-۴۵ ب، (ب) اسکی‌باز در چه فاصله‌ای از سطح پرتاب روی شیب فرود می‌آید و (پ) زاویهٔ $\phi$ چقدر است؟ (فرود طولانی‌تر و $\phi$ بزرگتر می‌تواند موجب از دست دادن کنترل در موقع فرود شود).



شکل ۴-۴۵ مسئلهٔ ۴۹

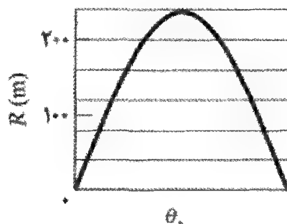
●●●۵۰- توپی از سطح زمین به سمت دیواری در فاصلهٔ $x$ شوت شده است (شکل ۴-۴۶ الف). شکل ۴-۴۶ ب مؤلفهٔ $y$ سرعت توپ $v_y$ را درست در لحظهٔ رسیدن به دیوار برحسب تابعی از فاصلهٔ $x$ نشان می‌دهد. زاویهٔ پرتاب چه بوده است؟



شکل ۴-۴۶ مسئله ۵۰

●●●۵۱- در بازی فوتبال امریکایی، ضربه زننده می‌تواند توپ را با تندی اولیهٔ ۲۵m/s شوت کند. (الف) کمترین و (ب) بیشترین زاویه‌های شوت کردن توپ باید چقدر باشد تا او بتواند با عبور توپ از تیر دروازه‌ای که تیرک افقی آن ۳/۴۴m بالای زمین و فاصلهٔ آن از محل شوت کردن ۵۰m است، یک گل به ثمر برساند؟ SSM

●●●۵۲- توپی از سطح زمین با سرعت معینی شوت شده است. شکل ۴-۴۷ برد $R$ توپ را برحسب زاویهٔ پرتاب $\theta_0$ نشان می‌دهد. مقدار $\theta_0$ زمان پرواز را تعیین می‌کند؛ $t_{max}$ را زمان پرواز بیشینه بگیرید. اگر $\theta_0$ به گونه‌ای انتخاب شده باشد که زمان پرواز $۰/۵۰۰t_{max}$ شود، کمترین تندی که توپ در حین پرواز خواهد داشت، چقدر است؟



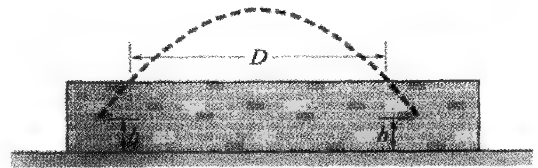
شکل ۴-۴۷ مسئلهٔ ۵۲

●●●۵۳- توپی به طور افقی از بالای پلکانی می‌غلتد و با تندی ۱/۵۲m/s فرو می‌افتد. بلندی هر پله ۲۰/۳cm و پهنای آن نیز ۲۰/۳cm است. توپ نخست به کدام پله برخورد می‌کند؟ SSM

●●●۵۴- یک پرتابه دو ثانیه پس از پرتاب از سطح زمین به اندازهٔ ۴۰m افقی و ۵۳m عمودی از نقطهٔ پرتاب جابه‌جا شده است. مؤلفه‌های (الف) افقی و (ب) قائم سرعت اولیهٔ پرتابه چقدر بوده است؟ (پ) در لحظه‌ای که پرتابه به ارتفاع بیشینهٔ خود از سطح زمین می‌رسد، چه مسافتی را به طور افقی از نقطهٔ پرتاب طی کرده است؟

●●●۵۵- در شکل ۴-۴۸، به یک توپ بیسبال در ارتفاع $h = ۱/۰۰\text{m}$ ضربه‌ای زده شده و سپس در همان ارتفاع گرفته شده است. توپ از کنار دیواری می‌گذرد و ۱/۰۰s پس از پرتاب، رو به بالا و ۴/۰۰s بعد، با طی مسافت $D = ۵۰/۰\text{m}$،

رو به پایین از بالای دیوار می‌گذرد. (الف) فاصلهٔ افقی پیموده شده توسط توپ از لحظهٔ ضربه زدن تا لحظهٔ گرفتن، چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) زاویهٔ (نسبت به افق) سرعت توپ درست پس از ضربه زدن چقدر است؟ (ت) ارتفاع دیوار چقدر است؟



شکل ۴-۴۸ مسئلهٔ ۵۵

**بخش ۴-۷ حرکت دایره‌ای یکنواخت**

•۵۶- حرکت دورانی یکنواختی را با دورهٔ $T = ۲/۰ s$ و شعاع دوران $r = ۳/۰۰ m$ در نظر بگیرید. در لحظهٔ $t_1$ شتاب [مرکزگرای] وارد به شخصی که این حرکت را انجام می‌دهد، $\vec{a} = (۶/۰۰ m/s^2)\hat{i} + (-۴/۰۰ m/s^2)\hat{j}$ است. در این لحظه مطلوب است مقدارهای (الف) $\vec{v}\cdot\vec{a}$ و (ب) $\vec{r}\times\vec{a}$.

•۵۷- شخصی سوار چرخ و فلکی به شعاع ۱۵m است. چرخ و فلک در هر دقیقه حول محور افقی خود پنج دور کامل می‌چرخد. (الف) دورهٔ حرکت چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت شتاب مرکزگرای وارد به شخص در بالاترین نقطه چقدر است؟ (ت) بزرگی و (ث) زاویهٔ شتاب مرکزگرای وارد به شخص در پایینترین نقطه چقدر است؟ ILW

•۵۸- بزرگی شتاب دونده‌ای که با تندی ۱۰m/s دوری را به شعاع ۲۵m می‌دود چقدر است؟

•۵۹- وقتی یک ستارهٔ بزرگ به *ابر نواختر* تبدیل می‌شود، هستهٔ مرکزی آن ممکن است چنان متراکم شود که به صورت یک *ستارهٔ نوترونی* به شعاع تقریباً ۲۰km (اندازه‌ای تقریباً به بزرگی مساحت سانفرانسیسکو) درآید. اگر یک ستارهٔ نوترونی در هر ثانیه یک بار بچرخد، (الف) تندی ذره‌ای واقع بر استوای آن چقدر است؟ (ب) شتاب مرکزگرای ذره چقدر است؟ (پ) اگر ستارهٔ نوترونی تندتر بچرخد، آیا پاسخهای (الف) و (ب) افزایش می‌یابند یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌مانند؟

•۶۰- یک ماهوارهٔ زمین‌گرد در یک مدار دایره‌ای که ۶۴۰km بالای سطح زمین است با دورهٔ ۹۸/۰min حرکت می‌کند. (الف) تندی و (ب) بزرگی شتاب مرکزگرای ماهواره چقدر است؟

•۶۱- چرخ و فلکی حول یک محور عمودی با آهنگ ثابت می‌چرخد. شخصی که بر کنارهٔ آن ایستاده است دارای تندی ثابت ۳/۶۶m/s و شتاب مرکزگرای $\vec{a}$ به بزرگی $۱/۸۳ m/s^2$ است. بردار مکان $\vec{r}$، مکان او را نسبت به محور مشخص می‌کند. (الف) بزرگی $\vec{r}$ چقدر است؟ جهت $\vec{r}$ در صورتی که $\vec{a}$ (ب) رو به شرق و (پ) رو به جنوب باشد، چیست؟

•۶۲- یک پنکهٔ در حال چرخش در هر دقیقه ۱۲۰۰ دور می‌چرخد. نقطه‌ای را روی نوک پرهٔ آن به شعاع ۰/۱۵m در نظر بگیرید. (الف) در یک دور، این نقطه چه فاصله‌ای را می‌پیماید؟ (ب) تندی این نقطه و (پ) بزرگی شتاب آن چقدر است؟ (ت) دورهٔ حرکت چقدر است؟

•۶۳- یک کیف دستی در شعاع ۲/۰۰m و یک کیف بغلی در شعاع ۳/۰۰m در کف چرخ و فلکی که در حرکت دایره‌ای یکنواخت است قرار دارند. آنها در خط شعاعی یکسانی هستند. در یک لحظه، شتاب کیف دستی $(۲/۰۰ m/s^2)\hat{i} + (۴/۰۰ m/s^2)\hat{j}$ است. در آن لحظه و با نمادگذاری بردار یکه، شتاب کیف بغلی چیست؟

•۶۴- ذره‌ای روی یک مسیر دایره‌ای واقع بر دستگاه مختصات افقی $xy$ با تندی ثابت می‌چرخد. در لحظهٔ $t_1 = ۴/۰۰ s$ ذره در نقطهٔ $(۵/۰۰ m, ۶/۰۰ m)$ است و سرعت $(۳/۰۰ m/s)\hat{j}$ و شتابی در جهت مثبت $x$ دارد. در لحظهٔ $t_2 = ۱۰/۰ s$ سرعت آن $(-۳/۰۰ m/s)\hat{i}$ و شتاب آن در سوی مثبت $y$ است. اگر $t_2 - t_1$ کمتر از یک دورهٔ حرکت باشد، مختصات (الف) $x$ و (ب) $y$ مرکز مسیر دایره‌ای چیست؟

••۶۵- در لحظهٔ $t_1 = ۲/۰۰ s$، شتاب ذره‌ای که به طور پاد ساعتگرد حرکت دایره‌ای می‌کند عبارت است از $(۶/۰۰ m/s^2)\hat{i} + (۴/۰۰ m/s^2)\hat{j}$. تندی ذره ثابت است. در لحظهٔ $t_2 = ۵/۰۰ s$، شتاب آن $(۴/۰۰ m/s^2)\hat{i} + (-۶/۰۰ m/s^2)\hat{j}$ است. اگر $t_2 - t_1$ کمتر از یک دوره حرکت باشد، شعاع مسیری که ذره پیموده چقدر است؟

••۶۶- ذره‌ای روی یک صفحهٔ $xy$ افقی حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. در یک لحظه، ذره از نقطه‌ای به مختصات $(۴/۰۰ m, ۴/۰۰ m)$ با سرعت $-۵/۰۰\hat{i} m/s$ و شتاب $+۱۲/۵\hat{j} m/s^2$ می‌گذرد. مختصات (الف) $x$ و (ب) $y$ مرکز مسیر دایره‌ای چیست؟

•••۶۷- بچه‌ای سنگی را به وسیلهٔ ریسمانی به طول ۱/۵m در یک دایرهٔ افقی که ۲/۰m بالاتر از سطح زمین است، می‌چرخاند. ریسمان پاره و سنگ به طور افقی رها می‌شود و پس از طی یک مسافت افقی به طول ۱۰m، با زمین برخورد می‌کند. بزرگی شتاب مرکزگرای سنگ در هنگام حرکت دایره‌ای چقدر بوده است؟ SSM WWW

•••۶۸- گربه‌ای که سوار بر یک چرخ و فلک است، حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. در لحظهٔ $t_1 = ۲/۰۰ s$، سرعت گربه $\vec{v}_1 = (۳/۰۰ m/s)\hat{i} + (۴/۰۰ m/s)\hat{j}$ است که در دستگاه مختصات افقی $xy$ اندازه‌گیری شده است. در لحظهٔ $t_2 = ۵/۰۰ s$ سرعت گربه $\vec{v}_2 = (-۳/۰۰ m/s)\hat{i} + (۴/۰۰ m/s)\hat{j}$ است. بزرگی (الف) شتاب مرکزگرای گربه و (ب) شتاب میانگین گربه در بازهٔ زمانی $t_2 - t_1$ چقدر است؟

### بخش ۴-۸ حرکت نسبی در یک بعد

●۶۹- فیلمبرداری که بر یک اتومبیل رو باز سوار است و با تندی ۲۰km/h به سوی غرب حرکت می‌کند از یوزپلنگی که رو به غرب، ۳۰km/h سریعتر از اتومبیل حرکت می‌کند، فیلمبرداری می‌کند. یوزپلنگ ناگهان می‌ایستد، برمی‌گردد و سپس رو به شرق با تندی ۴۵km/h، اندازه‌گیری شده توسط افراد گروه که نگران در کنار مسیر یوزپلنگ ایستاده‌اند، حرکت می‌کند. تغییر سرعت یوزپلنگ در مدت ۲/۰s رخ می‌دهد. (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب یوزپلنگ از دید فیلمبردار چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت این شتاب از دید افراد گروه که در کنار مسیر ایستاده‌اند چیست؟

●۷۰- قایقی با تندی ۱۴km/h نسبت به آب یک رودخانه، بر خلاف جریان آب که رو به سوی مثبت محور $x$ است، حرکت می‌کند. آب با تندی ۹/۰km/h نسبت به زمین جریان دارد. (الف) بزرگی و (ب) جهت حرکت قایق نسبت به زمین چیست؟ بچه‌ای در قایق از جلو به سمت عقب، با تندی ۶/۰km/h نسبت به قایق، راه می‌رود. (پ) بزرگی و (ت) جهت سرعت بچه نسبت به زمین چقدر است؟

●●۷۱- مضنون تحت نظری با چنان سرعتی می‌دود که می‌تواند از یک سر پیاده رو متحرک تا سر دیگر آن را در ۲/۵۰s طی کند. وقتی سر و کلهٔ مأموران امنیتی پیدا می‌شود، او با چنان سرعتی بر امتداد پیاده رو می‌دود که می‌تواند پس از طی زمان ۱۰/۰s به نقطهٔ شروع حرکتش بازگردد. نسبت تندی دویدن شخص به تندی پیاده‌رو چیست؟

### بخش ۴-۹ حرکت نسبی در دو بعد

●۷۲- یک بازیکن راگبی همراه با توپ به سمت دروازهٔ تیم مقابل در جهت مثبت محور $x$ می‌دود. او قانوناً می‌تواند تا زمانی به هم گروه خود پاس دهد که سرعت توپ نسبت به زمین بازی هیچ مؤلفهٔ $x$ مثبتی نداشته باشد. فرض کنید بازیکنی که با تندی ۴/۰m/s نسبت به زمین در حال دویدن است، توپ را با تندی $\vec{v}_{BP}$ نسبت به خود پاس دهد. اگر بزرگی $\vec{v}_{BP}$، ۶/۰m/s باشد کوچکترین زاویهٔ پاس دادن باید چقدر باشد تا آن پاس قانونی باشد؟

●●۷۳- دو کشتی $A$ و $B$ بندر را همزمان ترک می‌کنند. کشتی $A$ با تندی ۲۴ گره رو به شمال غرب و کشتی $B$ با تندی ۲۸ گره در جهت °۴۰ غرب جنوب حرکت می‌کنند. (۱ گره= ۱ مایل دریایی بر ساعت؛ به پیوست ت نگاه کنید.) (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت کشتی $A$ نسبت به کشتی $B$ چیست؟ (پ) پس از طی چه زمانی فاصلهٔ دو کشتی از یکدیگر ۱۶۰ مایل دریایی می‌شود؟ (ت) در آن لحظه جهت مکانی $B$ نسبت به $A$ چگونه است؟ SSM ILW

●●۷۴- یک هواپیمای سبک دارای تندی هوایی ۵۰۰km/h است. خلبان هواپیما را برای مقصدی به فاصلهٔ ۸۰۰km رو به شمال تنظیم می‌کند، ولی مشاهده می‌کند که برای پرواز مستقیم به آنجا باید هواپیما را °۲۰/۰ به سمت شرق شمال کج کند. هواپیما در مدت ۲/۰۰h به آنجا می‌رسد. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت باد چگونه بوده است؟

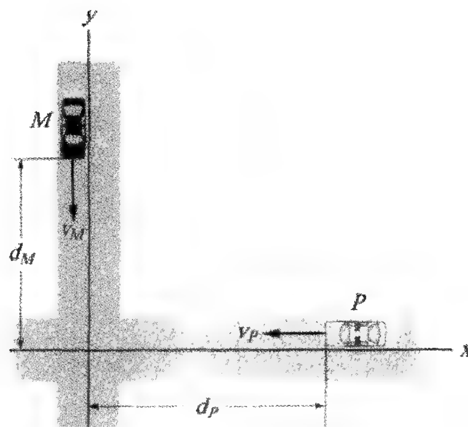
●●۷۵- برف با تندی ثابت ۸/۰m/s به طور قائم می‌بارد. از دید رانندهٔ اتومبیلی که بر جادهٔ مستقیمی با تندی ۵۰km/h حرکت می‌کند، سقوط دانه‌های برف با چه زاویه‌ای نسبت به قائم به نظر می‌رسند؟ SSM

●●۷۶- پس از پروازی به مدت ۱۵min در یک هوای بادی که باد در جهت °۲۰ جنوب شرق با تندی ۴۲km/h می‌وزد، خلبان بر فراز شهری است که در فاصلهٔ ۵۵km شمال نقطهٔ شروع پرواز واقع است. تندی هواپیما نسبت به هوا چیست؟

●●۷۷- قطاری با تندی ۳۰m/s (نسبت به زمین) در بارانی که به دلیل وزش باد، متمایل به جنوب می‌بارد به سوی جنوب حرکت می‌کند. از دید یک ناظر ساکن روی زمین، مسیر هر قطره با امتداد قائم زاویهٔ °۷۰ می‌سازد. با این حال، ناظر سوار بر قطار سقوط قطره‌های باران را کاملاً قائم می‌بینند. تندی قطره‌های باران را نسبت به زمین تعیین کنید. SSM

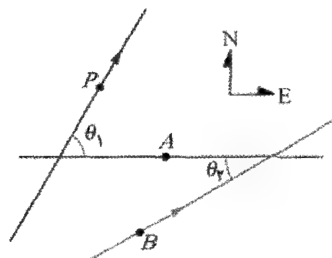
●●۷۸- از رودخانه‌ای به پهنای ۲۰۰m جریانی با تندی یکنواخت ۲/۰m/s رو به شرق عبور می‌کند. قایقی با تندی ۸/۰m/s نسبت به آب، ساحل جنوبی را در زاویهٔ °۳۰ غرب شمال ترک می‌کند. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت قایق نسبت به زمین چیست؟ (پ) چقدر طول می‌کشد تا قایق پهنای رودخانه را طی کند؟ GO

●●۷۹- دو بزرگراه مطابق شکل ۴-۴۹ تقاطع دارند. در لحظهٔ نشان داده شده، اتومبیل پلیس $P$ در فاصلهٔ $d_P = ۸۰۰\text{m}$ از تقاطع است و با تندی $v_P = ۸۰\text{km/h}$ حرکت می‌کند. رانندهٔ $M$ در فاصلهٔ $d_M = ۶۰۰\text{m}$ از تقاطع قرار دارد و با تندی $v_M = ۶۰\text{km/h}$ حرکت می‌کند. (الف) سرعت راننده را نسبت به اتومبیل پلیس بر حسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) برای لحظهٔ نشان داده شده در شکل ۴-۴۹، زاویهٔ بین سرعت به دست آمده در قسمت (الف) و خط دید میان دو اتومبیل چقدر است؟ (پ) اگر اتومبیلها در همان سرعتها بمانند، آیا پاسخهای (الف) و (ب) در هنگامی که اتومبیلها به تقاطع نزدیک می‌شوند، تغییر می‌کند؟




**شکل ۴-۴۹** مسئلهٔ ۷۹

●●●۸۰- شکل ۴-۵۰، دید از بالای دو ماشین جیپ $P$ و $B$ را نشان می‌دهد که در امتداد خطهای مستقیمی واقع بر یک زمین تخت مسابقه می‌دهند و از کنار نگهبان مرزی ساکن $A$ می‌گذرند. از دید این نگهبان، ماشین $B$ با تندی ثابت ۲۰/۰ m/s در زاویهٔ $\theta_۲ =$ ۳۰/۰° حرکت می‌کند. ماشین $P$ از حالت سکون با آهنگ ثابت ۰/۴۰۰ m/s² و در زاویهٔ $\theta_۱ =$ ۶۰/۰° نسبت به نگهبان، شتاب گرفته است. در یک لحظهٔ معین در حین شتاب، تندی $P$ برابر با ۴۰/۰ m/s است. در همین زمان (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت $P$ نسبت به $B$ و (پ) بزرگی و (ت) جهت شتاب $P$ نسبت به $B$ چیست؟




**شکل ۴-۵۰** مسئلهٔ ۸۰

●●●۸۱- کشتی $A$ به اندازهٔ ۴/۰ km در شمال و ۲/۵ km در شرق کشتی $B$ واقع است. کشتی $A$ دارای سرعت ۲۲ km/h به طرف جنوب و کشتی $B$ دارای سرعت ۴۰ km/h در جهت ۳۷° شمال شرق است. (الف) سرعت $A$ نسبت به $B$ برحسب نمادگذاری بردار یکه و با $\hat{i}$ به طرف شرق چیست؟ (ب) عبارتی برای مکان $A$ نسبت به $B$ برحسب تابعی از $t$ بنویسید که در آن $t = ۰$ زمانی است که کشتیها در مکانهای بالا هستند. (پ) در چه زمانی فاصلهٔ بین کشتیها کمترین مقدار است؟ (ت) این کمترین فاصله چقدر است؟

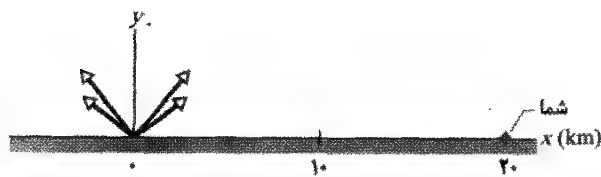
●●●۸۲- از رودخانه‌ای به پهنای ۲۰۰ m که از جنگلی می‌گذرد جریان یکنواختی با تندی ۱/۱ m/s رو به شرق می‌گذرد. سیاحی می‌خواهد از نقطه‌ای واقع بر ساحل جنوبی با یک قایق موتوری عرض رودخانه را با تندی ثابت ۴/۰ m/s نسبت به آب طی کند و به نقطه‌ای در ساحل شمالی که به فاصلهٔ افقی ۸۲ m از نقطهٔ آغازین حرکت قرار دارد برود. (الف) قایق باید در چه جهتی حرکت کند تا بر یک خط مستقیم به نقطهٔ موردنظر برسد؟ (ب) چقدر زمان لازم است تا قایق از عرض رودخانه عبور کند و به نقطهٔ موردنظر برسد؟

## مسئله‌های اضافی

۸۳- شما توسط دانشجویان رشتهٔ علوم سیاسی ربوده شده‌اید (آنها از اینکه شما به آنها گفته‌اید که علوم سیاسی یک علم واقعی نیست برآشفته شده‌اند). اگر چه چشمان شما بسته شده است، ولی می‌توانید تندی اتومبیل آنها را (از روی زیر و بم صدای موتور)، زمان حرکت را (از روی شمارش ذهنی ثانیه‌ها)، و جهت حرکت را (از روی دورهای اتومبیل روی دستگاه راستگوشهٔ خیابان) تشخیص دهید. با استفاده از این نشانه‌ها، شما می‌دانید که مسیرهای زیر را طی کرده‌اید: ۵۰ km/h به مدت ۲/۰ min، سپس ۹۰° گردش به سمت راست، ۲۰ km/h به مدت ۴/۰ min، سپس ۹۰° گردش به سمت راست، ۲۰ km/h به مدت ۶۰ s، سپس ۹۰° گردش به سمت چپ، ۵۰ km/h به مدت ۶۰ s، سپس ۹۰° گردش به سمت راست، ۲۰ km/h به مدت ۲/۰ min، سپس ۹۰° گردش به سمت چپ، و سرانجام ۵۰ km/h به مدت ۳۰ s در نقطهٔ پایانی حرکت. (الف) چقدر از نقطهٔ شروع فاصله گرفته‌اید، و (ب) در چه جهتی نسبت به جهت اولیهٔ حرکتتان قرار دارید؟

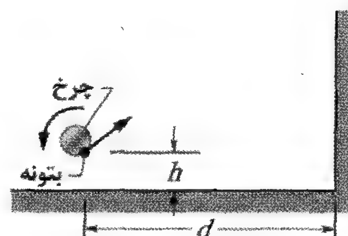
۸۴- *نمایش مرگ.* سیارک فلزی بزرگی به زمین برخورد می‌کند و با پرتاب تخته سنگها به فضای بالا و اطراف، حفره‌ای را در مواد سنگی زیر سطح زمین ایجاد می‌کند. جدول زیر پنج جفت از تندیها و زاویه‌های (نسبت به افق) پرتاب چنین تخته سنگها را بر اساس یکی از مدلهای پیشنهادی ارائه می‌کند. (سایر تخته سنگها با زاویه‌ها و تندیهایی در بین این مقدارها پرتاب می‌شوند.) فرض کنید هنگامی که سیارک در زمان $t = ۰$ و مکان $x = ۰$ با زمین برخورد می‌کند شما در $x =$ ۲۰ km هستید (شکل ۴-۵۱). (الف) در زمان $t =$ ۲۰ s مختصات $x$ و $y$ تخته سنگهای $A$ تا $E$ که رو به سوی شما پرتاب شده‌اند چیست؟ (ب) این مختصات را نقطه‌یابی کنید و آنگاه یک منحنی از آن نقطه‌ها بگذرانید تا تخته سنگهایی با زاویه‌ها و تندیهای در بین مقدارهای $A$ تا $E$ را هم شامل شود. این منحنی می‌تواند نشان دهد که شما در هنگام نزدیک شدن تخته سنگها چه می‌بینید و نتیجه بگیرید که دایناسورها در گذشته‌های بسیار دور در خلال برخورد یک سیارک با زمین چه دیده‌اند.

| پرتاب | تندی (m/s) | زاویه (درجه) |
|---|---|---|
| $A$ | ۵۲۰ | ۱۴/۰ |
| $B$ | ۶۳۰ | ۱۶/۰ |
| $C$ | ۷۵۰ | ۱۸/۰ |
| $D$ | ۸۷۰ | ۲۰/۰ |
| $E$ | ۱۰۰۰ | ۲۲/۰ |




شکل ۴-۵۱ مسئلهٔ ۸۴

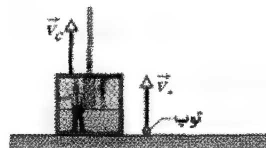
۸۵- در شکل ۴-۵۲ گلوله‌ای از بتونهٔ خیس بر پیرامون چرخی به شعاع ۲۰cm که به طور پادساعتگرد با دورهٔ ۵/۰۰ms می‌گردد، قرار دارد و حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. اگر صفحهٔ چرخ را به صفحهٔ ساعتی تشبیه کنیم، وقتی که بتونه به وضعیت ساعت ۵ می‌رسد، از پیرامون چرخ رها می‌شود. در این لحظه، ارتفاع بتونه از کف $h=۱/۲۰\text{m}$ و فاصلهٔ آن از دیوار $d=۲/۵۰\text{m}$ است. بتونه در چه ارتفاعی با دیوار برخورد می‌کند؟




شکل ۴-۵۲ مسئلهٔ ۸۵

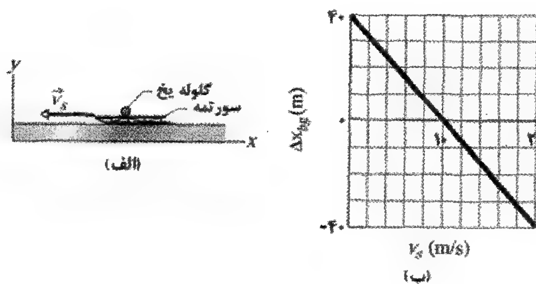
۸۶- ذره‌ای به طور ساعتگرد در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت با دورهٔ ۷/۰۰s حول مبداء یک دستگاه مختصات $xy$ است. در یک لحظه، بردار مکان ذره (نسبت به مبدأ) $\vec{r}=(۲/۰۰\text{m})\hat{i}-(۳/۰۰\text{m})\hat{j}$ است. در همان لحظه، سرعت ذره برحسب بردارهای یکه چیست؟

۸۷- در شکل ۴-۵۳ توپی از روی سطح زمین با تندی اولیهٔ $v_{\circ}=۷/۰۰\text{m/s}$ به طور مستقیم رو به بالا شوت شده است. همزمان با آن اتاقک یک بالابر از روی زمین، رو به بالا با تندی ثابت $v_c=۳/۰۰\text{m/s}$ شروع به حرکت می‌کند. بیشینهٔ ارتفاعی که توپ نسبت به (الف) زمین و (ب) کف اتاقک می‌رسد چقدر است؟ تندی توپ با چه آهنگی نسبت به (پ) زمین و (ت) کف اتاقک تغییر می‌کند؟




شکل ۴-۵۳ مسئلهٔ ۸۷

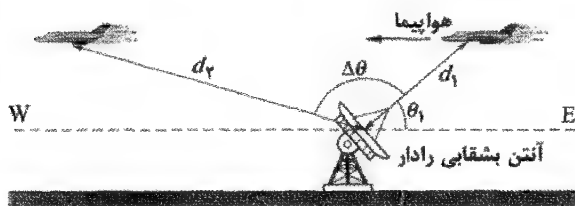
۸۸- در شکل ۴-۵۴ الف سورتمه‌ای در جهت منفی $x$ با تندی ثابت $v_s$ حرکت می‌کند. در حین حرکت سورتمه، گلوله‌ای یخی با سرعت $\vec{v}_{\circ}=v_{\circ x}\hat{i}+v_{\circ y}\hat{j}$ نسبت به سورتمه پرتاب می‌شود. وقتی که گلوله فرود می‌آید، جابه‌جایی افقی $\Delta x_{bg}$ آن نسبت به زمین (از مکان پرتاب تا مکان فرود آمدنش) اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۴-۵۴ ب $\Delta x_{bg}$ را بر حسب تابعی از $v_s$ به دست می‌دهد. فرض کنید گلوله تقریباً در همان بلندی نقطهٔ پرتابش فرود می‌آید. مقدارهای (الف) $v_{\circ x}$ و (ب) $v_{\circ y}$ چقدر است؟ جابه‌جایی گلوله $\Delta x_{bs}$ نسبت به سورتمه را نیز می‌توان اندازه‌گیری کرد. فرض کنید در هنگام پرتاب گلوله، سرعت سورتمه تغییر نکرده باشد. هنگامی که $v_s$ (ب) ۵/۰ m/s و (پ) ۱۵m/s باشد، $\Delta x_{bs}$ چقدر است؟




شکل ۴-۵۴ مسئله ۸۸

۸۹- شخصی که می‌تواند در قایقی واقع در آب ساکن با تندی ۶/۴km/h پارو بزند با رودخانهٔ مستقیمی به پهنای ۶/۴km که از آن جریانی با تندی ۳/۲km/h می‌گذرد مواجه می‌شود. $\hat{i}$ را در امتداد پهنای رودخانه و $\hat{j}$ را رو به پایین رود در نظر می‌گیریم. اگر او بخواهد بر یک خط مستقیم به نقطه‌ای درست در نقطهٔ مقابل نقطهٔ شروعش برسد (الف) قایق را باید در چه زاویه‌ای نسبت به $\hat{i}$ منحرف کند؟ و (ب) این کار چقدر طول می‌کشد؟ (پ) فرض کنید او به جای عبور از پهنای رودخانه، ۳/۲km رو به *پایین* رودخانه برود و سپس به نقطهٔ شروعش بازگردد. این کار چقدر طول می‌کشد؟ (ت) اگر او ۳/۲km رو به *بالای* رودخانه برود و سپس به نقطهٔ شروعش بازگردد، چقدر طول می‌کشد؟ (ث) اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن از پهنای رودخانه بگذرد، قایق را باید در چه زاویه‌ای نسبت به $\hat{i}$ منحرف کند؟ (ج) این زمان چقدر است؟

۹۰- در شکل ۴-۵۵ ، یک ایستگاه رادار هواپیمایی را که به طور مستقیم از شرق نزدیک می‌شود، ردیابی می‌کند. در مشاهدهٔ نخست، هواپیما در فاصلهٔ $d_1=۳۶۰\text{m}$ از ایستگاه و در زاویهٔ $\theta_1=۴۰^{\circ}$ بالای افق قرار دارد. پس از تغییر زاویهٔ $\Delta\theta=۱۲۳^{\circ}$ از شرق به غرب در صفحهٔ قائم، هواپیما در فاصلهٔ $d_2=۷۹۰\text{m}$ از ایستگاه مشاهده می‌شود. (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی هواپیما در این بازهٔ زمانی چیست؟




شکل ۴-۵۵ مسئلهٔ ۹۰

۹۱- تفنگی به طور افقی هدفی را به فاصلهٔ ۳۰m نشانه‌گیری کرده است. گلوله ۱/۹cm پایین نقطهٔ نشانه‌گیری شده به هدف

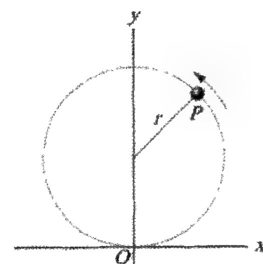
برخورد می‌کند. (الف) زمان پرواز گلوله و (ب) تندی آن در هنگام خروج از تفنگ چقدر است؟ SSM

۹۲- قطار تندرو فرانسوی به نام TGV[1] دارای تندی میانگین زمان‌بندی شدهٔ ۲۱۶km/h است. (الف) اگر این قطار با این تندی، انحنایی را طی کند و شتابی که به وسیلهٔ مسافرین احساس می‌شود ۰/۰۵۰g باشد، کمترین شعاع انحنای مجاز برای مسیر قطار چقدر است؟ (ب) قطار باید با چه تندی انحنایی به شعاع ۱/۰۰km را طی کند تا شتاب ۰/۰۵۰g باشد؟

۹۳- یک میدان مغناطیسی می‌تواند بر ذرهٔ بارداری که بر یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند نیرو وارد کند. فرض کنید در یک میدان مغناطیسی خاص، بر الکترونی که در یک مسیر دایره‌ای می‌چرخد، یک شتاب شعاعی به بزرگی $۳/۰\times۱۰^{۱۴}\ m/s^۲$ وارد شود. (الف) اگر شعاع مسیر دایره‌ای ۱۵m باشد، تندی الکترون چقدر است؟ (ب) دورهٔ حرکت چقدر است؟

۹۴- بردار مکان اولیهٔ یک پروتون $\vec{r}=(۵/۰\hat{i}-۶/۰\hat{j}+۲/۰\hat{k})m$ و بردار مکان بعدی آن $\vec{r}=(-۲/۰\hat{i}+۶/۰\hat{j}+۲/۰\hat{k})m$ است. (الف) بردار جابه‌جایی پروتون چیست؟ و (ب) با کدام صفحه موازی است؟

۹۵- ذرهٔ $P$ با تندی ثابت روی دایره‌ای به شعاع $r=۳/۰۰m$ حرکت می‌کند (شکل ۴-۵۶) و در ۲۰/۰s یک دور کامل می‌زند. ذره در لحظهٔ $t=۰$ از نقطهٔ $O$ می‌گذرد. بردارهای موردنظر را برحسب نمادگذاری بزرگی- زاویه (نسبت به سوی مثبت $x$) به دست آورید. نسبت به مبداء $O$ بردار مکان ذره را در زمانهای (الف) $t=۵/۰۰s$ ، (ب) $t=۷/۵۰s$ ، و (پ) $t=۱۰/۰s$ پیدا کنید. (ت) برای بازهٔ ۵/۰۰s از پایان ثانیهٔ پنجم تا پایان ثانیهٔ دهم جابه‌جایی ذره را پیدا کنید برای این بازه، مطلوب است (ث) سرعت میانگین و سرعت آن در (ج) آغاز و (چ) پایان بازهٔ زمانی. سپس شتاب را در (ح) آغاز و (خ) در پایان بازهٔ زمانی به دست آورید.




شکل ۴-۵۶ مسئلهٔ ۹۵

۹۶- یک قایق یخی بر سطح یک دریاچهٔ یخ بسته با شتاب ثابتی که به وسیلهٔ باد ایجاد شده است، حرکت می‌کند. در یک لحظهٔ معین سرعت قایق $(۶/۳۰\hat{i}-۸/۴۲\hat{j})m/s$ است. سه ثانیه پس از آن، به دلیل تغییر جهت باد، قایق به طور لحظه‌ای ساکن می‌شود. شتاب میانگین برای این بازهٔ زمانی ۳s چقدر است؟

۹۷- در مدت ۳/۵۰h، یک بالون ۲۱/۵km رو به شمال، ۹/۷۰km رو به شرق، و ۲/۸۸km رو به بالا از نقطهٔ رها شدن روی زمین، حرکت می‌کند. مطلوب است (الف) بزرگی سرعت میانگین بالون و (ب) جهت سرعت میانگین آن نسبت به افق.

۹۸- توپی که به طور افقی از ارتفاع ۲۰m پرتاب شده است با تندی برابر با سه برابر تندی اولیه‌اش به زمین برخورد می‌کند. تندی اولیهٔ توپ چقدر بوده است؟

۹۹- پرتابه‌ای با تندی اولیهٔ ۳۰m/s با زاویهٔ °۶۰ بالای افق پرتاب شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت پرتابه ۲/۰s پس از پرتاب چیست؟ (پ) در این لحظه آیا جهت سرعت، رو به بالای افق است یا پایین آن؟ (ت) بزرگی و (ث) جهت سرعت پرتابه ۵/۰s پس از پرتاب چیست؟ (ج) در این لحظه آیا جهت سرعت، رو به بالای افق است یا پایین آن؟

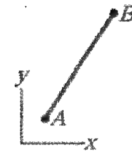
۱۰۰- پایانهٔ فرودگاهی دارای پیاده‌روی متحرکی است تا مسافران را هر چه سریعتر از یک راهروی دراز بگذراند. شخصی که از پیاده‌روی متحرک استفاده نمی‌کند در مدت ۱۵۰s قدم‌زنان از راهرو می‌گذرد، ولی شخصی که بر پیاده‌روی متحرک می‌ایستد، همین مسافت را به سادگی در ۷۰s طی می‌کند. شخص دیگری که بر پیاده‌رو سوار می‌شود و روی آن راه می‌رود، چقدر طول می‌کشد تا از راهرو بگذرد؟ فرض کنید دو نفری که راه می‌روند تندی یکسانی داشته باشند.

۱۰۱- یک بازیکن فوتبال توپی را قبل از برخورد با زمین طوری می‌زند که پس از یک «زمان تعلیق» (زمان پرواز) به مدت ۴/۵s در فاصلهٔ ۴۶m به زمین برخورد می‌کند. اگر توپ ۱۵۰m بالاتر از زمین شوت شده باشد، (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به افق) سرعت اولیهٔ توپ باید چه باشد؟

۱۰۲- در بازی والیبال بانوان بلندی لبهٔ بالایی تور ۲/۲۴m بالای سطح زمین و مساحت زمین بازی ۹/۰m در ۹/۰m است. بازیکنی با استفاده از یک سرویس پرشی به توپی که در ارتفاع ۳/۰m بالای سطح زمین است و به فاصلهٔ افقی ۸/۰m از تور قرار دارد، ضربه می‌زند. اگر سرعت اولیهٔ توپ افقی باشد (الف) مقدار کمینهٔ تندی توپ چقدر باید باشد تا توپ بتواند از تور عبور کند؟ (ب) مقدار بیشینهٔ تندی توپ چقدر باید باشد تا توپ در خط انتهایی زمین مقابل بخوابد؟

۱۰۳- شکل ۴-۵۷ مسیر مستقیم ذره‌ای را که از حالت سکون در بازهٔ زمانی $\Delta t_۱$ شتاب گرفته است روی یک دستگاه مختصات $xy$ نشان می‌دهد. شتاب ثابت است. مختصات $xy$ نقطهٔ $A$ ، (۴/۰۰m,۶/۰۰m) و مختصات $xy$ نقطهٔ $B$ ، (۱۲/۰m ,۱۸/۰m) است. (الف) نسبت مؤلفه‌های شتاب $a_y/a_x$ چیست؟ (ب) اگر این حرکت برای بازهٔ زمانی یکسان $\Delta t_۱$ دیگری ادامه پیدا کند، مختصات نقطهٔ بعدی چیست؟

1. Train a' Grande Vitesse (TGV)



شکل ۴-۵۷ مسئلهٔ ۱۰۳

۱۰۴- فضانوردی در یک دستگاه مرکزگریز افقی به شعاع ۵/۰m دوران داده می‌شود. (الف) اگر بزرگی شتاب مرکزگرای فضانورد ۷/۰g باشد، تندی او چقدر است؟ (ب) برای ایجاد این شتاب به چند دور بر دقیقه نیاز است؟ (پ) دورهٔ حرکت چقدر است؟

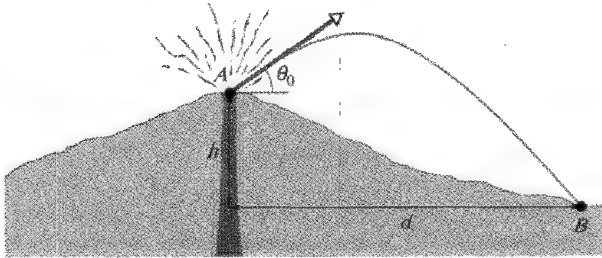
۱۰۵- (الف) بزرگی شتاب مرکزگرای جسمی که بر استوای زمین واقع است به واسطهٔ چرخش زمین چقدر است؟ (ب) اگر بخواهیم جسم واقع بر استوا شتاب مرکزگرایی به بزرگی $۹/۸\text{m/s}^2$ داشته باشد، دورهٔ حرکت چرخش زمین باید چقدر باشد؟

۱۰۶- شخصی از یک پلهٔ برقی ساکن به طول ۱۵m در مدت ۹۰s بالا می‌رود. هنگامی که شخص روی همین پله برقی که در حال حرکت است می‌ایستد، در مدت ۶۰s بالا برده می‌شود. چقدر طول می‌کشد تا این شخص از پله برقی در حال حرکت بالا برود؟ آیا پاسخ به طول پله برقی بستگی دارد؟

۱۰۷- به یک توپ بیسبال در سطح زمین ضربه زده می‌شود. توپ ۳/۰s پس از ضربه خوردن به بیشینهٔ ارتفاع خود می‌رسد. ۲/۵s پس از آنکه توپ به ارتفاع بیشینه‌اش رسید، مماس بر حصاری که به فاصلهٔ ۹۷/۵m از محل ضربه زدن واقع است، می‌گذرد. با فرض آنکه زمین مسطح باشد (الف) ارتفاع بیشینه‌ای که توپ نسبت به زمین یافته چقدر است؟ (ب) بلندی حصار چقدر است؟ (پ) توپ در چه فاصله‌ای پس از حصار به زمین می‌خورد؟ **SSM**

۱۰۸- برد یک پرتابه نه تنها به $v_0$ و $\theta_0$، بلکه به مقدار $g$ شتاب سقوط آزاد نیز بستگی دارد، که از جایی به جای دیگر تغییر می‌کند. در سال ۱۹۳۶/۱۳۱۵، جسی اُونس[1] با پرش ۸/۰۹m یک رکورد جهانی برای پرش طول در بازیهای المپیک برلین (که در آنجا $g = ۹/۸۱۲\text{m/s}^2$ است) بر جای گذاشت. اگر او در المپیک ملبورن (که در آنجا $g = ۹/۷۹۹۹\,\text{m/s}^2$ است) به سال ۱۹۵۶/۱۳۳۵ شرکت می‌کرد و با فرض اینکه مقدارهای $v_0$ و $\theta_0$ پرش او یکسان می‌ماند، رکورد او به چه میزانی تغییر می‌کرد؟

۱۰۹- در حین فوران آتشفشانی، تکه‌های بزرگی از سنگهای سخت از دهانهٔ آتشفشان به بیرون پرتاب می‌شوند؛ این پرتابه‌ها *بمب‌های آتشفشانی* نامیده می‌شوند. شکل ۴-۵۸ برشی از کوه فوجی در ژاپن را نشان می‌دهد. (الف) با چه تندی اولیه‌ای بمب باید با زاویهٔ $\theta_0 = ۳۵^\circ$ نسبت به افق از دهانهٔ $A$ پرتاب شود تا در پای آتشفشان، واقع در نقطهٔ $B$ به فاصلهٔ عمودی $h = ۳/۳۰\text{km}$ و فاصلهٔ افقی $d = ۹/۴۰\text{km}$ فرود آید؟ فعلاً از اثر هوا بر حرکت بمب چشمپوشی کنید. (ب) زمان پرواز چقدر است؟ (پ) آیا اثر هوا پاسخ در (الف) را کاهش می‌دهد یا افزایش؟



شکل ۴-۵۸ مسئلهٔ ۱۰۹

۱۱۰- پروازهای طولانی در عرض جغرافیایی میانه در نیمکرهٔ شمالی با جریانهای تندبادی به طرف شرق مواجه می‌شوند که می‌توانند بر تندی هواپیما نسبت به زمین تأثیر بگذارند. اگر خلبانی تندی هواپیما نسبت به هوا (*تندی هوایی* هواپیما) را در یک مقدار معین ثابت نگه دارد، تندی هواپیما نسبت به زمین (*تندی زمینی* هواپیما) هنگامی که هواپیما در امتداد جریان تند باد حرکت کند بیشتر از هنگامی است که بر خلاف جریان تند باد پرواز کند. یک پرواز رفت و برگشت را در نظر بگیرید که بین دو شهر به فاصلهٔ ۴۰۰۰km زمانبندی شده است. در مسیر رفت، پرواز در جهت جریان تند باد و در مسیر برگشت برخلاف آن است. رایانهٔ هواپیما برای تندی هوایی ۱۰۰۰km/h را نشان می‌دهد که برای آن اختلاف زمان پرواز رفت و برگشت ۷۰/۰min است. تندی جریان تندباد چقدر است؟

۱۱۱- ذره‌ای در $t = ۰$ با سرعت $۸/۰\hat{j}\,\text{m/s}$ از مبدأ شروع و با شتاب ثابت $(۴/۰\hat{i} + ۲/۰\hat{j})\text{m/s}^2$ در صفحهٔ $xy$ حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که مؤلفهٔ $x$ ذره ۲۹m است، (الف) مختصهٔ $y$ و (ب) تندی آن چقدر است؟ **SSM**

۱۱۲- یک قهرمان دو سرعت که روی یک مسیر دایره‌ای می‌دود سرعتی با بزرگی ثابت ۹/۲m/s و شتاب مرکزگرایی با بزرگی $۳/۸\text{m/s}^2$ دارد. (الف) شعاع مسیر و (ب) دورهٔ حرکت دایره‌ای را پیدا کنید.

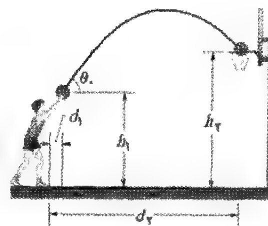
۱۱۳- الکترونی با سرعت اولیهٔ افقی به بزرگی $۱/۰۰\times۱۰^۹\,\text{cm/s}$ در فضای بین دو صفحهٔ فلزی افقی که به طور الکتریکی باردار شده‌اند حرکت می‌کند. در این ناحیه، الکترون مسافت افقی ۲/۰۰cm را طی کند و دارای شتاب رو به پایین ثابتی به بزرگی $۱/۰۰\times۱۰^۷\,\text{cm/s}^2$ است که بر اثر میدان الکتریکی بین صفحه‌ها به آن وارد می‌شود. مطلوب است (الف) زمان لازم برای آنکه الکترون مسافت ۲/۰۰cm را بپیماید، (ب) مسافت قائمی که الکترون در طی این زمان می‌پیماید، و بزرگی مؤلفه‌های (پ) افقی و (ت) قائم سرعت الکترون هنگامی که از ناحیهٔ بین صفحه‌ها خارج می‌شود.

1. Jesse Owens

۱۱۴- یک بالابر بدون سقف با تندی ثابت $10\,m/s$ رو به بالا حرکت می‌کند. پسر بچه‌ای در بالابر درست زمانی که کف بالابر $28m$ بالای سطح زمین است توپی را از ارتفاع $2/0\,m$ بالای کف بالابر به طور مستقیم رو به بالا پرتاب می‌کند. تندی اولیهٔ توپ نسبت به بالابر $20\,m/s$ است. (الف) ارتفاع بیشینه‌ای که توپ به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا توپ به کف بالابر برگردد؟

۱۱۵- فرض کنید یک کاوشگر فضایی بتواند در برابر تنشهایی ناشی از شتاب $20g$ تاب بیاورد. (الف) کمینهٔ شعاع چرخش چنین فضاپیمایی که با تندی یک دهم تندی نور حرکت می‌کند چقدر است؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا با این تندی به اندازهٔ $90°$ کامل بچرخد؟

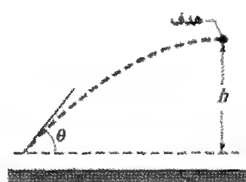
۱۱۶- بازیکن بسکتبال در شکل ۴-۵۹ باید توپ را با چه تندی اولیه‌ای با زاویهٔ $\theta_0 = 55°$ بالای افق پرتاب کند تا توپ از میان سبد بگذرد؟ فاصله‌های افقی $d_1 = 1/0\,ft$ و $d_2 = 14ft$ و بلندی‌ها $h_1 = 7/0\,ft$ و $h_2 = 10\,ft$ است.



شکل ۴-۵۹ مسئلهٔ ۱۱۶

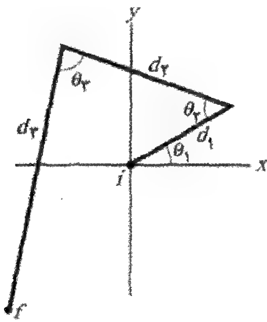
۱۱۷- یک واگن باری چوبیِ در امتداد یک خط آهن مستقیم با تندی $v_1$ حرکت می‌کند. تیراندازی با یک تفنگ پرقدرت گلوله‌ای را (با تندی اولیه $v_2$) شلیک می‌کند. گلوله از دو دیوارهٔ واگن می‌گذرد، به گونه‌ای که از دید ناظر داخل واگن سوراخهای ورودی و خروجی دقیقاً در مقابل یکدیگرند. گلوله از چه جهتی، نسبت به مسیر واگن، شلیک شده است؟ فرض کنید گلوله با ورود به واگن منحرف نشده، ولی تندی آن به اندازهٔ ٪۲۰ کاهش یافته است. $v_1 = 85km/h$ و $v_2 = 650\,m/s$ در نظر بگیرید. (چرا نیازی به دانستن پهنای واگن ندارید؟)

۱۱۸- می‌خواهیم توپی را با تندی $12/0\,m/s$ به سوی هدفی در ارتفاع $h = 5/00\,m$ در بالای سطح رها کردن توپ پرتاب کنیم (شکل ۴-۶۰). می‌خواهیم سرعت توپ در لحظه‌ای که به هدف می‌رسد افقی باشد. (الف) توپ را باید در چه زاویهٔ $\theta$ بالای افق پرتاب کنیم؟ (ب) فاصلهٔ افقی نقطهٔ پرتاب تا هدف چقدر است؟ (پ) تندی توپ درست در لحظه‌ای که به هدف می‌رسد چقدر است؟



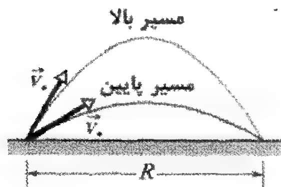

شکل ۴-۶۰ مسئلهٔ ۱۱۸

۱۱۹- شکل ۴-۶۱ مسیر طی شده توسط یک آدم مست را روی سطح زمین از نقطهٔ آغازین $i$ تا نقطهٔ نهایی $f$ نشان می‌دهد. زاویه‌ها عبارت‌اند از $\theta_1 = 30/0°$ ، $\theta_2 = 50/0°$ و $\theta_3 = 80/0°$ و مسافتها عبارت‌اند از: $d_1 = 5/00\,m$ ، $d_2 = 8/00\,m$ و $d_3 = 12/0\,m$ . (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ جابه‌جایی شخص از $i$ به $f$ چقدر است؟



شکل ۴-۶۱ مسئلهٔ ۱۱۹

۱۲۰- پرتابه‌ای با تندی اولیهٔ $v_0 = 30/0\,m/s$ ، مطابق شکل ۴-۶۲، از سطح تراز زمین به سوی هدفی که در فاصلهٔ $R = 20/0\,m$ از آن روی زمین قرار دارد پرتاب شده است. (الف) کمترین و (ب) بیشترین زاویه‌های پرتاب باید چقدر باشند تا پرتابه به هدف برخورد کند؟




شکل ۴-۶۲ مسئلهٔ ۱۲۰

۱۲۱- آبادی $A$ به فاصلهٔ $90\,km$ در غرب آبادی $B$ واقع است. شتری آبادی $A$ را ترک می‌کند و در مدت زمان $50h$ مسافت $75\,km$ را در جهت $37°$ شمال شرق می‌پیماید. سپس شتر مسافت $65\,km$ را در مدت زمان $35h$ رو به جنوب طی می‌کند. پس از آن به مدت $5h$ استراحت می‌کند. در نقطهٔ استراحت شتر (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی شتر نسبت به $A$ چیست؟ از هنگامی که شتر آبادی $A$ را ترک می‌کند تا زمان پایان مدت استراحت، (پ) بزرگی و (ت) جهت سرعت میانگین و (ث) تندی میانگین شتر چقدر است؟ اگر آخرین آب خوردن شتر در آبادی $A$ باشد، برای آب خوردن بعدی، شتر باید در زمانی کمتر از $120\,h$ به آبادی $B$ برسد. با فرض آنکه شتر درست پس از $120\,h$ به آبادی $B$ برسد، (ج) بزرگی و (چ) جهت سرعت میانگین شتر پس از زمان استراحت باید چه باشد؟ SSM

۱۲۲- یک *شگفتی نموداری*: در لحظهٔ $t = 0$ ، پرتابه‌ای از سطح زمین با تندی اولیهٔ $16/0\,m/s$ و زاویهٔ پرتاب $\theta_0$ پرتاب شده است. بردار مکان $\vec{r}$ را که در کل زمان پرواز از نقطهٔ پرتاب تا مکان پرتابه امتداد می‌یابد، در نظر بگیرید. نمودار بزرگی بردار مکان $r$ را به ازای (الف) $\theta_0 = 40/0°$ و (ب) $\theta_0 = 80/0°$ رسم کنید. به ازای $\theta_0 = 40/0°$ (پ) در چه زمانی $r$ به مقدار بیشینه‌اش می‌رسد؟ (ت) این مقدار چقدر است؟ و (ث) به طور افقی و (ج) به طور قائم پرتابه در چه فاصله‌ای از نقطهٔ پرتاب قرار دارد؟ به ازای $\theta_0 = 80/0°$ (چ) در چه زمانی $r$ به مقدار بیشینه‌اش می‌رسد؟ (ح) این مقدار چقدر است؟ و (خ) به طور افقی و (د) به طور قائم پرتابه در چه فاصله‌ای از نقطهٔ پرتاب قرار دارد؟

۱۲۳– در مسئلهٔ نمونهٔ ۴-۷ ب، گلولهٔ توپی از فاصلهٔ افقی ۶۸۶m و با زاویهٔ ۴۵° نسبت به افق از توپی که در سطح دریا واقع شده است، شلیک می‌شود. اگر توپ در ارتفاع ۳۰m از سطح دریا قرار می‌داشت، فاصلهٔ افقی طی شده توسط گلوله چقدر بیشتر می‌شد؟

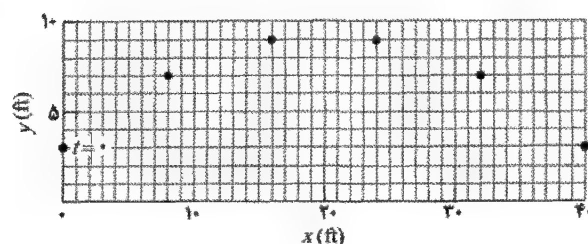
۱۲۴– (الف) اگر الکترونی با تندی ۳/۰×۱۰^۶ m/s به طور افقی پرتاب شود، پس از پیمودن فاصلهٔ افقی ۱/۰m، چقدر سقوط می‌کند؟ (ب) اگر تندی اولیه افزایش یابد، آیا این پاسخ افزایش می‌یابد یا کاهش؟

۱۲۵– بزرگی سرعت یک پرتابه وقتی که در بیشینهٔ ارتفاعش بالای زمین قرار دارد، ۱۰m/s است. (الف) بزرگی سرعت پرتابه ۱/۰s پیش از رسیدن به ارتفاع بیشینه‌اش چقدر است؟ (ب) بزرگی سرعت پرتابه ۱/۰s پس از عبور از ارتفاع بیشینه‌اش چقدر است؟ اگر $x=0$ و $y=0$ را مختصات نقطهٔ با ارتفاع بیشینه، و سوی مثبت $x$ را جهت سرعت در آنجا بگیریم، (پ) مختصهٔ $x$ و (ت) مختصهٔ $y$ پرتابه، ۱/۰s پیش از رسیدن به ارتفاع بیشینه‌اش، (ث) مختصهٔ $x$ و (ج) مختصهٔ $y$ پرتابه ۱/۰s پس از رسیدن به ارتفاع بیشینه‌اش چیست؟

۱۲۶– یک خرگوش ترسیده با تندی ۶/۰m/s رو به شرق می‌دود و وارد یک ناحیهٔ مسطح یخی با اصطکاک قابل چشمپوشی می‌شود. وقتی خرگوش بر سطح یخ می‌لغزد، نیروی باد باعث می‌شود که به خرگوش شتاب ثابت ۱/۴m/s² رو به شمال وارد شود. با انتخاب یک دستگاه مختصات که مبداء آن واقع بر مکان اولیهٔ خرگوش در سطح یخی و سوی مثبت محور $x$ آن رو به شرق باشد (الف) سرعت و (ب) مکان خرگوش را ۳/۰s پس از لغزیدن بر حسب بردارهای یکه به دست آورید.

۱۲۷– خلبان یک هواپیما در بادی که با تندی ۲۰km/h رو به جنوب می‌وزد، رو به شرق نسبت به زمین پرواز می‌کند. اگر تندی هواپیما در نبود باد ۷۰km/h باشد، تندی هواپیما نسبت به زمین چقدر است؟

۱۲۸– یک پرتاب کنندهٔ توپ بیسبال، توپ را از نقطه‌ای به ارتفاع ۳/۰ft بالای سطح زمین پرتاب می‌کند. نمودار استروبوسکوپی مکان توپ در شکل ۴-۶۳ رسم شده است، که در آن $t=0$ لحظهٔ پرتاب شدن توپ، و فاصلهٔ زمانی بین نقطه‌های مشخص شده در نمودار، ۰/۲۵s است. (الف) تندی اولیهٔ توپ چقدر است؟ (ب) تندی توپ در لحظه‌ای که به ارتفاع بیشینه‌اش از سطح زمین می‌رسد چیست؟ (پ) این ارتفاع بیشینه چقدر است؟



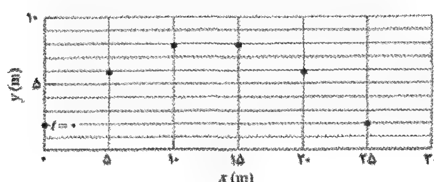
شکل ۴-۶۳ مسئلهٔ ۱۲۸

۱۲۹– پلیس ایالت نیوهمشایر[1] برای کنترل تندی مجاز خودروها در بزرگراه از هواپیما استفاده می‌کند. فرض کنید تندی یکی از هواپیماها در هوای آرام ۱۳۵mi/h باشد. این هواپیما به طور مستقیم رو به شمال پرواز می‌کند، به طوری که در تمام مدت در امتداد بزرگراه جنوب- شمال است. یک ناظر زمینی از طریق رادیو به خلبان اطلاع می‌دهد که بادی با تندی ۷۰mi/h می‌وزد ولی فراموش می‌کند که جهت وزش را بگوید. خلبان متوجه می‌شود که با وجود اینکه باد می‌وزد، هواپیما می‌تواند ۱۳۵mi را در مدت ۱/۰۰h طی کند. به عبارت دیگر، تندی زمینی همانند وقتی است که باد نمی‌وزید. (الف) باد از چه جهتی می‌وزد؟ (ب) هواپیما در چه جهتی حرکت می‌کند؟

۱۳۰– بردار مکان $\vec{r}$ یک ذرهٔ در حال حرکت در یک صفحهٔ $xy$ با رابطهٔ $\vec{r}=2t\hat{i}+2\sin[(\pi/4\,\text{rad/s})t]\hat{j}$ داده شده است که در آن $\vec{r}$ بر حسب متر و $t$ بر حسب ثانیه است. (الف) مؤلفه‌های $x$ و $y$ مکان ذره را در $t=0,\ 1/0,\ 2/0,\ 3/0,\ 4/0\,s$ محاسبه کنید و مسیر ذره را برای بازهٔ $0\le t\le 4/0\,s$ در صفحهٔ $xy$ رسم کنید. (ب) مؤلفه‌های سرعت ذره را در $t=1/0,\ 2/0,\ 3/0\,s$ محاسبه کنید و با رسم بردارهای سرعت روی منحنی مسیر ذره در بخش (الف) نشان دهید که سرعت، مماس بر مسیر ذره است و در هر زمان در جهت حرکت ذره قرار دارد. (پ) مؤلفه‌های شتاب ذره را در $t=1/0,\ 2/0,\ 3/0\,s$ محاسبه کنید.

۱۳۱– یک بازیکن گلف بازی را از روی یک بلندی با دادن سرعت اولیهٔ ۴۳m/s به توپ با زاویهٔ ۳۰° بالای افق شروع می‌کند. توپ در فاصلهٔ افقی ۱۸۰m از بلندی اولیه به زمین برخورد می‌کند. با فرض آنکه زمین هموار باشد (الف) بلندی چقدر بالاتر از زمین است؟ (ب) تندی توپ در هنگام برخورد با زمین چقدر است؟

۱۳۲– یک مسیریاب روی سیاره‌ای در یک منظومهٔ خورشیدی دوردست کار گذاشته شده است. یک پرتابگر وزنه، وزنه‌ای را از نقطهٔ ۲/۰m بالای سطح سیاره پرتاب می‌کند. نمودار استروبوسکوپی وزنه در شکل ۴-۶۴ نشان داده شده است، که در آن $t=0$ لحظهٔ پرتاب شدن وزنه، و فاصلهٔ زمانی بین نقطه‌های مشخص شده در نمودار ۰/۵۰s است. (الف) سرعت اولیهٔ وزنه بر حسب بردارهای یکه چیست؟ (ب) بزرگی شتاب سقوط آزاد در سیاره چقدر است؟ (پ) وزنه پس از طی چه زمانی از لحظهٔ پرتاب شدن به سطح سیاره می‌رسد؟ (ت) اگر پرتاب مشابهی بر سطح زمین صورت بگیرد، وزنه پس از طی چه زمانی از لحظهٔ پرتاب شدن به سطح زمین می‌رسد؟



شکل ۴-۶۴ مسئله ۱۳۲

1. New Hampshire

# ۵ نیرو و حرکت- I



اغلب مشتاقان سوار شدن در قطارهای تفریحی در شهربازی دوست دارند در اولین اتاقک آن قرار داشته باشند تا موقع رسیدن به «لبه» و سرازیر شدن به پایین نفر اول باشند. ولی مشتاقان دیگری ترجیح می‌دهند که در اتاقک آخری سوار شوند و مدعی هستند که از بالای این لبه وحشت بیشتری ایجاد می‌شود. وقتی آخرین اتاقک توسط بقیهٔ قطار از روی لبه کشیده می‌شود مسلماً قطار تفریحی تندتر حرکت می‌کند. اما به نظر می‌رسد که عوامل ظریف دیگری نیز در ایجاد وحشت در اتاقک آخر وقتی به لبه می رسد دخیل هستند.

**عامل ظریفی که موجب دلهره و ترس در سوار شدن در آخرین اتاقک می‌شود، چیست؟**

پاسخ در همین فصل.

## ۵-۱ فیزیک چیست؟

دیدیم که بخشی از فیزیک به بررسی حرکت از جمله حرکتهای شتابدار که در آنها سرعت تغییر می‌کند می‌پردازد. فیزیک به بررسی آنچه که می‌تواند *عامل* حرکت باشد نیز می‌پردازد. این عامل، **نیرو** است که به زبانی نه چندان دقیق، باعث کشیدن یا هل‌دادن جسم می‌شود. نیرو به کنشی بر جسم گفته می‌شود که سرعت آن را تغییر دهد. مثلاً وقتی یک وسیلهٔ نقلیه شتاب می‌گیرد نیرویی از مسیر بر چرخهای عقب آن وارد و باعث شتاب گرفتن آن می‌شود. وقتی یک مدافع [در فوتبال آمریکایی] مهاجم حریف را زمین می‌زند، نیرویی از مدافع بر مهاجم وارد و باعث شتاب رو به عقب او می‌شود. وقتی یک اتومبیل به تیر چراغ برق می‌کوبد، نیرویی که از تیر به اتومبیل وارد می‌شود باعث توقف آن می‌گردد. مجله‌های علمی، مهندسی، حقوقی و پزشکی پر از مقاله‌هایی دربارهٔ نیروهایی است که بر اجسام از جمله انسانها وارد می‌شوند.

## ۵-۲ مکانیک نیوتونی

ایزاک نیوتون (۱۱۰۶-۱۰۲۱/۱۷۲۷-۱۶۴۲) نخستین کسی بود که به رابطهٔ بین نیرو و شتابی که به وجود می‌آورد پی‌برد و این، موضوع همین فصل است. بررسی این رابطه، به گونه‌ای که نیوتون آن را ارائه کرد، *مکانیک نیوتونی* نامیده شده است. در این فصل به بررسی سه قانون بنیادی حرکت او خواهیم پرداخت.

مکانیک نیوتونی برای همهٔ حالتها به کار نمی رود. اگر تندی جسمهای برهم کنش‌کننده بسیار بزرگ باشد- کسر قابل ملاحظه‌ای از تندی نور- باید به جای مکانیک نیوتونی از نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین استفاده کنیم که برای همهٔ تندیها از جمله تندیهای نزدیک به تندی نور برقرار است. اگر اندازهٔ جسمهای برهم‌کنش کننده در مقیاس ساختارهای اتمی باشد (مثل الکترونهای داخل اتم)، باید مکانیک نیوتونی را با مکانیک کوانتومی جایگزین کنیم. فیزیکدانان امروزه مکانیک نیوتونی را به عنوان حالت خاصی از این نظریهٔ جامعتر در نظر می‌گیرند. با این حال، مکانیک نیوتونی حالت خاص بسیار مهمی است؛ چرا که برای حرکت جسمهای با اندازه‌های بسیار کوچک (تقریباً در مقیاس ساختار اتمی) تا نجومی (کهکشانها و خوشه‌های کهکشانی) به کار می‌رود.

## ۵-۳ قانون اول نیوتون

پیش از آنکه نیوتون مکانیک خود را فرمولبندی کند، تصور می‌شد اثری به نام «نیرو»، لازم است تا جسمی را در حرکت با سرعت ثابت نگه دارد. به همین ترتیب تصور می‌شد وقتی جسمی ساکن است، در «حالت طبیعی» خود قرار دارد. برای آنکه جسمی با سرعت ثابت حرکت کند، ظاهراً باید به طریقی با کشیدن یا هل دادن، حرکت داده شود. در غیر این صورت، جسم به «طور طبیعی» حرکت نمی‌کند.

این تصورات منطقی بودند. اگر یک قرص هاکی را روی کفی چوبی بلغزانید، در واقع حرکتش کُند و سرانجام متوقف می‌شود. اگر بخواهید آن را با سرعت ثابت روی کف حرکت دهید، باید به طور دائم آن را بکشید یا هل بدهید.

ولی اگر قرص را روی یک میدان یخی اسکیت سواری حرکت دهیم، مسافت بسیار بیشتری را طی خواهد کرد. می‌توانید سطح طولانیتر و لغزنده‌تری را تصور کنید که گوی بیشتر و بیشتر روی آن بلغزد. در حدّ نهایی می‌توانید یک سطح طویل و بی‌اندازه لغزنده‌ای (که به آن **سطح بدون اصطکاک** گفته می‌شود) را تصور کنید که قرص روی آن به سختی آهسته می‌شود. (در واقع می‌توانیم با رهاکردن قرص روی یک میز هوای افقی، که در آن قرص روی لایهٔ نازکی از هوا حرکت می‌کند، به این حالت نزدیک شویم.)

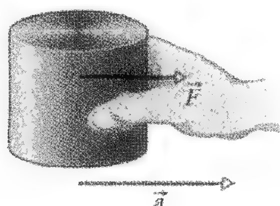
براساس این مشاهدات می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر بر جسم متحرکی هیچ نیرویی وارد نشود آن جسم با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. این، به نخستین قانون از سه قانون حرکت نیوتون منجر می‌شود:

> **قانون اول نیوتون:** اگر هیچ نیرویی به جسم وارد نشود، سرعت آن جسم تغییر نمی‌کند؛ یعنی که جسم نمی‌تواند شتاب داشته باشد.

به عبارت دیگر، اگر جسم در حال سکون باشد، در همان حال باقی می‌ماند، و اگر در حال حرکت باشد، به حرکت خود با همان سرعت (از نظر بزرگی *و* جهت) ادامه می‌دهد.

## ۵-۴ نیرو

حال می‌خواهیم یکای نیرو را تعریف کنیم. می‌دانیم که نیرو می‌تواند به جسم شتاب دهد. بنابراین، یکای نیرو را برحسب شتابی که نیرو به یک جسم مرجع استاندارد می‌دهد، که آن را کیلوگرم استاندارد شکل ۱-۳ در نظر می‌گیریم، تعریف می‌کنیم. به این جسم به طور دقیق و برحسب تعریف، جرم ۱kg نسبت داده شده است.




**شکل ۵-۱** نیروی $\vec{F}$ وارد شده به کیلوگرم استاندارد به آن شتاب $\vec{a}$ می‌دهد.

جسم استاندارد را روی یک میز افقی بدون اصطکاک قرار می‌دهیم و آن را به گونه‌ای به سوی راست می‌کشیم (شکل ۵-۱) تا سرانجام بنابر آزمون و خطا، شتاب اندازه‌گیری شدهٔ وارد به آن $1 m/s^2$ شود. آنگاه به عنوان تعریف، می‌گوییم که بزرگی نیروی وارد بر این جسم استاندارد ۱ نیوتون است (که آن را به اختصار با N نمایش می‌دهیم)

با کشیدن جسم استاندارد به گونه‌ای که شتاب اندازه‌گیری شدهٔ آن $2 m/s^2$ شود، می‌توانیم $2N$ نیرو وارد کنیم، و نظایر آن. بنابراین در حالت کلی، اگر جسم استاندارد یک کیلوگرمی ما شتابی به بزرگی $a$ پیدا کند، می‌دانیم که باید به آن نیرویی برابر $F$ وارد شده باشد که بزرگی آن (برحسب نیوتون) برابر با بزرگی شتاب (بر حسب متر بر ثانیه برثانیه) است.

بنابراین، نیرو به وسیلهٔ شتابی که ایجاد می‌کند اندازه‌گیری می‌شود. شتاب یک کمیت برداری است که هم بزرگی و هم جهت دارد. آیا نیرو نیز یک کمیت برداری است؟ به سادگی می‌توانیم یک جهت به نیرو نسبت دهیم (درست همان‌طور که به شتاب جهتی نسبت می‌دهیم)، ولی این کافی نیست. باید با آزمایش ثابت کنیم که نیروها کمیتی برداری‌اند. در واقع، این کار انجام شده است: نیروها به راستی کمیتهایی برداری‌اند؛ بزرگی و جهت دارند و با قاعده‌های جمع برداری فصل ۳ با یکدیگر ترکیب می‌شوند.

این بدین معناست که وقتی دو یا چند نیرو بر جسمی اثر کنند، می‌توانیم **نیروی خالص** یا **نیروی برایند** را از جمع برداری نیروهای مجزا به دست آوریم. تک نیرویی با بزرگی و جهت نیروی خالص همان اثری را بر جسم دارد که همهٔ نیروهای مجزا با یکدیگر برجسم دارند. این واقعیت **اصل بر هم نهی نیروها** نامیده می‌شود. اگر این اصل برقرار نبود دنیای عجیبی می‌بود، اگر مثلاً شما و دوستتان جسم استانداردی را با نیروی $1N$ در یک جهت می‌کشیدید، ولی نیروی خالص کشیدن $14N$ می‌شد.

در این کتاب، نیروها اغلب با نماد برداری $\vec{F}$، و نیروی خالص با نماد برداری $\vec{F}_{net}$ نمایش داده شده‌اند. مانند هر بردار دیگری، نیرو یا نیروی خالص می‌تواند مؤلفه‌هایی در امتداد محورهای مختصات داشته باشد. وقتی نیروها فقط در امتداد یک محور وارد می‌شوند، آنها نیروهای تک- مؤلفه‌ای هستند. در آن صورت می‌توانیم علامت پیکان را از بالای نماد نیروها برداریم و تنها از علامتهای مثبت و منفی برای نشان دادن جهت نیروها در امتداد آن محور استفاده کنیم.

بیان مناسبتر قانون اول نیوتون با استفاده از نیروی *خالص* صورت می‌گیرد که آن را جایگزین بیان به کار رفته در بخش ۵-۳ می‌کنیم:

☜ ***قانون اول نیوتون:*** *اگر برجسمی هیچ نیروی خالصی وارد نشود ($\vec{F}_{net}=0$)، سرعت جسم نمی‌تواند تغییر کند؛ به این معنی که جسم نمی‌تواند شتاب داشته باشد.*

ممکن است بر جسمی چندین نیرو وارد شود، ولی اگر نیروی خالص آنها صفر باشد، جسم شتاب ندارد.

## چارچوبهای مرجع لخت

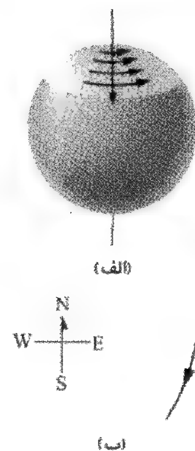
قانون اول نیوتون در تمام چارچوبهای مرجع برقرار نیست. ولی همیشه می‌توان چارچوبهای مرجعی یافت که در آنها این قانون (و نیز بقیهٔ مکانیک نیوتونی) برقرار باشد. چنین چارچوبهایی، **چارچوبهای مرجع لخت** یا به طور ساده **چارچوبهای لخت** نامیده می‌شوند.

☜ چارچوب مرجع لخت، چارچوبی است که در آن قانونهای نیوتون برقرارند.

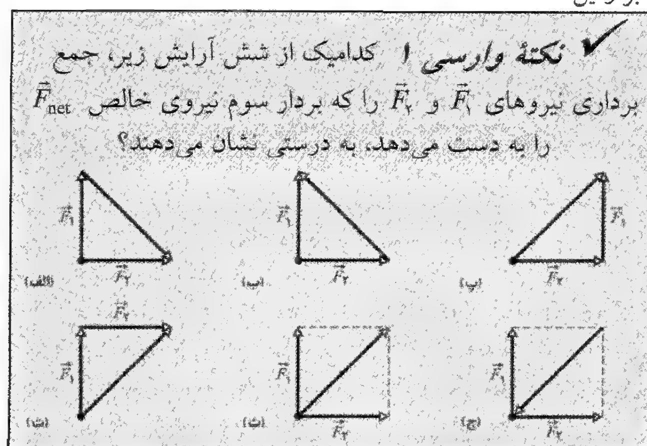
برای مثال، زمین را می‌توان یک چارچوب لخت در نظر گرفت در صورتی که از حرکتهای نجومی کرهٔ زمین (از قبیل دوران آن) چشمپوشی کنیم.

این فرض در صورتی معتبر است که مثلاً یک قرص هاکی روی ناحیهٔ یخی بدون اصطکاکی که طول آن *کوتاه* باشد لغزانده شود. در این صورت حرکت قرص از قانونهای نیوتون پیروی می‌کند. حال فرض کنید که قرص روی یک ناحیهٔ یخی *دراز* که از قطب شمال گسترش یافته بلغزد (شکل ۵-۲ الف). اگر به قرص از چارچوبی ساکن در فضا نگاه کنیم، قرص روی یک خط مستقیم رو به جنوب حرکت می‌کند؛ زیرا حرکت زمین دور قطب شمال صرفاً یخ را به زیر قرص می‌لغزاند. ولی اگر به قرص از نقطه‌ای واقع روی زمین نگاه کنیم، چون خود با کرهٔ زمین می‌چرخیم، مسیر حرکت قرص یک خط مستقیم ساده نخواهد بود. زیرا تندی رو به شرق زمینِ زیر قرص، هر چه قرص بیشتر به سمت جنوب بلغزد، بیشتَر خواهد بود، و از دید ناظر روی زمین، به نظر می‌رسد که مسیر حرکت قرص به سمت غرب منحرف شده است (شکل ۵-۲ ب). البته، این انحراف ظاهری به علت وارد شدن یک نیروی لازم براثر قانونهای نیوتون نیست بلکه به این خاطر است که ما قرص را از دید یک چارچوب در حال چرخش می‌بینیم. در این حالت، زمین یک **چارچوب نالخت** است.

در این کتاب معمولاً فرض می‌کنیم که زمین یک چارچوب لخت است و نیروها و شتابها از دید این چارچوب اندازه‌گیری شده‌اند. اگر اندازه‌گیریها مثلاً در بالابری که نسبت به زمین شتاب دارد انجام شده باشد، آنگاه اندازه‌گیریها در چارچوب نالخت صورت پذیرفته و نتیجه‌های حاصل از آن می‌توانند غافلگیر کننده باشند. در مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۸ مثالی از این دست را خواهیم دید.




**شکل ۵-۲** (الف) مسیر حرکت قرصی که از قطب شمال می‌لغزد، از دید نقطه‌ای ساکن در فضا. (ب) مسیر حرکت قرص از دید ناظر واقع بر زمین.


**نکتهٔ وارسی ۱** کدامیک از شش آرایش زیر، جمع برداری نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را که بردار سوم نیروی خالص $\vec{F}_{net}$ را به دست می‌دهد، به درستی نشان می‌دهند؟


## ۵-۵ جرم

تجربهٔ هر روزهٔ ما نشان می‌دهد که یک نیروی معین در جسمهای مختلف شتابهایی با بزرگیهای متفاوت ایجاد می‌کند. یک توپ بیسبال و یک توپ بولینگ را روی کف زمین قرار دهید و به هر دو با پا ضربهٔ یکسانی بزنید. حتی اگر این کار را انجام ندهید هم نتیجه را می‌دانید: توپ بیسبال نسبت به توپ بولینگ به طور قابل ملاحظه‌ای شتاب بیشتری پیدا می‌کند. تفاوت این دو شتاب به خاطر تفاوتی است که جرم توپ بیسبال با جرم توپ بولینگ دارد. ولی جرم در واقع چیست؟

چگونگی اندازه‌گیری جرم را می‌توانیم با تصور یک دسته آزمایش در یک دستگاه لخت، توضیح دهیم. در آزمایش نخست، نیرویی را بر یک جسم استاندارد وارد می‌کنیم که جرم $m_\circ$ آن $1/\circ\,\text{kg}$ تعریف شده است. فرض کنید جسم استاندارد $1/\circ\,\text{m/s}^2$ شتاب بگیرد. از آنجا می‌توانیم بگوییم نیروی وارد بر جسم $1/\circ\,\text{N}$ است.

سپس همان نیرو را (به روشی نیاز داریم که اطمینان دهد این همان نیرو است) به جسم دوم، جسم $X$، که جرم آن ناشناخته است وارد می‌کنیم. فرض کنید دریابیم که جسم $X$، $\circ/۲۵\,\text{m/s}^2$ شتاب گرفته است. می‌دانیم که توپ بیسبال کم جرمتر نسبت به توپ بولینگ پرجرمتر، وقتی به هر دو نیروی (ضربهٔ) یکسانی وارد شود، *شتاب بیشتری* می‌گیرد. از اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم که: هر گاه نیروی یکسانی به دو جسم وارد شده باشد، نسبت جرمهای دو جسم برابر با نسبت شتابهای آنهاست. از آنجا برای جسم $X$ و جسم استاندارد داریم

$$\frac{m_X}{m_\circ}=\frac{a_\circ}{a_X}$$

حل آن برای $m_X$ به دست می‌دهد

$$m_X=m_\circ\frac{a_\circ}{a_X}=(1/\circ\,\text{kg})\frac{1/\circ\,\text{m/s}^2}{\circ/۲۵\,\text{m/s}^2}=۴/\circ\,\text{kg}$$

البته نتیجه‌گیری ما در صورتی مفید خواهد بود که وقتی مقدار نیروی وارد شده را تغییر دهیم، باز هم معتبر بماند. برای مثال، اگر به جسم استاندارد $۸/\circ\,\text{N}$ وارد شده باشد، شتاب $۸/\circ\,\text{m/s}^2$ به دست می‌آید. وقتی به جسم $X$ نیروی $۸/\circ\,\text{N}$ وارد شده باشد، شتاب $۲/\circ\,\text{m/s}^2$ به دست می‌آید. نتیجه‌گیری، عبارت خواهد بود از

$$m_X=m_\circ\frac{a_\circ}{a_X}=(1/\circ\,\text{kg})\frac{۸/\circ\,\text{m/s}^2}{۲/\circ\,\text{m/s}^2}=۴/\circ\,\text{kg}$$

که با آزمایش اول ما سازگار است. آزمایشهای زیادی که منجر به نتیجه‌های مشابهی می‌شوند، مشخص می‌کنند که نتیجهٔ ما وسیله‌ای سازگار و قابل اعتماد را برای نسبت‌دادن جرم به هر جسم ارائه می‌کند.

آزمایشهای اندازه‌گیری ما نشان می‌دهند که جرم یک مشخصهٔ *ذاتی* هر جسم است– به این معنی که مشخصه‌ای است که به طور خود به خود همراه با وجود جسم ظاهر می‌شود. این آزمایشها همچنین نشان می‌دهند که جرم کمیتی نرده‌ای است. با این حال، آن پرسش آزار دهنده کماکان باقی است: جرم، واقعاً چیست؟

چون واژهٔ جرم زیاد به کار گرفته می‌شود، باید درکی شهودی از آن داشته باشیم، شاید چیزی که به طور فیزیکی قابل حس باشد. آیا جرم؛ اندازه، وزن، یا چگالی جسم است؟ پاسخ منفی است؛ اگر چه این مشخصه‌ها گاهی با جرم اشتباه گرفته می‌شوند. تنها چیزی که می‌توانیم بگوییم این است که جرم یک جسم، *مشخصه‌ای است که نیروی وارد بر جسم را به شتابی که آن جسم می‌گیرد مربوط می‌کند*. جرم تعریفی روشنتر از این ندارد؛ شما فقط وقتی می‌توانید از جرم یک احساس فیزیکی داشته باشید که تلاش کنید جسم را شتابدار کنید؛ درست مثل وقتی که به توپ بیسبال یا بولینگ ضربه می‌زنید.

## ۵-۶ قانون دوم نیوتون

همهٔ تعریفها، آزمایشها و مشاهده‌هایی را که تا اینجا مطرح کرده‌ایم، می‌توان در یک عبارت موجز خلاصه کرد:

**قانون دوم نیوتون:** نیروی خالص وارد بر یک جسم برابر است با حاصلضرب جرم جسم در شتاب آن.

و به شکل معادله،

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \quad \text{(قانون دوم نیوتون)} \quad (۵-۱)$$

این معادله ساده است، ولی در استفاده از آن باید احتیاط کرد. نخست باید مطمئن شویم که نیروها به چه جسمی وارد شده‌اند. آنگاه $\vec{F}_{net}$ باید جمع‌برداری *همهٔ* نیروهایی باشد که بر *آن* جسم وارد می‌شوند. فقط نیروهای وارد بر *آن* جسم را باید در جمع‌برداری وارد کرد، نه نیروهای وارد بر جسمهای دیگری که ممکن است در آن حالت معین وجود داشته باشند. برای مثال، اگر شما در یک بازی راگبی باشید، نیروی وارد بر *شما* جمع‌برداری تمام نیروهای هل‌دادنها و کشیدنهایی است که بر بدن *شما* وارد می‌شود. این نیرو شامل هل‌دادنها و کشیدنهای شما بر یک بازیکن دیگر نمی‌شود.

مانند سایر معادله‌های برداری، معادلهٔ ۵-۱ هم‌ارز سه معادلهٔ مؤلفه‌ای برای هر یک از سه محور دستگاه مختصات $xyz$ است:

$$F_{net,x} = ma_x,\quad F_{net,y} = ma_y,\quad F_{net,z} = ma_z. \quad (۵-۲)$$

هر یک از این معادله‌ها، مؤلفهٔ نیروی خالص در امتداد یک محور را به شتاب در امتداد همان محور مربوط می‌کند. مثلاً معادلهٔ نخست حاکی از آن است که جمع همهٔ مؤلفه‌های نیرو در امتداد محور $x$ مؤلفه $a_x$ شتاب جسم را ایجاد می‌کند ولی در راستای محورهای $z$ و $y$ شتابی به وجود نمی‌آورد. به بیانی دیگر، مؤلفهٔ $a_x$ شتاب تنها از جمع مؤلفه‌های نیرو در امتداد محور $x$ حاصل شده است. در حالت کلی

مؤلفهٔ شتاب در امتداد یک محور معین *فقط* ناشی از جمع مؤلفه‌های نیرو در امتداد *همان* محور است، نه مؤلفه‌های نیرو در امتداد هر محور دیگر.

معادلهٔ ۵-۱ بیان می‌دارد که اگر نیروی خالص وارد برجسمی صفر باشد، شتاب آن جسم $\vec{a}=0$ است. اگر جسم در حال سکون باشد، در همان حال باقی می‌ماند؛ اگر در حال حرکت باشد، به حرکت خود با سرعت ثابت ادامه می‌دهد. در چنین حالتهایی، هر نیروی وارد بر جسم در *موازنه* با نیروی دیگری است، و گفته می‌شود که هم آن نیروها و هم آن جسم در حال تعادل‌اند. همچنین مرسوم است که گفته شود نیروها همدیگر را *حذف* می‌کنند. ولی حذف بدین معنی *نیست* که نیروها از بین می‌روند (مثل حذف یک قرار صرف شام در رستوران). نیروها کماکان بر جسم اثر می‌کنند.

برحسب یکاهای SI ، معادلهٔ ۵-۱ بیان می‌دارد که

$$1\,N = (1\,kg)(1\,m/s^2) = 1\,kg\cdot m/s^2$$

چند یکای نیرو در دستگاه‌های یکاهای دیگر در جدول ۵-۱ و پیوست ث داده شده‌اند.

برای حل مسئله‌ها با قانون دوم نیوتون، اغلب یک **نمودار جسم- آزاد** می‌کشیم و فقط جسمی را نشان می‌دهیم که می‌خواهیم جمع نیروها را برای آن در نظر بگیریم. برخی ترجیح می‌دهند که خود جسم را هم رسم کنند؛ ولی ما برای آنکه فضای کمتری اشغال بشود از یک نقطه به جای جسم استفاده می‌کنیم. همچنین هر نیروی وارد بر جسم را با یک پیکان که انتهایش بر آن جسم واقع است نشان می‌دهیم. معمولاً یک دستگاه مختصات و گاهی نیز یک پیکان را که نشان‌دهندهٔ شتاب جسم است روی نمودار مشخص می‌کنیم.

**دستگاه**، شامل یک یا تعداد بیشتری جسم است و هر نیرویی که بر جسمهای داخل دستگاه براثر جسمهای خارج از دستگاه وارد شده باشد، **نیروی خارجی** نامیده می‌شود. اگر دستگاه از جسمهایی که به سختی به هم وصل شده‌اند ساخته شده باشد، می‌توانیم آن دستگاه را به عنوان یک جسم مرکب در نظر بگیریم و در این صورت نیروی خالص $\vec{F}_{net}$ وارد بر آن دستگاه، جمع‌برداری همهٔ نیروهای خارجی است. (ما **نیروهای داخلی**- یا همان نیروهای بین دو جسم در داخل دستگاه- را به حساب نمی‌آوریم.) برای مثال لوکوموتیو و واگنها یک دستگاه را تشکیل می‌دهند و اگر لوکوموتیو با یک یدک‌کش کشیده شود، نیرویی از یدک‌کش به کلّ دستگاه لوکوموتیو- واگنها وارد می‌شود. درست مثل یک جسم منفرد، نیروی خارجی وارد به دستگاه را می‌توانیم با قانون دوم نیوتون، $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$، به شتاب آن مربوط کنیم که در آن $m$ جرم کل دستگاه است.

**جدول ۵-۱**

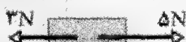
یکاها در قانون دوم نیوتون (معادله‌های ۵-۱ و ۵-۲)

| دستگاه | نیرو | جرم | شتاب |
|---|---|---|---|
| SI | نیوتون (N) | کیلوگرم (kg) | $m/s^2$ |
| CGS* | دین | گرم (g) | $cm/s^2$ |
| بریتانیایی** | پاوند (lb) | سلاگ | $ft/s^2$ |

* $1\,dyne = 1\,g\cdot cm/s^2$

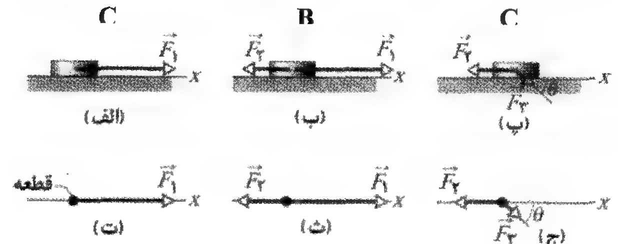
** $1\,lb = 1\,slug\cdot ft/s^2$

**نکتهٔ وارسی ۲** شکل دو نیروی افقی وارد بر قطعه‌ای واقع بر سطحی بدون اصطکاک را نشان می‌دهد. اگر نیروی افقی سوم $\vec{F}_3$ نیز بر قطعه وارد شود، بزرگی و جهت $\vec{F}_3$ در صورتی که قطعه (الف) ساکن و (ب) در حال حرکت با تندی ثابت $5\,m/s$ رو به چپ، باشد چقدر است؟



### مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۱

در شکلهای ۵-۳ الف تا پ، یک یا دو نیرو بر قطعه‌ای که روی سطح یخ بدون اصطکاکی در امتداد محور $x$ حرکت یک بعدی انجام می‌دهد، وارد می‌شود. جرم قطعه $m=0/20\text{kg}$ است. نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ در امتداد محور $x$ هستند و بزرگی آنها $F_1=4/0\text{N}$ و $F_2=2/0\text{N}$ است. نیروی $\vec{F}_3$ در جهت زاویهٔ $\theta=30°$ اثر می‌کند و بزرگی $F_3=1/0\text{N}$ را دارد. شتاب قطعه در هر حالت چقدر است؟




**شکل ۵-۳** (الف)-(پ) در سه حالت، نیروهایی وارد بر قطعه، آن را در امتداد محور $x$ حرکت می‌دهند. (ت)-(ج) نمودارهای جسم-آزاد.

**نکتهٔ کلیدی** در هر حالت ما می‌توانیم شتاب $\vec{a}$ را به نیروی خالص $\vec{F}_{net}$ وارد به قطعه با قانون دوم نیوتون، $\vec{F}_{net}=m\vec{a}$، مربوط کنیم. البته چون حرکت فقط در امتداد محور $x$ است، هر حالت را می‌توانیم با نوشتن قانون دوم برای مؤلفهٔ $x$ ساده کنیم

$$F_{net,x}=ma_x \qquad (۵-۴)$$

نمودارهای جسم-آزاد برای این سه حالت در شکلهای ۵-۳ ت-ج نشان داده شده است که در آن به جای قطعه از یک نقطه استفاده کرده‌ایم.

***وضعیت A:*** برای شکل ۵-۳ ت که در آن فقط یک نیروی افقی وارد می‌شود، معادلهٔ ۵-۴ چنین می‌شود

$$F_1=ma_x$$

که با قراردادن داده‌ها به‌دست می‌دهد

$$a_x=\frac{F_1}{m}=\frac{4/0\text{N}}{0/20\text{kg}}=20\text{m/s}^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

مثبت بودن این جواب نشان‌دهندهٔ آن است که شتاب در جهت مثبت محور $x$ است.

***وضعیت B:*** در شکل ۳-۵ ث، دو نیروی افقی بر قطعه وارد می‌شوند که $\vec{F}_1$ در جهت مثبت محور $x$ و $\vec{F}_2$ در جهت منفی آن است. حال از معادلهٔ ۵-۴ داریم

$$F_1-F_2=ma_x$$

که با قرار دادن داده‌ها، به‌دست می‌دهد

$$a_x=\frac{F_1-F_2}{m}=\frac{4/0\text{N}-2/0\text{N}}{0/20\text{kg}}=10\text{m/s}^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین نیروی خالص، به قطعه شتابی در جهت مثبت محور $x$ می‌دهد.

***وضعیت C:*** در شکل ۵-۳ ج، نیروی $\vec{F}_3$ در جهت شتاب قطعه قرار ندارد؛ فقط مؤلفهٔ $x$ آن، $F_{3,x}$، در جهت شتاب است. (نیروی $\vec{F}_3$ دو بعدی است، ولی حرکت فقط در یک بعد صورت می‌پذیرد.) بنابراین، معادلهٔ ۵-۴ را چنین می‌نویسیم

$$F_{3,x}-F_2=ma_x \qquad (۵-۵)$$

از شکل پیداست که $F_{3,x}=F_3\cos\theta$. با قراردادن $F_{3,x}$ و حل معادله برای شتاب، خواهیم داشت

$$a_x=\frac{F_{3,x}-F_2}{m}=\frac{F_3\cos\theta-F_2}{m}$$
$$=\frac{(1/0\text{N})(\cos30°)-2/0\text{N}}{0/20\text{kg}}=-5/7\text{m/s}^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، نیروی خالص، به قطعه در جهت منفی محور $x$ شتاب می‌دهد.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۲

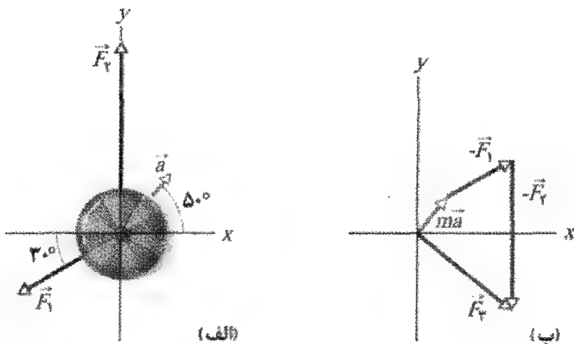
شکل ۵-۴ الف دید از بالای یک قوطی شیرینی ۲/۰ کیلوگرمی را نشان می‌دهد که روی سطح افقی بدون اصطکاکی، در جهت نشان داده شده با نماد $\vec{a}$ شتاب $3/0\text{m/s}^2$ را به دست می‌آورد. شتاب، ناشی از سه نیروی افقی است که فقط دو تای آنها در شکل نشان داده شده‌اند: $\vec{F}_1$ به بزرگی $10\text{N}$ و $\vec{F}_2$ به بزرگی $20\text{N}$. نیروی سوم $\vec{F}_3$ بر حسب نمادگذاریهای بردار یکه، و بزرگی-جهت چیست؟

**نکتهٔ کلیدی** نیروی خالص $\vec{F}_{net}$ وارد بر قوطی مجموع سه نیرو است که توسط قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{net}=m\vec{a})$ به شتاب $\vec{a}$ مربوط‌اند. بنابراین، داریم

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=m\vec{a} \qquad (۵-۶)$$

که به دست می‌دهد

$$\vec{F}_3=m\vec{a}-\vec{F}_1-\vec{F}_2 \qquad (۵-۷)$$




**شکل ۵-۴** (الف) دید از بالای دو نیرو از سه نیروی افقی که به قوطی شیرینی شتاب $\vec{a}$ می‌دهند. $\vec{F}_3$ در شکل نشان داده نشده است. (ب) آرایشی از بردارهای $m\vec{a}$، $-\vec{F}_1$، و $-\vec{F}_2$ برای یافتن نیروی $\vec{F}_3$.

***محاسبه‌ها:*** چون این مسئله، یک مسئلهٔ دو بعدی است، بنابراین ما *نمی‌توانیم* $\vec{F}_3$ را فقط با قرار دادن بزرگیها به جای کمیتهای برداری سمت راست معادلهٔ ۵-۷ به دست آوریم. بلکه باید بردارهای $m\vec{a}$، $-\vec{F}_1$ (وارون $\vec{F}_1$)، و $-\vec{F}_2$ (وارون $\vec{F}_2$) را آن‌طور که در شکل ۵-۴ ب نشان داده شده است جمع‌برداری کنیم.

این جمع را می‌توان به طور مستقیم با استفاده از یک ماشین حساب که قادر به محاسبه‌های برداری باشد به انجام رساند؛ زیرا هم بزرگی و هم جهت هر سه بردار معلوم است. با این وجود، در اینجا سمت راست معادلهٔ ۵-۷ را ابتدا در امتداد محور $x$ و سپس محور $y$ محاسبه می‌کنیم.

**مؤلفه‌های $x$:** در امتداد محور $x$ داریم

$$F_{3x} = ma_x - F_{1,x} - F_{2,x}$$
$$= m(a\cos 50°) - F_1\cos(-150°) - F_2\cos 90°$$

آنگاه با قراردادن مقدارهای معلوم خواهیم داشت

$$F_{3,x} = (2.0\,\mathrm{kg})(3.0\,\mathrm{m/s^2})\cos 50° - (10\,\mathrm{N})\cos(-150°)$$
$$-(20\,\mathrm{N})\cos 90°$$
$$= 12.5\,\mathrm{N}$$

***مؤلفه‌های $y$:*** به همین ترتیب برای امتداد محور $y$ خواهیم داشت

$$F_{3,y} = ma_y - F_{1,y} - F_{2,y}$$
$$= m(a\sin 50°) - F_1\sin(-150°) - F_2\sin 90°$$
$$= (2.0\,\mathrm{kg})(3.0\,\mathrm{m/s^2})\sin 50° - (10\,\mathrm{N})\sin(-150°)$$
$$-(20\,\mathrm{N})\sin 90°$$
$$= -10.4\,\mathrm{N}$$

***بردار:*** برحسب نمادگذاری بردارهای یکه داریم

$$\vec{F}_3 = F_{3,x}\hat{\mathrm{i}} + F_{3,y}\hat{\mathrm{j}} = (12.5\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}} - (10.4\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{j}}$$
$$\approx (13\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}} - (10\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{j}}$$ (پاسخ)

حال می‌توانیم از یک ماشین حساب که بتواند محاسبه‌های برداری انجام دهد برای به دست آوردن بزرگی و زاویهٔ $\vec{F}_3$ استفاده کنیم. همچنین می‌توانیم از معادلهٔ ۳-۶ برای به دست آوردن بزرگی و جهت (نسبت به محور $x$ مثبت) استفاده کنیم

$$F_3 = \sqrt{F_{3,x}^2 + F_{3,y}^2} = 16\,\mathrm{N}$$

و

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{3,y}}{F_{3,x}} = -40°$$ (پاسخ)

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱: ابعاد و بردارها*

وقتی با نیروها سروکار داریم، برای یافتن نیروی خالص، تنها در صورتی می‌توان آنها را با هم جمع یا از هم کم کرد که همگی *در راستای یک محور* باشند. اگر چنین نباشد، باید از جمع برداری استفاده کرد. به این ترتیب که یا از یک ماشین حساب که بتواند محاسبه‌های برداری را انجام دهد استفاده می‌کنیم یا اینکه مؤلفه‌ها را در امتداد محورها، به طوری در مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۲ انجام دادیم به دست می‌آوریم.

### *تدبیر ۲: خواندن مسئله‌های مربوط به نیرو*

صورت مسئله را چندین بار بخوانید تا یک تصور ذهنی مناسب از محتوای آن، و نیز داده‌های معلوم و خواسته شده به دست آید. اگر بدانید که مسئله دربارهٔ چیست ولی ندانید که پس از آن چه باید انجام دهید، مسئله را کنار بگذارید و متن درس را دوباره بخوانید. اگر دربارهٔ قانون دوم نیوتون ابهام داشتید، آن بخش را دوباره بخوانید و مسئله‌های نمونه را مطالعه کنید. به خاطر داشته باشید که حل مسئله‌های فیزیک (مثل تعمیر اتومبیل و طراحی تراشه‌های کامپیوتری) نیاز به ممارست دارد.

### *تدبیر ۳: دو نوع شکل رسم کنید*

ممکن است به دو شکل نیاز داشته باشید. یکی از آنها شکل خامی از یک حالت واقعی است. وقتی نیروها را رسم می‌کنید، ابتدای هر بردار نیرو را روی مرز یا داخل جسمی که نیرو بر آن وارد می‌شود قرار دهید. شکل دیگر، نمودار جسم- آزاد است: نیروهای وارد بر جسم *منفرد* را رسم کنید، جسم با یک نقطه یا طرحی از خود جسم نشان داده می‌شود. ابتدای هر بردار نیرو را روی نقطه یا شکل طرحوار قرار دهید.

### *تدبیر ۴: دستگاه شما چیست؟*

اگر از قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنید باید بدانید که آن را برای چه جسم یا دستگاهی به کار می‌گیرید. در مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۱، جسم یک قطعه (و نه یخ) و در مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۲، یک قوطی شیرینی است.

### *تدبیر ۵: محورهایتان را عاقلانه انتخاب کنید*

اغلب با انتخاب یکی از محورهای مختصات روی یکی از نیروها می‌توان از محاسبه‌های زیاد کاست.

# ۵-۷ چند نیروی خاص

### *نیروی گرانشی*

**نیروی گرانشی** $\vec{F}_g$ وارد بر یک جسم نوع معینی از کشیدن است که رو به سوی جسم دوم دارد. در فصلهای آغازین، دربارهٔ ماهیت این نیرو بحث نمی‌کنیم و معمولاً حالتهایی را در نظر می‌گیریم که جسم دوم کرهٔ زمین باشد. بنابراین، وقتی از نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر یک جسم صحبت می‌کنیم، معمولاً منظورمان نیرویی است که آن را به طور مستقیم به سمت مرکز کرهٔ زمین می‌کشد. به عبارتی، این نیرو به طور مستقیم رو به پایین، به سمت زمین است. فرض بر این است که زمین یک چارچوب لخت است.

فرض کنید جسمی به جرم $m$ در حال سقوط آزاد با شتاب سقوط - آزاد $g$ باشد. آنگاه، اگر از اثرهای هوا چشمپوشی کنیم، تنها نیرویی که بر جسم وارد می‌شود نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ است. می‌توانیم این نیروی رو به پایین و شتاب رو به پایین را با قانون دوم نیوتون $(\vec{F}=m\vec{a})$ به هم مربوط کنیم. محور $y$ قائم را که جهت مثبت آن رو به بالا باشد بر امتداد مسیر ذره در نظر می‌گیریم. برای این محور، قانون دوم نیوتون را می‌توان به شکل $F_{\text{net},y}=ma_y$ نوشت که در حالت مورد نظر ما چنین می‌شود

$$-F_g=m(-g)$$

یا

$$F_g=mg \qquad (۵-۸)$$

به عبارت دیگر، بزرگی نیروی گرانشی برابر با حاصلضرب $mg$ است.

حتی اگر جسم در حال سقوط آزاد نباشد، ولی مثلاً در حال سکون روی یک تختهٔ شیرجه یا در حال حرکت روی یک میز باشد، همین نیروی گرانشی با همان بزرگی کماکان بر جسم وارد می‌شود. (برای آنکه نیروی گرانشی ناپدید شود، باید کرهٔ زمین ناپدید شود.)

قانون دوم نیوتون را می‌توانیم برای نیروی گرانشی به صورتهای برداری زیر بنویسیم

$$\vec{F}_g=-F_g\hat{j}=-mg\hat{j}=m\vec{g} \qquad (۵-۹)$$

که در آن $\hat{j}$ بردار یکه‌ای است که در امتداد محور $y$، رو به بالا از زمین دور می‌شود، و $\vec{g}$ شتاب سقوط- آزاد است (به شکل بردار نوشته می‌شود) که جهت آن به سمت پایین است.

## وزن

**وزن** $W$ یک جسم بزرگی نیروی خالص لازم برای جلوگیری از سقوط آزاد آن جسم است، به صورتی که توسط شخصی واقع روی زمین اندازه‌گیری شده باشد. مثلاً وقتی روی زمین ایستاده‌اید و می‌خواهید توپی را به حالت سکون در دستانتان نگهدارید، باید نیروی رو به بالایی جهت موازنه با نیروی گرانشی ناشی از زمین به توپ وارد کنید. فرض کنید این نیروی گرانشی $2/0\,N$ باشد، آنگاه بزرگی نیروی رو به بالایی که باید اعمال کنید، و در نتیجه وزن $W$ جسم، $2/0\,N$ است. همچنین می‌گوییم توپ $2/0\,N$ *وزن دارد* و از *وزن داشتن* توپ به مقدار ۲ نیوتون صحبت می‌کنیم.

برای ساکن نگهداشتن توپی به وزن $3/0\,N$، به نیروی بزرگتری- نیرویی ۳ نیوتونی- نیاز داریم. دلیل این امر آن است که با نیروی گرانشی بیشتر یعنی با نیروی $3/0\,N$ باید تعادل برقرار شود. می‌گوییم توپ دوم سنگینتر از توپ اول است.

حال می‌خواهیم این وضعیت را تعمیم دهیم. جسمی را در نظر بگیرید که شتاب $\vec{a}$ آن نسبت به زمین، که باز فرض می‌کنیم یک چارچوب لخت است، صفر باشد. دو نیرو بر جسم وارد می‌شوند: یکی نیروی گرانشی رو به پایین $\vec{F}_g$ و دیگری نیروی موازنهٔ رو به بالا، به بزرگی $W$. قانون دوم نیوتون را می‌توانیم برای محور قائم $y$ که جهت مثبت آن رو به بالاست، چنین بنویسیم

$$F_{\text{net},y}=ma_y$$

که در وضعیت ما چنین می‌شود

$$W-F_g=m(0) \qquad (۵-۱۰)$$

یا

$$W=F_g \qquad \text{(وزن، زمین به صورت چارچوب لخت)} \qquad (۵-۱۱)$$

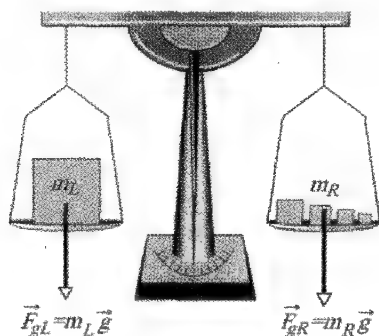
این معادله (با فرض اینکه زمین یک چارچوب لخت است) بیان می‌دارد که

> وزن $W$ یک جسم برابر با بزرگی نیروی گرانشی $F_g$ وارد بر آن جسم است.

با قراردادن $mg$ به جای $F_g$ از معادلهٔ ۵-۸، به دست می‌آوریم

$$W=mg \qquad \text{(وزن)} \qquad (۵-۱۲)$$

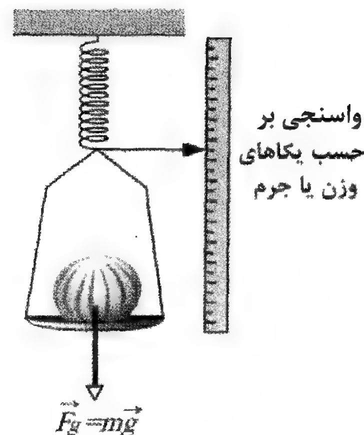
که وزن جسم را به جرم آن مربوط می‌کند.




**شکل ۵-۵** ترازوی شاهین‌دار. وقتی ترازو در موازنه است، نیروی گرانشی $\vec{F}_{gL}$ وارد بر جسمی که باید وزن شود (روی کفهٔ سمت چپ) با نیروی گرانشی $\vec{F}_{gR}$ وارد بر جسمهای مرجع (روی کفهٔ سمت راست) برابر است. بنابراین، جرم $m_L$ جسم که باید اندازه‌گیری شود با جرم کل $m_R$ جسمهای مرجع برابر است.

*توزین* یک جسم به معنی اندازه گرفتن وزن آن است. یک راه برای اندازه‌گیری وزن یک جسم، قرار دادن آن جسم روی یکی از کفه‌های یک ترازوی شاهین‌دار (شکل ۵-۵) و پس از آن، قرار دادن جسمهای مرجع (با جرم معلوم) روی کفهٔ دیگر است. جسمهای مرجع را آنقدر می‌افزاییم تا نیروهای گرانشی وارد به دو کفه به موازنه برسند. در این صورت جرمهای واقع بر دو کفه مساوی‌اند و در نتیجه جرم جسم، معلوم می‌شود. اگر اندازهٔ $g$ را برای محلی بدانیم، وزن جسم را هم می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۵-۱۲ به دست آوریم.

وزن یک جسم را با یک ترازوی فنری (شکل ۵-۶) نیز می‌توان اندازه گرفت. جسم، فنری را می‌کشد و عقربه‌ای را




**شکل ۵-۶** یک ترازوی فنری. عدد خوانده شده متناسب با *وزن* جسمی است که در کفه گذاشته شده است و اگر ترازو برحسب یکای وزن واسنجی شده باشد، وزن آن جسم را نشان می‌دهد. ولی اگر برحسب یکای جرم واسنجی شده باشد، عدد خوانده شده فقط در صورتی وزن جسم است که اندازهٔ $g$ با شتاب گرانشی محلی که در آن ترازو واسنجی شده است یکسان باشد.

مقابل یک مقیاس واسنجی[1] شده‌ای حرکت می‌دهد که برحسب یکاهای جرم یا وزن مدرج شده است. (بسیاری از ترازوهای خانگی به چنین روشی کار می‌کنند و برحسب کیلوگرم یا پاوند مدرج شده‌اند.) اگر ترازو برحسب یکاهای جرم واسنجی شده باشد، وزن را تنها به شرطی درست نشان می‌دهد که مقدار $g$ با شتاب گرانشی محلی که در آن ترازو واسنجی شده است یکسان باشد.

وزن یک جسم هنگامی باید اندازه‌گیری شود که جسم شتاب قائمی نسبت به زمین نداشته باشد. برای مثال، شما وزن خود را می‌توانید با ترازویی در خانه یا در یک قطار پرسرعت اندازه بگیرید. ولی اگر اندازه‌گیری وزن را در یک بالابر در حال شتاب تکرار کنید، به دلیل شتاب، ترازو وزن متفاوتی را نشان می‌دهد. وزن اندازه‌گیری شده را *وزن ظاهری* می‌نامند.

*هشدار:* وزن یک جسم، جرم آن نیست. وزن، بزرگی یک نیرو است و با معادلهٔ ۵-۱۲ به جرم ربط داده می‌شود. اگر جسم را به نقطه‌ای که $g$ آن متفاوت است حرکت دهیم، جرم جسم (یک خاصیت ذاتی) برخلاف وزن آن، تغییری نمی‌کند. برای مثال وزن یک توپ بولینگ به جرم ۷/۲kg روی زمین برابر با ۷۱N و روی ماه ۱۲N است. هر چند جرم توپ روی زمین و ماه یکسان است، ولی شتاب سقوط- آزاد روی ماه فقط $1/6 m/s^2$ است.

## *نیروی عمودی*

وقتی روی یک تشک ایستاده‌اید، با اینکه کرهٔ زمین شما را رو به پایین می‌کشد، ولی سرجای خود ساکن می‌مانید. دلیلش این است که تشک براثر وزن شما به سمت پایین تغییر شکل می‌یابد ولی شما را به سمت بالا هل می‌دهد. به همین ترتیب، اگر روی کف اتاق بایستید، کف تغییر شکل می‌دهد (هر چند به میزان بسیار ناچیز) و به شما نیروی رو به بالایی وارد می‌کند.

نیروی وارد از تشک یا کف روی شما **نیروی عمودی** $\vec{F}_N$ است. این نام از عبارت ریاضی عمود به معنی قائم گرفته شده است. نیروی وارد به شما، مثلاً از کف زمین، عمود بر آن کف است.

> وقتی جسمی سطحی را می‌فشارد، آن سطح (هر چند به ظاهر بسیار سخت باشد) تغییر شکل می‌دهد و به آن جسم نیروی عمودی $\vec{F}_N$ را که بر سطح عمود است وارد می‌کند.

شکل ۵-۷ الف، مثالی را نشان می‌دهد. قطعه‌ای به جرم $m$ سطح میزی را به پایین می‌فشارد و بر اثر نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر قطعه، آن سطح را قدری تغییر شکل می‌دهد. میز با نیروی عمودی $\vec{F}_N$، نیرویی رو به بالا بر قطعه وارد می‌کند. نمودار جسم- آزاد قطعه در شکل ۵-۷ ب نشان داده شده است. نیروهای $\vec{F}_g$ و $\vec{F}_N$ تنها دو نیروی وارد بر قطعه‌اند و هر دو قائم هستند. بنابراین، می‌توانیم برای قطعه قانون نیوتون را در جهت مثبت محور $y$ که به طرف بالاست $(F_{\text{net},y}=ma_y)$ بنویسیم

$$F_N - F_g = ma_y$$

با استفاده از معادلهٔ ۵-۸، در رابطهٔ بالا به جای $F_g$، مقدار $mg$ را قرار می‌دهیم و از آنجا به دست می‌آوریم

$$F_N - mg = ma_y$$

در نتیجه بزرگی نیروی عمودی چنین است

$$F_N = mg + ma_y = m(g+a_y) \qquad (۵\text{-}۱۳)$$

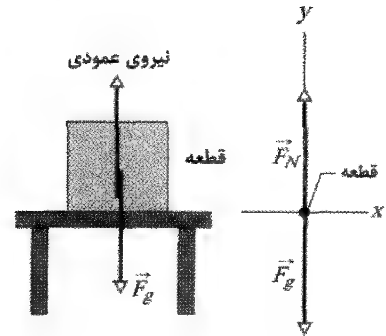
این مربوط به هر شتاب قائم $a_y$ میز و قطعه است (آنها ممکن است در بالابر شتابداری قرار داشته باشند). اگر میز و قطعه نسبت به زمین شتاب نداشته باشند، آنگاه $a_y = 0$ است و معادلهٔ ۵-۱۳ چنین می‌شود

$$F_N = mg \qquad (۵\text{-}۱۴)$$

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۳*** در شکل ۵-۷، اگر قطعه و میز در بالابری باشند که رو به بالا (الف) با تندی ثابت و (ب) با تندی افزاینده حرکت می‌کند، آیا بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$ بزرگتر، کوچکتر از $mg$ است یا با آن برابر است؟

---

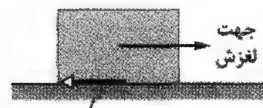
۱. Calibration یا واسنجی (یا اندازه‌بندی) به عملی گفته می‌شود که در آن اندازه‌گیری با توجه به یک استاندارد مرجع انجام می‌شود. چون هر نوع اندازه‌گیری با یک دستگاه اندازه‌گیری انجام می‌شود، سه مسئلهٔ مهم در واسنجی همیشه نهفته است (۱) سنجش یا اندازه‌گیری، (۲) مقایسه کردن و (۳) دوباره سنجیدن. درجه بندی یا تنظیم، بخشی از عمل واسنجی می‌تواند باشد ولی واسنجی در معنا و عمل خود خیلی فراتر از درجه بندی یا تنظیم یک دستگاه است. برای آگاهی بیشتر به استاندارد ISO ۱۰۰۱۲ یا VIM (واقع در مؤسسهٔ استاندارد) نگاه کنید-م.




**شکل ۵-۷** (الف) بر قطعه‌ای که روی میزی ساکن است، نیروی عمودی $\vec{F}_N$ عمود بر میز وارد می‌شود. (ب) نمودار جسم- آزاد برای قطعه.

## *اصطکاک*

اگر جسمی را روی سطحی بلغزانیم یا تلاش کنیم که بلغزانیم، حرکت بر اثر اتصال بین جسم و سطح با مقاومت روبه رو خواهد شد. (در فصل بعد، در این باره بیشتر بحث خواهیم کرد.) مقاومت در برابر حرکت، با یک تکْ نیروی $\vec{f}$ به نام **نیروی اصطکاک** یا به طور ساده **اصطکاک** در نظر گرفته می‌شود. این نیرو در امتداد سطح و مخالف با جهت حرکت است (شکل ۵-۸). گاهی برای ساده کردن یک وضعیت، اصطکاک ناچیز در نظر گرفته می‌شود (به چنین سطحی، سطح *بدون اصطکاک* می‌گویند).

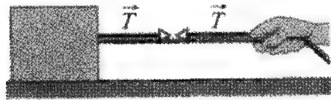



**شکل ۵-۸** نیروی اصطکاک $\vec{f}$ با لغزش جسم روی سطح مخالفت می‌کند.

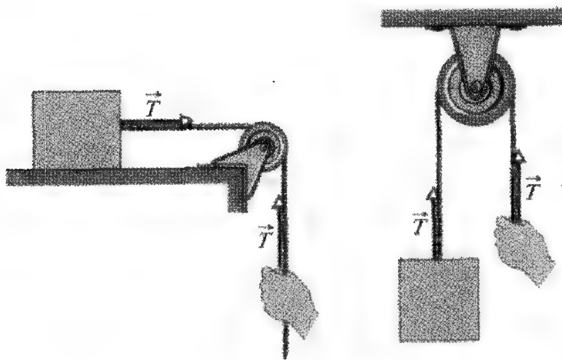
## *کشش*

هرگاه ریسمان (طناب، کابل، یا هر چیز دیگری از این دست) به جسمی متصل شود و آن را محکم بکشیم، ریسمان جسم را با نیروی $\vec{T}$ که جهت آن از جسم به سوی بیرون و در امتداد ریسمان است، می‌کشد (شکل ۵-۹ الف). چون ریسمان در حالت *کشش* (یا *تحت کشش*) است، به این معنی که محکم کشیده شده است، این نیرو غالباً *نیروی کشش* نامیده می‌شود. *کشش در ریسمان*، همان بزرگی $T$، نیروی وارد بر جسم است. برای مثال، اگر بزرگی نیروی وارد به جسم از سوی ریسمان $T=50\text{N}$ باشد، کشش ریسمان $50\text{N}$ است.

اغلب گفته می‌شود که ریسمان *بدون* جرم است (به این معنی که جرم آن در مقایسه با جرم جسم ناچیز است) و *قابل کش آمدن* نیست. ریسمان فقط به عنوان رابط میان دو جسم عمل می‌کند و هر دو جسم را با بزرگی نیروی یکسان $T$ می‌کشد، حتی اگر جسمها و ریسمان شتابدار باشند و حتی اگر ریسمان دور قرقره‌ای بدون اصطکاک و بدون جرم پیچیده شده باشد (شکلهای ۵-۹ ب و پ). چنین قرقره‌ای در مقایسه با جسمها جرم ناچیزی دارد و روی محوری که با چرخش آن مخالفت می‌کند، اصطکاک قابل چشمپوشی است. اگر ریسمان به دور قرقره روی نصف محیط قرقره پیچیده شده باشد، مثل آنچه در شکل ۵-۹ پ نشان داده شده است، بزرگی نیروی خالص وارد بر قرقره از سوی ریسمان $2T$ خواهد بود.




(الف)




**شکل ۵-۹** (الف) ریسمان که محکم کشیده شده است، تحت کشش قرار دارد. اگر جرم ریسمان ناچیز باشد، ریسمان جسم و دست را با نیروی $\vec{T}$ می‌کشد، حتی اگر به دور یک قرقرهٔ بدون جرم و بدون اصطکاک مانند (ب) و (پ) پیچیده شده باشد.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۴*** وزن جسمی که در شکل ۵-۹ پ آویخته شده، $75\text{N}$ است. وقتی جسم در حال حرکت رو به بالا (الف) با تندی ثابت، (ب) با تندی افزاینده و (پ) با تندی کاهنده است، آیا $T$ بزرگتر، کوچکتر از $75\text{N}$ است یا با آن برابر است؟

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۶: نیروی عمودی*

معادلهٔ ۵-۱۴ برای نیروی عمودی وارد بر یک جسم، تنها وقتی برقرار است که $\vec{F}_N$ رو به بالا و شتاب قائم جسم صفر باشد. بنابراین، این معادله را *نباید* برای راستاهای دیگر $\vec{F}_N$ یا وقتی که شتاب قائم صفر نیست به کار برد. به جای آن باید از قانون دوم نیوتون رابطهٔ جدیدی را برای $\vec{F}_N$ به دست آورد.

می‌توانیم $\vec{F}_N$ را روی شکل جابه‌جا کنیم با این شرط که راستای آن را تغییر ندهیم. برای مثال، در شکل ۵-۷ الف آن را می‌توانیم به پایین بلغزانیم به گونه‌ای که ابتدای آن در مرز قطعه با بالای میز باشد. با این حال، اگر ابتدای آن در مرز یا قدری درون جسم باشد (به طوری که در شکل نشان داده شده) احتمال تعبیر غلط آن کمتر است. یک روش بهتر این است که مانند شکل ۵-۷ ب نمودار جسم - آزاد رسم شود، به این ترتیب که ابتدای $\vec{F}_N$ به طور مستقیم روی نقطه یا روی طرحوار قطعه قرار گیرد.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۳

*خطای دید در لحظهٔ پرواز.*

هواپیمای جتی که از ناو هواپیما برمی‌خیزد در حالی که توسط سازوکار پرتاب‌کننده‌ای که در عرشهٔ ناو قرار دارد به جلو انداخته می‌شود توسط موتورهای قوی خود به جلو رانده می‌شود. این شتاب زیاد باعث می‌شود تا هواپیما در فاصلهٔ کوتاهی روی عرشه به سرعت لازم برای بلند شدن برسد. ولی این شتاب زیاد خلبان را وادار می‌کند که موقع ترک عرشه نوک هواپیما را به میزان زیادی پایین بیاورد. خلبانان برای نادیده گرفتن این الزام دوره دیده‌اند ولی گاهی هم هواپیما مستقیماً به اقیانوس سقوط می‌کند. حال به فیزیک این موضوع می‌پردازیم.

احساس شما به قائم بستگی به راهنماهای دیداری و دستگاه دهلیزی واقع در گوش داخلی دارد. این دستگاه شامل یاخته‌های مویژه مانندی در یک شاره است. وقتی شما سرتان را بالا می‌گیرید، این مویژه‌ها به طور قائم در امتداد نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد به شما هم‌خط می‌شوند و دستگاه با ارسال علامتی، به مغزتان اطلاع می‌دهد که سرتان رو به بالاست. وقتی سرتان را با زاویهٔ $\phi$ به عقب می‌برید، مویژه‌ها خمیده می‌شوند و دستگاه با ارسال علامتی، به مغزتان اطلاع می‌دهد که سرتان را کج کرده‌اید. این مویژه‌ها همچنین وقتی که شما بر اثر یک نیروی افقی $\vec{F}_{app}$ شتاب می‌گیرید خمیده می‌شوند. در این حالت علامتی که از دستگاه به مغزتان ارسال می‌شود به اشتباه خبر از کج کردن رو به عقب سرتان در امتداد خطی می‌دهد که از راستای جمع برداری $\vec{F}_{sum}=\vec{F}_g+\vec{F}_{app}$ می‌گذرد (شکل ۵-۱۰ الف). ولی، این علامت اشتباه به دلیل راهنماهای دیداری که حاکی از کج نشدن سر است، مثل وقتی که در اتومبیل شتاب می‌گیرید، نادیده انگاشته می‌شود.

خلبانی که شب هنگام در امتداد عرشهٔ یک ناو هواپیمابر پرتاب می‌شود تقریباً هیچ راهنمای دیداری ندارد و از اینرو احتمال فریب خوردن او بر اثر این وهم که هواپیما رو به بالا عرشه را ترک می‌کند، بسیار زیاد است. اگر خلبان آموزشهای ویژه‌ای ندیده باشد، سعی خواهد کرد برای مستقیم کردن هواپیما، نوک آن را رو به پایین بگیرد و بدین ترتیب است که هواپیما به داخل اقیانوس کلّه می‌شود.

فرض کنید خلبانی با شروع از حالت سکون، پس از طی ۹۰m با یک شتاب ثابت افقی، به تندی خیز ۸۵m/s برسد. زاویهٔ $\phi$ کج شدگی واهی که خلبان حس می‌کند چقدر است؟



**نکته‌های کلیدی** (۱) می‌توانیم از قانون دوم نیوتون برای ربط دادن بزرگی نیروی وارد به خلبان $F_{app}$ با شتاب $a_x$ او استفاده کنیم: $F_{app}=ma_x$، که در آن $m$ جرم خلبان است. (۲) به دلیل آنکه شتاب ثابت است، می‌توانیم از معادله‌های جدول ۲-۱ برای یافتن $a_x$ استفاده کنیم.

***محاسبه‌ها:*** ما به دنبال زاویهٔ کج شدگی $\phi$ خطی هستیم که از راستای بردار $\vec{F}_{sum}$، که جمع‌برداری نیروی گرانشی قائم $\vec{F}_g$ وارد بر خلبان و نیروی افقی $\vec{F}_{app}$ وارد از عقب صندلی به اوست، می‌گذرد. اولین **نکتهٔ کلیدی** این است که $\phi$ را می‌توانیم از ترکیب مجدد بردارهای نیرو مطابق شکل ۵-۱۰ ب به دست آوریم. آنگاه می‌نویسیم

$$\tan\phi=\frac{F_{app}}{F_g}$$

یا

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{F_{app}}{F_g}\right) \qquad (۵-۱۵)$$

چون تندی اولیه $(v_0=0)$، تندی نهایی $(v_x=85\ m/s)$، و جابه‌جایی $(x-x_0=90\ m)$ را می‌دانیم، با استفاده از معادلهٔ ۲-۱۶، $v^2=v_0^2+2a(x-x_0)$، می‌نویسیم

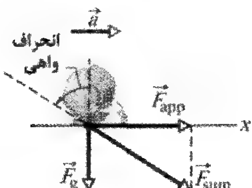
$$(85\ m/s)^2=0^2+2a_x(90\ m)$$

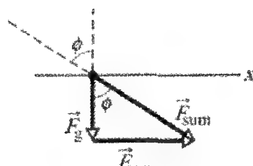
یا

$$a_x=40/1\ m/s^2$$

حال با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم $F_{app}=m(40/1\ m/s^2)$. با قرار دادن این نتیجه و اینکه $F_g=m(9/8\ m/s^2)$ است در معادلهٔ ۵-۱۵، به دست خواهیم آورد

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{m(40/1\ m/s^2)}{m(9/8\ m/s^2)}\right)=76° \qquad \text{(پاسخ)}$$




**شکل ۵-۱۰** (الف) نیروی $\vec{F}_{app}$ که به سمت راست است، در حین خیز به خلبان وارد شده است. سر خلبان یک انحراف رو به عقب را در امتداد خط‌چین حس می‌کند. (ب) جمع برداری $\vec{F}_{sum}\ (=\vec{F}_g+\vec{F}_{app})$، با خطّ قائم زاویهٔ $\phi$ می‌سازد.

بنابراین، وقتی هواپیما در امتداد عرشه شتاب می‌گیرد، خلبان یک خطای دید کج شدگی به عقب °۷۶ حس می‌کند که گویا هواپیما °۷۶ رو به بالا زاویه دارد. این خطای دید ممکن است خلبان را وادار کند که نوک هواپیما را درست پس از خیز، به اندازهٔ °۷۶ رو به پایین بگیرد.

## ۵-۸ قانون سوم نیوتون

وقتی دو جسم یکدیگر را بکشند یا هل دهند - یعنی وقتی یک جسم بر جسم دیگر نیرو وارد کند، گفته می‌شود که دو جسم برهم‌کنش می‌کنند. به طور مثال فرض کنید کتاب $B$ را به جعبهٔ $C$ تکیه دهیم (شکل ۵-۱۱ الف)، آنگاه کتاب و جعبه با یکدیگر برهم کنش می‌کنند: یک نیروی افقی $\vec{F}_{BC}$ از جعبه به کتاب (ناشی از جعبه)، و یک نیروی افقی $\vec{F}_{CB}$ از کتاب به جعبه (ناشی از کتاب) وارد می‌شود. این جفت نیروها در شکل ۵-۱۱ ب نشان داده شده‌اند. قانون سوم نیوتون حاکی از آن است که

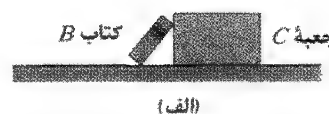
> **قانون سوم نیوتون:** وقتی دو جسم با هم برهم‌کنش کنند، نیروهایی که آن دو به یکدیگر وارد می‌کنند همواره از لحاظ بزرگی برابر و از لحاظ جهت در خلاف یکدیگرند.

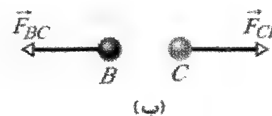
برای کتاب و جعبه این قانون را می‌توانیم به‌طور نرده‌ای چنین بنویسیم

$$F_{BC}=F_{CB} \quad \text{(بزرگیهای مساوی)}$$

و به‌طور برداری

$$\vec{F}_{BC}=-\vec{F}_{CB} \quad \text{(بزرگیهای مساوی و جهتهای مخالف)}$$



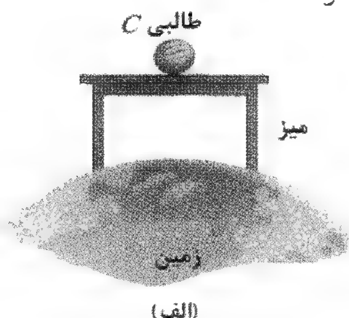



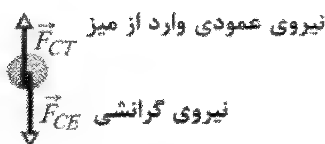

**شکل ۵-۱۱** (الف) کتاب $B$ به جعبهٔ $C$ تکیه کرده است. (ب) بزرگی نیروهای $\vec{F}_{BC}$ (نیروی وارد به کتاب از طرف جعبه) و $\vec{F}_{CB}$ (نیروی وارد به جعبه از طرف کتاب) یکسان، و جهتشان مخالف یکدیگر است.

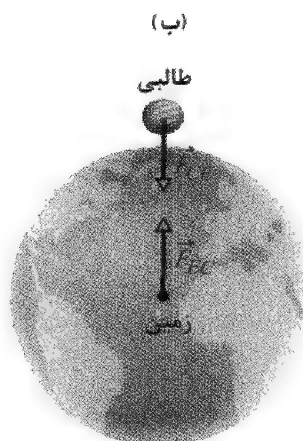
که در آن علامت منفی به این معنی است که دو نیرو در سوی مخالف یکدیگرند. نیروهای بین دو جسم در حال برهم‌کنش را می‌توانیم **زوج نیروی قانون سوم** بنامیم. هر گاه هر دو جسمی در هر وضعیتی با هم برهم‌کنش کنند، یک زوج نیروی قانون سوم حضور دارد. در شکل ۵-۱۱ الف کتاب و جعبه ساکن هستند، ولی اگر آنها حرکت می‌کردند و حتی اگر شتاب داشتند باز هم قانون سوم برقرار می‌ماند.

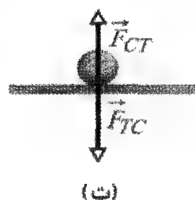
به عنوان مثالی دیگر، شکل ۵-۱۲ الف را در نظر بگیرید. در این شکل، یک طالبی روی میز که روی زمین واقع است، قرار دارد. می‌خواهیم زوج نیروی قانون سوم را که شامل طالبی باشد پیدا کنیم. طالبی با میز و زمین برهم کنش می‌کند (سه جسم وجود دارد که باید برهم‌کنش آنها را جدا کنیم).

نخست نیروهای وارد به طالبی را در نظر می‌گیریم (شکل ۵-۱۲ ب). نیروی $\vec{F}_{CT}$ نیروی عمودی وارد از میز به طالبی، و نیروی $\vec{F}_{CE}$ نیروی گرانشی ناشی از زمین بر طالبی است. آیا آنها زوج نیروی قانون سوم هستند؟ خیر، زیرا آنها نیروهایی هستند که بر یک جسم تنها، طالبی، و نه بر دو جسمِ برهم کنش کننده وارد می‌شوند.




**شکل ۵-۱۲** (الف) یک طالبی روی میز که روی زمین واقع است، قرار دارد. (ب) نیروهای *وارد به طالبی* $\vec{F}_{CT}$ و $\vec{F}_{CE}$ هستند. (پ) زوج نیروی قانون سوم برای برهم‌کنش طالبی- زمین. (ت) زوج نیروی قانون سوم برای برهم‌کنش طالبی- میز.

برای یافتن زوج نیروی قانون سوم، باید به جای توجه به طالبی، روی برهم‌کنش طالبی با یک جسم دیگر متمرکز بشویم. در برهم‌کنش طالبی- زمین (شکل ۵-۱۲ پ)، زمین با یک نیروی گرانشی $\vec{F}_{CE}$ طالبی را می‌کشد و طالبی با یک نیروی گرانشی $\vec{F}_{EC}$ زمین را. آیا این نیروها زوج نیروی قانون سوم هستند؟ بله، زیرا آنها نیروهایی هستند که بر دو جسم برهم‌کنش کننده وارد می‌شوند به گونه‌ای که نیروی وارد بر هر کدام ناشی از دیگری است. بنابراین، با استفاده از قانون سوم نیوتون داریم

$$\vec{F}_{CE} = -\vec{F}_{EC} \qquad \text{(برهم‌کنش طالبی- زمین)}$$

حال برهم کنش طالبی- میز را در نظر می‌گیریم. نیروی وارد به طالبی از سوی میز را با $\vec{F}_{CT}$ و نیروی وارد به میز از سوی طالبی را با $\vec{F}_{TC}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۵-۱۲ ت). این نیروها نیز زوج نیروی قانون سوم هستند و بنابراین داریم

$$\vec{F}_{CT} = -\vec{F}_{TC} \qquad \text{(برهم‌کنش طالبی - میز)}$$

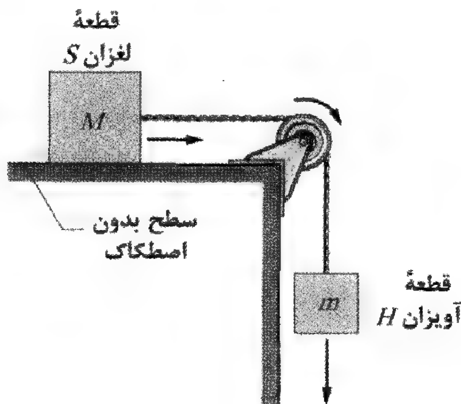
> ✓ **نکتهٔ وارسی ۵** فرض کنید طالبی و میز در شکل ۵-۱۲ در بالابری باشند که شروع به شتاب گرفتن رو به بالا می‌کنند. (الف) آیا بزرگیهای $\vec{F}_{TC}$ و $\vec{F}_{CT}$ افزایش می‌یابند؟ کاهش می‌یابند؟ یا بدون تغییر می‌مانند؟ (ب) آیا باز هم بزرگی این دو نیرو با هم برابر و جهتشان در خلاف یکدیگر است؟ (پ) آیا بزرگیهای $\vec{F}_{CE}$ و $\vec{F}_{EC}$ افزایش می‌یابند؟ کاهش می‌یابند؟ یا بدون تغییر می‌مانند؟ (ت) آیا بازهم بزرگی این دو نیرو با هم برابر و جهتشان در خلاف یکدیگر است؟

## ۵-۹ کاربرد قانونهای نیوتون

بقیهٔ این فصل شامل چند مسئلهٔ نمونه است. آنها را باید به دقت بخوانید، نه تنها برای پاسخهای خاصی که دارند، بلکه به خاطر راهکارهایی که برای نحوهٔ برخورد با مسئله ارائه می‌کنند. به ویژه مهم است که بدانید که چگونه نمودار جسم- آزاد را برای شکل یک مسئله با انتخاب محور مناسب رسم کنید تا بتوانید قانونهای نیوتون را به کار گیرید.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۴ مهارت خود را تقویت کنید

شکل ۵-۱۳ قطعهٔ $S$ (*قطعهٔ لغزان*) به جرم $M = ۳/۳\,\text{kg}$ را نشان می‌دهد. این قطعه که می‌تواند روی یک سطح افقی بدون اصطکاک حرکت کند، به وسیلهٔ ریسمانی که به دور قرقرهٔ بدون اصطکاکی پیچیده شده، به قطعهٔ دوم $H$ (*قطعهٔ آویزان*) به جرم $m = ۲/۱\,\text{kg}$ متصل شده است. جرمهای ریسمان و قرقره در مقایسه با جرم قطعه‌ها ناچیزند (آنها را «بدون جرم» در نظر می‌گیریم). با سقوط قطعهٔ آویزان $H$، قطعهٔ لغزان $S$ به سمت راست شتاب می‌گیرد. مطلوب است (الف) شتاب قطعهٔ $S$ (ب) شتاب قطعهٔ $H$، و (پ) کشش ریسمان.




**شکل ۵-۱۳** قطعهٔ $S$ به جرم $M$ به وسیلهٔ ریسمانی که از روی قرقره‌ای عبور کرده به قطعهٔ $H$ به جرم $m$ متصل شده است.

***پرسش:*** کلّ این مسئله دربارهٔ چیست؟

به شما دو جسم داده شده است - قطعه لغزان و قطعهٔ آویزان - ولی همچنین باید *زمین* را که هر دو قطعه را می‌کشد در نظر بگیرید. (بدون زمین، اتفاقی رخ نمی‌دهد.) کل پنج نیروی وارد بر قطعه‌ها در شکل ۵-۱۴ نشان داده شده است:

۱. ریسمان قطعهٔ لغزان $S$ را با نیرویی به بزرگی $T$ به سمت راست می‌کشد.

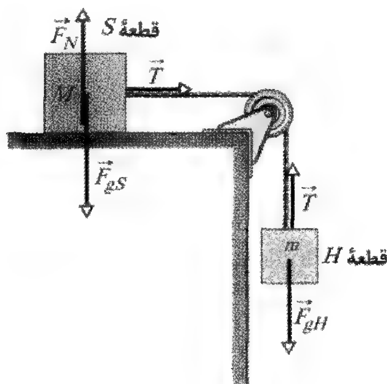
۲. ریسمان، قطعهٔ آویزان $H$ را با نیرویی به همان بزرگی $T$ به سمت بالا می‌کشد. این نیروی رو به بالا از سقوط آزاد قطعهٔ $H$ جلوگیری می‌کند.

۳. زمین قطعهٔ لغزان $S$ را با نیروی گرانشی $\vec{F}_{gS}$ به بزرگی $mg$ به سمت پایین می‌کشد.

۴. زمین قطعهٔ آویزان $H$ را با نیروی گرانشی $\vec{F}_{gH}$ به بزرگی $mg$ به سمت پایین می‌کشد.

۵. میز با نیروی عمودی $\vec{F}_N$ قطعهٔ $S$ را رو به بالا فشار می‌دهد.

به نکتهٔ دیگری نیز باید توجه کنید. فرض می‌کنیم که ریسمان کش نمی‌آید، در نتیجه اگر قطعهٔ $H$ در یک زمان معین به اندازهٔ ۱ mm سقوط کند، قطعهٔ $S$ در همان زمان به اندازهٔ ۱ mm به سمت راست حرکت می‌کند. این بدین معناست که قطعه‌ها با یکدیگر حرکت می‌کنند و شتاب آنها مقدار یکسان $a$ را دارد.




شکل ۵-۱۴ نیروهای وارد بر دو قطعهٔ شکل ۵-۱۳

*پرسش: چگونه می‌توانم این مسئله را دسته‌بندی کنم؟ آیا این مسئله قانون فیزیکی خاصی را یادآوری می‌کند؟*

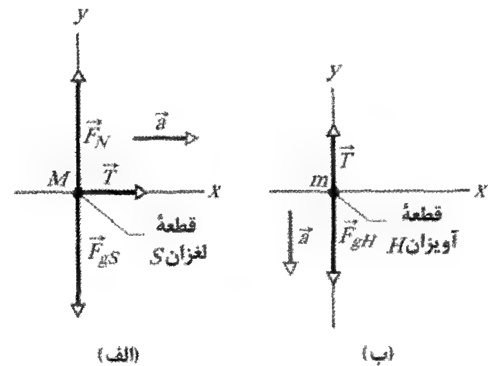
بله. نیروها، جرمها، و شتابها در این مسئله دخالت دارند و اینها باید شما را به یاد قانون دوم حرکت نیوتون، $\vec{F}_{\text{net}}=m\vec{a}$، بیاندازد. این **نکتهٔ کلیدی** آغازین ماست.

*پرسش: اگر بخواهم قانون دوم نیوتون را در این مسئله به کار گیریم، آن را باید برای کدام جسم اعمال کنیم؟*

روی دو جسم توجه می‌کنیم، قطعهٔ لغزان و قطعهٔ آویزان. اگر چه آنها اجسام بزرگی هستند (نقطه نیستند) با این حال می‌توانیم هر قطعه را به صورت یک ذره در نظیر بگیریم؛ زیرا هر بخش کوچکی از آن دقیقاً به همین ترتیب حرکت می‌کند. **نکتهٔ کلیدی** دوم به کار بردن قانون دوم نیوتون به طور مجزا برای هر قطعه است.

*پرسش: دربارهٔ قرقره چطور؟*

قرقره را نمی‌توانیم به صورت یک ذره در نظر بگیریم، زیرا هر بخش کوچک آن به ترتیب متفاوتی حرکت می‌کند. وقتی که به مبحث دوران برسیم، به تفصیل در مورد قرقره‌ها بحث خواهیم کرد. فعلاً با فرض اینکه جرم قرقره در مقایسه با جرمهای دو قطعه ناچیز است از حضور آن چشمپوشی می‌کنیم. در اینجا کار قرقره فقط تغییر جهت ریسمان است.




شکل ۵-۱۵ (الف) نمودار جسم - آزاد برای قطعهٔ S شکل ۵-۱۳. (ب) نمودار جسم- آزاد برای قطعهٔ H شکل ۵-۱۳.

*پرسش: بسیار خوب. اکنون چگونه می‌توانیم $\vec{F}_{\text{net}}=m\vec{a}$ را برای قطعهٔ لغزان به کار گیریم؟*

قطعهٔ S را به صورت ذره‌ای با جرم M در نظر می‌گیریم و همهٔ نیروهای وارد بر آن را مانند شکل ۵-۱۵ الف می‌کشیم. این، نمودار جسم- آزاد قطعه است. سپس محورهای مختصات را روی نمودار رسم می‌کنیم. در اینجا بهتر است که محور x موازی میز، در جهت حرکت قطعه رسم شود.

*پرسش: ممنون، ولی شما هنوز دربارهٔ اینکه چگونه می‌توانیم $\vec{F}_{\text{net}}=m\vec{a}$ را برای جسم لغزان به کار گیریم، چیزی نگفته‌اید. تنها چیزی که توضیح داده‌اید نحوهٔ رسم نمودار جسم- آزاد است.*

حق با شماست؛ این هم سومین **نکتهٔ کلیدی**: عبارت $\vec{F}_{\text{net}}=M\vec{a}$ یک معادلهٔ برداری است و از اینرو می‌توانیم آن را به صورت سه معادلهٔ مؤلفه‌ای بنویسیم

$$F_{\text{net},x}=Ma_x \quad \text{و} \quad F_{\text{net},y}=Ma_y \quad \text{و} \quad F_{\text{net},z}=Ma_z \qquad (۵-۱۶)$$

که در آنها $F_{\text{net},x}$، $F_{\text{net},y}$ و $F_{\text{net},z}$ مؤلفه‌های نیروی خالص در امتداد سه محورند. حال هر معادلهٔ مؤلفه‌ای را برای راستای مربوط به آن مؤلفه به کار می‌گیریم. چون قطعهٔ S به طور قائم شتاب نمی‌گیرد، $F_{\text{net},y}=Ma_y$ چنین می‌شود

$$F_N-F_{gS}=0 \quad \text{یا} \quad F_N=F_{gS}$$

بنابراین در راستای $y$، بزرگی نیروی عمودی برابر بزرگی نیروی گرانشی است. هیچ نیرویی در امتداد محور $z$، که عمود بر صفحه است، وارد نمی‌شود.

در راستای $x$، تنها یک مؤلفهٔ نیرو وجود دارد، که همان $T$ است. بنابراین $F_{\text{net},x}=Ma_x$ چنین می‌شود

$$T=Ma \qquad (۵-۱۷)$$

این معادله شامل دو کمیت نامعلوم $T$ و $a$ است؛ بنابراین فعلاً نمی‌توانیم آن را حل کنیم. ولی توجه کنید که هنوز دربارهٔ قطعهٔ آویزان چیزی نگفته‌ایم.

*پرسش: قبول، چگونه می‌توانیم $\vec{F}_{\text{net}}=m\vec{a}$ را برای قطعهٔ آویزان به کار بریم؟*

آن را درست به مانند کاری که برای قطعهٔ S انجام دادیم، به کار می‌بریم: مانند شکل ۵-۱۶ ب یک نمودار جسم ـ آزاد برای قطعهٔ H می‌کشیم. آنگاه $\vec{F}_{\text{net}}=m\vec{a}$ را به شکل مؤلفه‌ای به کار می‌بریم. این بار چون شتاب در راستای محور $y$ است، از بخش $y$ معادلهٔ ۵-۱۶ $(F_{\text{net},y}=ma_y)$ استفاده می‌کنیم و چنین می‌نویسیم

$$T-F_{gH}=ma_y$$

حال می‌توانیم $mg$ را به جای $F_{gH}$ و $-a$ را به جای $a_y$ قرار دهیم (علامت منفی به این دلیل است که قطعهٔ H در جهت منفی محور $y$ شتاب می‌گیرد). از آنجا داریم

$$T-mg=-ma \qquad (۵-۱۸)$$

توجه کنید که معادله‌های ۵-۱۷ و ۵-۱۸ معادله‌های همزمانی با دو کمیت نامعلوم یکسان $T$ و $a$ هستند. اگر این دو معادله را از هم کم کنیم، $T$ حذف می‌شود. آنگاه نتیجه را برای $a$ حل می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$a=\frac{m}{M+m}g \qquad (۵-۱۹)$$

با قراردادن این نتیجه در معادلهٔ ۵-۱۷، $T$ را به دست می‌آوریم

$$T=\frac{Mm}{M+m}g \qquad (۵-۲۰)$$

با قرار دادن مقدارهای عددی معلوم در این معادله خواهیم داشت

$$a=\frac{m}{M+m}g=\frac{۲/۱\,\text{kg}}{۳/۳\,\text{kg}+۲/۱\,\text{kg}}(۹/۸\,\text{m/s}^۲)$$
$$=۳/۸\,\text{m/s}^۲ \qquad \text{(پاسخ)}$$

و

$$a=\frac{Mm}{M+m}g=\frac{(۳/۳\text{kg})(۲/۱\text{kg})}{۳/۳\text{kg}+۲/۱\text{kg}}(۹/۸\text{m/s}^۲)$$
$$=۱۳\text{N}$$ (پاسخ)

*پرسش: حالا مسئله حل شده، درست است؟*

پرسش خوبی است، ولی تا وقتی که نتیجه‌های حاصل را نیازموده‌ایم و معقول بودن آنها معلوم نیست، حل مسئله واقعاً تمام نشده است. (شما که این محاسبه‌ها را به انجام رسانیده‌اید آیا نمی‌خواهید بدانید که نتیجه‌های آن معقول‌اند یا خیر؟)

نخست به معادلهٔ ۵-۱۹ نگاه کنید. توجه کنید که این معادله از لحاظ ابعادی درست است و شتاب $a$ همواره باید کوچکتر از $g$ باشد. باید هم این طور باشد، زیرا قطعهٔ آویزان در حال سقوط آزاد نیست و ریسمان آن را به سوی بالا می‌کشد.

حال به معادلهٔ ۵-۲۰ نگاه کنید. این معادله را می‌توانیم به این صورت دوباره‌نویسی کنیم

$$T=\frac{M}{M+m}mg \qquad (۵-۲۱)$$

با این شکل، بررسی اینکه این معادله نیز از لحاظ ابعادی درست است، ساده‌تر است. زیرا $T$ و $mg$ هر دو ابعاد نیرو را دارند. همچنین معادلهٔ ۵-۲۱ نشان می‌دهد که کشش ریسمان همواره کمتر از $mg$، و به عبارتی همواره کمتر از نیروی گرانشی وارد به قطعهٔ آویزان است. این، نتیجه‌ای اطمینان بخش است، زیرا اگر $T$ بزرگتر از $mg$ بود، آنگاه قطعهٔ آویزان رو به بالا شتاب می‌گرفت.

نتیجه‌ها را همچنین می‌توانیم با بررسی حالتهای خاصی که پاسخ آنها را می‌توان حدس زد، بیازماییم. یک مثال ساده فرض $g=۰$ است. این حالت مثل این است که آزمایش را در فضای میان ستاره‌ای انجام داده‌باشیم. می‌دانیم در این حالت قطعه‌ها از حالت سکون شروع به حرکت نمی‌کنند و از آنجا که هیچ نیرویی به انتهای ریسمانها وارد نمی‌شود، هیچ کششی در ریسمان ایجاد نمی‌شود. آیا فرمولهای ما این وضعیت را پیش‌بینی می‌کنند؟ بله، پیش‌بینی می‌کنند. اگر $g=۰$ را در معادله‌های ۵-۱۹ و ۵-۲۰ قرار دهیم، به $a=۰$ و $T=۰$ می‌رسیم. دو حالت خاص دیگری را که می‌توانید بررسی کنید $M=۰$ و $m\to\infty$ است.

### مسئلهٔ نمونه

در شکل ۵-۱۶ الف ریسمانی یک جعبه را روی سطح شیبدار $\theta=۳۰^\circ$ بدون اصطکاکی به سمت بالا می‌کشد. جعبه دارای جرم $m=۵/۰۰\text{kg}$ و نیرویی که ریسمان به آن وارد می‌کند برابر $T=۲۵/۰\text{N}$ است. مؤلفهٔ شتاب $a$ جعبه در راستای سطح شیبدار چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** شتاب در راستای سطح، توسط مؤلفهٔ نیرو در راستای سطح (نه مؤلفهٔ عمود بر سطح)، بنابر قانون دوم نیوتون (معادلهٔ ۵-۱)، برقرار می‌شود.

***محاسبه‌ها:*** برای سادگی دستگاه مختصات و نمودار جسم- آزاد را مطابق شکل ۵-۱۶ب رسم می‌کنیم. جهت مثبت محور $x$ به سمت بالای سطح است. نیروی $T$ از طرف ریسمان به سمت بالای سطح و بزرگی آن برابر $T=۲۵/۰\text{N}$ است. نیروی گرانش $\vec{F}_g$ به سمت پایین و بزرگی آن برابر $mg=(۵/۰۰\text{kg})(۹/۸\text{m/s}^۲)=۴۹/۰\text{N}$ است. مهمتر اینکه، مؤلفه آن در راستای سطح، همان‌طور که در شکل ۵-۱۶پ نشان داده شد. به سمت پایین سطح و بزرگی آن برابر $mg\sin\theta$ است (برای مشاهدهٔ اینکه چرا چنین است مثلثهای قائم‌الزاویه شکلها ۵-۱۶ ب و پ را مقایسه کنید.) برای مشخص کردن جهت، مؤلفه را می‌توانیم به صورت $-mg\sin\theta$ بنویسیم. نیروی عمودی $\vec{F}_N$ عمود بر سطح شیبدار است، در نتیجه شتابی در راستای صفحه ایجاد نمی‌کند.

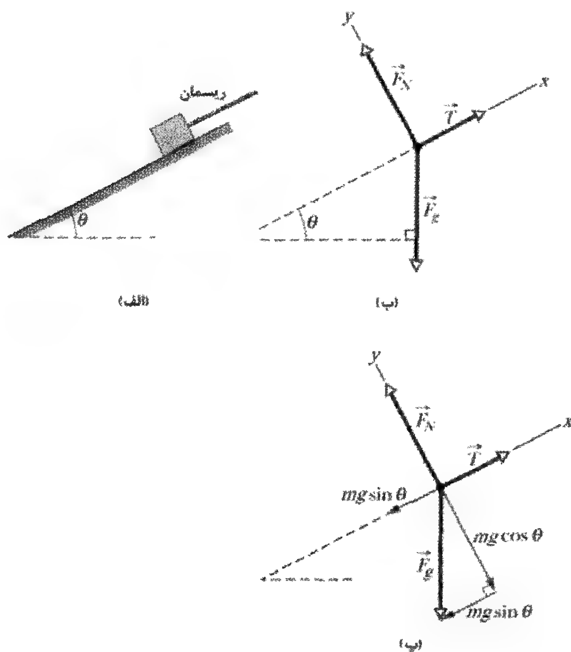
قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{\text{net}}=m\vec{a})$ را برای حرکت در راستای محور $x$ به صورت زیر می‌نویسیم

$$T-mg\sin\theta=ma \qquad (۵-۲۲)$$

قرار دادن داده‌های مسئله و حل معادله برای $a$، به دست می‌دهد

$$a=۰/۱۰۰\text{m/s}^۲$$ (پاسخ)

که جواب مثبت بیان کنندهٔ این است که شتاب جعبه به سمت بالای سطح است.




شکل ۵-۱۶ (الف) جعبه‌ای به وسیلهٔ ریسمان به سمت بالای سطح کشیده می‌شود. (ب) سه نیرو بر جعبه وارد می‌شوند: نیروی ریسمان $\vec{T}$، نیروی گرانش $\vec{F}_g$، و نیروی عمود $\vec{F}_N$. (پ) مؤلفه‌های $\vec{F}_g$ در راستای سطح و عمود بر سطح.

مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۶

حال به پرسش اول فصل برمی‌گردیم: چه عاملی در آخرین اتاقک قطار تفریحی معمولی رانده شده با گرانش، موجب دلهره می‌شود؟ فرض کنید قطار تفریحی ده اتاقک یکسان با جرم کل $M$ دارد و اتصالها بین اتاقکها بدون جرم‌اند. شکل ۵-۱۷ الف نشان می‌دهد که قطار تفریحی درست پس از اولین اتاقک شروع به پایین رفتن در امتداد شیب بدون اصطکاک با زاویهٔ $\theta$ کرده است. شکل ۵-۱۷ب لحظه‌ای را نشان می‌دهد که آخرین اتاقک شروع به پایین رفتن کرده است. شتاب قطار در این دو وضعیت چقدر است؟

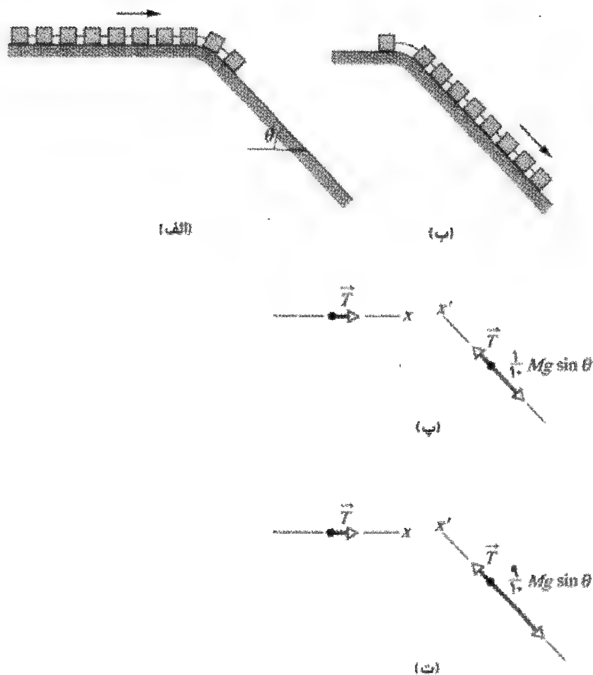
**نکته‌های کلیدی** (۱) بنابر قانون دوم نیوتون (معادلهٔ ۵-۱، $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$)، نیروی خالص وارد بر یک جسم موجب شتاب جسم می‌شود. (۲) وقتی حرکت فقط در راستای یک محور است، این قانون را به شکل مؤلفه‌ای (مثل $\vec{F}_{net,x} = ma_x$) می‌نویسیم و فقط از مؤلفهٔ نیرو در آن راستا استفاده می‌کنیم. (۳) وقتی چند جسم با یک سرعت و شتاب با هم حرکت کنند، می‌توان آنها را به عنوان یک جسم مرکب در نظر گرفت. *نیروهای داخلی* بین هر دو جسم عمل می‌کند اما *نیروهای خارجی* فقط به جسم مرکب وارد می‌شوند و به آن شتاب می‌دهند.

***محاسبه‌ها برای شکل ۵-۱۷ الف:*** شکل ۵-۱۷ پ نمودار جسم- آزاد مربوط به شکل ۵-۱۷ الف را به همراه محورهای انتخاب شده نشان می‌دهد. جهت مثبت محور $x'$ به سمت بالای شیب است. $T$ بزرگی نیروی پیوستگی بین اتاقک روی شیب و اتاقکهایی است که هنوز روی سطح قرار دارند. چون قطار شامل ۱۰ اتاقک یکسان با جرم کل $M$ است، پس جرم اتاقک روی قسمت شیبدار برابر $\frac{1}{10}M$ و جرم اتاقکهای روی سطح برابر $\frac{9}{10}M$ است. فقط یک *نیروی خارجی* در راستای محور $x$ روی ترکیب نه اتاقک وارد می‌شود- یعنی، نیروی پیوستگی با بزرگی $T$. (نیروهای بین نه اتاقک نیروهای داخلی هستند). بنابراین، قانون دوم نیوتون برای حرکت در راستای محور $x$ $(F_{net,x} = ma_x)$ چنین است

$$T = \frac{9}{10}Ma \qquad (۵\text{-}۲۳)$$

که در آن $a$ بزرگی شتاب $a_x$ در راستای محور $x$ است.

در راستای محور $x'$، دو نیرو بر اتاقک واقع روی قسمت شیبدار اثر می‌کنند: نیروی پیوستگی با بزرگی $T$ (در جهت مثبت محور) و مؤلفهٔ $x'$ نیروی گرانش (در جهت منفی محور). از مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۵ می‌دانیم که مؤلفهٔ گرانشی را می‌توانیم به صورت $-mg\sin\theta$ بنویسیم، که در آن $m$ جرم است. چون می‌دانیم که شتاب اتاقک به سمت *پایین* شیب و در جهت منفی $x'$ با بزرگی $a$ است، می‌توانیم شتاب را به صورت $-a$ بنویسیم.




**شکل ۵-۱۷** یک قطار تفریحی با (الف) اولین اتاقک روی قسمت شیبدار و (ب) سایر اتاقکها به جز آخری روی قسمت شیبدار. (پ) نمودارهای جسم- آزاد برای اتاقکهای روی سطح و برای اتاقک روی قسمت شیبدار در (الف). (ت) نمودار جسم- آزاد برای (ب).

بنابراین، برای این اتاقک با جرم $\frac{1}{10}M$، می‌توان قانون دوم نیوتون را برای حرکت در راستای محور $x'$ به صورت زیر نوشت

$$T - \frac{1}{10}Mg\sin\theta = \frac{1}{10}M(-a) \qquad (۵\text{-}۲۴)$$

با جایگزینی $T$ از معادلهٔ ۵-۲۳ و حل برای $a$ داریم

$$a = \frac{1}{10}g\sin\theta \qquad \text{(پاسخ)}$$

**محاسبه‌ها برای شکل ۵-۱۷ ب:** شکل ۵-۱۷ ت نمودار جسم- آزاد مربوط به شکل ۵-۱۷ ب را نشان می‌دهد. برای اتاقکی که هنوز روی سطح است معادلهٔ ۵-۲۳ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$T = \frac{1}{10}Ma$$

برای نه اتاقک روی قسمت شیبدار، معادلهٔ ۳-۲۴ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$T - \frac{9}{10}Mg\sin\theta = \frac{9}{10}M(-a)$$

دوباره با حل این معادله برای $a$ داریم

$$a = \frac{9}{10}g\sin\theta \qquad \text{(پاسخ)}$$

***عامل دلهره:*** این پاسخ آخر ۹ برابر پاسخ اولی است. بنابراین، در کل، شتاب اتاقکها در وقتی که تعداد بیشتری از آنها از لبه به شیب سرازیر می‌شوند بتدریج افزایش می‌یابد. این افزایش در شتاب بدون توجه به اینکه در کدام اتاقک هستید، رخ می‌دهد ولی تعبیر شما از شتاب به انتخاب بستگی دارد. در اولین اتاقک، بیشتر شتاب روی قسمت شیب رخ می‌دهد و این به

خاطر مؤلفهٔ نیروی گرانشی در راستای شیب است که منطقی به نظر می‌رسد. در آخرین اتاقک، بیشتر شتاب روی سطح رخ می‌دهد و این ناشی از فشاری است که از پشتی صندلی به شما وارد می‌شود. موقع نزدیک شدن به لبهٔ شیب این فشار به سرعت افزایش می‌یابد و به شما احساس ترسناکی دست می‌دهد که فکر می‌کنید از جا کنده شده و به هوا پرتاب خواهید شد.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۷ مهارت خود را تقویت کنید

شکل ۵-۱۸ الف آرایشی کلی را نشان می‌دهد که در آن دو نیرو بر قطعهٔ $۴/۰۰\text{kg}$ واقع روی سطح بدون اصطکاکی وارد می‌شوند، ولی فقط $\vec{F}_1$ نشان داده شده است. بزرگی این نیرو ثابت است ولی می‌تواند با زاویهٔ $\theta$ نسبت به جهت مثبت محور $x$ اثر کند. نیروی $\vec{F}_2$ افقی و بزرگی و جهت آن ثابت است. شکل ۵-۱۸ ب شتاب افقی $a_x$ قطعه را برای کلیهٔ مقدارهای $\theta$ از $۰°$ تا $۹۰°$ به دست می‌دهد. مقدار $a_x$ برای $\theta=۱۸۰°$ چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) شتاب افقی $a_x$، همان‌طور که با قانون دوم نیوتون داده شده است، بستگی به نیروی افقی خالص $F_{\text{net},x}$ دارد. (۲) نیروی افقی خالص برابر با جمع مؤلفه‌های افقی نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ است.

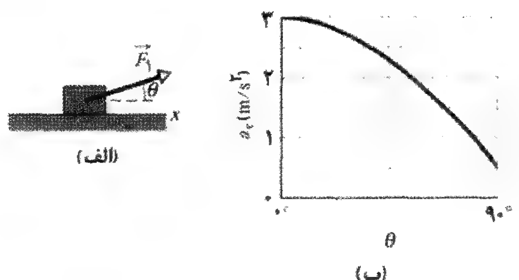
***محاسبه‌ها:*** مؤلفهٔ $x$ نیروی $\vec{F}_2$ برابر $F_2$ است چون بردار افقی است. مؤلفهٔ $x$ نیروی $\vec{F}_1$ برابر $F_1\cos\theta$ است. با استفاده از این روابط و جرم $m$ برابر $۴/۰۰\text{kg}$، می‌توانیم قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{\text{net}}=m\vec{a})$ را برای حرکت در راستای محور $x$ به صورت زیر بنویسیم

$$F_1\cos\theta+F_2=۴/۰۰a_x \qquad (۵\text{-}۲۵)$$

از این معادله مشاهده می‌کنیم که وقتی $\theta=۹۰°$، $F_1\cos\theta$ برابر صفر و $F_2=۴/۰۰a_x$ است. از نمودار مشاهده می‌کنیم که شتاب متناظر برابر $۰/۵۰\text{m/s}^2$ است. بنابراین، $F_2=۲/۰۰\text{N}$ و $\vec{F}_2$ باید در جهت مثبت محور $x$ باشد.

از معادلهٔ ۵-۲۵، در می‌یابیم که وقتی $\theta=۰°$ است.

$$F_1\cos ۰°+۲/۰۰=۴/۰۰a_x \qquad (۵\text{-}۲۶)$$




**شکل ۵-۱۸** (الف) یکی از دو نیروی وارد بر قطعه نشان داده شده است. زاویهٔ آن می‌تواند تغییر کند. (ب) مؤلفهٔ $a_x$ شتاب قطعه برحسب $\theta$.

از نمودار مشاهده می‌کنیم که شتاب متناظر برابر $۳/۰\text{m/s}^2$ است. سپس از معادلهٔ ۵-۲۶ در می‌یابیم که $F_1=۱۰\text{N}$.

با قرار دادن $F_1=۱۰\text{N}$، $F_2=۲/۰۰\text{N}$ و $\theta=۱۸۰°$ در معادلهٔ ۵-۲۵ داریم

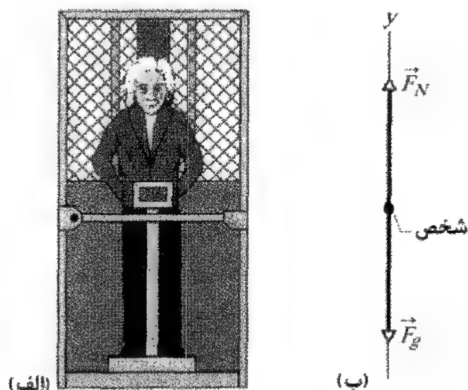
$$a_x=-۲/۰۰\text{m/s}^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

## مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۸ مهارت خود را تقویت کنید

در شکل ۵-۱۹ الف، شخصی به جرم $m=۷۲/۲\text{kg}$ روی سکوی یک ترازوی فنری واقع در اتاقک بالابری ایستاده است. می‌خواهیم بدانیم ترازو در هنگامی که بالابر ساکن است و در هنگامی که رو به بالا یا پایین حرکت می‌کند، چه عددی را نشان می‌دهد.

(الف) جواب عمومی برای عددی را که ترازو در هر نوع حرکت قائم اتاقک نشان می‌دهد، به دست آورید.

**نکته‌های کلیدی** (۱) عددی که ترازو نشان می‌دهد برابر با بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد به شخص از طرف ترازو است. تنها نیروی دیگری که به شخص وارد می‌شود نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ است که در نمودار جسم - آزاد شکل ۵-۱۹ ب نشان داده شده است. (۲) می‌توانیم نیروهای وارد بر شخص را از طریق قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{\text{net}}=m\vec{a})$ به شتاب $\vec{a}$ او مربوط کنیم. البته به خاطر داشته باشید که از این قانون فقط در یک چارچوب لخت می‌توانیم استفاده کنیم. وقتی اتاقک شتاب داشته باشد، دیگر یک چارچوب لخت *نیست*. از اینرو زمین را به عنوان چارچوب لخت خود انتخاب می‌کنیم و شتاب شخص را نسبت به آن می‌سنجیم.




**شکل ۵-۱۹** (الف) شخصی روی یک ترازوی فنری ایستاده است. ترازو، وزن یا وزن ظاهری او را نشان می‌دهد. (ب) نمودار جسم - آزاد شخص که نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد به او از طرف ترازو، و نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ را نشان می‌دهد.

***محاسبه‌ها:*** چون دو نیروی وارد برشخص و شتاب او در راستای قائم، و در امتداد محور $y$ در شکل ۵-۱۹ ب هستند، می‌توانیم از قانون دوم نیوتون که برای مؤلفه‌های $y$ نوشته شده باشد $(F_{\text{net},y}=ma_y)$ استفاده کنیم

$$F_N - F_g = ma$$

یا

$$F_N = F_g + ma \qquad (۵-۲۷)$$

این رابطه مبین آن است که عددی که ترازو نشان می‌دهد، یا همان $F_N$، به شتاب قائم بستگی دارد. با قراردادن $mg$ به جای $F_g$ خواهیم داشت

$$F_N = m(g+a) \qquad \text{(پاسخ)} \qquad (۵-۲۸)$$

که به ازای هر مقدار $a$ برقرار است.

(ب) اگر اتاقک ساکن باشد یا با سرعت ثابت $۰/۵۰ m/s$ رو به بالا حرکت کند ترازو چه عددی را نشان می‌دهد؟

**نکتهٔ کلیدی** برای سرعت ثابت (صفر یا غیر آن)، شتاب $a$ شخص صفر است.

***محاسبه‌ها:*** با قراردادن $a=۰$، و مقدارهای معلوم در معادلهٔ ۵-۲۸ به دست می‌آوریم

$$F_N = (۷۲/۲ kg)(۹/۸ m/s^۲ + ۰) = ۷۰۸ N \qquad \text{(پاسخ)}$$

این، وزن شخص و برابر با بزرگی $F_g$ نیروی گرانشی وارد به اوست.

(پ) اگر اتاقک با شتابی به بزرگی $۳/۲۰ m/s^۲$ رو به بالا یا با شتابی به بزرگی $۳/۲۰ m/s^۲$ رو به پایین حرکت کند، ترازو چه عددی را نشان می‌دهد؟

***محاسبه‌ها:*** به ازای $a=۳/۲۰ m/s^۲$، معادلهٔ ۵-۲۸ به دست می‌دهد

$$F_N = (۷۲/۲ kg)(۹/۸ m/s^۲ + ۳/۲۰ m/s^۲) = ۹۳۹ N \qquad \text{(پاسخ)}$$

و به ازای $a = -۳/۲۰ m/s^۲$ داریم

$$F_N = (۷۲/۲ kg)(۹/۸ m/s^۲ - ۳/۲۰ m/s^۲) = ۴۷۷ N \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای شتاب رو به بالا (چه تندی رو به بالای اتاقک در حال افزایش و چه تندی رو به پایین آن در حال کاهش باشد)، عددی که ترازو نشان می‌دهد بزرگتر از وزن شخص است. عددی که ترازو نشان می‌دهد وزن ظاهری او است، زیرا اندازه‌گیری در یک چارچوب نالخت صورت پذیرفته است. برای شتاب رو به پایین (چه تندی رو به بالا در حال کاهش، و چه تندی رو به پایین در حال افزایش باشد)، عددی که ترازو نشان می‌دهد کمتر از وزن شخص است.

(ت) در حین شتاب رو به بالا در قسمت (پ) بزرگی نیروی خالص $F_{net}$ وارد بر شخص چقدر است؟ بزرگی شتاب او هنگامی که در چارچوب اتاقک اندازه‌گیری شود، $a_{p,cab}$، چقدر است؟ آیا $\vec{F}_{net} = m\vec{a}_{p,cab}$ است؟

***محاسبه‌ها:*** بزرگی $F_g$ نیروی گرانشی وارد بر شخص، به حرکت او یا اتاقک بستگی ندارد؛ بنابراین، با استفاده از قسمت (ب)، $F_g$ برابر با $۷۰۸ N$ است. از قسمت (پ) می‌دانیم که بزرگی $F_N$ نیروی عمودی وارد به شخص در حین حرکت شتابدار رو به بالا برابر $۹۳۹ N$ است که همان عددی است که ترازو نشان می‌دهد. بنابراین، نیروی خالص وارد به شخص در حرکت شتابدار رو به بالا برابر است با

$$F_{net} = F_N - F_g = ۹۳۹ N - ۷۰۸ N = ۲۳۱ N \qquad \text{(پاسخ)}$$

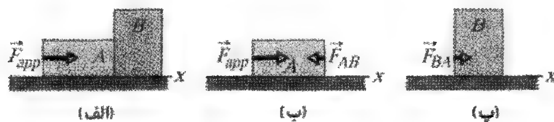
ولی شتاب شخص نسبت به چارچوب اتاقک برابر صفر است. بنابراین، در چارچوب نالخت اتاقک شتابدار، $F_{net}$ برابر با $ma_{p,cab}$ نیست و در آنجا قانون دوم نیوتون صدق نمی‌کند.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۹ مهارت خود را تقویت کنید

در شکل ۵-۲۰ الف، نیروی افقی ثابت $\vec{F}_{app}$ به بزرگی $۲۰ N$ بر قطعهٔ $A$ به جرم $M_A = ۴/۰ kg$ وارد شده است، و این قطعه، قطعهٔ $B$ به جرم $m_B = ۶/۰ kg$ را رو به جلو هل می‌دهد. قطعه‌ها روی سطح بدون اصطکاکی در امتداد محور $x$ می‌لغزند.

(الف) شتاب قطعه‌ها چقدر است؟

***خطای فاحش:*** چون نیروی $\vec{F}_{app}$ به طور مستقیم به قطعهٔ $A$ وارد شده است، می‌توانیم از طریق قانون دوم نیوتون، این نیرو را به شتاب $\vec{a}$ قطعهٔ $A$ مرتبط کنیم. چون حرکت در امتداد




شکل ۵-۲۰ (الف) نیروی افقی ثابت $F_{app}$ بر قطعهٔ $A$ وارد شده است و این قطعه، قطعهٔ $B$ را به جلو هل می‌دهد. (ب) دو نیروی افقی بر قطعهٔ $A$ وارد می‌شوند. (پ) بر قطعهٔ $B$ فقط یک نیروی افقی وارد می‌شود.

محور $x$ است، از این قانون برای مؤلفه‌های $x$ استفاده می‌کنیم ($F_{net,x} = ma_x$) و چنین می‌نویسیم

$$F_{app} = m_A a$$

البته این حل به طور فاحشی غلط است؛ زیرا $\vec{F}_{app}$ تنها نیروی افقی وارد بر قطعهٔ $A$ نیست و بر آن نیروی $\vec{F}_{AB}$ نیز از طرف قطعهٔ $B$ وارد می‌شود (شکل ۵-۲۰ ب).

***حل بی‌نتیجه:*** حالا نیروی $\vec{F}_{AB}$ را هم در قانون دوم نیوتون برای مؤلفه‌های $x$ دخالت می‌دهیم

$$F_{app} - F_{AB} = m_A a$$

(از علامت منفی برای نشان دادن جهت $\vec{F}_{AB}$ استفاده کرده‌ایم.) چون در این معادله علاوه بر $a$، $\vec{F}_{AB}$ نیز مجهول است، آن را نمی‌توانیم برای $a$ حل کنیم.

***حل موفقیت آمیز:*** در اینجا **نکتهٔ کلیدی** این است که با توجه به جهت نیروی وارد شدهٔ $\vec{F}_{app}$، دو قطعه تشکیل یک دستگاه صلب متصل را می‌دهند و می‌توانیم نیروی خالص *وارد بر دستگاه* را از طریق قانون دوم نیوتون به شتاب *دستگاه* مرتبط کنیم. بار دیگر قانون دوم نیوتون را برای مؤلفه‌های $x$ می‌نویسیم

$$F_{app} = (m_A + m_B)a$$

که به سادگی $\vec{F}_{app}$ را به دستگاهی به جرم کل $m_A + m_B$ مربوط می‌کند. با قرار دادن مقدارهای معلوم، و حل معادله برای $a$ خواهیم داشت

(پاسخ) $$a = \frac{F_{app}}{m_A + m_B} = \frac{۲۰\,\text{N}}{۴/۰\,\text{kg} + ۶/۰\,\text{kg}} = ۲/۰\,\text{m/s}^۲$$

بنابراین، شتاب دستگاه و نیز هر قطعه، در جهت مثبت محور $x$ است و بزرگی $۲/۰\,\text{m/s}^۲$ را دارد.

(ب) نیروی (افقی) $\vec{F}_{BA}$ وارد به قطعهٔ $B$ از طرف قطعهٔ $A$ (شکل ۵-۲۰ پ) چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توانیم نیروی خالص وارد بر قطعهٔ $B$ را از طریق قانون دوم نیوتون به شتاب قطعه مربوط کنیم.

***محاسبه‌ها:*** قانون دوم نیوتون را می‌توانیم برای مؤلفه‌های $x$ چنین بنویسیم

$$F_{BA} = m_B a$$

که با قراردادن مقدارهای معلوم به دست می‌دهد

(پاسخ) $$F_{BA} = (۶/۰\,\text{kg})(۲/۰\,\text{m/s}^۲) = ۱۲\,\text{N}$$

بنابراین، نیروی $\vec{F}_{BA}$ در جهت مثبت محور $x$ است و بزرگی ۱۲N را دارد.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**مکانیک نیوتونی** هرگاه جسمی تحت تأثیر یک یا چند **نیرو** (به صورت هل دادن یا کشیدن) از طرف چند جسم دیگر قرار گیرد، سرعت آن می‌تواند تغییر کند (جسم می‌تواند شتابدار شود). *مکانیک نیوتونی* شتابها و نیروها را به هم مربوط می‌کند.

**نیرو** نیروها کمیتهایی برداری‌اند. بزرگی آنها برحسب شتابی که به کیلوگرم استاندارد می‌دهند تعریف می‌شود. بنابر تعریف، نیرویی که به جسم استاندارد دقیقاً $۱\,\text{m/s}^۲$ شتاب دهد دارای بزرگی ۱N است. جهت نیرو در جهت شتابی است که آن نیرو ایجاد می‌کند. نیروها بنا بر قاعده‌های جبربرداری با یکدیگر ترکیب می‌شوند. **نیروی خالص** وارد بر یک جسم جمع برداری تمام نیروهای وارد بر آن جسم است.

**قانون اول نیوتون** در صورتی که هیچ نیروی خالصی به یک جسم وارد نشود، اگر آن جسم در ابتدا ساکن باشد، ساکن باقی می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد، در امتداد خط راستی با تندی ثابت حرکت می‌کند.

**چارچوبهای مرجع لخت** چارچوبهای مرجعی را که در آنها مکانیک نیوتونی برقرار باشد *چارچوبهای مرجع لخت* یا به طور ساده *چارچوبهای لخت* می‌نامند. چارچوبهای مرجعی را که در آنها مکانیک نیوتونی برقرار نباشد *چارچوبهای مرجع نالخت* یا به طور ساده *چارچوبهای نالخت* می‌نامند.

**جرم** جرم یک جسم مشخصه‌ای از آن جسم است که شتاب جسم را به نیروی خالصی که عامل آن شتاب است مربوط می‌کند. جرمها کمیتهایی نرده‌ای اند.

**قانون دوم نیوتون** نیروی خالص $\vec{F}_{net}$ وارد بر جسمی به جرم $m$ از طریق رابطهٔ زیر به شتاب جسم مربوط است

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \qquad (۵\text{-}۱)$$

که آن را می‌توان برحسب مؤلفه‌ها چنین نوشت

$$F_{net,x} = ma_x \quad \text{و} \quad F_{net,y} = ma_y \quad \text{و} \quad F_{net,z} = ma_z \qquad (۵\text{-}۲)$$

قانون دوم نیوتون نشان می‌دهد که در دستگاه یکاهای SI داریم

$$۱\text{N} = ۱\text{kg}\cdot\text{m/s}^۲ \qquad (۵\text{-}۳)$$

**نمودار جسم- آزاد** نمودار بدون حشو و زوائدی است که در آن فقط یک جسم در نظر گرفته می‌شود. جسم با طرحی از آن یا یک نقطه نمایش داده می‌شود. نیروهای وارد برجسم کشیده می‌شوند، و یک دستگاه مختصات به گونه‌ای برآن نهاده می‌شود که سمتگیری محورهای آن، حل مسئله را ساده کند.

**چند نیروی خاص** **نیروی گرانشی** $\vec{F}_g$ وارد بر یک جسم، نیرویی کششی است که از سوی جسمی دیگر به آن وارد می‌شود.

در اغلب حالتهایی که در این کتاب مطرح می‌شود، آن جسم دیگر زمین یا یک جسم نجومی دیگر است. برای زمین، این نیرو رو به پایین و به طرف زمین است که یک چارچوب لخت در نظر گرفته می‌شود. با این فرض، بزرگی $\vec{F}_g$ چنین است

$$F_g = mg \qquad (۵\text{-}۸)$$

که در آن $m$ جرم جسم و $g$ بزرگی شتاب سقوط آزاد است.

**وزن** $W$ یک جسم برابر بزرگی نیروی رو به بالایی است که برای موازنه با نیروی گرانشی وارد بر جسم مورد نیاز است. وزن یک جسم با رابطهٔ زیر به جرم آن مربوط است

$$W = mg \qquad (۵\text{-}۱۲)$$

**نیروی عمودی** $\vec{F}_N$ نیرویی است که از طرف سطحی که جسم روی آن قرار دارد بر جسم وارد می‌شود. نیروی عمودی همواره بر سطح عمود است.

**نیروی اصطکاک** $\vec{f}$ نیرویی است که وقتی جسم بلغزد یا بخواهد بلغزد، در امتداد سطح بر آن وارد می‌شود. این نیرو همواره موازی سطح و در جهتی است که با لغزش جسم مخالفت کند. روی یک *سطح بدون اصطکاک*، نیروی اصطکاک قابل چشمپوشی است.

وقتی ریسمانی تحت **کشش** باشد، آن ریسمان از هر یک از دو انتهای خود جسمی را می‌کشد. این نیرو در امتداد ریسمان و در جهت دورشدن از نقطهٔ اتصال جسم است. برای یک ریسمان *بدون* جرم (ریسمانی با جرم ناچیز) کشش در هر دو انتهای ریسمان دارای بزرگی یکسان $T$ است، حتی اگر ریسمان از روی قرقرهٔ *بدون* جرم و *بدون اصطکاکی* (قرقره‌ای با جرم

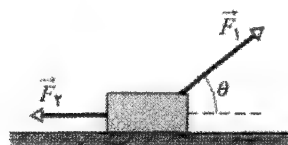
قابل چشمپوشی و با اصطکاک ناچیز محور در مقابل چرخش قرقره) گذشته باشد.

**قانون سوم نیوتون** اگر نیروی $\vec{F}_{BC}$ از طرف جسم $C$ بر جسم $B$ وارد شود، آنگاه یک نیروی $\vec{F}_{CB}$ وجود دارد که از طرف جسم $B$ بر جسم $C$ وارد می‌شود. این نیروها از لحاظ بزرگی با هم برابر و از لحاظ جهت با هم مخالف‌اند

$$\vec{F}_{BC}=-\vec{F}_{CB}$$

## پرسشها

۱- در شکل ۵-۲۱، نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بر جعبه‌ای که روی کف بدون اصطکاکی با سرعت ثابت می‌لغزد وارد شده‌اند. زاویهٔ $\theta$ را بدون تغییر در بزرگی $\vec{F}_1$ کاهش می‌دهیم. برای آنکه جعبه باز هم با سرعت ثابت بلغزد، آیا باید بزرگی $\vec{F}_2$ را افزایش دهیم یا کاهش یا بدون تغییر نگه داریم؟



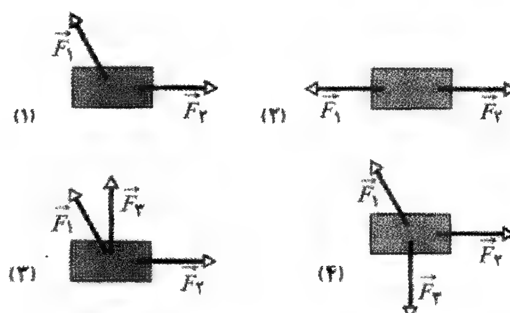
شکل ۵-۲۱ پرسش ۱

۲- در لحظهٔ $t=0$ ، نیروی ثابت $\vec{F}$ بر تخته سنگی که در حال عبور از میان عمق فضا در امتداد محور $x$ است، وارد می‌شود. (الف) برای زمان $t>0$ کدامیک از تابعهای زیر احتمال دارد مکان $x(t)$ تخته سنگ را مشخص کند؟

(۱) $x=4t-3$ و (۲) $x=-4t^2+6t-3$ و (۳) $x=4t^2+6t-3$

(ب) برای کدام تابع نیروی $\vec{F}$ در خلاف جهت حرکت اولیهٔ تخته سنگ است؟

۳- شکل ۵-۲۲ دید از بالای چهار وضعیت را نشان می‌دهد که در آنها نیروهایی بر قطعه‌ای که روی کف بدون اصطکاکی قرار دارد، وارد می‌شوند. اگر بزرگی نیروها به طور مناسبی انتخاب شوند، در کدام وضعیت ممکن است که قطعه (الف) ساکن باشد و (ب) با سرعت ثابت حرکت کند؟

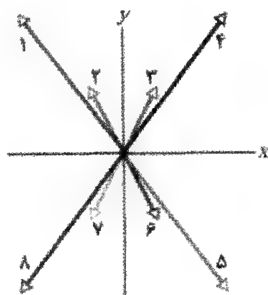


شکل ۵-۲۲ پرسش ۳

۴- دو نیروی افقی زیر

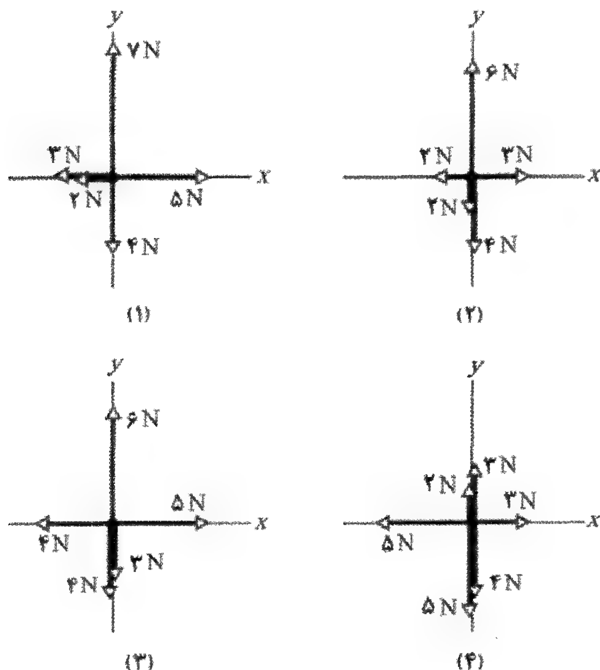
$$\vec{F}_1=(3\,N)\hat{i}-(4\,N)\hat{j} \quad \text{و} \quad \vec{F}_2=-(1\,N)\hat{i}-(2\,N)\hat{j}$$

ظرف غذایی را روی سفرهٔ بدون اصطکاکی می‌کشند. بدون استفاده از ماشین حساب، تعیین کنید که کدامیک از بردارها در نمودار جسم- آزاد شکل ۵-۲۳ بهترین نمایش برای (الف) $\vec{F}_1$ و (ب) $\vec{F}_2$ هستند؟ مؤلفهٔ نیروی خالص در امتداد (پ) محور $x$ و (ت) محور $y$ چقدر است؟ (ث) بردار نیروی خالص و (ج) بردار شتاب در کدام ربع واقع‌اند؟



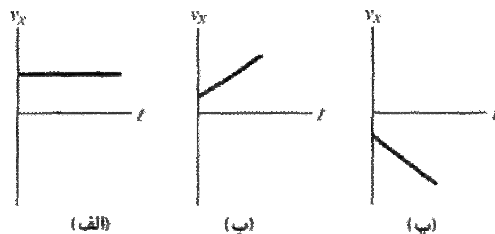
شکل ۵-۲۳ پرسش ۴

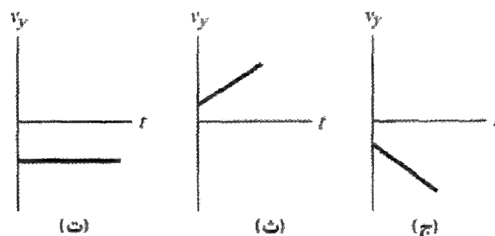
۵- شکل ۵-۲۴ نمودار جسم- آزاد چهار وضعیت را از دید بالا نشان می‌دهد که در هر یک چند نیرو بر جسمی که روی کف بدون اصطکاکی قرار دارد، وارد شده‌اند. در کدام وضعیت، شتاب جسم $\vec{a}$ (الف) دارای مؤلفهٔ $x$ و (ب) مؤلفهٔ $y$ است؟ (پ) در هر وضعیت، جهت بردار $\vec{a}$ را با بیان اینکه در کدام ربع دستگاه مختصات یا در جهت کدام محور قرار دارد تعیین کنید. (این کار با اندکی محاسبه‌های ذهنی انجام پذیر است.)



شکل ۵-۲۴ پرسش ۵

۶- شکل ۵-۲۵ سه نمودار را برای مؤلفهٔ $x$ سرعت، $v_x(t)$ ، و سه نمودار را برای مؤلفهٔ $y$ سرعت، $v_y(t)$، نشان می‌دهد. نمودارها با مقیاس رسم نشده‌اند. کدامیک از نمودارهای $v_x(t)$ و کدامیک از نمودارهای $v_y(t)$ بهترین انطباق را با هر یک از چهار وضعیت پرسش ۵ و شکل ۵-۲۴ دارند.



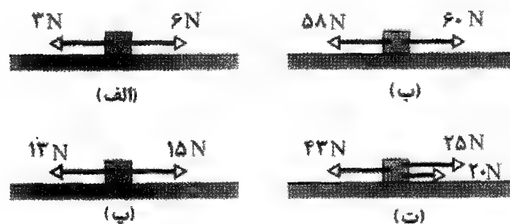

**شکل ۵-۲۵** پرسش ۶

۷- شکل ۵-۲۶ دنباله‌ای از چهار قطعه را نشان می‌دهد که توسط نیروی $\vec{F}$ روی کف بدون اصطکاکی کشیده می‌شوند. جرم کلی که به وسیلهٔ (الف) نیروی $\vec{F}_1$، (ب) ریسمان ۳، و (پ) ریسمان ۱ به سمت راست شتاب گرفته چقدر است؟ (ت) قطعه‌ها را با توجه به بزرگی شتاب آنها از بیشترین تا کمترین مرتب کنید. (ث) ریسمانها را با توجه به نیروی کشش آنها از بیشترین تا کمترین مرتب کنید. (یک دست گرمی برای مسئله‌های ۵۰ و ۵۱)




**شکل ۵-۲۶** پرسش ۷

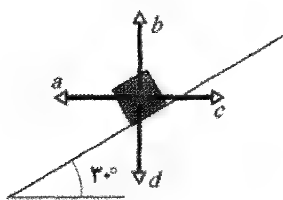
۸- شکل ۵-۲۷ جعبه‌های یکسانی را در چهار وضعیت نشان می‌دهد که برآنها نیروهایی افقی وارد شده‌اند. این وضعیت‌ها را بنابر بزرگی شتاب هر جعبه، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.




**شکل ۵-۲۷** پرسش ۸

۹- نیروی قائم $\vec{F}$ روی قطعه‌ای به جرم $m$ که روی کفی قرار دارد وارد می‌شود. اگر بزرگی نیروی $\vec{F}$ از صفر افزایش یابد، در صورتی که $\vec{F}$ (الف) رو به پایین و (ب) رو به بالا باشد، نیروی عمودی $\vec{F}_N$ چگونه تغییر می‌کند؟

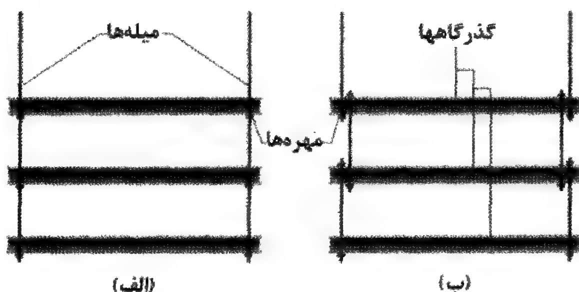
۱۰- شکل ۵-۲۸ چهارگزینه را برای جهت نیرویی به بزرگی $F$ نشان می‌دهد که بر قطعه‌ای واقع بر یک سطح شیبدار وارد شده‌اند. این جهتها یا افقی‌اند یا قائم (برای گزینه‌های $a$ و $b$، نیرو برای بلند کردن قطعه از روی سطح شیبدار کافی نیست.) این گزینه‌ها را بنابر بزرگی نیروی عمودی وارد از طرف سطح شیبدار بر قطعه، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.




**شکل ۵-۲۸** پرسش ۱۰

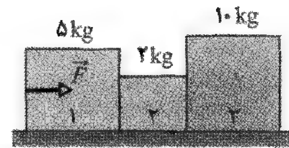
۱۱- شهر کانزاس، ۱۷ جولای ۱۹۸۱: سالن هتل هایت که به تازگی افتتاح شده بود پر از جمعیتی بود که به آهنگهای دورهٔ ۱۹۴۰ که توسط گروه موسیقی نواخته می‌شد گوش می‌دادند. تعداد زیادی از مردم در گذرگاههایی که مشابه پل در عرض سالن بین طبقه‌های بالا آویزان بودند، قرار داشتند. ناگهان دو تا از گذرگاهها خراب شدند و روی مردمی که در سالن همکف بودند فرو ریختند.

گذرگاهها یکی بالای دیگری از میله‌هایی قائم آویزان و با مهره‌هایی به میله‌ها پیچ شده بودند. در طراحی اولیه، فقط از دو میلهٔ بلند استفاده شده بود که هر کدام از همهٔ سه گذرگاه می‌گذشتند. (شکل ۵-۲۹ الف). اگر هر گذرگاه و تماشاچیان روی آن رویهم دارای جرم $M$ باشند، کل جرمی که روی پیچها و دو مهره روی (الف) پایینترین گذرگاه و (ب) بالاترین گذرگاه قرار دارد چقدر است؟ پیچ کردن مهره‌ها روی میله به جز در دو انتها وجود نداشت، از اینرو طراحی تغییر داده شد: در عوض شش میله به کار برده شد که هر یک دو تا از گذرگاهها را به یکدیگر متصل می‌کرد (شکل ۵-۲۹ ب). اکنون کل جرمی که روی پیچها و دو مهره قرار دارد در (پ) پایینترین گذرگاه، (ت) طرف بالایی بالاترین گذرگاه و (ث) طرف پایین بالاترین گذرگاه چقدر است؟ همین طراحی بود که موجب خرابی شد.




**شکل ۵-۲۹** پرسش ۱۱

۱۲- شکل ۵-۳۰ سه قطعه را نشان می‌دهد که با نیروی افقی $\vec{F}$ روی سطح بدون اصطکاکی هل داده می‌شوند. چه جرم کلی به وسیلهٔ (الف) نیروی $\vec{F}$، (ب) نیروی $\vec{F}_{21}$ وارد بر قطعهٔ ۲ از طرف قطعهٔ ۱، و (پ) نیروی $\vec{F}_{32}$ وارد بر قطعهٔ ۳ از طرف قطعهٔ ۲، به سمت راست شتاب گرفته است؟ (ت) قطعه‌ها را بنابر بزرگی شتاب آنها از بیشترین تا کمترین مرتب کنید. (ث) نیروهای $\vec{F}$ ، $\vec{F}_{21}$ و $\vec{F}_{32}$ را بنابر بزرگی آنها، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید. (یک دست‌گرمی برای مسئله ۵۳)




**شکل ۵-۳۰** پرسش ۱۲

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
●●●-● تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

### بخش ۵-۶ قانون دوم نیوتون

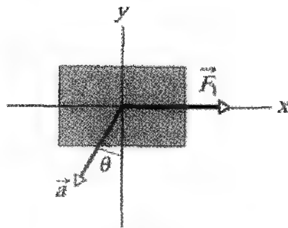
●۱- اگر جسم استاندارد یک کیلوگرمی دارای شتاب $۲/۰۰ m/s^2$ در زاویهٔ $۲۰/۰^\circ$ نسبت به جهت مثبت محور $x$ باشد، (الف) مؤلفهٔ $x$ و (ب) مؤلفهٔ $y$ نیروی خالص وارد بر آن چقدر است؟ (پ) نیروی خالص برحسب بردارهای یکه چیست؟

●۲- دو نیروی افقی بر یک قطعهٔ ۲/۰ کیلوگرمی که می‌تواند روی سطح بدون اصطکاکی واقع در صفحهٔ $xy$ بلغزد، اثر می‌کنند. یکی از نیروها $\vec{F}_1 = (۳/۰ N)\hat{i} + (۴/۰ N)\hat{j}$ است. هرگاه نیروی دیگر برابر باشد با (الف) $\vec{F}_2 = (-۳/۰ N)\hat{i} + (-۴/۰ N)\hat{j}$، (ب) $\vec{F}_2 = (-۳/۰ N)\hat{i} + (۴/۰ N)\hat{j}$ و (پ) $\vec{F}_2 = (۳/۰ N)\hat{i} + (-۴/۰ N)\hat{j}$ شتاب قطعه را برحسب بردارهای یکه پیدا کنید.

●۳- تنها دو نیروی افقی بر جسمی به جرم $۳/۰ kg$ اثر می‌کنند: یک نیرو به بزرگی $۹/۰ N$ به طرف شرق، و نیروی دیگر به بزرگی $۸/۰ N$ در زاویهٔ $۶۲^\circ$ شمال غرب. بزرگی شتاب جسم چقدر است؟

●●۴- جسمی به جرم $۲/۰۰ kg$ بر اثر سه نیروی وارد بر آن، شتاب $\vec{a} = -(۸/۰۰ m/s^2)\hat{i} + (۶/۰۰ m/s^2)\hat{j}$ را به دست آورده است. اگر دو نیرو از این سه نیرو $\vec{F}_1 = -(۳۰/۰ N)\hat{i} + (۱۶/۰ N)\hat{j}$ و $\vec{F}_2 = -(۱۲/۰ N)\hat{i} + (۸/۰۰ N)\hat{j}$ باشند، نیروی سوم را پیدا کنید.

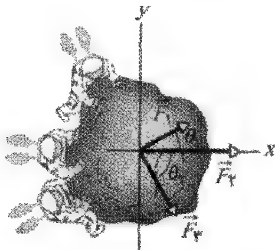
●●۵- دو نیرو بر جعبه‌ای به جرم $۲/۰۰ kg$ وارد می‌شوند که در شکل ۵-۳۱ دید از بالای آن فقط با یک نیرو نشان داده شده است. به ازای $F_1 = ۲۰/۰ N$، $a = ۱۲/۰ m/s^2$، و $\theta = ۳۰/۰^\circ$، نیروی دوم را (الف) برحسب بردارهای یکه و برحسب (ب) بزرگی و (پ) زاویه نسبت به جهت مثبت محور $x$ به دست آورید. SSM




**شکل ۵-۳۱** مسئلهٔ ۵

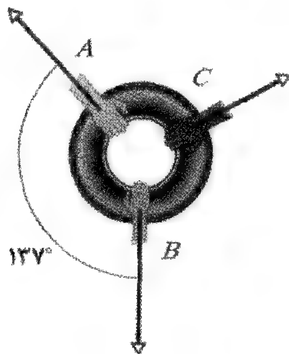
●●۶- وقتی دو نیرو بر ذره‌ای اثر کنند، این ذره با سرعت ثابت $\vec{v} = (۳ m/s)\hat{i} - (۴ m/s)\hat{j}$ حرکت می‌کند. یکی از نیروها $\vec{F}_1 = (۲ N)\hat{i} + (-۶ N)\hat{j}$ است. نیروی دیگر چیست؟

●●۷- سه فضانورد با موتورهای موشکی که به پشت بسته‌اند به پیش رانده می‌شوند و سیارکی ۱۲۰ کیلوگرمی را هل می‌دهند و با وارد آوردن نیروهایی که در شکل ۵-۳۱ نشان داده شده‌اند آن را به سوی محلّ از پیش تعیین شده‌ای هدایت می‌کنند. $F_1 = ۳۲ N$، $F_2 = ۵۵ N$، $F_3 = ۴۱ N$، $\theta_1 = ۳۰^\circ$ و $\theta_3 = ۶۰^\circ$ است. شتاب سیارک را (الف) برحسب بردارهای یکه و برحسب (ب) بزرگی و (پ) زاویه نسبت به جهت مثبت محور $x$ به دست آورید.




**شکل ۵-۳۲** مسئلهٔ ۷

●●۸- در یک مسابقهٔ زورآزمایی در دو بعد نفرات $A$، $B$ و $C$ لاستیک اتومبیلی را به طور افقی با زاویه‌های نشان داده شده در دید از بالای شکل ۵-۳۳ می‌کشند. با وجود این سه نیروی کششی لاستیک در حال سکون باقی می‌ماند. $A$ با نیروی $\vec{F}_A$ به بزرگی $۲۲۰ N$، $C$ با نیروی $\vec{F}_C$ به بزرگی $۱۷۰ N$ لاستیک را می‌کشند. جهت $\vec{F}_C$ داده نشده است. بزرگی نیروی $\vec{F}_B$ چقدر است؟




**شکل ۵-۳۳** مسئلهٔ ۸

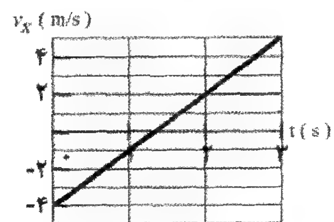
●●۹- جسمی به جرم $۲/۰ kg$ توسط نیروی متغیری در امتداد محور $x$ به جلو رانده می‌شود. مکان ذره با $x = ۳/۰ m + (۴/۰ m/s)t + ct^2 - (۲/۰ m/s^3)t^3$ داده می‌شود که

$x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. ضریب $c$ ثابت است. در لحظهٔ $t=۳/۰\text{s}$ ، نیروی وارد بر جسم دارای بزرگی ۳۶N است و در جهت منفی محور $x$ قرار دارد. $c$ چقدر است؟

●●۱۰- ذره‌ای به جرم ۰/۱۵۰kg بنابر رابطهٔ $x(t)=-۳/۰۰+۲/۰۰t+۴/۰۰t^{۲}-۳۰/۰۰t^{۳}$ ، که در آن $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است، در راستای محور $x$ حرکت می‌کند. نیروی خالصی را که در $t=۳/۴۰\text{s}$ بر ذره وارد می‌شود برحسب بردارهای یکه به دست آورید.

●●۱۱- ذره‌ای به جرم ۰/۳۴۰ kg در صفحهٔ $xy$ بنابر رابطه‌های $y(x)=۲۵/۰۰+۷/۰۰t-۹/۰۰t^{۲}$ و $x(t)=-۱۵/۰۰+۲/۰۰t-۴/۰۰t^{۳}$ حرکت می‌کند که $x$ و $y$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. در $t=۰/۷۰۰\text{s}$ ، مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به جهت مثبت محور $x$) نیروی خالص وارد بر ذره. (پ) زاویهٔ جهت حرکت ذره چقدر است؟

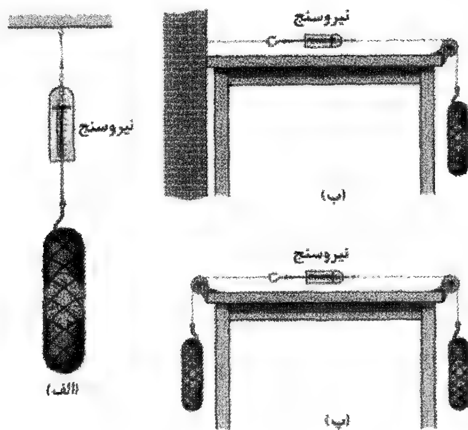
●●●۱۲- دو نیروی افقی $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ بر قرصی به جرم ۴/۰kg که روی سطح یخ بدون اصطکاکی می‌لغزد، اثر کرده‌اند. یک دستگاه مختصات $xy$ بر سطح نهاده شده است. نیروی $\vec{F}_۱$ در جهت مثبت محور $x$ و به بزرگی ۷/۰N است. بزرگی نیروی $\vec{F}_۲$ برابر ۹/۰N است. شکل ۵-۳۴ مؤلفهٔ $x$ سرعت قرص، $v_x$، را برحسب تابعی از زمان در حین لغزش نشان می‌دهد. زاویهٔ بین جهتهای ثابت نیروهای $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ چقدر است؟




شکل ۵-۳۴ مسئلهٔ ۱۲

## بخش ۵-۷ چند نیروی خاص

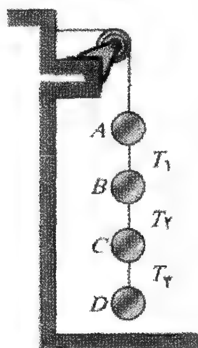
●۱۳- بسته کالباس بزرگی به جرم ۱۱/۰kg توسط ریسمانی از یک نیروسنج آویخته شده و این نیروسنج خود توسط ریسمان دیگری از سقف آویزان شده است (شکل ۵-۳۵ الف). نیروسنج که برحسب یکاهای وزن مدرج شده چه عددی را نشان می‌دهد؟ (ب) در شکل ۵-۳۵ ب، کالباس با ریسمانی که از روی قرقره‌ای عبور کرده و به نیروسنج وصل شده، آویزان است. انتهای دیگر نیروسنج با ریسمان دیگری به دیوار متصل شده است. نیروسنج چه عددی را نشان می‌دهد؟ (پ) در شکل ۵-۳۵ پ نیروسنج به جای دیوار به کالباس دیگری به جرم ۱۱/۰kg وصل شده است و کل دستگاه در حال سکون قرار دارد. نیروسنج چه عددی را نشان می‌دهد؟ SSM




شکل ۵-۳۵ مسئلهٔ ۱۳

●۱۴- قطعه‌ای به وزن ۳/۰N روی سطحی افقی به حالت سکون قرار دارد. نیروی روبه بالایی به بزرگی ۱/۰N به وسیلهٔ یک ریسمان عمودی که به قطعه متصل شده است، به آن اثر می‌کند. مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت نیرویی که از قطعه بر سطح افقی وارد می‌شود.

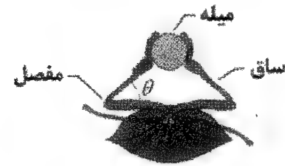
●۱۵- شکل ۵-۳۶ آرایشی را نشان می‌دهد که در آن چهار قرص توسط ریسمانهایی آویخته شده‌اند. بلندترین ریسمان که در بالا قرار دارد از روی قرقرهٔ بدون اصطکاکی می‌گذرد و به دیواره‌ای که به آن متصل شده است نیرویی به بزرگی ۹۸N وارد می‌کند. کششها در ریسمانهای کوتاه‌تر به این قرارند: $T_۱=۵۸/۸\text{N}$، $T_۲=۴۹/۰\text{N}$ و $T_۳=۹/۸\text{N}$. جرم (الف) قرص $A$، (ب) قرص $B$، (پ) قرص $C$ و (ت) قرص $D$ چقدر است؟




شکل ۵-۳۶ مسئلهٔ ۱۵

●●۱۶- بعضی از حشرات می‌توانند در زیر یک میلهٔ باریک (از قبیل شاخهٔ یک درخت) با آویزان شدن به آن راه بروند. فرض کنید که چنین حشره‌ای به جرم $m$ مانند آنچه که در شکل ۵-۳۷ نشان داده شده است از یک میلهٔ افقی با زاویهٔ $\theta=۴۰^\circ$ آویخته شده باشد. هر شش پای حشره تحت کشش یکسانی هستند، و آن بخشهایی از پا که به بدن حشره نزدیکترند حالت افقی دارند. (الف) نسبت کشش در هر ساق (بخش جلویی پا) به وزن حشره چقدر است؟ (ب) اگر حشره پاهای خود را رو به بیرون، قدری

راست کند آیا کشش در هر ساق افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟



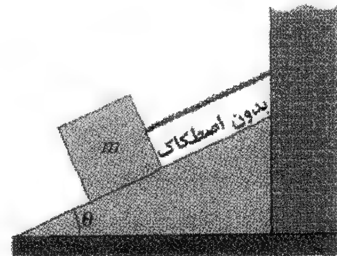

شکل ۵-۳۷ مسئلهٔ ۱۶

## بخش ۵-۹ کاربرد قانون‌های نیوتون

●۱۷- شخصی در یک پارک تفریحی سوار اتاقکی می‌شود که به کابلی بسته شده است و می‌تواند در جهت منفی محور $y$ با شتاب $1/24g$ که $g = 9/8\ m/s^2$ است به سمت پایین کشیده شود. یک سکهٔ ۰/۵۶۷ گرمی روی زانوی شخصی قرار دارد. شتاب سکه پس از شروع حرکت و برحسب نمادگذاری بردار یکه نسبت به (الف) زمین و (ب) شخص چقدر است؟ (پ) چقدر طول می‌کشد تا سکه به سقف اتاقک که ۲/۲۰m بالاتر از زانوی شخص واقع است، برسد؟ با نمادگذاری بردار یکه (ت) نیروی واقعی روی سکه و(ث) نیروی ظاهری که شخص شتاب سکه را اندازه می‌گیرد چقدر است؟

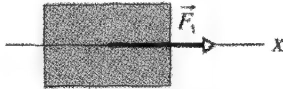
●۱۸- تارزان با وزن ۸۲۰N در حالی که انتهای یک شاخهٔ درخت مو به طول ۲۰m را که با راستای قائم زاویهٔ °۲۲ می‌سازد در دست دارد، از روی صخره‌ای تاب می‌خورد. فرض کنید محور $x$ به طور افقی از لبهٔ صخره دور می‌شود و محور $y$ رو به بالاست. درست در لحظهٔ پریدن از صخره، کشش شاخهٔ درخت ۷۶۰N است. در این لحظه (الف) نیروی وارد به تارزان از طرف شاخهٔ درخت و (ب) نیروی خالص وارد به او برحسب بردارهای یکه چیست؟ نیروی خالص وارد شده به تارزان برحسب (پ) بزرگی و (ت) زاویه نسبت به جهت مثبت محور $x$ چیست؟ (ث) بزرگی و (ج) زاویهٔ شتاب تارزان چقدر است؟

●۱۹- در شکل ۵-۳۸، فرض کنید جرم قطعه ۸/۵kg و زاویهٔ $\theta$ برابر °۳۰ باشد. مطلوب است (الف) کشش ریسمان و (ب) نیروی عمودی وارد بر قطعه. (پ) اگر ریسمان قطع شود، بزرگی شتابی را که قطعه کسب می‌کند به دست آورید. SSM WWW



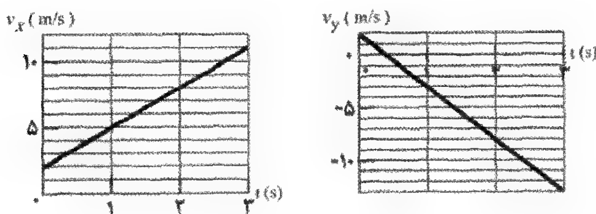

شکل ۵-۳۸ مسئلهٔ ۱۹

●۲۰- دو نیروی افقی بر جعبه‌ای به جرم ۲/۰kg اثر می‌کنند که در شکل ۵-۳۹ دید از بالای آن فقط با یک نیرو (به بزرگی $F_1 = 20N$) نشان داده شده است. جعبه در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند. به ازای هر یک از اندازه‌های زیر برای شتاب $a_x$ جعبه: (الف) $10m/s^2$، (ب) $20m/s^2$، (پ) ۰، (ت) $-10m/s^2$، و (ث) $-20m/s^2$، نیروی دوم را برحسب بردارهای یکه به دست آورید.




شکل ۵-۳۹ مسئلهٔ ۲۰

●۲۱- نیروی افقی ثابت $\vec{F}_a$ بسته‌ای به جرم ۲/۰۰kg را در امتداد یک کف بدون اصطکاک که روی آن یک دستگاه مختصات $xy$ رسم شده است، هل می‌دهد. شکل ۵-۴۰ مؤلفه‌های $x$ و $y$ سرعت بسته را برحسب زمان نشان می‌دهد. (الف) بزرگی و (ب) جهت $\vec{F}_a$ چیست؟




شکل ۵-۴۰ مسئلهٔ ۲۱

●۲۲- جان ماسیس بلژیکی در سال ۱۹۷۴ موفق شد با دندان قطاری به وزن ۷۰۰ kN (تقریباً ۸۰ تن) را به طول یک متر روی ریل افقی بکشد. فرض کنید نیرویی که او وارد می‌کند ثابت و ۲/۵ برابر وزن خود اوست و با زاویهٔ $\theta$ برابر °۳۰ نسبت به افق قرار دارد. جرم او ۸۰kg است. با چشمپوشی از نیروهای کندکننده در حین چرخش چرخها، تندی قطار را در انتهای یک متر به دست آورید.

●۲۳- *فشار تابشی خورشید.* یک «قایق خورشیدی» فضاپیمایی با یک بادبان بزرگ است که به وسیلهٔ نور خورشید به جلو رانده می‌شود. اگرچه چنین نیرویی در مقیاس عادی بسیار کوچک است، ولی برای فرستادن فضاپیمایی به بیرون از فضای اطراف خورشید در یک سفر رایگان ولی آهسته، به حد کافی بزرگ است. فرض کنید جرم فضاپیما ۹۰۰kg باشد و نیروی ۲۰N بر آن وارد آید. (الف) بزرگی شتابی که فضاپیما به آن می‌رسد چقدر است؟ اگر فضاپیما از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد (ب) در یک روز چقدر حرکت می‌کند؟ و (پ) در آن زمان تندی آن چقدر است؟

●۲۴- وقتی قلاب ماهیگیری به یک ماهی گیر می‌کند کششی به نخ آن وارد می‌شود که به آن عموماً «قدرت» نخ می‌گویند. اگر یک ماهی قزل‌آلا به وزن ۸۵N در ابتدا با تندی ۲/۸m/s حرکت کند، قدرت کمینهٔ نخ برای آنکه ماهی را پس از طی مسافت ۱۱cm متوقف کند چقدر است؟ فرض کنید شتاب ثابت است.

●۲۵- یک موشک به جرم ۵۰۰kg می‌تواند در مدت ۱/۸s با آهنگ ثابتی از حالت سکون تا تندی ۱۶۰۰km/h شتاب بگیرد. بزرگی نیروی خالص مورد نیاز چقدر است؟ SSM

●۲۶- اتومبیلی که با تندی ۵۳km/h حرکت می‌کند با پایهٔ یک پل تصادف می‌کند. مسافر درون اتومبیل ۶۵cm رو به جلو (نسبت به جاده) پرتاب و توسط کیسهٔ هوای باد شده ساکن می‌شود. اگر جرم بالا تنهٔ او ۴۱kg باشد، بزرگی نیرویی که بر او وارد می‌شود (با فرض ثابت بودن) چقدر است؟

●۲۷- یک مأمور آتش‌نشانی به وزن ۷۱۲N با شتاب رو به پایین $۳/۰۰m/s^۲$ از تیر قائمی به پایین می‌لغزد. (الف) بزرگی و (ب) جهت (رو به بالا یا به پایین) نیروی قائم وارد به مأمور آتش‌نشانی از طرف تیر چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت نیروی قائم وارد به تیر از طرف مأمور آتش‌نشانی چیست؟

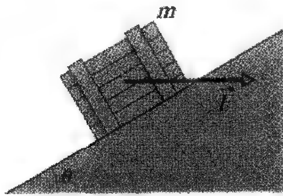
●۲۸- بادهای تند اطراف گردباد می‌تواند اجسامی را به طرف درختان، سقف ساختمانها و حتی علائم راهنمایی فلزی پرتاب کند. در یک شبیه‌سازی در آزمایشگاه، چوب خلال دندان با یک تفنگ بادی به سمت شاخهٔ بلوط پرتاب شد. جرم خلال دندان ۰/۱۳g ، تندی آن قبل از وارد شدن به شاخه ۲۲۰ m/s و عمق نفوذ آن برابر ۱۵mm بود. اگر تندی آن با آهنگ ثابتی کاهش یافته باشد، بزرگی نیرویی که شاخه بر خلال دندان وارد کرده چقدر بوده است؟

●۲۹- الکترونی با تندی $۱/۲\times۱۰^۷m/s$ به طور افقی وارد ناحیه‌ای می‌شود که بر آن نیروی قائم ثابت $۴/۵\times۱۰^{-۱۶}N$ اثر می‌کند. جرم الکترون $۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}$ kg است. مسافت قائمی که الکترون در حین پیمودن ۳۰mm به طور افقی، منحرف می‌شود چقدر است؟ SSM

●۳۰- اتومبیلی به وزن $۱/۳۰\times۱۰^۴$ N که در حال حرکت با تندی ۴۰km/h است ترمز می‌کند و پس از پیمودن ۱۵m متوقف می‌شود. با فرض آنکه نیرویی که اتومبیل را متوقف می‌کند ثابت باشد، (الف) بزرگی این نیرو و (ب) زمان لازم برای تغییر تندی اتومبیل را پیدا کنید. اگر تندی اولیه دو برابر شود و به اتومبیل در حین ترمز همان نیرو وارد شود (پ) مسافت توقف و (ت) زمان توقف چند برابر می‌شوند؟ (این می‌تواند درسی دربارهٔ خطرهای رانندگی با تندیهای بالا باشد.)

●●۳۱- سرعت جسمی به جرم ۳/۰۰kg با رابطهٔ $\vec{v}=(۸/۰۰t\hat{i}+۳/۰۰t^۲\hat{j})$m/s داده شده است که در آن $t$ برحسب ثانیه است. در لحظه‌ای که نیروی خالص وارد شده بر جسم دارای بزرگی ۳۵/۰N است، مطلوب است تعیین جهت (نسبت به جهت مثبت محور $x$)، (الف) نیروی خالص و (ب) حرکت جسم.

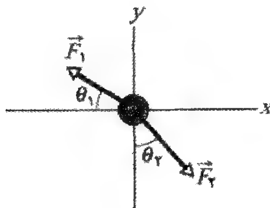
●۳۲- در شکل ۵-۴۱ صندوقی به جرم m=۱۰۰kg با تندی ثابت روی سطح شیبدار ($\theta$=۳۰°) بدون اصطکاکی توسط یک نیروی افقی $\vec{F}$، رو به بالا هل داده می‌شود. بزرگیهای (الف) نیروی $\vec{F}$ و (ب) نیروی وارد بر صندوق از طرف سطح شیبدار چقدر است؟



شکل ۵-۴۱ مسئلهٔ ۳۲

●●۳۳- شخصی به جرم ۴۰kg و سورتمه‌ای به جرم ۸/۴kg روی سطح بدون اصطکاک دریاچه‌ای یخ بسته قرار دارند. هر چند آنها ۱۵m از یکدیگر فاصله دارند ولی توسط طنابی با جرم ناچیز به هم متصل شده‌اند. شخص نیروی افقی ۵/۲N را بر طناب وارد می‌کند. بزرگیهای شتاب (الف) سورتمه و (ب) شخص چقدر است؟ (پ) هنگامی که آنها به هم می‌رسند، شخص در چه فاصله‌ای از مکان اولیه‌اش قرار دارد؟

●●۳۴- سه نیروی افقی بر نیمهٔ لیمویی به جرم ۰/۰۲۵۰kg که روی میز بدون اصطکاکی قراردارد اثر می‌کنند. در شکل ۵-۴۲، دید از بالای آن با دو نیرو از مجموع سه نیروی وارد شده نشان داده شده است. بزرگی نیروی $\vec{F}_1$ برابر با ۶/۰۰N و زاویهٔ آن $\theta_1=۳۰/۰°$ است. بزرگی نیروی $\vec{F}_2$ برابر با ۷/۰۰N و زاویهٔ آن $\theta_2=۳۰/۰°$ است. در صورتی که نیمهٔ لیمو (الف) ساکن باشد، (ب) سرعت ثابت $\vec{v}=(۱۳/۰\hat{i}-۱۴/۰\hat{j})$m/s را داشته باشد، و (پ) سرعت متغیر $\vec{v}=(۱۳/۰t\hat{i}-۱۴/۰t\hat{j})$m/s را داشته باشد ($t$ زمان است)، نیروی سوم برحسب بردارهای یکه چیست؟ SSM WWW



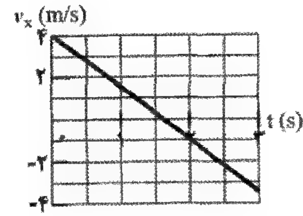
شکل ۵-۴۲ مسئلهٔ ۳۴

●●۳۵- قطعه‌ای با تندی اولیهٔ $v_0$=۳/۵۰m/s روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی روبه بالا پرتاب می‌شود. زاویهٔ شیب $\theta$=۳۲/۰° است. (الف) قطعه روی سطح چقدر بالا می‌رود؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا به آنجا برسد؟ (پ) تندی آن وقتی به نقطهٔ اول باز می‌گردد چقدر است؟ SSM WWW

●●۳۶- اسکی بازی به جرم ۴۰kg روی شیب بدون اصطکاکی که با افق زاویهٔ ۱۰° می‌سازد به طور مستقیم رو به پایین اسکی می‌کند. فرض کنید اسکی باز در جهت منفی محور $x$ واقع بر امتداد شیب حرکت می‌کند. مؤلفهٔ $F_x$ نیروی باد بر اسکی‌باز وارد می‌شود. در صورتی که بزرگی سرعت اسکی باز (الف) ثابت باشد، (ب) با آهنگ $۱/۰m/s^۲$ افزایش یابد، و (پ) با آهنگ $۲/۰m/s^۲$ افزایش یابد، $F_x$ چقدر است؟

●●۳۷- کره‌ای به جرم $۳/۰\times۱۰^{-۴}$ kg از ریسمانی آویخته است. باد ملایمی که افقی می‌وزد کره را طوری به جلو می‌راند که با راستای قائم زاویهٔ ثابت °۳۷ می‌سازد. مطلوب است (الف) بزرگی نیروی باد و (ب) نیروی کشش ریسمان. ILW

●●۳۸- جعبه‌ای به جرم ۵/۰۰kg روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی که با افق زاویهٔ $\theta$ می‌سازد رو به بالا لغزانده می‌شود. شکل ۵-۴۳، مؤلفهٔ $v_x$ سرعت جعبه را در امتداد محور $x$ که به طور مستقیم رو به بالای سطح شیبدار امتداد می‌یابد، برحسب تابعی از زمان نشان می‌دهد. بزرگی نیروی عمودی وارد بر جعبه از طرف سطح شیبدار چقدر است؟



شکل ۵-۴۳ مسئلهٔ ۳۸

●●۳۹- جرم اتاقک یک بالابر و بار داخل آن روی هم ۱۶۰۰ kg است. اگر اتاقک دارای سرعت اولیهٔ ۱۲m/s رو به پایین باشد و پس از طی مسافت ۴۲m با شتاب ثابت متوقف شود، کشش کابل نگهدارندهٔ اتاقک چقدر است؟

●●۴۰- اسکی‌بازی به جرم ۵۰kg روی شیب بدون اصطکاکی که با افق زاویهٔ °۸/۰ می‌سازد، به کمک یک طناب تلسکی که موازی با شیب حرکت می‌کند به بالا کشیده می‌شود. بزرگی نیروی وارد از طناب به اسکی باز را وقتی (الف) بزرگی $v$ سرعت اسکی‌باز دارای مقدار ثابت ۲/۰m/s باشد و (ب) $v=۲/۰$m/s باشد و با آهنگ $۰/۱۰$m/s$^۲$ افزایش یابد، به دست آورید.

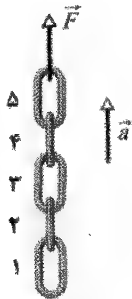
●●۴۱- اتاقک بالابری به وزن ۲۷/۸kN رو به بالا حرکت می‌کند. اگر تندی اتاقک (الف) با آهنگ $۱/۲۲$m/s$^۲$ افزایش یابد یا (ب) با آهنگ $۱/۲۲$m/s$^۲$ کاهش یابد، کشش کابل نگهدارندهٔ اتاقک چقدر است؟

●●۴۲- لامپی به طور قائم از سیمی در یک بالابر که با شتاب منفی $۲/۴$m/s$^۲$ پایین می‌آید، آویزان است. (الف) اگر کشش سیم ۸۹N باشد، جرم لامپ چقدر است؟ (ب) اگر بالابر با شتاب روبه بالای $۲/۴$m/s$^۲$ بالا برود، کشش سیم چقدر خواهد شد؟

●●۴۳- با طنابی که با کشش بیش از ۳۸۷N پاره می‌شود، باید بسته‌ای از مصالح ساختمان به وزن ۴۴۹N از بامی به بلندی ۶/۱m پایین آورده شود. (الف) بزرگی شتاب باید چقدر باشد تا طناب در آستانهٔ پاره شدن قرار گیرد؟ (ب) با این شتاب، تندی بسته موقع به زمین خوردن چقدر است؟

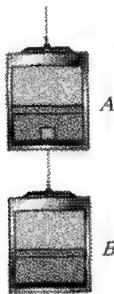
●●۴۴- اتاقک بالابری توسط یک کابل رو به بالا کشیده می‌شود. اتاقک و شخص داخل آن روی هم ۲۰۰۰kg جرم دارند. وقتی شخص سکه‌ای را رو به پایین می‌اندازد، شتاب سکه نسبت به اتاقک $۸/۰۰$m/s$^۲$ رو به پایین است. کشش کابل چقدر است؟

●●۴۵- در شکل ۵-۴۴، زنجیری که پنج حلقه دارد و جرم هر حلقه ۰/۱۰۰kg است، با شتاب ثابتی به بزرگی $a=۲/۵۰$m/s$^۲$ به طور قائم رو به بالا کشیده می‌شود. مطلوب است (الف) نیرویی که حلقهٔ ۲ بر حلقهٔ ۱ وارد می‌کند، (ب) نیرویی که حلقهٔ۳ بر حلقهٔ ۲ وارد می‌کند، (پ) نیرویی که حلقهٔ ۴ بر حلقهٔ ۳ وارد می‌کند، و (ت) نیرویی که حلقهٔ ۵ بر حلقهٔ ۴ وارد می‌کند. سپس (ث) بزرگی نیروی $\vec{F}$ وارد بر حلقهٔ بالایی توسط شخصی که زنجیر را بلند می‌کند و (ج) بزرگی نیروی *خالصی* را که به هر حلقه شتاب می‌دهد پیدا کنید. SSM



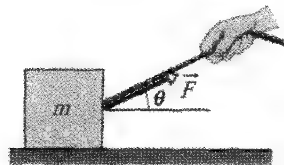
شکل ۵-۴۴ مسئلهٔ ۴۵

●●۴۶- در شکل ۵-۴۵ ، اتاقکهای $A$ و $B$ بالابری توسط یک کابل کوتاه به هم متصل شده‌اند و می‌توانند به وسیلهٔ کابلی که در بالای اتاقک $A$ قرار دارد، رو به بالا یا رو به پایین کشیده شوند. جرم اتاقک $A$ برابر با ۱۷۰۰kg و جرم اتاقک $B$ برابر با ۱۳۰۰kg است. جعبه‌ای به جرم ۱۲/۰kg روی کف اتاقک $A$ قرار دارد. کشش در کابل کوتاهی که اتاقکها را به هم متصل کرده $۱/۹۱\times۱۰^۴$ N است. بزرگی نیروی عمودی وارد بر جعبه از طرف کف چقدر است؟



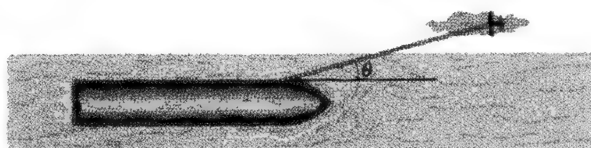
شکل ۵-۴۵ مسئلهٔ ۴۶

●●۴۷- در شکل ۵-۴۶، قطعه‌ای به جرم $m=۵/۰۰$kg به وسیلهٔ ریسمانی که نیروی $F=۱۲/۰$N را با زاویهٔ $\theta=۲۵/۰°$ به آن وارد می‌کند روی کف افقی بدون اصطکاکی کشیده می‌شود. (الف) بزرگی شتاب قطعه چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی $F$ به آرامی افزایش می‌یابد. اندازهٔ این نیرو درست پیش از بلند شدن (به طور کامل) قطعه از کف چقدر است؟ (پ) بزرگی شتاب قطعه درست پیش از بلند شدن (به طور کامل) قطعه از کف چقدر است؟



شکل ۵-۴۶ مسئلهٔ ۴۷ و ۶۲

●●۴۸- در روزگاران قدیم، اسبها کرجیها را در آبراهها به طریقی که در شکل ۵-۴۷ نشان داده شده است، می‌کشیدند. فرض کنید که اسب با نیروی ۷۹۰۰N و با زاویهٔ $\theta = ۱۸°$ نسبت به راستای حرکت کرجی، که به طور مستقیم در امتداد جهت مثبت محور $x$ است، طناب متصل به کرجی را بکشد. جرم کرجی ۹۵۰۰kg و بزرگی شتاب آن $۰/۱۲\text{m/s}^۲$ است. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به جهت مثبت $x$) نیروی وارد به کرجی از طرف آب چقدر است؟



شکل ۵-۴۷ مسئلهٔ ۴۸

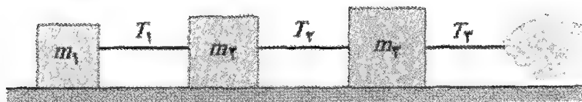
●●۴۹- خانواده زاخینی به این شهرت داشتند که یک عضو خانواده بعنوان گلولهٔ توپ به وسیلهٔ تسمه‌های کشسان یا هوای فشرده از یک توپ شلیک می‌شد. در یکی از این نمایشها، امانوئل زاخینی پس از پرتاب شدن به وسیلهٔ توپ از روی سه چرخ فلک عبور کرد و در همان ارتفاع دهانهٔ توپ و با برد ۶۹m روی یک تور فرود آمد. طول لولهٔ توپ که او از آن پرتاب شد ۵/۲ m و زاویهٔ پرتاب ۵۳° بود. اگر جرم او ۸۵kg و در داخل لوله شتاب او ثابت بوده باشد، بزرگی نیرویی که او را پرتاب کرده چقدر بوده است؟ (*راهنمایی:* پرتاب را مشابهٔ پرتاب روی سطح شیبدار با زاویهٔ ۵۳° در نظر بگیرید. از مقاومت هوا صرفنظر کنید).

●●۵۰- شکل ۵-۴۸ چهار پنگوئن را نشان می‌دهد که روی یخ بسیار لیزی (بدون اصطکاک) توسط نگهبان آنها کشیده می‌شوند. جرم سه پنگوئن و کشش در دو ریسمان داده شده است: $m_۱ = ۱۲\text{kg}$، $m_۳ = ۱۵\text{kg}$، $m_۴ = ۲۰\text{kg}$، و $T_۲ = ۱۱۱\text{N}$ و $T_۴ = ۲۲۲\text{N}$. جرم پنگوئن داده نشده را پیدا کنید.



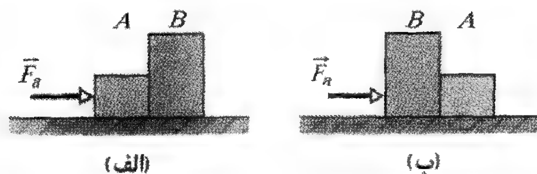
شکل ۵-۴۸ مسئلهٔ ۵۰

●●۵۱- در شکل ۵-۴۹، سه قطعهٔ متصل به هم روی میز افقی بدون اصطکاکی با نیروی $T_۳ = ۶۵/۰\text{N}$ به سمت راست کشیده می‌شوند. اگر $m_۱ = ۱۲/۰\text{kg}$، $m_۲ = ۲۴/۰\text{kg}$، و $m_۳ = ۳۱/۰\text{kg}$ باشد (الف) بزرگی شتاب دستگاه، (ب) کشش $T_۱$ و (پ) کشش $T_۲$ را محاسبه کنید.



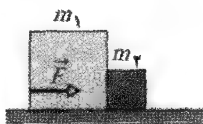
شکل ۵-۴۹ مسئلهٔ ۵۱

●●۵۲- در شکل ۵-۵۰ الف، نیروی افقی ثابت $\vec{F}_a$ بر قطعهٔ $A$ وارد شده است و این قطعه خود با نیروی افقی ۲۰/۰N که به طرف راست است بر قطعهٔ $B$ فشار وارد می‌آورد. در شکل ۵-۵۰ ب، همان نیروی $\vec{F}_a$ بر قطعهٔ $B$ وارد شده است. حال قطعهٔ $A$ بر قطعهٔ $B$ نیروی افقی ۱۰/۰N را که به طرف چپ است وارد می‌کند. جرم مجموع قطعه‌ها ۱۲/۰kg است. بزرگی (الف) شتاب قطعه‌ها در شکل ۵-۵۰ الف، و (ب) نیروی $\vec{F}_a$ چقدر است؟



شکل ۵-۵۰ مسئلهٔ ۵۲

●●۵۳- دو قطعه روی میز بدون اصطکاکی با یکدیگر در تماس‌اند. همان‌گونه که در شکل ۵-۵۱ نشان داده شده یک نیروی افقی بر قطعهٔ بزرگتر وارد شده است. (الف) اگر $m_۱ = ۲/۳\text{kg}$، $m_۲ = ۱/۲\text{kg}$ و $F = ۳/۲\text{N}$ باشد، بزرگی نیروی میان دو قطعه را پیدا کنید. (ب) نشان دهید که اگر نیرویی به همان بزرگی، ولی در جهت مخالف بر قطعهٔ کوچکتر وارد شود، نیروی میان دو قطعه ۲/۱N می‌شود که همان مقدار محاسبه شده در قسمت (الف) نیست. (پ) دلیل این تفاوت را توضیح دهید. SSM ILW WWW



شکل ۵-۵۱ مسئلهٔ ۵۳

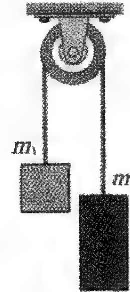
●●۵۴- در شکل ۵-۵۲، سه جعبه توسط ریسمانهایی به هم متصل شده‌اند که یکی از آنها از روی قرقره‌ای که جرم و اصطکاک روی محورش ناچیز است، عبور کرده است. جرمها به این قرارند: $m_A = ۳۰/۰\text{kg}$، $m_B = ۴۰/۰\text{kg}$، و $m_C = ۱۰/۰\text{kg}$. وقتی مجموعه از حالت سکون رها شود (الف) کشش در ریسمانی که جعبه‌های $B$ و $C$ را به هم متصل می‌کند چقدر است و (ب) جعبهٔ $A$ در ۰/۲۵۰s اول چقدر حرکت می‌کند؟ (فرض کنید که به قرقره نمی‌رسد).



شکل ۵-۵۲ مسئلهٔ ۵۴

●●۵۵- شکل ۵-۵۳ دو قطعهٔ متصل شده با یک ریسمان (به جرم ناچیز) را نشان می‌دهد که از روی قرقره‌ای بدون اصطکاک

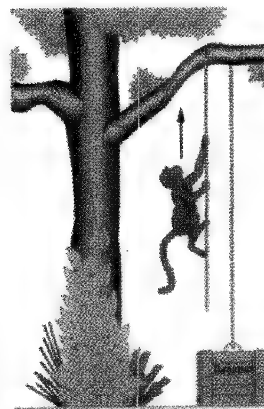
(با جرم ناچیز) می‌گذرد. این آرایش *ماشین آتوود*[1] نامیده می‌شود. جرم یک قطعه $m_1 = ۱/۳\text{kg}$ و جرم قطعهٔ دیگر $m_2 = ۲/۸\text{kg}$ است. (الف) بزرگی شتاب قطعه‌ها و (ب) کشش ریسمان چقدر است؟




شکل ۵-۵۳ مسئلهٔ ۵۵ و ۶۳

●●۵۶- اغلب ورزشکاران در پرتاب وزنه، پرتاب را با زاویه‌ای کوچکتر از زاویهٔ نظری (تقریباً °۴۲) انجام می‌دهند چون مسافت وزنه پرتاب شده برای تندی و ارتفاع مشابه بیشترین مقدار را دارد. یک دلیل مربوط به تندیی است که ورزشکار می‌تواند در حین مرحلهٔ شتاب گرفتن به وزنه بدهد. فرض کنید وزنهٔ ۷/۲۶۰ kg، با وارد شدن نیروی ثابتی به بزرگی ۳۸۰/۰N بر آن در یک مسیر مستقیم به طول ۱/۶۵۰m، شتاب بگیرد در حالی که تندی اولیهٔ آن (به خاطر حرکت اولیهٔ ورزشکار) ۲/۵۰m/s است. اگر زاویهٔ بین مسیر و افق (الف) °۳۰/۰۰ و (ب) °۴۲/۰۰ باشد، تندی وزنه در پایان مرحلهٔ شتاب‌گیری چقدر بوده است؟ (*راهنمایی*: حرکت را مشابه حالتی در نظر بگیرید که حرکت در امتداد یک سطح شیبدار با زاویهٔ داده شده باشد). (پ) اگر ورزشکار زاویه را از °۳۳/۰۰ تا °۴۲/۰۰ افزایش دهد، با چه درصدی تندی پرتاب کاهش می‌یابد.

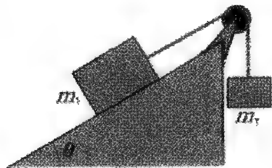
●●۵۷- میمونی به جرم 10kg از طناب بدون جرمی که از روی شاخهٔ بدون اصطکاک درختی گذشته و به بسته‌ای به جرم 15kg واقع بر سطح زمین متصل است، بالا می‌رود (شکل ۵-۵۴). (الف) بزرگی کمترین شتابی که میمون باید داشته تا بتواند بسته را از روی زمین بلند کند چقدر است؟ اگر پس از آنکه بسته از روی زمین بلند شد، میمون از بالا رفتن بازبایستد و روی طناب ثابت بماند (ب) بزرگی و (پ) جهت شتاب میمون و (ت) کشش طناب چیست؟ SSM



شکل ۵-۵۴ مسئلهٔ ۵۷

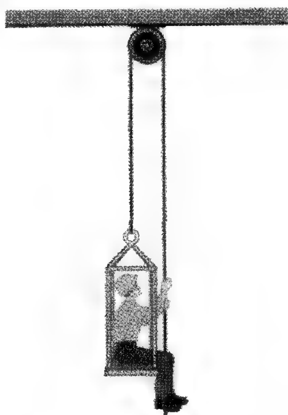
●●۵۸- شخصی به جرم 85kg خود را به وسیلهٔ طنابی که از قرقرهٔ بدون اصطکاکی گذشته و به یک کیسهٔ شنی به جرم 65kg متصل است از یک بلندی به ارتفاع ۱۰/۰m به سطح زمین می‌رساند. اگر شخص از حالت سکون شروع کرده باشد، با چه تندی به زمین برخورد می‌کند؟ ILW

●●۵۹- قطعه‌ای به جرم $m_1 = ۳/۷۰\text{kg}$ روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ $\theta = ۳۰/۰°$ قرار دارد. قطعه به وسیلهٔ ریسمانی از روی قرقرهٔ بدون جرم و بدون اصطکاکی به قطعهٔ دومی به جرم $m_2 = ۲/۳۰\text{kg}$ که به طور قائم آویزان شده، متصل است (شکل ۵-۵۵). (الف) بزرگی شتاب هر قطعه، (ب) جهت شتاب قطعهٔ آویخته، و (پ) کشش در ریسمان را پیدا کنید. ILW




شکل ۵-۵۵ مسئلهٔ ۵۹

●●۶۰- شکل ۵-۵۶ مردی را نشان می‌دهد که بر صندلی مخصوصی نشسته و طرف دیگر طناب بدون جرمی را که از روی قرقرهٔ بدون جرم و بدون اصطکاکی گذشته در دست گرفته است. مجموع جرم مرد و صندلی ۹۵/۰ kg است. این مرد با چه بزرگی نیرویی باید طناب را بکشد تا (الف) با تندی ثابت و (ب) با شتاب رو به بالای $۱/۳۰\text{m/s}^2$ به بالا برود؟ (*راهنمایی*: نمودار جسم- آزاد واقعاً می‌تواند کمک کند).



شکل ۵-۵۶ مسئلهٔ ۶۰

اگر طرف راست طناب تا سطح زمین امتداد یابد و به وسیلهٔ شخص دیگری کشیده شود، این شخص با چه نیرویی باید طناب را بکشد تا مرد (پ) با تندی ثابت و (ت) با شتاب رو به بالای $۱/۳۰\text{ m/s}^2$، به بالا برود؟ بزرگی نیروی وارد به سقف از دستگاه قرقره در (ث) قسمت الف (ج) قسمت ب (چ) قسمت پ، و (ح) قسمت ت چقدر است؟

●●۶۱- یک بالون هوای گرم که جرم آن $M$ است با شتاب رو به پایین به بزرگی $a$ به طور قائم پایین می‌آید. چه جرمی (از کیسه‌های شنی) باید از بالون به بیرون انداخته شود تا بالون شتاب رو به بالایی به بزرگی $a$ به دست آورد؟ فرض کنید که نیروی رو به بالای ناشی از هوا (نیروی بالابری) براثر کاهش جرم تغییر نمی‌کند. SSM ILW

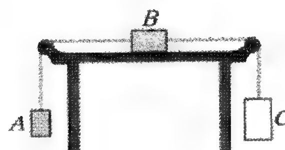
---
1. Atwood's machine

●●۶۲- شکل ۵-۴۶ قطعه‌ای به جرم $5/00\,kg$ را نشان می‌دهد که به وسیله طنابی روی کف بدون اصطکاکی کشیده می‌شود، نیرویی که طناب وارد می‌کند ثابت و بزرگی آن برابر $20/0\,N$ است اما زاویهٔ آن $\theta(t)$ با زمان تغییر می‌کند. اگر $\theta(t)=(2/00\times10^{-2}\,deg/s)t$ و (ب) $\theta(t)=-(2/00\times10^{-2}\,deg/s)t$ باشد در $\theta=25°$ شتاب قطعه با چه آهنگی تغییر می‌کند؟ (*راهنمایی:* درجه را به رادیان تبدیل کنید).

●●۶۳- شکل ۵-۵۳ یک *ماشین آتود* را نشان می‌دهد که در آن دو ظرف به وسیلهٔ یک ریسمان (با جرم ناچیز) که از روی قرقره‌ای با اصطکاک ناچیز (همچنین جرم ناچیز) گذر کرده است به یکدیگر متصل‌اند. در $t=0$ جرم ظرف ۱ برابر $1/3\,kg$ و جرم ظرف ۲ برابر $2/80\,kg$ است ولی جرم ظرف ۱ (به خاطر سوراخی که وجود دارد) با آهنگ ثابت $0/200\,kg/s$ کاهش می‌یابد. در (الف) $t=0$ و (ب) $t=3/00\,s$، بزرگی شتاب ظرفها با چه آهنگی تغییر می‌کند. (پ) چه وقت شتاب به بیشینه مقدارش می‌رسد؟

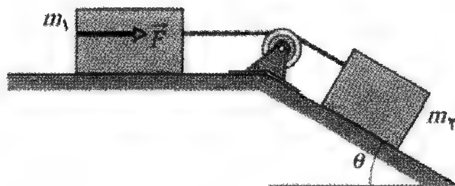
●●●۶۴- یک پرتابگر وزنه، وزنهٔ $7/260\,kg$ را با هل دادن آن در امتداد مسیر مستقیم به طول $1/650\,m$ و با زاویهٔ $34/10°$ نسبت به افق شتاب می‌دهد و با تندی اولیهٔ $2/500\,m/s$ (به خاطر حرکت اولیهٔ ورزشکار) آن را پرتاب می‌کند. وزنه از دست او در ارتفاع $2/110\,m$ و با زاویهٔ $34/10°$ پرتاب می‌شود و در فاصلهٔ افقی $15/90\,m$ به زمین فرود می‌آید. نیروی میانگین ورزشکار روی وزنه در طی مرحلهٔ شتاب دادن چقدر است؟ (*راهنمایی:* حرکت را در طی مرحلهٔ شتاب‌گیری در امتداد سطح شیبداری با زاویهٔ داده شده، در نظر بگیرید).

●●●۶۵- شکل ۵-۵۷ سه قطعه را نشان می‌دهد که به وسیلهٔ ریسمانهایی که از قرقره‌های بدون اصطکاکی گذشته‌اند به هم متصل شده‌اند. قطعهٔ $B$ روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد و جرمها عبارت‌اند از: $m_A=6/00\,kg$ ، $m_B=8/00\,kg$ ، و $m_C=10/0\,kg$ . وقتی مجموعه از حال سکون رها شود، کشش در ریسمان طرف راست چقدر است؟



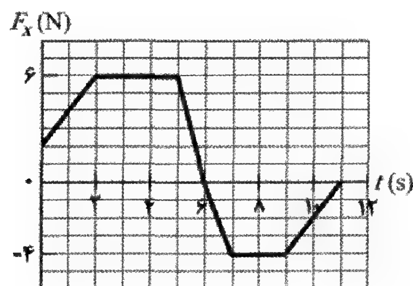
شکل ۵-۵۷ مسئلهٔ ۶۵

●●●۶۶-شکل ۵-۵۸ جعبه‌ای به جرم $m_2=1/0\,kg$ را نشان می‌دهد که بر سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta=30°$ قرار دارد. این جعبه توسط ریسمانی با جرم ناچیز به جعبهٔ دیگری به جرم $m_1=3/0\,kg$ که روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد، متصل شده است. قرقره بدون اصطکاک و بی جرم است. (الف) اگر بزرگی نیروی افقی $\vec{F}$ برابر با $2/3\,N$ باشد، کشش در ریسمان رابط چقدر است؟ (ب) بیشترین مقداری که بزرگی $\vec{F}$ می‌تواند داشته باشد بدون آنکه ریسمان شل شود چقدر است؟



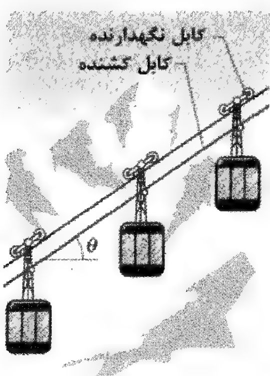
شکل ۵-۵۸ مسئلهٔ ۶۶

●●●۶۷- شکل ۵-۵۹ مؤلفهٔ نیروی $F_x$ را که بر قالب یخی به جرم $3/00\,kg$ وارد می‌شود برحسب زمان نشان می‌دهد. یخ تنها می‌تواند در امتداد محور $x$ حرکت کند. در لحظهٔ $t=0$، یخ در حال حرکت با تندی $3/0\,m/s$ در جهت مثبت محور $x$ است. (الف) تندی و (ب) جهت حرکت در لحظهٔ $t=11\,s$ چیست؟



شکل ۵-۵۹ مسئلهٔ ۶۷

●●●۶۸- شکل ۵-۶۰ بخشی از یک تله‌کابین را نشان می‌دهد. بیشینهٔ جرم مجاز برای هر اتاقک با سرنشینهایش $28000\,kg$ است. اتاقکها روی یک کابل نگهدارنده حرکت می‌کنند و به وسیلهٔ کابل دیگری متصل به یک دکل کشیده می‌شوند. فرض کنید که کابلها کاملاً کشیده باشند و با افق زاویهٔ شیب $\theta=35°$ بسازند. اگر اتاقکها بیشینهٔ جرم مجاز خود را داشته باشند و با شتاب $0/81\,m/s^2$ رو به بالای شیب حرکت کنند، اختلاف کشش بین بخشهای کنار هم کابل کشنده چقدر است؟



شکل ۵-۶۰ مسئلهٔ ۶۸

### مسئله‌های اضافی

۶۹- *حادثه آفرینی یکاها*. در سرتاسر درس فیزیک، استاد از شما توقع دارد که در محاسبه‌های خود مواظب یکاها باشید. با این حال برخی از دانشجویان تمایل دارند که آنها را به فراموشی بسپارند و کاملاً مطمئن هستند که همیشه محاسبه‌ها را به درستی انجام می‌دهند. شاید این مثال از یک اتفاق واقعی شما را از چنین عادت ناشایستی باز دارد.

در ۲۳ جولای ۱۹۸۳، هنگامی که پرواز شمارهٔ ۱۴۳ خطوط هواپیمایی کانادا برای یک سفر طولانی از مونترال به ادمونتون آماده می‌شد خدمهٔ پرواز از خدمهٔ فرودگاه خواستند که مقدار

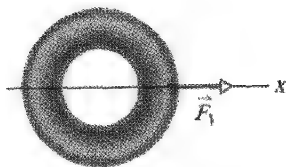
سوخت داخل هواپیما را مشخص کنند. خدمهٔ پرواز می‌دانستند که برای این سفر به ۲۲۳۰۰ kg سوخت نیاز دارند. آنها مقدار سوخت را از آن جهت برحسب کیلوگرم می‌دانستند که کشور کانادا به تازگی شروع به استفاده از یکاهای متریک کرده بود؛ پیش از آن مقدار سوخت برحسب پاوند اندازه‌گیری می‌شد. خدمهٔ فرودگاه می‌توانستند سوخت داخل هواپیما را فقط برحسب لیتر اندازه بگیرند و به این ترتیب عدد ۷۶۸۲L را گزارش کردند. بنابراین، برای تعیین مقدار سوخت داخل هواپیما و اینکه به چه مقدار سوخت اضافی نیاز بود، خدمهٔ پرواز از خدمهٔ فرودگاه ضریب تبدیل لیتر به کیلوگرم را پرسیدند. پاسخ خدمهٔ فرودگاه عدد ۱/۷۷ بود که خدمهٔ پرواز از آن استفاده کردند (۱/۷۷kg معادل ۱L). (الف) خدمهٔ پرواز فکر کردند چقدر سوخت برحسب کیلوگرم دارند؟ (ب) آنها درخواست چند لیتر سوخت اضافی کردند؟

متأسفانه پاسخ خدمهٔ فرودگاه براساس یکاهای پیش از یکاهای متریک در کانادا بود- ۱/۷۷ نه ضریب تبدیل لیتر به کیلوگرم بلکه ضریب تبدیل لیتر به پاوند بود (۱/۷۷lb معادل با ۱L است) (پ) در واقع چند کیلوگرم سوخت در هواپیما بود؟ (به جز ۱/۷۷ داده شده برای ضریب تبدیلهای دیگر از چهار رقم بامعنا استفاده کنید) (ت) در واقع چند لیتر سوخت اضافی مورد نیاز بود؟ (ث) هواپیما در هنگام ترک مونترال چند درصد از سوخت مورد نیازش را داشت؟

در مسیر ادمونتون، در ارتفاع ۷/۹km از سطح زمین، سوخت هواپیما تمام شد و شروع به سقوط کرد. اگر چه هواپیما قدرتی نداشت، خلبان توانست هواپیما را در وضعیت پرواز بدون موتور، رو به پایین نگهدارد. چون نزدیکترین فرودگاه فعال بسیار دورتر از آن بود که هواپیما بتواند بدون نیروی موتور به آنجا برسد، خلبان هواپیما را به سمت یک فرودگاه متروکهٔ قدیمی هدایت کرد. متأسفانه باند فرودگاه به پیست مسابقه‌های اتومبیلرانی تبدیل و یک نردهٔ فولادی به دور آن کشیده شده بود. ولی خوشبختانه همین که هواپیما به باند برخورد کرد، جعبه دندهٔ فرودی جلو فرو ریخت و دماغهٔ هواپیما به باند فرودگاه سقوط کرد. بدین ترتیب لغزش هواپیما کند شد و کمی پیش از برخورد با نردهٔ فولادی در حالی که راننده‌ها و تماشاچیان حیرت‌زده نظاره‌گر بودند متوقف شد. همهٔ سرنشینان هواپیما جان سالم به در بردند. نتیجه اینکه: مواظب یکاها باشید!

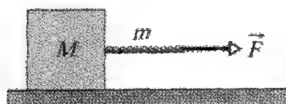
۷۰- برجسمی فقط دو نیرو اثر می‌کند که بزرگیهای آنها ۲۰N و ۳۵N ، و زاویهٔ بین جهت آنها °۸۰ است. بزرگی شتاب حاصل برابر با $۲۰m/s^2$ است. جرم جسم چقدر است؟

۷۱- شکل ۵-۶۱ دید از بالای یک دستگاه ۱۲ کیلوگرمی است که توسط سه طناب افقی کشیده می‌شود. یکی از نیروهای وارد از طنابها ($F_1 = ۵۰N$) در شکل نشان داده شده است. نیروهای وارد از دو طناب دیگر به گونه‌ای سمتگیری کرده‌اند که بزرگی شتاب لاستیک $a$ کمترین باشد. این کمترین مقدار $a$ برای حالتهای زیر چقدر است؟ (الف) $F_2 = ۳۰N$ و $F_3 = ۲۰N$؛ (ب) $F_2 = ۳۰N$ و $F_3 = ۱۰N$؛ و (پ) $F_2 = F_3 = ۳۰N$.




**شکل ۵-۶۱** مسئلهٔ ۷۱

۷۲- همان‌گونه که در شکل ۵-۶۲ نشان داده شده است، قطعه‌ای به جرم $M$ به وسیلهٔ طنابی به جرم $m$ روی سطح افقی بدون اصطکاکی کشیده می‌شود. نیروی افقی $\vec F$ به یک انتهای طناب وارد می‌شود. (الف) نشان دهید طناب *باید* شکم بدهد، حتی اگر مقدار آن نامحسوس باشد. آنگاه با فرض اینکه این شکم دادن ناچیز باشد، مطلوب است (ب) شتاب طناب و قطعه، (پ) نیرویی که طناب به قطعه وارد می‌کند، و (ت) کشش طناب در نقطهٔ میانی آن.




**شکل ۵-۶۲** مسئلهٔ ۷۲

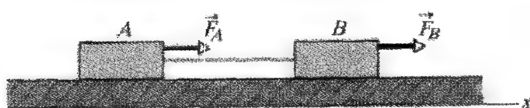
۷۳- کارگری صندوقی را با طنابی که به آن بسته است در امتداد کف کارخانه می‌کشد. کارگر نیرویی به بزرگی $F = ۴۵۰N$ را بر طناب که با افق زاویهٔ °۳۸ می‌سازد وارد می‌کند و از کف نیرویی به بزرگی $f = ۱۲۵N$ وارد می‌شود که با حرکت مخالفت می‌کند. بزرگی شتاب صندوق را در صورتی که (الف) جرم آن ۳۱۰kg و (ب) وزن آن ۳۱۰N باشد، محاسبه کنید. **SSM**

۷۴- سه نیرو بر ذره‌ای که با سرعت بدون تغییر $\vec v = (2m/s)\hat i - (7m/s)\hat j$ حرکت می‌کند وارد می‌شوند. دو تا از این نیروها عبارت‌اند از $\vec F_1 = (2N)\hat i + (3N)\hat j + (-2N)\hat k$ و $\vec F_2 = (-5N)\hat i + (8N)\hat j + (-2N)\hat k$. نیروی سوم چیست؟

۷۵- یک بازیگر سیرک به جرم ۵۲kg از طنابی رو به پایین می‌لغزد که اگر کشش آن از ۴۲۵kg بیشتر شود پاره خواهد شد. (الف) اگر بازیگر به حالت سکون از طناب آویزان شود، چه رخ خواهد داد؟ (ب) در چه بزرگی از شتاب، بازیگر درست پیش از پاره‌شدن طناب، از پاره‌شدن آن جلوگیری می‌کند؟

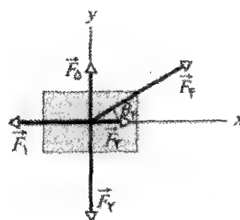
۷۶- شخصی به جرم ۸۰kg از لبهٔ پنجره‌ای که ۰/۵۰m بالاتر از سطح زمین است به داخل حیاط می‌پرد. او فراموش می‌کند که موقع فرود آمدن زانوهای خود را خم کند و از اینرو پس از ۲/۰cm متوقف می‌شود. (الف) شتاب میانگین شخص از لحظه‌ای که پاهایش ابتدا به زمین می‌خورد تا لحظهٔ توقف چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی متوقف کنندهٔ میانگین وارد به شخص از سوی حیاط چقدر است؟

۷۷- در شکل ۵-۶۳، قطعهٔ $A$ به جرم ۴/۰kg و قطعهٔ $B$ به جرم ۶/۰kg به وسیلهٔ ریسمانی با جرم ناچیز به هم متصل شده‌اند. نیروی $\vec F_A = (12N)\hat i$ بر قطعهٔ $A$ و نیروی $\vec F_B = (24N)\hat i$ بر قطعهٔ $B$ وارد می‌شود. کشش ریسمان چقدر است؟




**شکل ۵-۶۳** مسئلهٔ ۷۷

۷۸- در دید از بالای شکل ۵-۶۴، پنج نیـرو جعبـه‌ای بـه جـرم $m = ۴/۰\text{kg}$ را می‌کشند. بزرگی نیروها عبارت‌اند از $F_1 = ۱۱\text{N}$، $F_3 = ۱۷\text{N}$، $F_2 = ۳/۰\text{N}$، $F_4 = ۱۴\text{N}$، و $F_5 = ۵/۰\text{N}$ و زاویهٔ $\theta_4$ برابر $۳۰°$ است. شتاب جعبه را (الف) برحسب بردارهای یکـه و برحسـب (ب) بزرگـی و (پ) زاویه نسبت به جهت مثبت محور $x$ به دست آورید.



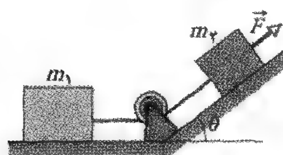
**شکل ۵-۶۴** مسئلهٔ ۷۸

۷۹- نیروی معینی به جسمی به جرم $m_1$ شتاب $۱۲/۰\text{m/s}^2$ و به جسمی به جرم $m_2$ شتاب $۳/۳۰\text{m/s}^2$ می دهد. این نیرو به جسمی با جرم (الف) $m_2 - m_1$ و (ب) $m_2 + m_1$ چه شتابی مـی‌دهـد؟ SSM

۸۰- تصور کنید فضاپیمایی به سطح *کالیستو*[1] یکـی از قمرهـای مشتری نزدیک می‌شود. اگر موتور فضاپیما نیروی رو بـه بـالای (پیشران) $۳۲۶۰\text{N}$ را وارد کند، فضاپیما بـا تنـدی ثابت فـرود می‌آید. اگر موتور فقط $۲۲۰۰\text{N}$ نیرو وارد کند، فضاپیما با شتاب $۰/۳۹\text{m/s}^2$ پایین می‌رود. (الف) وزن فضاپیما در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟ (ب) جرم فضاپیما چقدر است؟ (پ) بزرگی شتاب سقوط آزاد در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟

۸۱- جسمی از یـک تـرازوی فنـری متصـل بـه سـقف اتاقـک بالابری آویخته شده است. هنگامی که اتاقک ساکن است، ترازو عدد $۶۵\text{N}$ را نشان می‌دهد. وقتی اتاقک رو بـه بـالا (الـف) بـا تندی ثابت $۷/۶\text{m/s}$ و (ب) با تندی $۷/۶\text{m/s}$ در حالی که بـا آهنگ $۲/۴\text{m/s}^2$ کاهش می‌یابـد، حرکـت مـی‌کنـد تـرازو چـه عددی را نشان می‌دهد؟

۸۲- در شکل ۵-۶۵ نیروی $\vec{F}$ به بزرگی $۱۲\text{N}$ به جعبـه‌ای بـه جرم $m_2 = ۱/۰\text{kg}$ اثر می‌کند. این نیرو به سمت بالای صفحه‌ای است که بـه انـدازهٔ $\theta = ۳۷°$ کـج شـده اسـت. ایـن جعبـه بـا ریسمانی به جعبهٔ دیگری به جرم $m_1 = ۳/۰\text{kg}$ که در کف قرار دارد متصل شده است. کف، صفحه و قرقره، بدون اصطکاک‌اند و جرم قرقره و ریسـمان قابـل چشمپوشـی اسـت. کشـش ریسمان چقدر است؟



**شکل ۵-۶۵** مسئلهٔ ۸۲

۸۳- ذرهٔ معینی در نقطه‌ای که در آنجا $g = ۹/۸\text{m/s}^2$ اسـت، $۲۲\text{N}$ وزن دارد. (الف) وزن و (ب) جرم آن در نقطـه‌ای کـه در آنجـا $g = ۴/۹\text{m/s}^2$ است، چقدر است؟ اگر ذره به نقطـه‌ای از فضـا برده شود که در آنجـا $g = ۰$ اسـت، (پ) وزن و (ت) جـرم آن چقدر خواهد بود؟

۸۴- وزن فضانوردی به جرم $۷۵\text{kg}$ (الـف) روی زمیـن، (ب) روی مریخ که در آنجا $g = ۳/۸\text{m/s}^2$ است، و (پ) در فضـای بین سیاره‌ای که در آنجا $g = ۰$ است، چقدر اسـت؟ (ت) جـرم فضانورد در هر یک از این مکانها چقدر است؟

۸۵- یک موتور جت به جرم $۱۴۰۰\text{kg}$ با سه پیچ به بدنـهٔ یـک هواپیمای جت مسافربری بسته شده است (ایـن عملـی متـداول است.) فرض کنید هـر پیـچ یـک سـوم وزن موتـور را تحمـل می‌کند. (الف) نیروی وارد بر هـر پیـچ را هنگـامی کـه هواپیمـا منتظر بلند شـدن اسـت، محاسـبه کنیـد. (ب) در حـین پـرواز، هواپیما مواجه با گردبادی می‌شود که ناگهان بر آن شتاب رو بـه بالای قائم $۲/۶\text{m/s}^2$ اثر می‌کند. در این لحظه نیروی وارد بر هر پیچ چقدر می‌شود؟

۸۶- شخصی به جرم $۸۰\text{kg}$ با چتر بیرون می‌پرد و شـتاب رو به پایین $۲/۵\text{m/s}^2$ را بـه دسـت مـی‌آورد. جـرم چتـر $۵/۰\text{kg}$ است. (الف) نیروی رو به بالای وارد به چتر از طرف هوا چقدر است؟ (ب) نیروی رو به پایین وارد به چتـر از طـرف شـخص چقدر است؟

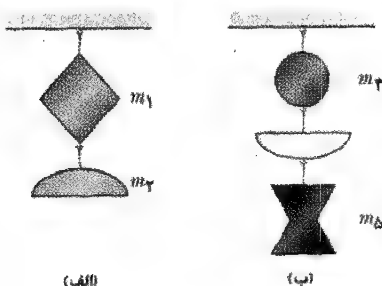
۸۷- فـرض کنیـد در شـکل ۵-۱۳ جـرم قطعـه‌هـا $۲/۰\text{kg}$ و $۴/۰\text{kg}$ باشد. (الف) برای آنکه بزرگی شـتاب بیشـترین مقـدار ممکن را داشته باشد، کدامیک از جرمها باید آویزان باشد؟ آنگاه (ب) بزرگی شتاب و (پ) کشش ریسمان چقدر است؟

۸۸- یخچـال کـوچکی را بـا نیـروی $\vec{F}$ بـه دو طریـق برکفـی روغن‌کاری شده (بدون اصطکاک) می‌کشیم: یک بار بـا نیـروی افقی $\vec{F}$ (حالت اول) و بار دیگر با نیروی $\vec{F}$ که رو به بـالا بـه اندازهٔ زاویهٔ $\theta$ کج شده است (حالت دوم). (الف) اگـر در هـر دو حالت مدت زمان کشیدن یخچـال یکسـان و برابـر $t$ باشـد، نسبت تندی یخچال در حالت دوم بـه تنـدی آن در حالـت اول چقدر است؟ (ب) این نسبت در صورتی که این کار در مسافت معین $d$ صورت بگیرد، چقدر است؟

۸۹- یک سفینهٔ فضایی به طور قائم از سـطح مـاه کـه در آنجـا $g = ۱/۶\text{m/s}^2$ است، بلند می‌شود. اگر شتاب رو به بالای سـفینه در هنگام بلند شدن $۱/۰\text{m/s}^2$ باشد، بزرگی نیروی وارد از سفینه بر فضانوردی که وزن او در زمین $۷۳۵\text{N}$ است، چقدر است؟

۹۰- اگر نیروی رو به بالای اولیهٔ موتور یـک موشـک (نیـروی پیشران) $۲/۶ \times ۱۰^5\text{N}$ باشد، شتاب اولیهٔ رو به بالای این موشک با جرم $۱/۳ \times ۱۰^4\text{kg}$ چقدر است؟ از نیـروی گرانشـی وارد بـر موشک چشمپوشی نکنید.

۹۱- شکل ۵-۶۶ الف جسم متحرکی را نشان مـی‌دهـد کـه از سـقف آویـزان اسـت؛ ایـن جسـم شـامل دو قطعـهٔ فلـزی ($m_1 = ۳/۵\text{kg}$ و $m_2 = ۴/۵\text{kg}$) است که توسط ریسـمانهای نازکی با جرم ناچیز به هـم وصـل شـده‌انـد. کشـش در (الـف) ریسمان پایینی و (ب) ریسمان بالایی چقدر است؟ شکل ۵-۶۶ ب جسم دیگری را نشان مـی‌دهـد کـه شـامل سـه قطعـهٔ فلـزی اسـت. جـرم دو تا از این قطعه‌ها $m_3 = ۴/۸\text{kg}$ و $m_5 = ۵/۵\text{kg}$



**شکل ۵-۶۶** مسئلهٔ ۹۱

1. Callisto

است. کشش در طناب بالایی $۱۹۹\,\text{N}$ است. کشش در (پ) پایینترین ریسمان و (ت) ریسمان میانی چقدر است؟ SSM

**۹۲-** اگر جسم استاندارد $۱\,\text{kg}$ فقط بر اثر دو نیروی $\vec{F}_1=(۳/۰\text{N})\hat{i}+(۴/۰\text{N})\hat{j}$ و $\vec{F}_2=(-۲/۰\text{N})\hat{i}+(-۶/۰\text{N})\hat{j}$ شتاب بگیرد، آنگاه $\vec{F}_{\text{net}}$ (الف) برحسب بردارهای یکه و برحسب (ب) بزرگی و (پ) زاویه نسبت به جهت مثبت محور $x$ چیست؟ (ت) بزرگی و (ث) زاویهٔ $\vec{a}$ چقدر است؟

**۹۳-** هسته‌ای که نوترون سرگردانی را گیرمی‌اندازد، باید آن را توسط یک *نیروی قوی* در طی فاصله‌ای معادل قطر هسته متوقف کند. این نیرو که هسته را به هم «می‌چسباند» در خارج از هسته تقریباً برابر با صفر است. فرض کنید که یک نوترون سرگردان با تندی اولیهٔ $۱/۴\times۱۰^{۷}\,\text{m/s}$ توسط هسته‌ای به قطر $d=۱/۰\times۱۰^{-۱۴}\,\text{m}$ گیر انداخته شود. با فرض آنکه نیروی قوی وارد بر نوترون ثابت باشد بزرگی این نیرو را پیدا کنید. جرم نوترون $۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\,\text{kg}$ است.

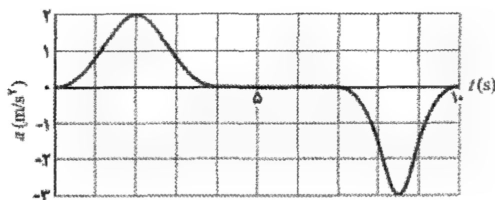
**۹۴-** بالگردی به جرم $۱۵۰۰۰\,\text{kg}$ کامیونی به جرم $۴۵۰۰\,\text{kg}$ را با شتاب رو به بالای $۱/۴\,\text{m/s}^۲$ بلند می‌کند. (الف) نیروی خالص رو به بالایی که هوا بر بالهای بالگرد وارد می‌کند و (ب) کشش کابل نگهدارندهٔ کامیون را محاسبه کنید.

**۹۵-** موتور سواری به جرم $۶۰/۰\,\text{kg}$ با شتاب $۳/۰\,\text{m/s}^۲$ از شیبی که با افق زاویهٔ $۱۰^\circ$ می‌سازد بالا می‌رود. (الف) بزرگی نیروی خالص وارد بر موتور سوار و (ب) بزرگی نیرویی که از طرف موتور بر موتور سوار وارد می‌شود چقدر است؟ SSM

**۹۶-** جرم یک فضاپیمای بین ستاره‌ای $۱/۲۰\times۱۰^{۶}\,\text{kg}$ است و در ابتدا نسبت به یک دستگاه ستاره‌ای ساکن است. (الف) شتاب ثابت مورد نیاز برای آنکه فضاپیما در مدت $۳/۰$ روز به تندی $۰/۱۰c$ ($c$ تندی نور، $۳/۰\times۱۰^{۸}\,\text{m/s}$ است) نسبت به دستگاه ستاره‌ای برسد چقدر است؟ (ب) این شتاب چند برابر $g$ است؟ (پ) نیروی مورد نیاز برای این شتاب چقدر است؟ (ت) اگر موتور در لحظه‌ای که تندی فضاپیما به $۰/۱۰c$ می‌رسد خاموش شود (که از آن پس تندی ثابت می‌ماند)، چه مدت طول می‌کشد تا فضاپیما (از شروع تا پایان حرکت) سفری به مسافت $۵/۰$ ماه نوری- مسافتی که نور در $۵/۰$ ماه طی می‌کند- را به انجام برساند؟

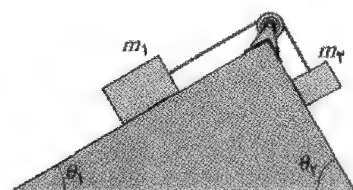
**۹۷-** حیوانی به جرم $۱۲\,\text{kg}$ را در نظر بگیرید که وارد یک دریاچهٔ یخ بستهٔ مسطح و بدون اصطکاک می‌شود. سرعت اولیهٔ حیوان $۵/۰\,\text{m/s}$ در جهت مثبت محور $x$ است. مبدأ را منطبق بر مکان اولیهٔ حیوان روی یخ در نظر بگیرید. هنگامی که بادی با نیروی $۱۷\,\text{N}$ در جهت مثبت محور $y$ بر حیوان اثر کند، روی یخ می‌لغزد. برحسب بردارهای یکه (الف) سرعت و (ب) بردار مکان این حیوان را $۳/۰\,\text{s}$ پس از لغزیدن به دست آورید.

**۹۸-** شخصی به جرم $۵۰\,\text{kg}$ سوار بالابری می‌شود که حرکتش را در لحظهٔ $t=۰$ از حالت سکون از طبقهٔ هم‌کف ساختمانی آغاز می‌کند و پس از طی یک بازهٔ زمانی $۱۰\,\text{s}$ به طبقهٔ بالای ساختمان می‌رسد. نمودار تغییر شتاب بالابر برحسب تابعی از زمان در شکل ۵-۶۷ نشان داده شده است، که در آن مقدارهای مثبت شتاب به این معناست که جهت شتاب رو به بالاست. (الف) بزرگی و (ب) جهت (رو به بالا یا به پایین) نیروی بیشینهٔ وارد به شخص از کف بالابر چیست؟(پ) بزرگی و (ت) جهت نیروی کمینهٔ وارد به شخص از کف بالابر چیست؟ (ث) بزرگی و (ج) جهت نیروی بیشینهٔ وارد به کف بالابر از سوی شخص چیست؟



**شکل ۵-۶۷** مسئلهٔ ۹۸

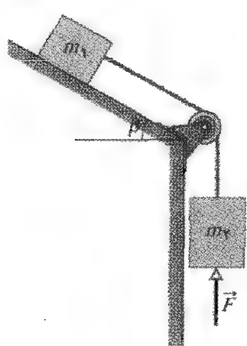
**۹۹-** شکل ۵-۶۸ جعبه‌ای به جرم $m_1=۳/۰\,\text{kg}$ را نشان می‌دهد که روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta_1=۳۰^\circ$ قرار دارد. این جعبه به وسیلهٔ ریسمانی با جرم ناچیز به جعبهٔ دیگری به جرم $m_2=۲/۰\,\text{kg}$ که روی سطح بدون اصطکاک شیبداری با زاویهٔ شیب $\theta_2=۶۰^\circ$ قرار دارد، متصل شده است. قرقره بدون اصطکاک و جرم آن ناچیز است. کشش ریسمان چقدر است؟



**شکل ۵-۶۸** مسئلهٔ ۹۹

**۱۰۰-** فرض کنید جسم استاندارد $۱\,\text{kg}$ بر اثر دو نیرو که یکی از آنها $\vec{F}_1=(۲/۵۰\,\text{N})\hat{i}+(۴/۶۰\,\text{N})\hat{j}$ است در زاویهٔ $۱۶۰^\circ$ نسبت به جهت مثبت محور $x$ شتاب $۴/۰۰\,\text{m/s}^۲$ پیدا کند. نیروی دیگر (الف) برحسب بردارهای یکه و برحسب (ب) بزرگی و (پ) جهت، چیست؟

**۱۰۱-** در شکل ۵-۶۹ جعبهٔ کوچکی به جرم $m_1=۱/۰\,\text{kg}$ واقع بر سطح شیبدار بدون اصطکاکی به جعبهٔ بزرگتری به جرم $m_2=۲/۰\,\text{kg}$ متصل است. قرقره بدون جرم و بدون اصطکاک است. نیرویی رو به بالا به بزرگی $F=۶/۰\,\text{N}$ بر جعبهٔ بزرگتر که شتاب رو به پایین $۵/۵\,\text{m/s}^۲$ را دارد وارد می‌شود. (الف) کشش در ریسمان رابط و (ب) زاویهٔ $\beta$ چقدر است؟ SSM

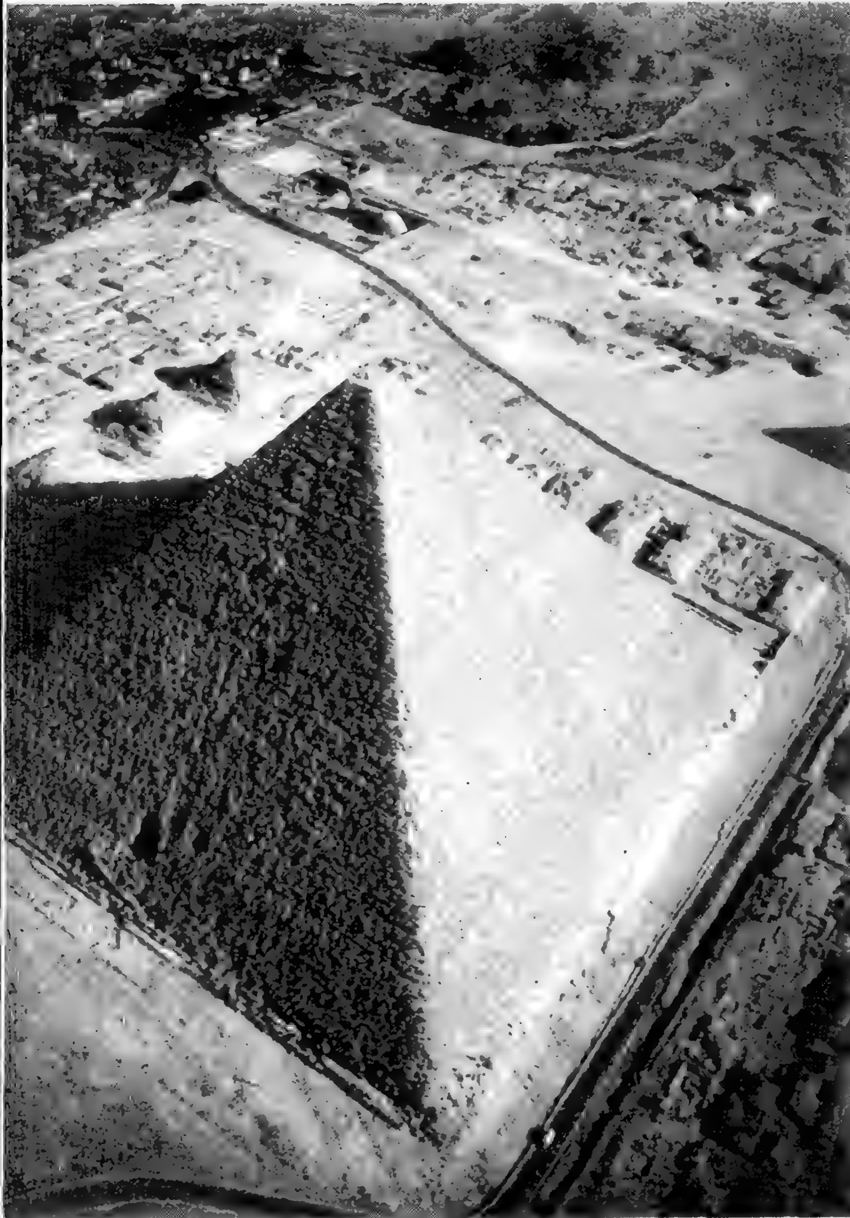


**شکل ۵-۶۹** مسئلهٔ ۱۰۱

**۱۰۳-** یک موتور سیکلت به وزن $۲/۰\,\text{kN}$ در مدت $۶/۰\,\text{s}$ از تندی ۰ به تندی $۸۸/۵\,\text{km/h}$ ، شتاب می گیرد. بزرگیهای (الف) این شتاب ثابت و (ب) نیروی خالصی که این شتاب را به وجود می‌آورد، چقدر است؟

**۱۰۴-** الکترونی که در ابتدا ساکن است (به جرم $۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,\text{kg}$) براثر شتاب ثابتی در مسافت $۱/۵\,\text{cm}$ به تندی $۶/۰\times۱۰^{۶}\,\text{m/s}$ در پایان آن مسافت می‌رسد. (الف) بزرگی نیرویی که به الکترون شتاب می‌دهد و (ب) وزن الکترون چقدر است؟

# ۶ نیرو و حرکت- II



هرم بزرگ که تقریباً ۴۵۰۰ سال قبل ساخته شده شامل ۲۳۰۰۰۰۰ قطعه سنگ است که جرم بیشتر آنها ۲۰۰۰ تا ۳۰۰۰kg است. مهندسان و کارگرها چگونه توانسته‌اند این سنگها را بلند کنند و چنین هرمی به ارتفاع بیش از ۱۴۰m را بسازند؟ برخی از پژوهشگران براین باورند که در حین ساخت گروه بزرگی از افراد این سنگها را روی سطح شیبدار خاکی بزرگی که با زاویهٔ مناسب در یک سمت هرم ساخته بودند، به سمت بالا کشیده‌اند. ولی، هیچ مدرکی (مانند کتیبه یا نقاشی) وجود ندارد که این نظریه را تأیید کند. پژوهشگران دیگری اعتقاد دارند که از یک شیب مارپیچی به دور هرم استفاده شده است. ولی، چنین سطح شیبداری کاملاً ناپایدار بوده است و ضمناً جابه‌جا کردن یک سنگ ۲۰۰۰kg دور یک پیچ °۹۰ در امتداد چنین سطح شیبداری اگر نامکن نباشد بسیار جسورانه است.

**مردم عهد باستان چگونه این قطعه‌ها را بالا برده و در مکان فعلی آنها قرار داده‌اند؟**

پاسخ در همین فصل.

## ۶-۱ فیزیک چیست؟

در این فصل خود را بر سه نیرویی که اغلب با آنها مواجه می‌شویم متمرکز می‌کنیم: نیروی اصطکاک، نیروی کششی، و نیروی مرکزگرا. مهندسی که یک اتومبیل مسابقه را طراحی می‌کند باید هر سه نیرو را در نظر بگیرد: نیروهای اصطکاک وارد بر لاستیکها نقشی حیاتی در شتاب اتومبیل موقع بیرون آمدن از محلهای سرویس‌دهی و گذشتن از پیچها ایفا می‌کنند (اگر اتومبیل به یک ناحیهٔ لغزندهٔ نفتی برسد، اصطکاک وجود ندارد و همین طور اتومبیل!). نیروهای کششی وارد بر اتومبیل که ناشی از مقاومت هوا هستند باید به کمترین مقدار برسند. در غیر این صورت، اتومبیل سوخت بیشتری مصرف می‌کند و مجبور است خیلی زود به محلهای سرویس‌دهی مراجعه کند (حتی یک توقف ۱۴ ثانیه‌ای برای سرویس‌دهی می‌تواند برای راننده به بهای از دست دادن مسابقه تمام شود). نیروهای مرکزگرا در پیچها حیاتی‌اند. (اگر نیروی مرکزگرا به حد کافی بزرگ نباشد، اتومبیل به کنار دیواره‌ها می‌لغزد). ما بحث خود را با نیروهای اصطکاک آغاز می‌کنیم.

## ۶-۲ اصطکاک

نیروهای اصطکاک در زندگی روزانهٔ ما گریز ناپذیرند. اگر نمی‌توانستیم بر آنها فایق شویم، آنها هر جسم متحرکی را متوقف می‌کردند و هر میلهٔ در حال دورانی را از چرخش باز می‌داشتند. حدود ۲۰٪ سوخت مصرف شده در اتومبیل صرف غلبه بر اصطکاک موتور و اصطکاک مسیر حرکت آن می‌شود. از طرف دیگر، اگر اصطکاک اصلاً وجود نداشت، نمی‌توانستیم اتومبیلی را برانیم، روی زمین راه برویم یا دوچرخه سواری کنیم. نمی‌توانستیم قلمی را در دست بگیریم و اگر هم می‌توانستیم، قادر نبودیم چیزی بنویسیم. میخها و پیچها بدون استفاده می‌ماندند، پارچه‌های بافته شده می‌گسستند و گره‌ها باز می‌شدند.

در اینجا نیروهای اصطکاکی را که بین سطحهای جامد خشک موجودند بررسی می‌کنیم. این سطحها یا نسبت به یکدیگر ساکن‌اند یا با تندی کم روی همدیگر حرکت می‌کنند. سه آزمایش سادهٔ زیر را در نظر بگیرید:

۱. کتابی را روی پیشخوان افقی بلندی به حالت لغزش پرت می‌کنیم. همان‌طور که انتظار داریم، سرعت کتاب کند و سرانجام متوقف می‌شود. این بدین معناست که کتاب باید شتابی موازی سطح پیشخوان و در سوی مخالف سرعتش داشته باشد. بنابراین، بر اساس قانون دوم نیوتون نتیجه می‌گیریم که باید نیرویی موازی سطح پیشخوان به کتاب و در سوی مخالف سرعتش، وارد آید. این نیرو، همان نیروی اصطکاک است.

۲. کتاب را به طور افقی هل می‌دهیم، به گونه‌ای که با سرعت ثابت در امتداد سطح پیشخوان حرکت کند. آیا نیروی شما تنها نیروی افقی وارد بر کتاب است؟ خیر، چرا که در این صورت کتاب شتابدار می‌شد. بر اساس قانون دوم نیوتون درمی‌یابیم که باید نیروی دومی وجود داشته باشد که در جهت مخالف نیروی شما ولی به همان بزرگی باشد تا این دو نیرو به تعادل برسند. این نیروی دوم، نیروی اصطکاک است که موازی با پیشخوان بر کتاب وارد می‌شود.

۳. یک صندوق سنگین را به طور افقی هل می‌دهیم. ولی صندوق حرکت نمی‌کند. از قانون دوم نیوتون درمی‌یابیم که باید نیروی دومی نیز بر صندوق وارد شود تا اثر نیروی ما را خنثی کند. به علاوه، این نیروی دوم باید در جهت مخالف نیروی ما و به همان بزرگی باشد تا این دو نیرو به تعادل برسند. این نیروی دوم، همان نیروی اصطکاک است. صندوق را محکمتر هل می‌دهیم. باز هم تکان نمی‌خورد. روشن است که بزرگی نیروی اصطکاک می‌تواند تغییر کند به گونه‌ای که باز نیروها به حالت تعادل باقی بمانند. حال با تمام زور خود صندوق را هل می‌دهیم. صندوق شروع به لغزیدن می‌کند. ظاهراً نیروی اصطکاک یک بزرگی بیشینه دارد که وقتی از آن تجاوز کند، صندوق شروع به لغزیدن می‌کند.

شکل ۶-۱ وضعیت مشابهی را نشان می‌دهد. در شکل ۶-۱ الف، قطعه‌ای روی سطح میز به حالت سکون قرار دارد و در آن نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ با نیروی عمودی $\vec{F}_N$ به تعادل رسیده است. در شکل ۶-۱ ب نیروی $\vec{F}$ وارد بر قطعه سعی در کشیدن آن به سمت چپ دارد. در مقابل، نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ که رو به سمت راست دارد، دقیقاً این نیرو را خنثی می‌کند. نیروی $\vec{f}_s$ **نیروی اصطکاک ایستایی** نامیده می‌شود. قطعه حرکت نمی‌کند.

شکلهای ۶-۱ پ و ۶-۱ ت نشان می‌دهند که اگر بزرگی نیروی وارد شده را افزایش دهیم، نیروی اصطکاک ایستایی نیز افزایش می‌یابد و قطعه ساکن می‌ماند. ولی وقتی نیروی وارد شده به بزرگی معینی برسد، قطعه از تماس با میز «از جا کنده می‌شود» و به سمت چپ شتاب می‌گیرد (شکل ۶-۱ ث). نیروی اصطکاکی که از آن پس با حرکت مخالفت می‌کند، **نیروی اصطکاک جنبشی** $\vec{f}_k$ نامیده می‌شود.

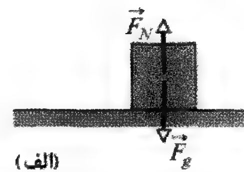
معمولاً بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی، که بر جسم در حال حرکت وارد می‌شود، از بزرگی بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی، که بر جسم ساکن وارد می‌شود، کوچکتر است. بنابراین، اگر بخواهیم قطعه را در امتداد سطح با تندی ثابت حرکت دهیم، معمولاً باید مشابه آنچه که در شکل ۶-۱ ج نشان داده شده، با شروع حرکت قطعه، نیروی وارد شده را کاهش دهیم.

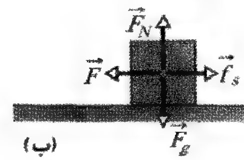
به عنوان مثال، شکل ۶-۱ چ نتیجهٔ آزمایشی را نشان می‌دهد که در آن نیروی وارد بر قطعه تا لحظهٔ از جا کنده‌شدن به آرامی افزایش یافته است. توجه کنید برای آنکه جعبه پس از لحظهٔ کنده‌شدن با تندی ثابت حرکت کند، نیروی کمتری لازم است.

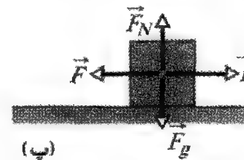
در اصل، نیروی اصطکاک جمع برداری نیروهای بی‌شماری است که بین اتمهای سطح یک جسم و اتمهای سطح جسم دیگر عمل می‌کنند. اگر دو سطح فلزی کاملاً صیقل داده شده و تمیز در خلأ بسیار خوبی روی هم گذاشته شوند، نمی‌توان آنها را روی هم لغزاند. چون سطحها بسیار صاف‌اند، بسیاری از اتمهای یک سطح در تماس با بسیاری از اتم‌های سطح دیگرند و سطحها در یک آنْ با هم جوش- سرد می‌خورند و تشکیل یک تکْ قطعهٔ فلزی را می‌دهند. اگر کاروری برسنجهایی[1] را که به خوبی پرداخت شده‌اند در هوا با هم تماس دهد، هر چند که تماس اتم با اتم از حالت قبل کمتر است ولی باز هم آنها آنچنان سفت به یکدیگر می‌چسبند که فقط آنها را می‌توان با پیچاندن از هم جدا کرد. البته، معمولاً چنین تماس اتم به اتم زیادی ناممکن است. حتی یک سطح صیقل یافته هم بسیار دور از آن چیزی است که در مقیاس اتمی صاف در نظر گرفته می‌شود. به علاوه، سطحهای جسمهایی که هر روزه با آنها سر و کار داریم دارای لایه‌هایی از اکسیدها و سایر آلودگیهاست که پدیدهٔ جوش- سرد را کاهش می‌دهند.

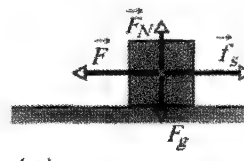
وقتی که دو سطح معمولی روی هم قرار داده شوند، فقط نقطه‌های برجسته با هم تماس پیدا می‌کنند. (این مثل این می‌ماند که کوههای آلپ در سوییس را برگردانیم و روی کوههای آلپ در اتریش قرار دهیم.) سطح *میکروسکوپی* واقعی تماس بسیار کوچکتر، شاید $10^4$ بار کوچکتر، از سطح *ماکروسکوپی* ظاهری تماس است. با این وجود، بسیاری از نقطه‌های تماس با یکدیگر جوش- سرد می‌خورند. این جوش‌ها هنگامی که یک نیروی وارد شده بخواهد سطحها را روی هم بلغزاند، ایجاد اصطکاک ایستایی می‌کنند.

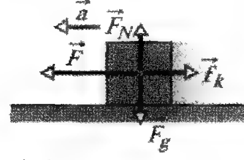
اگر نیروی وارد شده آنقدر بزرگ باشد که بتواند یک سطح را روی سطح دیگر بکشد، نخست جوشها پاره می‌شوند (در لحظهٔ جاکن شدن) و پس از آن جوشها به طور مدام باز- تشکیل و پاره می‌شوند و بدین ترتیب نقطه‌های تماس تصادفی ساخته می‌شوند (شکل ۶-۲). نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$ که با حرکت مخالفت می‌کند جمع برداری نیروها در چندین نقطهٔ تماس تصادفی است.

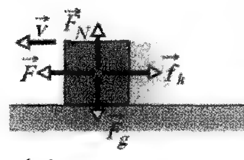


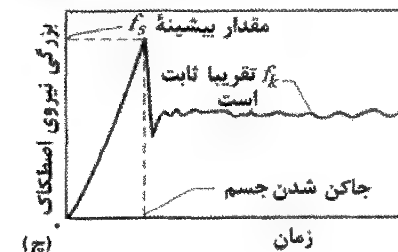



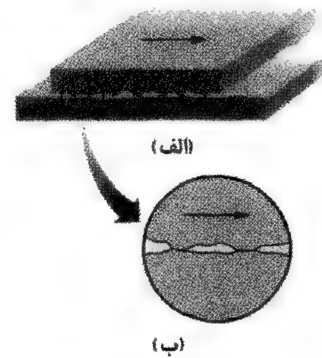

**شکل ۶-۱** (الف) نیروهای وارد بر جعبهٔ ساکن، (ب تا ت) نیروی خارجی $\vec{F}$ وارد شده به جعبه با نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ به تعادل رسیده است. وقتی بزرگی $F$ افزایش یابد، $f_s$ نیز افزایش می‌یابد تا اینکه $f_s$ به یک مقدار بیشینهٔ معین برسد. (ث) جعبه ناگهان از جا کنده می‌شود و در جهت نیروی $F$ شتاب می‌گیرد. (ج) اگر بخواهیم جعبه با سرعت ثابت حرکت کند، $\vec{F}$ باید از مقدار بیشینه‌اش که درست پیش از ازجا کنده شدن داشت کاهش داده شود. (چ) چند نتیجهٔ تجربی برای حالتهای (الف) تا (ج).

---

۱. برسنج (gaugeblock) وسیله‌ای است که به عنوان مرجع برای واسنجی (یا کالیبراسیون) دستگاههای اندازه‌گیری طول مانند کولیس و زیرسنج به کار می‌رود. هر برسنج از فلز یا ترکیب آلیاژی از فلزها به شکل مکعب مستطیل ساخته می‌شود و یکی از بعدهای اندازه‌گیری را مشخص می‌کند که متناظر با یک عدد از یک کولیس یا هر وسیلهٔ دیگر اندازه‌گیری طول است. برای واسنجی یک کولیس ممکن است چندمین برسنج به کار برده شود. م.

اگر دو سطح محکمتر به هم فشار داده شوند، نقطه‌های بیشتری تشکیل جوش- سرد می‌دهند. در این صورت برای لغزاندن آنها روی یکدیگر به نیروی بزرگتری نیاز است. بنابراین، مقدار بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ بیشتر می‌شود. وقتی سطحها را روی هم بلغزانیم، نقطه‌های بیشتری جوش- سرد آنی می‌خورند و در نتیجه نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$ نیز بیشتر خواهد شد.

اغلب، حرکت لغزشی یک سطح روی سطح دیگر «حرکتی نامنظم» است، زیرا دو سطح به تناوب به هم می‌چسبند و سپس می‌لغزند. چنین *چسبیدن- و- لغزیدن* تکراری می‌تواند صدای جیرجیر یا غژغژ ایجاد کند. وقتی لاستیکها بر اثر ترمز اتومبیل روی سطح خشک جاده‌ای کشیده می‌شوند، وقتی ناخنی روی یک دیوار گچی کشیده می‌شود، یا وقتی یک در با لولایی زنگ زده باز و بسته می‌شود، چنین صداهایی ایجاد می‌شوند. البته همیشه این صداها ناخوشایند نیست. مثلاً اگر آرشه ویولن را به درستی بر سیم آن بکشیم صدای گوش نوازی را خواهیم شنید.



**شکل ۶-۲** سازوکار اصطکاک لغزشی. (الف) در این نمای بزرگ شده، سطح بالایی در حال لغزش به سمت راست روی سطح پایینی است. (ب) نمایش جزئی دو نقطه که برای آنها جوش- سرد رخ داده است. برای شکستن این جوشها و تداوم حرکت، نیرو لازم است.

## ۶-۳ ویژگیهای اصطکاک

آزمایش نشان می‌دهد که هرگاه یک جسم خشک و روغن‌کاری نشده روی سطحی با همان شرایط قرار داده شود و یک نیروی $\vec{F}$ بخواهد آن جسم را در امتداد سطح بلغزاند، نیروی اصطکاکی به وجود می‌آید که دارای سه ویژگی زیر است:

**ویژگی ۱.** اگر جسم حرکت نکند، نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ و آن مؤلفه‌ای از $\vec{F}$ که موازی سطح است اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند. بزرگی این دو نیرو یکسان و جهت $\vec{f}_s$ با جهت مؤلفهٔ $\vec{F}$ مخالف است.

**ویژگی ۲.** بزرگی $\vec{f}_s$ مقدار بیشینهٔ $f_{s,\max}$ را دارد که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N \quad (۶-۱)$$

که در آن $\mu_s$ **ضریب اصطکاک ایستایی** و $F_N$ بزرگی نیروی عمودی وارد به جسم از سوی سطح است. اگر بزرگی آن مؤلفه‌ای از $\vec{F}$ که موازی سطح است از $f_{s,\max}$ بیشتر شود، آنگاه جسم شروع به لغزیدن روی سطح می‌کند.

**ویژگی ۳.** هرگاه جسمی شروع به لغزیدن روی سطحی بکند، بزرگی نیروی اصطکاک خیلی زود به مقدار $f_k$ که با رابطهٔ زیر داده می‌شود کاهش می‌یابد

$$f_k = \mu_k F_N \quad (۶-۲)$$

که در آن $\mu_k$ **ضریب اصطکاک جنبشی** است. از آن پس، در حین لغزیدن، یک نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$ که بزرگی آن با معادلهٔ ۶-۲ داده می‌شود با حرکت مخالفت می‌کند.

بزرگی نیروی عمودی $F_N$ که در ویژگیهای ۲ و ۳ ظاهر می‌شود معیاری از میزان قدرتی است که با آن جسم بر سطح فشار وارد می‌کند. هرچه جسم با نیروی بیشتری بر سطح فشرده شود، بنابر قانون سوم نیوتون، $F_N$ بزرگتر می‌شود. هر چند در ویژگیهای ۱ و ۲ فقط از تکْ نیروی وارد شدهٔ $F$ صحبت شد، ولی این امر برای نیروی خالص حاصل از چند نیروی وارد شده بر جسم نیز برقرار است. معادله‌های ۶-۱ و ۶-۲ معادله‌های برداری *نیستند*؛ راستای نیروهای $\vec{f}_s$ یا $\vec{f}_k$ همواره موازی سطح و در سوی مخالف لغزش‌اند و راستای نیروی $\vec{F}_N$ همواره بر سطح عمود است.

ضریبهای $\mu_s$ و $\mu_k$ بی‌بعد هستند و باید با آزمایش تعیین شوند. مقدار آنها به ویژگیهای معینی از جسم و سطح بستگی دارد؛ به همین دلیل است که معمولاً با عبارت «میان» در جمله‌ها ظاهر می‌شوند. مثلاً گفته می‌شود «مقدار $\mu_s$ *میان* تخم‌مرغ و تابه با روکش تفلون ۰/۰۴ است، ولی مقدار $\mu_s$ *میان* کفشهای صخره‌نوردی و صخره ۱/۲ است.» فرض می‌کنیم مقدار $\mu_k$ به تندی لغزیدن جسم روی سطح بستگی ندارد.

**✓ *نکتهٔ وارسی ۱*** قطعه‌ای روی کف اتاق قرار دارد. (الف) بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر قطعه از طرف کف چقدر است؟ (ب) فرض کنید اکنون یک نیروی افقی به بزرگی 5N بر قطعه وارد می‌شود ولی قطعه حرکت نمی‌کند. بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر قطعه چقدر است؟ (پ) اگر مقدار بیشینهٔ $f_{s,\max}$ نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر قطعه 10N باشد، آیا قطعه در صورتی که بزرگی نیروی افقی وارد شده 8N باشد، حرکت خواهد کرد؟ (ت) اگر 12N باشد چطور؟ (ث) بزرگی نیروی اصطکاک در بخش (پ) چقدر است؟

**مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۱**

اگر چرخهای یک اتومبیل در حین یک ترمز ناگهانی «قفل» شوند (به این معنی که از غلتش باز بمانند)، اتومبیل در امتداد جاده خواهد لغزید. خرده‌های کنده شده از لاستیک و بخشهای

ذوب شدهٔ کوچک از جاده تشکیل «خط ترمز» را می‌دهند که نشانه‌ای از بروز جوش خوردگی سرد در حین لغزش است. رکورد بلندترین خط ترمز در جاده‌های شهری به سال ۱۹۶۰/۱۳۳۹ توسط یک اتومبیل جگوار در بزرگراهی واقع در انگلستان بر جای گذاشته شده است (شکل ۶-۳ الف). بنابر گزارش، طول خط ترمز $۲۹۰\,m$ بوده است! فرض کنید $\mu_k = ۰/۶۰$ و شتاب اتومبیل در حین ترمز ثابت بوده است. در لحظه‌ای که چرخها قفل شده‌اند، اتومبیل با چه سرعتی حرکت می‌کرده است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) چون شتاب ثابت فرض شده است، می‌توانیم با استفاده از معادله‌های جدول ۲-۱، تندی اولیهٔ $v_۰$ اتومبیل را به دست آوریم. (۲) اگر از اثر هوا بر حرکت اتومبیل چشمپوشی کنیم، شتاب $a$ تنها ناشی از نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$ وارد بر اتومبیل از سوی جاده بوده است که جهت آن مخالف جهت حرکت اتومبیل است (شکل ۶-۳ ب). این نیرو را می‌توانیم با استفاده از قانون دوم نیوتون برای مؤلفه‌های $x$ $(F_{net,x} = ma_x)$ به شتاب مرتبط کنیم

$$-f_k = ma \qquad (۶-۳)$$

که در آن $m$ جرم اتومبیل است. علامت منفی نشان دهندهٔ جهت نیروی اصطکاک جنبشی است.

***محاسبه‌ها:*** از معادلهٔ ۶-۲ می‌دانیم که بزرگی نیروی اصطکاک $f_k = \mu_k F_N$ ، که در آن $F_N$ بزرگی نیروی عمودی وارد بر اتومبیل از طرف جاده است. چون اتومبیل در راستای قائم شتاب ندارد، از شکل ۶-۳ ب و قانون دوم نیوتون درمی‌یابیم که بزرگی $\vec{F}_N$ برابر با بزرگی نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر اتومبیل، یعنی $mg$ است. بنابراین، $F_N = mg$.

حال معادلهٔ ۶-۳ را برای $a$ حل می‌کنیم و سپس در آن به جای $f_k$ ، رابطهٔ $f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$ را قرار می‌دهیم. داریم

$$a = -\frac{f_k}{m} = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g \qquad (۶-۴)$$

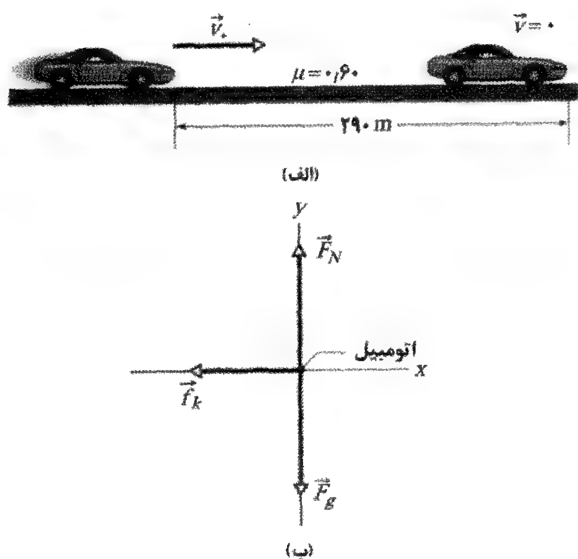
علامت منفی نشان دهندهٔ این است که شتاب در جهت منفی محور $x$، یعنی در خلاف جهت سرعت اتومبیل است. سپس با استفاده از معادله ۲-۱۶ از معادله‌های شتاب ثابت فصل ۲ داریم

$$v^۲ = v_۰^۲ + ۲a(x - x_۰)$$

می‌دانیم جابه‌جایی $x - x_۰$ برابر $۲۹۰\,m$ بوده و فرض می‌کنیم تندی نهایی $v$ برابر صفر بوده است. با قرار دادن $a$ از معادلهٔ ۶-۴ و حل معادله برای $v_۰$ داریم

$$v_۰ = \sqrt{۲\mu_k g(x - x_۰)} = \sqrt{(۲)(۰/۶۰)(۹/۸\,m/s^۲)(۲۹۰\,m)}$$
$$= ۵۸\,m/s = ۲۱۰\,km/h \qquad \text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که فرض کرده‌ایم که در پایان خط ترمز $v = ۰$ است. در واقع، خط ترمز فقط به این خاطر که اتومبیل پس از طی $۲۹۰\,m$ جاده را ترک می‌کند به پایان می‌رسد. در نتیجه $v_۰$ دست کم $۲۱۰\,km/h$ بوده است.



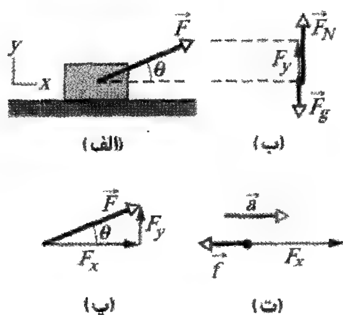

**شکل ۶-۳** (الف) اتومبیلی به سمت راست می‌لغزد و سرانجام پس از طی $۲۹۰\,m$ متوقف می‌شود. (ب) نمودار جسم- آزاد برای اتومبیل.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۲

در شکل ۶-۴ الف، قطعه‌ای به جرم $m = ۳/۰\,kg$ در حالی که نیروی $\vec{F}$ با بزرگی $۱۲/۰\,N$ با زاویهٔ $\theta$ به طرف بالا بر آن وارد می‌شود روی سطحی می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و سطح برابر $\mu_k = ۰/۴۰$ است. می‌توانیم زاویهٔ $\theta$ را از $۰°$ تا $۹۰°$ تغییر دهیم (قطعه روی سطح باقی می‌ماند). بیشینهٔ مقدار شتاب $a$ قطعه با چه زاویهٔ $\theta$ حاصل می‌شود؟

**نکته‌های کلیدی** چون قطعه حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک جنبشی بر آن اعمال می‌شود. بزرگی آن با معادلهٔ ۶-۲ ($f_k = \mu_k F_N$، که در آن $F_N$ نیروی عمودی است) داده شده است. جهت آن مخالف جهت حرکت است (اصطکاک با لغزش مخالفت می‌کند).

***محاسبهٔ $F_N$:*** چون بزرگی $f_k$ نیروی اصطکاک موردنیاز است، ابتدا باید بزرگی نیروی عمودی $F_N$ را حساب کنیم. شکل ۶-۴ ب نمودار جسم- آزاد نیروهای در راستای محور $y$




**شکل ۶-۴** (الف) نیرو برای حرکت دادن قطعه وارد می‌شود. (ب) نیروی عمودی. (پ) مؤلفه‌های نیروی وارد شده. (ت) نیروهای افقی و شتاب.

قائم را نشان می‌دهد. نیروی عمودی به سمت بالا، نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ با بزرگی $mg$ به سمت پایین و (توجه کنید) مؤلفهٔ قائم $F_y$ نیروی وارد شده به سمت بالاست. این مؤلفه در شکل ۶-۴ پ نشان داده شده است و می‌توان دید که $F_y = F\sin\theta$ . قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a})$ را برای نیروهای در راستای محور $y$ به صورت زیر می‌نویسیم

$$F_N + F\sin\theta - mg = m(\circ) \qquad (۶-۵)$$

که در آن صفر را برای شتاب در راستای محور $y$ قرار داده‌ایم (قطعه حتی در راستای این محور حرکت نمی‌کند). بنابراین،

$$F_N = mg - F\sin\theta \qquad (۶-۶)$$

***محاسبهٔ شتاب:*** شکل ۶-۴ ت نمودار جسم- آزاد برای حرکت در راستای محور $x$ است. مؤلفهٔ افقی $F_x$ نیروی وارد شده به سمت راست است؛ از شکل ۶-۴ پ، دیده می‌شود که $F_x = F\cos\theta$ . بزرگی نیروی اصطکاک برابر $f_k(=\mu_k F_N)$ و به سمت چپ است. با نوشتن قانون دوم نیوتون در راستای محور $x$ داریم

$$F\cos\theta - \mu_k F_N = ma \qquad (۶-۷)$$

$F_N$ را از معادلهٔ ۶-۶ قرار می‌دهیم و معادله را برای $a$ حل می‌کنیم، داریم

$$a = \frac{F}{m}\cos\theta - \mu_k\left(g - \frac{F}{m}\sin\theta\right) \qquad (۶-۸)$$

***به دست آوردن بیشینه:*** برای به دست آوردن مقدار $\theta$ که بیشینهٔ $a$ را به دست می‌دهد، از $a$ نسبت به $\theta$ مشتق می‌گیریم و نتیجه را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$\frac{da}{d\theta} = -\frac{F}{m}\sin\theta + \mu_k\frac{F}{m}\cos\theta = \circ$$

با بازنویسی رابطه و استفاده از اتحاد $(\sin\theta)/(\cos\theta) = \tan\theta$، داریم

$$\tan\theta = \mu_k$$

با حل رابطه برای $a$ و قرار دادن $\mu_k = ۰/۴۰$ ، در می‌یابیم که اگر $\theta$ برابر مقدار زیر باشد، شتاب بیشینه خواهد بود

$$\theta = \tan^{-1}\mu_k = ۲۱/۸^\circ \approx ۲۲^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$

***اظهار نظر:*** وقتی $\theta$ را از صفر افزایش دهیم، بیشتر نیروی واردهٔ $\vec{F}$ به طرف بالاست، که نیروی عمودی را به دست می‌دهد. کاهش نیروی عمودی باعث کاهش در نیروی اصطکاک می‌شود، که با حرکت قطعه مخالفت می‌کند. بنابراین، شتاب قطعه می‌خواهد زیاد شود. ولی، افزایش $\theta$ مؤلفهٔ افقی $\vec{F}$ را نیز کاهش می‌دهد، و بنابراین شتاب قطعه می‌خواهد کاهش یابد. این تمایلات مخالف بیشینهٔ شتاب در $\theta = ۲۲^\circ$ را فراهم می‌سازد.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۳**

اگرچه نظرهای هوشمندانه‌ای در مورد ساخت هرم بزرگ ارائه شده است، قطعه‌های سنگی احتمالاً به وسیلهٔ افراد با طناب به سمت بالا کشیده شده است. شکل ۶-۵ الف یک قطعه سنگ ۲۰۰۰kg را در فرایند بالا کشیدن آن روی سطح (صاف) ساخته شدهٔ هرم بزرگ نشان می‌دهد که این سطح تشکیل یک سطح شیبدار با زاویهٔ $\theta = ۵۲^\circ$ را داده است. سنگ روی یک ارابهٔ چوبی قرار داشت و با چندین طناب (که فقط یکی از آنها نشان داده شده است) کشیده می‌شد. مسیر این ارابه با آب روان شده بود تا ضریب اصطکاک ایستایی به مقدار ۰/۴۰ کاهش یابد. فرض کنید اصطکاک در محلی که طناب در بالا روی لبه کشیده می‌شود ناچیز است. اگر هر فرد که در بالای هرم قرار دارد با نیروی (قابل قبول) ۶۸۶N سنگ را بکشد، چند نفر لازم است تا آن را در آستانهٔ حرکت قرار دهند؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) چون قطعه در *آستانهٔ* حرکت قرار دارد، نیروی اصطکاک ایستایی دارای بیشینهٔ مقدار ممکن خود است، یعنی، $f_s = f_{s,\max}$. (۲) چون قطعه در آستانه حرکت به سمت *بالای* سطح قرار دارد، نیروی اصطکاک باید به سمت *پایین* سطح باشد (تا با حرکت مخالفت کند). (۳) از مسئلهٔ نمونهٔ ۵-۵، می‌دانیم که مؤلفهٔ نیروی گرانشی به سمت پایین سطح برابر با $mg\sin\theta$ و مؤلفهٔ عمود به سطح (و به سمت پایین) برابر $mg\cos\theta$ است (شکل ۶-۵ ب).

***محاسبه‌ها:*** شکل ۶-۵ پ نمودار جسم- آزاد برای قطعه است که نیروی $\vec{F}$ اعمال شده از طرف طنابها، نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ و دو مؤلفهٔ نیروی گرانشی را نشان می‌دهد. برای این نیروها می‌توان قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a})$ را به صورت زیر نوشت

$$F - mg\sin\theta - f_s = m(\circ) \qquad (۶-۹)$$

چون قطعه در آستانهٔ لغزش است و نیروی اصطکاک دارای بیشینه مقدار ممکن $f_{s,\max}$ است، از معادلهٔ ۶-۱ برای جایگزینی $f_s$ با $\mu_s F_N$ استفاده می‌کنیم

$$f_s = f_{s,\max} = \mu_s F_N \qquad (۶-۱۰)$$

از شکل ۶-۵ پ، دیده می‌شود که در راستای محور $y$ قانون دوم نیوتون به صورت زیر در می‌آید

$$F_N - mg\cos\theta = m(\circ) \qquad (۶-۱۱)$$

با حل معادلهٔ ۶-۱۱ برای $F_N$ و قرار دادن نتیجه در معادلهٔ ۶-۱۰ به دست می‌دهد

$$f_s = \mu_s\, mg\cos\theta \qquad (۶-۱۲)$$

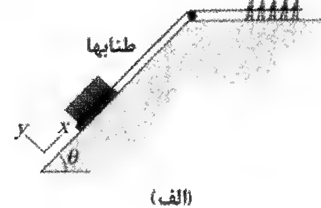
با قرار دادن این عبارت در معادلهٔ ۶-۹ و حل آن برای $F$ داریم

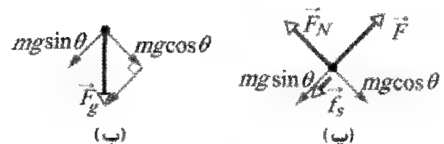
$$F = \mu_s\, mg\cos\theta + mg\sin\theta \qquad (۶-۱۳)$$

با جایگزینی $m = ۲۰۰۰\,\text{kg}$ ، $\theta = ۵۲^\circ$ و $\mu_s = ۰/۴۰$ ، درمی‌یابیم که نیروی لازم برای اینکه قطعه سنگ در آستانهٔ حرکت قرار گیرد برابر $۲/۰۲۷\times ۱۰^۴\,\text{N}$ است. با تقسیم این مقدار بر ۶۸۶N یعنی نیرویی که فرض کردیم هر نفر اعمال می‌کند، تعداد نفرات مورد نیاز به دست می‌آید

(پاسخ) $N = \frac{۲/۰۲۷ \times ۱۰^{۴}\ \text{N}}{۶۸۶\ \text{N}} = ۲۹/۵ \approx ۳۰$ نفر

***اظهار نظر:*** وقتی قطعه سنگ شروع به حرکت کند اصطکاک، اصطکاک جنبشی است و ضریب اصطکاک تقریباً ۰/۲۰ بوده است. می‌توان نشان داد که افراد لازم ۲۶ یا ۲۷ نفر بوده است. بنابراین، برای قرار دادن سنگهای عظیم هرم بزرگ در مکانهای مورد نظر، گروه‌های کوچکی از نفرات برای کشیدن آنها لازم بوده است.




**شکل ۶-۵** (الف) قطعه سنگ روی سطح هرم بزرگ به سمت بالا کشیده شده و در آستانهٔ حرکت قرار دارد. (ب) مؤلفه‌های نیروی گرانشی. (پ) نمودار جسم- آزاد برای قطعه.

## ۶-۴ نیروی کشَشی و تندی حد

به هر چیزی که بتواند شارش یابد، **شاره** می‌گویند که عموماً یا گاز یا مایع است. وقتی میان شاره و جسم یک سرعت نسبی وجود داشته باشد (چه به علت حرکت جسم در شاره و چه به علت عبور شاره از کنار جسم)، یک **نیروی کشَشی** $\vec{D}$ بر جسم وارد می‌شود که مخالف حرکت نسبی است و در جهتی است که شاره نسبت به جسم شارش می‌یابد.

در اینجا فقط حالتهایی را بررسی می‌کنیم که شاره هوا و جسم به جای آنکه باریک باشد (مثل نیزه) دارای لبه‌های پهن (مثل توپ بیسبال) و حرکت نسبی به حدی تند باشد که هوا در پشت جسم متلاطم شود (تشکیل پیچ و تابهایی بدهد). در چنین حالتهایی، بزرگی نیروی کشَشی $\vec{D}$ توسط **ضریب کشَشی** $C$ که به طور تجربی تعیین می‌شود، به تندی نسبی $v$ بستگی دارد

$$D = \frac{۱}{۲} C\rho A v^{۲} \qquad (۶\text{-}۱۴)$$

که در آن $\rho$ چگالی (جرم به حجم) هوا و $A$ **سطح مقطع مؤثر** جسم (مساحت مقطعی عمود بر سرعت $\vec{v}$) است. ضریب کشَشی $C$ (که مقدار نوعی آن در گسترهٔ ۰/۴ تا ۱/۰ است) در واقع برای یک جسم معین مقدار ثابتی ندارد؛ زیرا اگر $v$ به اندازهٔ قابل ملاحظه‌ای تغییر کند، $C$ نیز تغییر خواهد کرد. در اینجا از چنین پیچیدگیهایی چشمپوشی می‌کنیم.

اسکی‌بازهایی که شیب تندی را به‌سرعت اسکی می‌کنند به خوبی از بستگی کشش هوا به $A$ و $v^{۲}$ مطلع هستند. برای اینکه اسکی باز به تندیهای بالاتری برسد باید $D$ را تا آنجا که ممکن است کاهش دهد. به این منظور مثلاً خود را به «وضعیت تخم مرغی» (شکل ۶-۶) درمی‌آورد تا $A$ به کمترین مقدار برسد.

هرگاه جسمی با لبه‌های پهن از حالت سکون در هوا سقوط کند، جهت نیروی کشَشی $\vec{D}$ رو به بالاست و بزرگی آن با افزایش تندی جسم، به تدریج از صفر افزایش می‌یابد. این نیروی رو به بالای $\vec{D}$ با نیروی گرانشی رو به پایین وارد بر جسم مخالفت می‌کند. این نیروها را می‌توانیم با استفاده از قانون دوم نیوتون برای یک محور قائم $(F_{\text{net},y} = ma_y)$ به شتاب جسم مربوط کنیم

$$D - F_g = ma \qquad (۶\text{-}۱۵)$$

که در آن $m$ جرم جسم است. همان‌گونه که از شکل ۶-۷ برمی‌آید، اگر جسم به اندازهٔ کافی سقوط کند، سرانجام $D$ برابر با $F_g$ می‌شود. بنابر معادلهٔ ۶-۱۵، این بدین معناست که $a = ۰$ می‌شود و از اینرو تندی جسم دیگر افزایش نمی‌یابد. از آن پس، جسم با تندی ثابتی موسوم به **تندی حد** $v_t$ سقوط می‌کند.

برای یافتن $v_t$، در معادلهٔ ۶-۱۵ $a$ را برابر صفر قرار می‌دهیم و به جای $D$ معادلهٔ ۶-۱۴ را می‌گذاریم. آنگاه به دست می‌آوریم

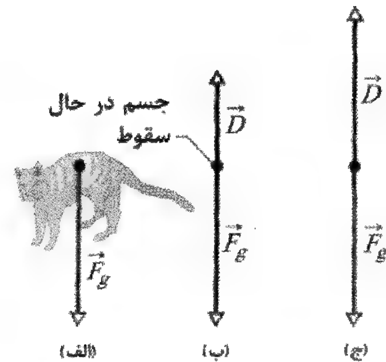
$$\frac{۱}{۲} C\rho A v_t^{۲} - F_g = ۰$$

که به دست می‌دهد

$$v_t = \sqrt{\frac{۲F_g}{C\rho A}} \qquad (۶\text{-}۱۶)$$



**شکل ۶-۶** این اسکی باز به «وضعیت تخم مرغی» چمباتمه زده است تا سطح مقطع مؤثر او و در نتیجه کشش هوای وارد به او کمترین مقدار شود.




**شکل ۶-۷** نیروهای وارد بر جسمی که در هوا سقوط می‌کند: (الف) درست پس از شروع به سقوط کردن و (ب) نمودار جسم- آزاد کمی بعد، پس از آنکه نیروی کششی به وجود آمد. (پ) نیروی کششی تا زمانی که با نیروی گرانشی به تعادل برسد، افزایش می‌یابد. اکنون جسم با تندی ثابت حد سقوط می‌کند.

جدول ۶-۱ مقدار $v_t$ را برای چند جسم معروف نشان می‌دهد.

بنابر محاسبه‌های انجام شده[1] بر اساس معادلهٔ ۶-۱۴، یک گربه باید از حدود طبقهٔ ششم یک ساختمان سقوط کند تا به تندی حد برسد. تا رسیدن به این وضعیت $F_g > D$ است و گربه به دلیل نیروی خالص رو به پایین وارد بر آن، رو به پایین شتاب می‌گیرد. از فصل ۲ به خاطر بیاورید که بدن شتاب سنج است و نه تندی سنج. چون گربه نیز شتاب را حس می‌کند، می‌ترسد و پایش را زیر بدنش نگه می‌دارد و سرش را به داخل جمع و ستون فقراتش را رو به بالا خم می‌کند. بدین ترتیب $A$ کوچک، $v_t$ بزرگ و در نتیجه احتمال آسیب دیدگی کم می‌شود.

البته اگر گربه در حین یک سقوط طولانیتر به تندی $v_t$ برسد، شتابش صفر می‌شود و در آن صورت قدری احساس آرامش می‌کند؛ در این وضعیت پاهایش را می‌کشد، گردنش را به طور افقی رو به بیرون می‌گیرد و ستون فقراتش را صاف می‌کند (در این لحظه به نظر می‌رسد که دارد مثل یک سنجاب پرواز می‌کند). این حرکتها باعث می‌شود که مساحت $A$ و در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ ۶-۱۴، نیروی کشش $D$ افزایش یابد. چون اکنون $D > F_g$ است (نیروی خالص رو به بالاست)، تندی گربه شروع به کم شدن می‌کند تا اینکه به یک $v_t$ جدید و کوچکتر برسد. کاهش $v_t$ احتمال آسیب دیدگی جدی در برخورد با زمین را کاهش می‌دهد. درست پیش از پایان سقوط، وقتی که گربه خود را نزدیک زمین می‌بیند، پاهایش را به زیر بدنش به عقب می‌کشد و بدین ترتیب آمادهٔ فرود می‌شود.

1 W.O. Whitney and C.J. Mehlhaff, "High-Rise Syndrome in Cats." The Journal of the American Veterinary Medical Association, 1987.

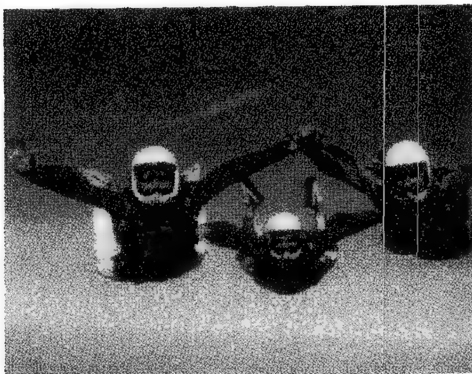
**جدول ۶-۱**

چند تندی حد در هوا

| جسم | تندی حد (m/s) | مسافت مربوط به ۹۵ درصد* (m) |
|---|---|---|
| گلوله (شلیک شده از یک تپانچه) | ۱۴۵ | ۲۵۰۰ |
| شیرجه روندهٔ هوایی(نوعی) | ۶۰ | ۴۳۰ |
| توپ بیسبال | ۴۲ | ۲۱۰ |
| توپ تنیس | ۳۱ | ۱۱۵ |
| توپ بسکتبال | ۲۰ | ۴۷ |
| توپ پینگ پنگ | ۹ | ۱۰ |
| قطرهٔ باران (شعاع ۱/۵mm) | ۷ | ۶ |
| چترباز (نوعی) | ۵ | ۳ |

* این مسافتی است که جسم باید از حالت سکون سقوط کند تا به ٪۹۵ تندی حدّش برسد. برگرفته از
Peter J.Brancazio, *Sport Science*, 1984, Simon & Schyster, New York.

انسانها غالباً برای سرگرمی از بلندیهای عظیم در هوا شیرجه می‌روند. در یکی از این ماجراجویی‌ها، در فروردین ۱۳۶۶/آوریل ۱۹۸۷ *گریگوری رابرتسون*[2] متوجه شد که یکی از شیرجه رونده‌ها به نام *دبی ویلیامز*[3] در برخورد با شیرجه روندهٔ دیگری بیهوش شده و قادر به بازکردن چترش نیست. رابرتسون که در آن لحظه درست بالا سر ویلیامز بود و هنوز پس از ۴km غوطه ورشدن در هوا چترش را باز نکرده بود، بدنش را طوری تغییر داد تا سرش پایین باشد تا اینکه $A$ را کمتر و تندی رو به پایین را بیشتر کند. وقتی تندی $v_t$ به مقدار تخمینی ۳۲۰km/h رسید، او نزدیک ویلیامز بود؛ آنگاه خود را به طور افقی در وضعیت «عقاب گسترده بال» قرار داد (مانند شکل ۶-۸) تا با افزایش $D$ بتواند ویلیامز را بگیرد. او چتر نجات ویلیامز را باز کرد و سپس، پس از رها کردن او، حدود ۱۰s پیش از برخورد با زمین چتر خودش را هم باز کرد. ویلیامز به دلیل آنکه در هنگام نشستن کنترلی نداشت آسیبهای داخلی زیادی دید، ولی جان سالم به در برد.



**شکل ۶-۸** شیرجه روندهٔ هوا در وضعیت «عقاب گسترده بال» کشش هوا را بیشینه می‌کند.

2 Gregory Robertson
3 Debbie Williams

**مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۴**

اگر یک گربهٔ در حال سقوط در حالی که خودش را جمع کرده است به تندی حد اول ۹۷km/h برسد و سپس با بازکردن خود $A$ را دو برابر کند، در هنگام رسیدن به تندی حد جدید، تندی سقوط چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** تندیهای حد گربه، مطابق معادلهٔ ۶-۱۶، به مساحت مقطع مؤثر گربه هم بستگی دارد. در نتیجه می‌توانیم از آن معادله، نسبت تندیهای حد را به دست آوریم. $v_{to}$ و $v_{tn}$ را به ترتیب تندیهای حد اول و جدید، و $A_o$ و $A_n$ را به ترتیب سطح مقطعهای اول و جدید می‌گیریم. آنگاه با استفاده از معادلهٔ ۶-۱۶ خواهیم داشت

$$\frac{v_{tn}}{v_{to}}=\frac{\sqrt{۲F_g/C\rho A_n}}{\sqrt{۲F_g/C\rho A_o}}=\sqrt{\frac{A_o}{A_n}}=\sqrt{\frac{A_o}{۲A_o}}=\sqrt{۰/۵}\approx ۰/۷$$

که بدین معناست که $v_{tn}\approx ۰/۷\,v_{to}$ یا حدود ۶۸km/h است.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۵**

یک قطرهٔ باران به شعاع $R=۱/۵\ \text{mm}$ از ابری که در ارتفاع $h=۱۲۰۰\text{m}$ بالای سطح زمین است، سقوط می‌کند. ضریب کششی $C$ برای قطره ۰/۶۰ است. فرض کنید شکل قطره در سرتاسر سقوطش کروی است. چگالی آب $\rho_w$ برابر با $۱۰۰۰\ \text{kg/m}^۳$ و چگالی هوا $\rho_a$ برابر $۱/۲\text{kg/m}^۳$ است. (الف) تندی حد قطره چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** قطره هنگامی به تندی حد $v_t$ می‌رسد که نیروی گرانشی وارد بر آن با نیروی کشش هوای وارد بر آن به تعادل برسد و در نتیجه شتاب قطره صفر شود. بنابراین، می‌توانستیم با استفاده از قانون دوم نیوتون و معادلهٔ نیروی کششی، $v_t$ را به دست آوریم؛ ولی معادلهٔ ۶-۱۶ همهٔ اینها را برای ما انجام می‌دهد.

***محاسبه‌ها:*** برای استفاده از معادلهٔ ۶-۱۶، به سطح مقطع مؤثر $A$ قطره و بزرگی نیروی گرانشی $F_g$ وارد به قطره نیاز داریم. چون قطره کروی است، $A$ مساحت دایره‌ای به شعاع کره است (یعنی $\pi R^۲$). برای یافتن $F_g$، از سه واقعیت استفاده می‌کنیم: (۱) $F_g=mg$، که در آن $m$ جرم قطره است؛ (۲) حجم قطره (کروی) برابر با $V=\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ است؛ و (۳) چگالی آب داخل قطره، جرم به حجم یا $\rho=m/V$ است. بنابراین، خواهیم داشت

$$F_g=V\rho_w g=\frac{۴}{۳}\pi R^۳\rho_w g$$

حال این مقدار و نیز مقدار $A$، و داده‌های معلوم را در معادلهٔ ۶-۱۶ قرار می‌دهیم. باید دقت کنیم که بین چگالی هوا $\rho_a$ و چگالی آب $\rho_w$ تمایز قایل شویم. از آنجا به دست می‌آوریم

$$v_t=\sqrt{\frac{۲F_g}{C\rho_a A}}=\sqrt{\frac{۸\pi R^۳\rho_w g}{۳C\rho_a\pi R^۲}}=\sqrt{\frac{۸R\rho_w g}{۳C\rho_a}}$$

$$=\sqrt{\frac{۸(۱/۵\times۱۰^{-۳}\ \text{m})(۱۰۰۰\text{kg/m}^۳)(۹/۸\text{m/s}^۲)}{(۳)(۰/۶۰)(۱/۲\text{kg/m}^۳)}}$$

$$=۷/۴\text{m/s}\approx ۲۷\ \text{km/h}\qquad\text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که ارتفاع ابر در این محاسبه وارد نمی‌شود. همان‌طور که جدول ۶-۱ نشان می‌دهد، قطرهٔ باران فقط پس از چند متر سقوط به تندی حد می‌رسد.

(ب) اگر هیچ نیروی کششی از طرف هوا بر قطره وارد نشود، تندی قطره درست پیش از برخورد با زمین چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** در نبود نیروی کششی که تندی قطره را در حین سقوط کاهش می‌دهد، قطره با شتاب سقوط آزاد ثابت g پایین می‌آید و از اینرو می‌توانیم از معادله‌های حرکت با شتاب ثابت جدول ۲-۱ استفاده کنیم.

***محاسبه‌ها:*** چون شتاب $g$ معلوم است، سرعت اولیهٔ $v_۰$ برابر صفر، و جابه‌جایی $x-x_۰$ برابر $-h$ است، با استفاده از معادلهٔ ۲-۱۶، $v$ به دست می‌آید

$$v=\sqrt{۲gh}=\sqrt{(۲)(۹/۸\text{m/s}^۲)(۱۲۰۰\text{m})}$$

$$=۱۵۳\text{m/s}\approx ۵۵۰\text{km/h}\qquad\text{(پاسخ)}$$

اگر شکسپیر از این نتیجه باخبر بود دیگر چنین نمی‌نوشت: «چون باران لطیفی از عرش بر زمین می‌بارد.» در واقع، تندی نزدیک تندی گلوله از یک تفنگ با کالیبر بزرگ است.

## ۶-۵ حرکت دایره‌ای یکنواخت

از بخش ۴-۷ به خاطر بیاورید که هرگاه جسمی روی یک مسیر دایره‌ای (یا کمانی از دایره) با تندی ثابت v حرکت کند، گفته می‌شود که آن جسم در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت است. همچنین به خاطر بیاورید چنین جسمی یک شتاب مرکزگرا (رو به مرکز دایره) با بزرگی ثابت دارد که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$a=\frac{v^۲}{R}\qquad\text{(شتاب مرکزگرا)}\qquad(۶\text{-}۱۷)$$

که در آن $R$ شعاع دایره است.

در اینجا دو نمونه از حرکت دایره‌ای یکنواخت را بررسی می‌کنیم:

۱. دورزدن یک پیچ با اتومبیل. *فرض کنید در وسط صندلی عقب اتومبیلی که با تندی ثابت بالایی در جادهٔ همواری حرکت می‌کند، نشسته‌اید. وقتی راننده ناگهان به سمت چپ بپیچد و کمانی از یک دایره را طی کند، شما روی صندلی به سمت راست می‌لغزید و در بقیهٔ مسیر گردش اتومبیل، به بدنهٔ اتومبیل فشار وارد می‌آورید. چه چیزی رخ داده است؟*

وقتی که اتومبیل روی یک کمان دایره‌ای حرکت می‌کند، در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت است و بر آن شتابی رو به مرکز کمان وارد می‌شود. بنابر قانون دوم نیوتون، یک نیرو باید عامل این شتاب باشد. به علاوه، این نیرو هم باید رو به مرکز کمان داشته باشد. بنابراین، این نیرو، یک **نیروی مرکزگرا** است که پسوند مرکزگرا جهت این نیرو را نشان می‌دهد. در این مثال، نیروی مرکزگرا یک نیروی اصطکاک است که جاده به لاستیکهای اتومبیل وارد می‌کند؛ این نیرو است که دورزدن را ممکن می‌کند.

اگر بخواهید با اتومبیل حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام دهید، بر شما نیز باید یک نیروی مرکزگرا وارد شود. اما روشن است که نیروی اصطکاک وارد بر شما از سوی صندلی آنقدر بزرگ نیست که باعث حرکت شما روی مسیر دایره‌ای به همراه اتومبیل شود. بنابراین، صندلی از زیر شما می‌لغزد تا اینکه به بدنهٔ سمت راست اتومبیل برسید. فشاری که بدنه به شما وارد می‌آورد نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای شما را فراهم می‌سازد و بدین ترتیب همراه با اتومبیل حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهید.

**۲.** *چرخش به دور زمین.* حال فرض کنید سرنشین سفینهٔ فضایی *آتلانتیس*[1] هستید. وقتی که شما همراه با سفینه به دور زمین می‌گردید، در اتاقک خود شناور می‌شوید. در این حالت چه چیزی رخ داده است؟

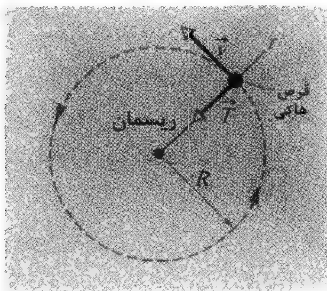
شما و سفینه هر دو حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهید و شتابهایی رو به مرکز دایره دارید. دوباره از قانون دوم نیوتون درمی‌یابیم که نیروهای مرکزگرا باید عامل این شتابها باشند. این بار نیروهای مرکزگرا، نیروهای جاذبهٔ گرانشی هستند که بر شما و سفینه از سوی کرهٔ زمین وارد می‌شوند و راستای آنها رو به مرکز زمین است.

هم در مثال اتومبیل و هم در این مثال، شما در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت هستید و نیروی مرکزگرایی بر شما وارد می‌شود. با این حال آنچه که شما در این دو وضعیت حس می‌کنید کاملاً با هم متفاوت است. در اتومبیل، با چسبیده‌شدن به بدنهٔ آن، از فشاری که بدنه به شما وارد می‌کند باخبر می‌شوید. ولی در سفینهٔ در حال چرخش، شما شناورید و احساس نمی‌کنید که بر شما نیرویی وارد می‌شود. دلیل این تفاوت چیست؟

این تفاوت به دلیل ماهیت متفاوت این دو نیروی مرکزگراست. در اتومبیل، نیروی مرکزگرا به آن بخشی از بدن که در تماس با بدنهٔ اتومبیل است وارد می‌شود. شما می‌توانید فشار وارد بر آن بخش از بدن خود را حس کنید. در سفینه، نیروی مرکزگرا نیروی جاذبهٔ گرانشی زمین است که بر هر اتم بدن شما وارد می‌شود. بنابراین، هیچ فشاری (یا هل دادنی) بر هیچ بخشی از بدن شما وجود ندارد و در نتیجه هیچ نیرویی را احساس نمی‌کنید. (به این احساس، «بی‌وزنی» گفته می‌شود، هر چند که عبارتی گول زننده است. زیرا نیروی جاذبهٔ وارد از زمین بر شما ناپدید نشده است و در واقع فقط اندکی کمتر از مقدار آن روی سطح زمین است.)

مثال دیگری از نیروی مرکزگرا در شکل ۶-۹ نشان داده شده است. در اینجا یک قرص هاکی توسط ریسمانی به یک میخ بسته شده است. قرص حول میخ با تندی ثابت $v$ روی یک دایره حرکت می‌کند. این بار نیروی مرکزگرا، نیروی کشش ریسمان است که به طور شعاعی رو به داخل، بر قرص وارد می‌شود. بدون وجود چنین نیرویی، قرص به جای آنکه حرکت دایره‌ای انجام دهد، در امتداد خط مستقیمی به سمت خارج حرکت می‌کند.

دوباره توجه کنید که نیروی مرکزگرا یک نوع نیروی جدید نیست و این نام صرفاً جهت نیرو را نشان می‌دهد. در واقع، این نیروی مرکزگرا می‌تواند نیروی اصطکاک، نیروی گرانشی، نیروی وارد از بدنهٔ اتومبیل یا یک ریسمان، یا هر نیروی دیگری باشد. برای کلیهٔ حالتها می‌توان گفت:




**شکل ۶-۹** دید از بالای یک قرص هاکی که با تندی ثابت $v$ در مسیری دایره‌ای به شعاع $R$ روی یک سطح افقی بدون اصطکاک، حرکت می‌کند. نیروی مرکزگرای وارد بر توپ، کشش $\vec{T}$ است که از ریسمان وارد می‌شود و رو به داخل در امتداد محور شعاعی $r$ است.

> نیروی مرکزگرا با تغییر جهت سرعت جسم، بدون تغییر دادن تندی، به جسم شتاب می‌دهد.

با استفاده از قانون دوم نیوتون و معادلهٔ ۶-۱۷ $(a=v^2/R)$، می‌توانیم بزرگی نیروی مرکزگرا یا نیروی مرکزگرای خالص $F$ را چنین بنویسیم

$$F=m\frac{v^2}{R} \qquad \text{(بزرگی نیروی مرکزگرا)} \qquad (۶-۱۸)$$

چون در اینجا تندی ثابت است، بزرگی‌های شتاب و نیرو نیز ثابت‌اند.

البته جهتهای شتاب و نیروی مرکزگرا ثابت نیستند؛ آنها در حالی که همواره رو به مرکز دایره‌اند، دائماً تغییر می‌کنند. به همین دلیل است که غالباً بردارهای شتاب و نیروی مرکزگرا، در امتداد محور شعاعی $r$ که با جسم حرکت می‌کند و همواره از

---
1. Atlantis

مرکز تا جسم امتداد می‌یابد (به شکل ۶-۹ نگاه کنید)، رسم می‌شوند. در حالی‌که سوی مثبت محور $r$ به طور شعاعی رو به خارج است، بردارهای شتاب و نیروی مرکزگرا به طور شعاعی رو به داخل دارند.

> **نکتهٔ وارسی ۲** وقتی در یک چرخ و فلک نشسته‌اید و چرخ با تندی ثابتی می‌چرخد، جهت شتاب $\vec{a}$ و نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد به شما (همواره از صندلی به طرف بالا) موقع عبور از (الف) بالاترین نقطه، و (ب) پایینترین نقطهٔ چرخ چیست؟

**مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۶**

ایگور فضانورد یک ایستگاه فضایی بین المللی است که در ارتفاع $h$ برابر $520\,km$، با تندی ثابت $v = 7/6\,km/s$ به دور زمین می‌چرخد. جرم $m$ ایگور $79\,kg$ است.
(الف) شتاب او چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** ایگور در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت است و بنابراین، شتاب مرکزگرایی دارد که بزرگی آن بـا معادلهٔ ۶-۱۷ داده می‌شود ($a = v^2/R$).

***محاسبه:*** شعاع $R$ حرکت ایگور برابر با $R_E + h$ است که در آن $R_E$ شعاع زمین (با استفاده از پیوست پ، برابر $6/37 \times 10^6\,m$) است. بنابراین، داریم

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{R_E + h}$$

$$= \frac{(7/6 \times 10^3\,m/s)^2}{6/37 \times 10^6\,m + 0/52 \times 10^6\,m}$$

$$= 8/38\,m/s^2 \approx 8/4\,m/s^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

این مقدار، شتاب سقوط آزاد در ارتفاعی است که ایگور در آن قرار دارد. اگر او به جای اینکه در چنین مداری قرار گرفته باشد، به آن ارتفاع برده می‌شد و سپس رها می‌گردید، او با همین شتاب شروع به سقوط به سوی مرکز زمین می‌کرد. اختلاف این دو وضعیت در این است که وقتی او به دور زمین می‌چرخد، همواره یک حرکت «جانبی» نیز دارد: در هنگام سقوط، او به پهلو هم حرکت می‌کند، به گونه‌ای که حرکت او در طول یک مسیر خمیده به دور زمین انجام می‌گیرد.
(ب) چه نیرویی از زمین بر ایگور وارد می‌شود؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) چون ایگور در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت است باید به او یک نیروی مرکزگرا وارد شود. (۲) این نیرو، نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر او از سوی زمین است که رو به سمت مرکز چرخش او (واقع در مرکز زمین) قرار دارد.

***محاسبه:*** با نوشتن قانون دوم نیوتون در امتداد محور شعاعی $r$ بزرگی این نیرو چنین می‌شود

$$F_g = ma = (79\,kg)(8/38\,m/s^2)$$

$$= 662\,N \approx 660\,N \qquad \text{(پاسخ)}$$

اگر ایگور روی ترازویی واقع در بالای برجی به ارتفاع $h = 520\,km$ می‌ایستاد، ترازو عدد $660\,N$ را نشان می‌داد. در حرکت مداری، ترازو (اگر ایگور می‌توانست روی آن «بایستد») عدد صفر را نشان می‌داد؛ چرا که او و ترازو با هم در حال سقوط آزادند و بنابراین، پاهای او عملاً نمی‌توانند بر ترازو فشاری وارد آورند.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۷**

در سال ۱۹۰۱/۱۲۸۰ بازیگر سیرک *آلو دیاولو*[1] ملقب به «بی‌باک» یک کار نمایشی از دوچرخه سواری در مسیر حلقه‌ای را به نمایش گذاشت، (شکل ۶-۱۰ الف). با فرض اینکه حلقه، دایره‌ای به شعاع $R = 2/7\,m$ باشد، کمترین تندی $v$ که دیاولو می‌توانست در بالاترین نقطهٔ حلقه داشته باشد بدون آنکه تماسش با آن قطع شود، چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توانیم دیاولو و دوچرخه‌اش را که از بالاترین نقطهٔ حلقه می‌گذرند به صورت یک تک ذره فرض کنیم که در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت است. بنابراین، شتاب $\vec{a}$ این ذره در بالاترین نقطهٔ حلقه باید بنابر معادلهٔ ۶-۱۷ بزرگی $a = v^2/R$ را داشته و سوی آن رو به پایین، به سمت مرکز حلقهٔ دایره‌ای باشد.

***محاسبه‌ها:*** نمودار جسم- آزاد شکل ۶-۱۰ ب نیروهای وارد به ذره را هنگامی که در بالاترین نقطهٔ حلقه قرار دارد، نشان می‌دهد. نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ و نیز نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد به ذره از سوی حلقه، در امتداد محور $y$ و رو به پایین قرار دارند. بنابراین، قانون دوم نیوتون برای مؤلفه‌های $y$ $(F_{\text{net},y} = ma_y)$ به دست می‌دهد

$$-F_N - F_g = m(-a)$$

و

$$-F_N - mg = m\left(-\frac{v^2}{R}\right) \qquad (۶-۱۹)$$

اگر ذره *کمترین تندی* $v$ لازم برای آنکه تماسش با حلقه قطع نشود را داشته باشد، آنگاه *در آستانهٔ از دست دادن تماس* با حلقه (جداشدن از حلقه) است و این بدین معناست که $F_N = 0$ است. با قراردادن صفر به جای $F_N$ در معادلهٔ ۶-۱۹ و حل آن برای $v$، پس از قرار دادن مقدارهای معلوم خواهیم داشت

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9/8\,m/s^2)(2/7\,m)}$$

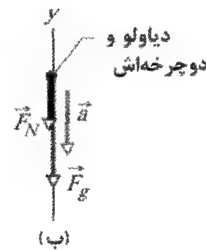
$$= 5/1\,m/s \qquad \text{(پاسخ)}$$

1. Allo Diavolo

***اظهار نظر:*** دیاولو مطمئن بود که تندی او در بالاترین نقطهٔ حلقه بیشتر از $5/1\,\text{m/s}$ است و او از حلقه جدا نمی‌شود. توجه کنید که این تندی مورد نیاز، مستقل از جرم دیاولو و دوچرخه‌اش است. بنابراین، حتی اگر دیاولو قبل از نمایش پرخوری زیادی هم می‌کرد و باز هم می‌توانست به تندی بیش از $5/1\,\text{m/s}$ برسد.




(الف)




(ب)

**شکل ۶-۱۰** (الف) آگهی نمایش دیاولو در آن سالها (ب) نمودار جسم-آزاد دیاولو در بالاترین نقطهٔ حلقه.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۸ مهارت خود را تقویت کنید

حتی برخی از کسانی که سوارشدن در قطارهای هوایی تفریحی که در مسیرهای پرپیچ و خمی حرکت می‌کنند را تجربه کرده‌اند، از فکر سوارشدن در یک *گردونه* که اساس ساختارش یک استوانهٔ توخالی بزرگ است و به سرعت حول محور مرکزی خود می‌چرخد (شکل ۶-۱۱)، به وحشت می‌افتند. پیش از آنکه گردونه شروع به حرکت کند، شخصی از یک در جانبی وارد گردونه می‌شود و در حالی که روی کف ایستاده است به دیوارهٔ گردونه که با کرباس پوشیده شده، تکیه می‌دهد. با بسته‌شدن در، استوانه شروع به چرخیدن می‌کند و شخص، دیواره و کف به طور هماهنگ با هم حرکت می‌کنند. وقتی تندی شخص به مقدار از پیش تعیین شده‌ای برسد، کف به طور ناگهانی و به گونه‌ای اضطراب‌آور از زیر پای شخص فرو می‌افتد. شخص با کف سقوط نمی‌کند، بلکه در حالی که استوانه می‌چرخد به دیواره چسبیده می‌شود، به طوری که انگار یک عامل نادیده (و قدری خصمانه) شخص را به دیواره می‌فشارد. سر آخر، کف به زیر پای شخص برمی‌گردد، تندی استوانه کم می‌شود، و شخص پس از چند سانتی‌متر حرکت رو به پایین، پاهایش به کف می‌رسد. (بعضی از کسانی که سوار گردونه می‌شوند کل این ماجراها را یک شوخی می‌پندارند.)

فرض کنید ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s$ بین لباس شخص و کرباس $0/40$ و شعاع $R$ استوانه برابر با $2/1\,\text{m}$ باشد.

(الف) تندی کمینهٔ $v$ استوانه و شخص چقدر باید باشد تا شخص به هنگام فرو افتادن کف، سقوط نکند؟

### نکته‌های کلیدی

۱. نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر شخص می‌خواهد او را به سمت پایین دیواره بلغزاند، ولی به دلیل نیروی اصطکاک رو به بالایی که از طرف دیواره به شخص وارد می‌شود، او به پایین نمی‌لغزد (شکل ۶-۱۱).

۲. اگر شخص در آستانهٔ لغزش رو به پایین باشد، نیروی اصطکاک باید رو به بالا و از نوع *ایستایی* و در مقدار بیشینه‌اش $\mu_s F_N$ باشد، که $F_N$ بزرگی نیروی عمودی وارد به شخص از طرف استوانه است.

۳. نیروی عمودی به طور افقی رو به محور مرکزی استوانه است و نیروی مرکزگرایی است که باعث حرکت شخص روی یک مسیر دایره‌ای با شتابی به بزرگی $a = v^2/R$ می‌شود که به سمت مرکز دایره است.

ما تندی $v$ را می‌خواهیم با این شرط که شخص در آستانه لغزش باشد.

***محاسبه‌های عمودی:*** نخست یک محور قائم $y$ را در راستای بدن شخص اختیار می‌کنیم، به گونه‌ای که سوی مثبت آن رو به بالا باشد. آنگاه می‌توانیم قانون دوم نیوتون را برای شخص به کار گیریم. به این منظور قانون دوم نیوتون را برای مؤلفه‌های $y$ $(F_{\text{net},y} = ma_y)$ چنین می‌نویسیم

$$f_s - mg = m(0)$$

که در آن $m$ جرم شخص و $mg$ بزرگی نیروی $\vec{F}_g$ است. چون شخص در آستانهٔ حرکت است، مقدار بیشینهٔ $\mu_s F_N$ را به جای $f_s$ در این معادله قرار می‌دهیم. از آنجا خواهیم داشت

$$\mu_s F_N - mg = 0$$

یا

$$F_N = \frac{mg}{\mu_s} \qquad (۶\text{-}۲۰)$$

***محاسبه‌های شعاعی:*** حال محور شعاعی $r$ را که از شخص می‌گذرد، به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که سوی مثبت آن به طرف خارج باشد. سپس قانون دوم نیوتون را می‌توانیم در امتداد این محور بنویسیم

$$-F_N = m\left(-\frac{v^2}{R}\right) \qquad (۶\text{-}۲۱)$$

با قراردادن معادلهٔ ۶-۲۰ به جای $F_N$ و سپس حل کردن آن برای $v$، به دست می‌آوریم

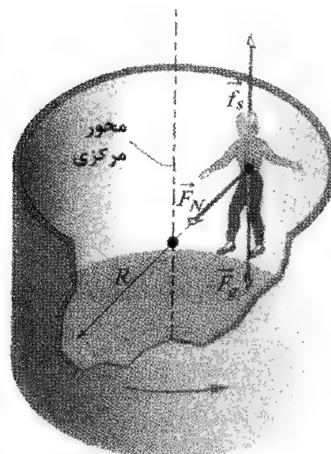
$$v=\sqrt{\frac{gR}{\mu_s}}=\sqrt{\frac{(۹/۸\,m/s^۲)(۲/۱\,m)}{۰/۴۰}}$$
$$=۷/۱۷\,m/s\approx ۷/۲\,m/s$$ (پاسخ)

توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم شخص است و برای هر شخصی که در گردونه قرار بگیرد، از یک بچه گرفته تا یک کشتی‌گیر سنگین وزن، برقرار است. به همین دلیل است که کسی را که می‌خواهد سوار گردونه بشود «وزن نمی‌کنند».

(ب) اگر جرم شخص ۴۹kg باشد، بزرگی نیروی مرکزگرای وارد به او چقدر است؟

***محاسبه‌ها:*** بنابر معادلهٔ ۶-۲۱ داریم

$$F_N=m\frac{v^۲}{R}=(۴۹\,kg)\frac{(۷/۱۷\,m/s)^۲}{۲/۱\,m}$$
$$\approx ۱۲۰۰\,N$$ (پاسخ)




**شکل ۶-۱۱** یک گردونه در شهر بازی؛ نیروهای وارد بر شخص نشان داده شده‌اند. نیروی مرکزگرا، نیروی عمودی $\vec{F}_N$ است که دیواره به طرف مرکز گردونه به شخص وارد می‌کند.

اگر چه این نیرو رو به سمت محور مرکزی دارد، ولی احساس غالب شخص این است که نیرو، رو به بیرون او را به طور شعاعی به دیواره می‌چسباند. این احساس از این واقعیت ناشی می‌شود که شخص در یک چارچوب نالخت قرار دارد (او و چارچوب شتابدارند). از دیدگاه چنین چارچوبهایی نیروها می‌توانند فریب دهنده باشند و این هم، بخشی از جاذبهٔ گردونه است.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۹ مهارت خود را تقویت کنید

***مسابقه در حالت وارونه:*** اتومبیل مسابقهٔ جدید طوری طراحی می‌شود که هوای گذر کرده اتومبیل را به پایین می‌فشارد و امکان می‌دهد تا اتومبیل موقع مسابقه در یک پیچ تخت بدون نبودن اصطکاک سریعتر حرکت کند. این فشار رو به پایین *بالابر منفی* نامیده می‌شود. آیا یک اتومبیل می‌تواند آنقدر بالابر منفی داشته باشد که مثل اتومبیل بزرگ تخیلی در فیلم مردان در تاریکی به صورت وارونه حرکت کند؟

شکل ۶-۱۲ الف یک اتومبیل مسابقه به جرم $m=۶۰۰\,kg$ را در حال حرکت روی مسیری تخت در یک پیچ دایره‌ای به شعاع $R=۱۰۰\,m$ نشان می‌دهد. به دلیل شکل این اتومبیل و گلگیرهایی که روی آن نصب کرده‌اند، هوای عبوری یک نیروی بالابر منفی $\vec{F}_L$ را که رو به پایین است به اتومبیل وارد می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیکها و مسیر برابر با ۰/۷۵ است. (فرض کنید نیروهای وارد بر هر چهار لاستیک یکسان هستند.)

(الف) اگر اتومبیل هنگامی که سرعتش $۲۸/۶\,m/s$ است در آستانهٔ لغزش به سمت بیرون از پیچ قرار گیرد، بزرگی $\vec{F}_L$ چقدر است؟

### نکته‌های کلیدی

**۱.** چون اتومبیل در حال حرکت به دور یک پیچ دایره‌ای است، یک نیروی مرکزگرا باید بر آن وارد شود؛ این نیرو باید رو به مرکز انحنای پیچ (که در اینجا افقی است) داشته باشد.
**۲.** تنها نیروی افقی وارد بر اتومبیل، نیروی اصطکاک وارد بر چرخ‌ها از طرف جاده است. بنابراین، نیروی مرکزگرای مورد نیاز، همان نیروی اصطکاک است.
**۳.** چون اتومبیل نمی‌لغزد، نیروی اصطکاک باید نیروی اصطکاک *ایستایی* $\vec{f}_s$ باشد (شکل ۶-۱۲ الف).
**۴.** چون اتومبیل در آستانهٔ لغزش قرار دارد، بزرگی $f_s$ برابر با مقدار بیشینهٔ $f_{s,\max}=\mu_s F_N$ است که در آن $F_N$ بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد بر اتومبیل از طرف مسیر است.

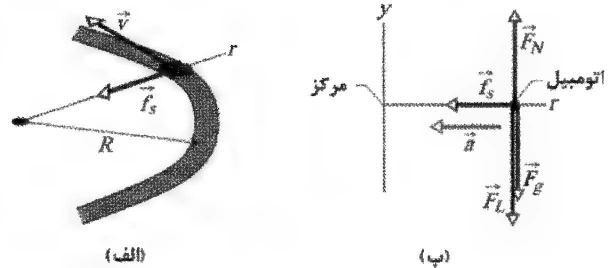
***محاسبه‌های شعاعی:*** نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ در نمودار جسم-آزاد شکل ۶-۱۲ ب نشان داده شده است. این نیرو در جهت منفی محور شعاعی $r$ قرار دارد و همواره از مرکز انحنا تا اتومبیل در حال حرکت امتداد دارد. این نیرو یک شتاب مرکزگرا به بزرگی $v^۲/R$ ایجاد می‌کند. نیرو و شتاب را می‌توانیم با نوشتن قانون دوم نیوتون برای مؤلفه‌های واقع بر امتداد محور $r$ $(F_{net,r}=ma_r)$ به هم مربوط کنیم

$$-f_s=m\left(-\frac{v^۲}{R}\right) \qquad (۶\text{-}۲۲)$$

با قراردادن $f_{s,\max}=\mu_s F_N$ به جای $f_s$ خواهیم داشت

$$\mu_s F_N=m\left(\frac{v^۲}{R}\right) \qquad (۶\text{-}۲۳)$$

***محاسبه‌های قائم:*** حال نیروهای قائم وارد بر اتومبیل را در نظر می‌گیریم. جهت نیروی عمودی $\vec{F}_N$ رو به بالا، در جهت مثبت محور $y$ در شکل ۶-۱۲ ب است. نیروی گرانشی $\vec{F}_g=m\vec{g}$ و نیروی بالا برندهٔ منفی، رو به پایین هستند. شتاب اتومبیل در امتداد محور $y$، صفر است. از اینرو، قانون دوم




**شکل ۶-۱۲** (الف) یک اتومبیل مسابقه، در مسیر خمیدهٔ تختی با تندی ثابت $v$ حرکت می‌کند. نیروی اصطکاک $\vec{f_s}$ نیروی مرکزگرای لازم در امتداد محور شعاعی $r$ را فراهم می‌کند. (ب) نمودار جسم-آزاد (بدون توجه به مقیاس) برای اتومبیل، در یک صفحهٔ قائم که شامل $r$ است.

دوم نیوتون برای مؤلفه‌های واقع بر امتداد $y$ $(F_{\text{nat},y} = ma_y)$ به دست می‌دهد

$$F_N - mg - F_L = ۰$$

یا

$$F_N = mg + F_L \qquad (۶-۲۴)$$

***ترکیب نتیجه‌ها:*** اکنون می‌توانیم نتیجه‌ها را در امتداد دو محور با قراردادن معادلهٔ ۶-۲۴ به جای $F_N$ در معادلهٔ ۶-۲۳ با هم ترکیب کنیم. با انجام این کار و حل نتیجهٔ آن برای $F_L$ به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$F_L = m\left(\frac{v^۲}{\mu_s R} - g\right)$$

$$= (۶۰۰\text{kg})\left(\frac{(۲۸/۶\text{m/s})^۲}{(۰/۷۵)(۱۰۰\text{m})} - ۹/۸\text{m/s}^۲\right)$$

$$= ۶۶۳/۷\,\text{N} \approx ۶۶۰\,\text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) بزرگی $F_L$ نیروی بالابر منفی وارد بر اتومبیل، درست مثل نیروی کششی، به مربع تندی اتومبیل $v^۲$ بستگی دارد (معادلهٔ ۶-۱۴). بنابراین، در اینجا نیروی بالابر منفی وارد بر اتومبیل هنگامی که اتومبیل با تندی بیشتری مسیر را طی می‌کند، بزرگتر می‌شود. بزرگی نیروی بالابر منفی برای تندی $۹۰\,\text{m/s}$ چقدر است؟

**نکته کلیدی** $F_L$ متناسب با $v^۲$ است.

***محاسبه‌ها:*** بنابراین، می‌توانیم نسبت نیروی بالابر منفی در $v = ۹۰\,\text{m/s}$ یعنی $F_{L,۹۰}$، را به نتیجه‌ای که برای $F_L$ در $v = ۲۸/۶\,\text{m/s}$ به دست آوردیم، چنین بنویسیم

$$\frac{F_{L,۹۰}}{F_L} = \frac{(۹۰\,\text{m/s})^۲}{(۲۸/۶\,\text{m/s})^۲}$$

با قراردادن $F_L = ۶۶۳/۷\,\text{N}$ و حل آن برای $F_{L,۹۰}$ به دست می‌آوریم

$$F_{L,۹۰} = ۶۵۷۲\,\text{N} \approx ۶۶۰۰\,\text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

***مسابقه در حالت وارونه:*** نیروی گرانشی وارد بر اتومبیل برابر است با

$$F_g = mg = (۶۰۰\text{kg})(۹/۸\text{m/s}^۲)$$
$$= ۵۸۸۰\,\text{N}$$

وقتی این اتومبیل وارونه شود، نیروی بالابر منفی یک نیروی *رو به بالا* به بزرگی $۶۶۰۰\text{N}$ است. این مقدار بیشتر از نیروی گرانشی رو به پایین به بزرگی $۵۸۸۰\,\text{N}$ است. بنابراین، اصولاً این اتومبیل می‌تواند روی سقف حرکت کند *مشروط بر آنکه* با تندی حدود $۹۰\,\text{m/s}(= ۳۲۴\text{km/h} = ۲۰۱\text{mi/h})$ حرکت کند.

## مسئلهٔ نمونه ۶-۱۰

برای جلوگیری از لغزیدن اتومبیلها در پیچها، همواره بخشهای خمیدهٔ بزرگراه‌ها را شیب‌بندی می‌کنند. وقتی سطح بزرگراه خشک است، نیروی اصطکاک بین لاستیکها و سطح جاده ممکن است برای جلوگیری از لغزش اتومبیل کفایت کند. ولی وقتی سطح بزرگراه خیس است، نیروی اصطکاک ممکن است ناچیز باشد، و در این هنگام است که شیب بندی جاده‌ها ضرورت پیدا می‌کند. شکل ۶-۱۳ الف اتومبیلی به جرم $m$ را نشان می‌دهد که با تندی ثابت $v = ۲۰\,\text{m/s}$ به دور یک مسیر دایره‌ای شیب‌بندی شده به شعاع $R = ۱۹۰\,\text{m}$ حرکت می‌کند (توجه کنید که این، یک اتومبیل معمولی است نه یک اتومبیل مسابقه. از اینرو هر نیروی قائمی ناشی از عبور هوا قابل چشمپوشی است). اگر نیروی اصطکاک وارد از مسیر قابل چشمپوشی باشد، زاویهٔ شیب‌بندی $\theta$ برای جلوگیری از لغزش اتومبیلها چقدر باید باشد؟

**نکته کلیدی** برخلاف مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۹، مسیر شیب‌بندی شده است به گونه‌ای که نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد بر اتومبیل به سمت مرکز دایره متمایل می‌شود (شکل ۶-۱۳ ب). بنابراین، اکنون $\vec{F}_N$ یک مؤلفهٔ مرکزگرا به بزرگی $F_{Nr}$ دارد که جهت آن رو به داخل در امتداد محور شعاعی $r$ است. می‌خواهیم مقدار زاویهٔ شیب $\theta$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که این مؤلفهٔ مرکزگرا اتومبیل را بی‌آنکه نیازی به اصطکاک باشد روی مسیر دایره‌ای نگه دارد.

***محاسبهٔ شعاعی:*** همان‌گونه که شکل ۶-۱۳ ب نشان می‌دهد (که باید شما آن را بررسی کنید)، زاویه‌ای که نیروی $\vec{F}_N$ با قائم می‌سازد برابر با زاویهٔ شیب‌بندی $\theta$ مسیر است. بنابراین، مؤلفهٔ شعاعی $F_{Nr}$ برابر با $F_N \sin\theta$ است. اکنون قانون دوم نیوتون را می‌توانیم برای مؤلفه‌های در امتداد $r$ $(F_{\text{net},r} = ma_r)$ چنین بنویسیم

$$-F_N \sin\theta = m\left(-\frac{v^۲}{R}\right) \qquad (۶-۲۵)$$

چون این معادله شامل مجهولهای $F_N$ و $m$ است، آن را نمی‌توانیم برای به دست آوردن مقدار $\theta$ حل کنیم.

***محاسبه‌های عمودی:*** حال نیروها و شتاب در امتداد محور $y$ در شکل ۶-۱۳ ب را درنظر می‌گیریم. مؤلفهٔ قائم نیروی عمودی برابر با $F_{Ny} = F_N \cos\theta$ است، نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد به اتومبیل دارای بزرگی $mg$ است و شتاب اتومبیل در امتداد محور $y$ صفر است. بنابراین قانون دوم نیوتون را می‌توانیم برای مؤلفه‌های در امتداد محور $y$ ($F_{\text{net},y} = ma_y$) چنین بنویسیم

$$F_N \cos\theta - mg = m(0)$$

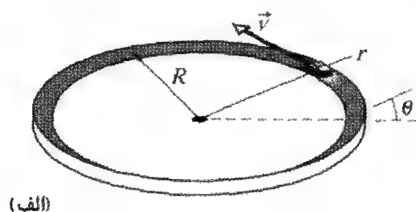
و از آنجا به دست می‌آوریم

$$F_N \cos\theta = mg \qquad (۶-۲۶)$$

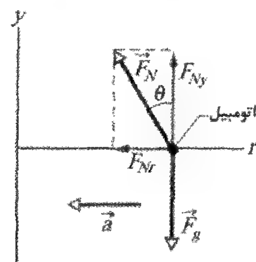
***ترکیب نتیجه‌ها:*** معادلهٔ ۶-۲۶ نیز شامل دو مجهول $F_N$ و $m$ است، ولی توجه کنید که اگر معادلهٔ ۶-۲۵ را بر معادلهٔ ۶-۲۶ تقسیم کنیم، هر دو مجهول به سادگی حذف می‌شوند. با انجام این کار و قراردادن $\tan\theta$ به جای $(\sin\theta)/(\cos\theta)$ و حل برای $\theta$ خواهیم داشت

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v^2}{gR}$$

$$= \tan^{-1}\frac{(20\,\text{m/s})^2}{(9/8\,\text{m/s}^2)(190\,\text{m})} = 12° \qquad \text{(پاسخ)}$$



(الف)



(ب)

**شکل ۶-۱۳** (الف) اتومبیلی با تندی ثابت $v$ به دور یک جادهٔ خمیدهٔ شیب‌بندی شده حرکت می‌کند. برای روشن شدن مطلب زاویهٔ شیب‌بندی با اغراق نشان داده شده است. (ب) نمودار جسم-آزاد برای اتومبیل، با فرض آنکه اصطکاک بین لاستیکها و جاده صفر باشد و بر اتومبیل نیروی بالابر منفی وارد نشود. مؤلفهٔ شعاعی رو به داخل نیروی قائم $F_{Nr}$ (در امتداد محور $r$) نیروی مرکزگرا و شتاب شعاعی لازم را فراهم می‌سازد.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**اصطکاک** هنگامی یک نیروی $\vec{F}$ بخواهد جسمی را روی سطحی بلغزاند، از طرف سطح یک **نیروی اصطکاک** بر آن جسم وارد می‌شود. این نیروی اصطکاک موازی با سطح است و جهت آن در سویی است که با لغزش مخالفت می‌کند. این نیرو ناشی از پیوندی است که میان جسم و سطح ایجاد می‌شود.

اگر جسم نلغزد، نیروی اصطکاک، **نیروی اصطکاک ایستایی** $\vec{f}_s$ است. ولی اگر جسم بلغزد، نیروی اصطکاک، **نیروی اصطکاک جنبشی** $\vec{f}_k$ است.

۱. اگر جسم حرکت نکند، نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ و آن مؤلفه‌ای از $\vec{F}$ که موازی سطح است از لحاظ بزرگی یکسان و از لحاظ جهت در خلاف یکدیگرند. اگر مؤلفهٔ موازی افزایش یابد، $f_s$ نیز افزایش می‌یابد.

۲. بزرگی $\vec{f}_s$ دارای یک مقدار بیشینهٔ $f_{s,\max}$ است که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N \qquad (۶-۱)$$

که در آن $\mu_s$ **ضریب اصطکاک ایستایی** و $F_N$ بزرگی نیروی عمودی است. اگر آن مؤلفهٔ $\vec{F}$ که موازی سطح است از $f_{s,\max}$ بیشتر شود، آنگاه جسم روی سطح می‌لغزد.

۳. هرگاه جسم شروع به لغزیدن روی سطح کند، بزرگی نیروی اصطکاک به سرعت به مقدار ثابت $f_k$ کاهش می‌یابد که این مقدار با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$f_k = \mu_k F_N \qquad (۶-۲)$$

که در آن $\mu_k$ **ضریب اصطکاک جنبشی** است.

**نیروی کششی** هرگاه میان هوا (یا هر شارهٔ دیگری) و یک جسم سرعت نسبی وجود داشته باشد، بر جسم **نیروی کششی** $\vec{D}$ وارد می‌شود که سوی آن در خلاف حرکت نسبی و در جهتی است که در آن شاره نسبت به جسم شارش می‌کند. بزرگی $\vec{D}$ با **ضریب کششی** $C$ که با تجربه تعیین می‌شود، با رابطهٔ زیر به تندی نسبی $v$ مربوط است

$$D = \frac{1}{2} C\rho A v^2 \qquad (۶-۱۴)$$

که در آن $\rho$ چگالی شاره (جرم بر واحد حجم) و $A$ **سطح مقطع مؤثر** جسم (مساحت مقطعی عمود بر سرعت نسبی $\vec{v}$) است.

**تندی حد** هرگاه جسمی با لبه‌های پهن مسافت به حد کافی بلندی را در هوا طی کند، بزرگیهای نیروی کششی $\vec{D}$ و نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد به جسم با هم برابر می‌شوند. آنگاه جسم با **تندی حد** ثابتی که با رابطهٔ زیر داده می‌شود سقوط می‌کند

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}} \qquad (۶-۱۶)$$

**حرکت دایره‌ای یکنواخت** اگر یک ذره روی دایره‌ای یا کمانی از یک دایره به شعاع $R$، با تندی ثابت $v$ حرکت کند، گفته می‌شود که آن ذره در حال **حرکت دایره‌ای یکنواخت**

است. آنگاه ذره یک **شتاب مرکزگرای** $\vec{a}$ دارد که بزرگی آن با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$a=\frac{v^{2}}{R} \quad (۶-۱۷)$$

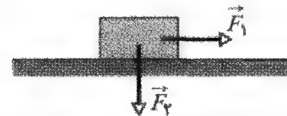
این شتاب ناشی از **نیروی مرکزگرای** خالصی است که بر جسم وارد می‌شود و مقدار آن با رابطهٔ

$$F=\frac{mv^{2}}{R} \quad (۶-۱۸)$$

داده می‌شود که در آن $m$ جرم ذره است. کمیتهای برداری $\vec{a}$ و $\vec{F}$ در جهت مرکز انحنای مسیر حرکت ذره‌اند.

## پرسشها

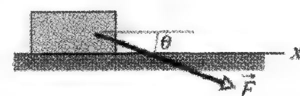
۱- در شکل ۶-۱۴، نیروی افقی $\vec{F}_1$ به بزرگی ۱۰N بر جعبه‌ای واقع بر کف اتاق وارد می‌شود، ولی جعبه نمی‌لغزد. همین‌که بزرگی نیروی قائم $\vec{F}_2$ از صفر شروع به افزایش کند، آیا کمیتهای زیر افزایش می‌یابند یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌مانند؟: (الف) بزرگی نیروی اصطکاک $f_s$ وارد بر جعبه؛ (ب) بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد به جعبه از طرف کف اتاق؛ (پ) مقدار بیشینهٔ $f_{s,\max}$ بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جعبه؟ (ت) آیا جعبه سرانجام می‌لغزد؟



شکل ۶-۱۴ پرسش ۱

۲- در سه آزمایش، سه نیروی افقی متفاوت به قطعه‌ای که روی میزی قرار گرفته است، وارد می‌شود. بزرگی این نیروها عبارت است از: $F_1=12N$ ، $F_2=8N$ و $F_3=4N$ . در هر آزمایش قطعه بدون توجه به نیروی وارد شده در حالت سکون باقی می‌ماند. نیروها را بنا بر (الف) بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی $f_s$ که از سطح میز بر قطعه وارد می‌شود و (ب) مقدار بیشینهٔ $f_{s,\max}$ این نیرو، از بیشترین تا کمترین مقدار مرتب کنید.

۳- در شکل ۶-۱۵، اگر جعبه ساکن باشد و زاویهٔ $\theta$ بین افق و نیروی $\vec{F}$ را قدری افزایش دهیم، آیا کمیتهای زیر افزایش می‌یابند یا کاهش یا بدون تغییر می‌مانند؟ (الف) $F_x$ ؛ (ب) $f_s$ ؛ (پ) $F_N$ ؛ (ت) $f_{s,\max}$ ؟ (ث) حال فرض کنید جعبه در حال لغزیدن باشد و $\theta$ افزایش یابد، آیا بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر جعبه افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟

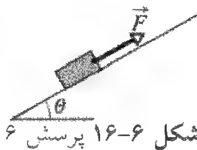


شکل ۶-۱۵ پرسش ۳

۴- پرسش ۳ را اگر این بار زاویهٔ $\theta$ نیروی $\vec{F}$ به جای پایین در شکل رسم شده رو به بالا باشد، تکرار کنید.

۵- اگر یک جعبهٔ سیب را به دیواری چنان محکم فشار دهید که جعبه نتواند رو به پایین بلغزد، جهت (الف) نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ وارد بر جعبه از سوی دیوار و (ب) نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد به جعبه از سوی دیوار چیست؟ اگر میزان فشار را بر جعبه افزایش دهید، چه تغییری در (پ) $f_s$ ، (ت) $F_N$ و (ث) $F_{s,\max}$ ، به وجود می‌آید؟

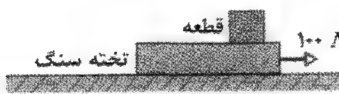
۶- در شکل ۶-۱۶، قطعه‌ای به جرم $m$ توسط نیروی اصطکاک وارد بر آن از طرف شیب، ساکن نگه داشته شده است. سپس نیروی $\vec{F}$ که جهت آن رو به بالای شیب است بر قطعه وارد می‌شود و بزرگی آن به تدریج از صفر شروع به افزایش می‌کند. در حین این افزایش، برای جهت و بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر قطعه چه رخ می‌دهد؟



شکل ۶-۱۶ پرسش ۶

۷- پرسش ۶ را این بار با نیروی $\vec{F}$ که جهت آن رو به پایین شیب است دوباره درنظر بگیرید. وقتی بزرگی $\vec{F}$ از صفر افزایش یابد، برای جهت و بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر قطعه چه رخ می‌دهد؟

۸- در شکل ۶-۱۷، یک نیروی افقی به بزرگی ۱۰۰N بر تخته سنگی به جرم ۱۰kg که به حالت سکون بر کف افقی بدون اصطکاکی قرار دارد وارد می‌شود و آن را شتابدار می‌کند. یک قطعهٔ ۱۰ کیلوگرمی بر بالای تخته سنگ قرار دارد؛ ضریب اصطکاک $\mu$ بین قطعه و تخته سنگ نامعلوم است و قطعه ممکن است بلغزد. (الف) با در نظر گرفتن این احتمال، گسترهٔ مقدارهای ممکن برای بزرگی شتاب تخته سنگ $a_{slab}$ چیست؟ (راهنمایی: لازم نیست محاسبه‌هایی انجام دهید؛ فقط مقدارهای حدی $\mu$ را در نظر بگیرید.) (ب) گسترهٔ ممکن برای بزرگی شتاب $a_{\text{block}}$ قطعه چیست؟



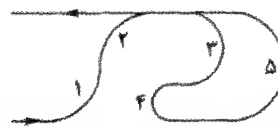
شکل ۶-۱۷ پرسش ۸

۹- شخصی سوار بر یک چرخ فلک از سه مکان (۱) بالاترین نقطه (۲) پایینترین نقطه و (۳) نقطهٔ میانی می‌گذرد. اگر چرخ فلک با آهنگ ثابتی بچرخد، این سه مکان را بنابر (الف) بزرگی شتاب مرکزگرای شخص، (ب) بزرگی نیروی مرکزگرای وارد به شخص، و (پ) بزرگی نیروی عمودی وارد به شخص، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.

۱۰- در سال ۱۹۸۷/۱۳۶۶، دو شیرجه رونده هوایی در حالی که در غرب شیکاگو در حالت سقوط آزاد بودند، یک کدو حلوایی را چند بار به هم پاس دادند. این شیرین کاری بسیار مفرح بود تا اینکه شیرجه رونده آخری که کدو حلوایی دستش بود

چترش را باز کرد. ناگهان کدو حلوایی از کنترل خارج شد و از ارتفاعی حدوداً ۰/۵ کیلومتری سقوط کرد. کدو حلوایی پس از شکافتن بام یک خانه با صدای مهیبی به کف آشپزخانه خورد و در آشپزخانه‌ای که به تازگی بازسازی شده بود تکه تکه شد. از دید شیرجه رونده و از دید کدو، چرا شیرجه رونده کنترل خود را بر کدو حلوایی از دست داد؟

۱۱ـ شکل ۶–۱۸ مسیر یک ماشین تفریحی را در یک شهربازی نشان می‌دهد که در آن، ماشین با تندی ثابت، پنج کمان دایره‌ای به شعاعهای $R_\circ$ ، $2R_\circ$ و $3R_\circ$ را می‌پیماید. کمانها را بنابر بزرگی نیروی مرکزگرای وارد بر سرنشین آن، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.




شکل ۶–۱۸ پرسش ۱۱

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس).

SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها

WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

●●● تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.

اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

### بخش ۶-۳ ویژگیهای اصطکاک

●۱- یک کمد جالباسی به جرم ۴۵kg که شامل کشوها و لباس است بر کف اتاق خوابی به حالت سکون قرار دارد. (الف) اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان کمد و کف اتاق ۰/۴۵ باشد، بزرگی کمترین نیروی افقی که باید بر کمد وارد شود تا شروع به حرکت کند چقدر است؟ (ب) اگر کشوها و لباس‌ها که جرم آنها روی هم ۱۷kg است از کمد جدا شوند، مقدار کمینهٔ جدید چقدر می‌شود؟ SSM WWW

●۲ـ *سنگهای لغزان اسرارآمیز.* در مسیر دور افتادهٔ *پلایا*[1]، در *درهٔ مرگ* در کالیفرنیا، بعضی اوقات سنگها از جای خود کنده می‌شوند و در بیابان حرکت می‌کنند، گویی که در حال کوچ کردن هستند (شکل ۶–۱۹). برای سالها این کنجکاوی مطرح بود که چرا سنگها حرکت کرده‌اند. یک توجیه آن بود که بادهای شدید همراه بارانهای سیل‌آسا سنگهای ناهموار را روی زمینی که بر اثر ریزش باران نرم شده بود، کشیده‌اند. وقتی صحرا خشک می‌شد، مسیر زیر سنگها سخت می‌شد و بدین ترتیب در محل عبور سنگها ردی بر جای می‌ماند. بنابر اندازه‌گیریهای صورت گرفته، ضریب اصطکاک جنبشی میان سنگها و سطح خیس صحرا حدود ۰/۸۰ است. چه نیروی افقی باید توسط یک تندباد بر یک سنگ ۲۰ کیلوگرمی (یک جرم نوعی) وارد شود تا سنگ به همان ترتیبی که حرکتش را شروع کرده به آن ادامه دهد؟ (این داستان با مسئلهٔ ۳۹ ادامه می‌یابد.)



**شکل ۶–۱۹** مسئلهٔ ۲. چه چیزی سنگ را حرکت داده است؟

●۳ـ شخصی با نیروی ۲۲۰N صندوقی به جرم ۵۵kg را به طور افقی بر امتداد یک کف هموار هل می‌دهد. ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۳۵ است. (الف) بزرگی نیروی اصطکاک چقدر است؟ (ب) بزرگی شتاب صندوق چقدر است؟ SSM ILW

●۴ـ یک بازیکن بیسبال به جرم $m = ۷۹\,\text{kg}$ که به درون جایگاه دوم[2] می‌لغزد با نیروی اصطکاکی به بزرگی ۴۷۰N کند می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k$ بین بازیکن و زمین مسابقه چقدر است؟

●۵ـ کف یک واگن باری با صندوقهایی که ضریب اصطکاک آنها با کف واگن ۰/۲۵ است، بار شده است. اگر واگن در ابتدا با تندی ۴۸km/h حرکت کند، کوتاهترین فاصله‌ای که در آن واگن می‌تواند با شتاب ثابتی متوقف شود بدون آنکه باعث لغزیدن صندوقها بر کف واگن شود چقدر است؟

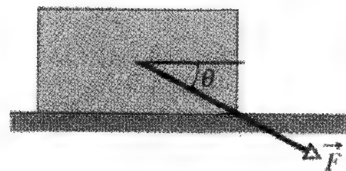
●۶ـ حیوانی روی یک شیب °۳۵ رو به پایین لیز می‌خورد. زمان لیز خوردن حیوان دو برابر زمان لیز خوردنش روی یک شیب بدون اصطکاک °۳۵ است. ضریب اصطکاک جنبشی میان حیوان و سطح شیبدار چقدر است؟

●۷ـ قطعه‌ای به جرم ۲/۵kg بر امتداد یک کف افقی با نیروی $\vec{F}$ به بزرگی ۱۵N که با افق زاویهٔ $\theta = ۴۰^\circ$ می‌سازد هل داده می‌شود (شکل ۶–۲۰). ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و کف ۰/۲۵ است. بزرگی (الف) نیروی اصطکاک وارد بر قطعه از طرف کف و (ب) شتاب قطعه را محاسبه کنید.

---

1 Playa

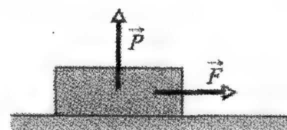
۲. base .هریک از چهار جایگاهی است که یک بازیکن بیسبال باید به نوبت به آنها برسد. م.



**شکل ۶-۲۰** مسئلهٔ ۷ و ۲۴

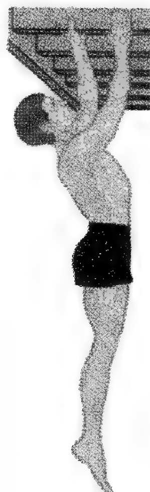
•۸- دانشجویان یک خوابگاه که از نتایج امتحانهای پایان ترم به سرشان زده است یک بازی من درآوردی را با یک کتاب ریاضی و یک جاروی دسته بلند بر کف کریدور خوابگاه انجام می‌دهند. اگر کتاب به جرم ۳/۵kg از حالت سکون توسط نیروی افقی ۲۵N وارد از طرف جارو به اندازهٔ ۰/۹۰m هل داده شود و سپس به تندی ۱/۶۰m/s برسد، ضریب اصطکاک ایستایی میان کتاب و کف خوابگاه چقدر است؟

•۹- قطعه‌ای به جرم ۲/۵kg در ابتدا روی یک سطح افقی ساکن است. سپس نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۶/۰N و نیروی قائم $\vec{P}$ بر قطعه وارد می‌شوند (شکل ۶-۲۱). ضریبهای اصطکاک برای قطعه و سطح عبارت‌اند از $\mu_k = ۰/۴۰$ و $\mu_s = ۰/۲۵$. بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر قطعه را در صورتی که بزرگی $\vec{P}$ برابر با (الف) ۸۸/۰N، (ب) ۱۰N، و (پ) ۱۲N باشد، تعیین کنید.



**شکل ۶-۲۱** مسئلهٔ ۹

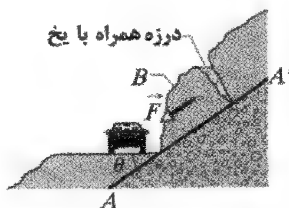
•۱۰- در حدود سال ۱۹۱۵/۱۲۹۴، هنری سینکوسکی[1] از فیلادلفیا خود را با گرفتن تیرهای عرضی طاق به گونه‌ای که انگشت شست او در یک طرف و سایر انگشتهایش در طرف دیگر تیر بود، آویخت (شکل ۶-۲۲). جرم سینکوسکی ۷۹kg بود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین دست و تیر عرضی ۰/۷ باشد، کمترین بزرگی نیروی عمودی وارد بر تیر عرضی از سوی هر شست یا انگشتهای دیگر او چقدر بوده است؟ (سینکوسکی پس از آویخته شدن، خود را تا رساندن چانه‌اش به تیرهای عرضی بالا کشید و سپس دست به دست طاق را طی کرد. اگر فکر می‌کنید این کار سینکوسکی کار قابل توجه‌ای نبود، سعی کنید خودتان این کار را تکرار کنید.)


**شکل ۶-۲۲** مسئلهٔ ۱۰

1.Henry Sincosky

•۱۱- کارگری با نیرویی به بزرگی ۱۱۰N صندوقی به جرم ۳۵kg را به طور افقی هل می‌دهد. ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و کف ۰/۳۷ است. (الف) در این شرایط مقدار $f_{s,\max}$ چقدر است؟ (ب) آیا صندوق حرکت می‌کند؟ (پ) نیروی اصطکاک وارد بر صندوق از طرف کف چقدر است؟ (ت) حال فرض کنید که کارگر دیگری برای کمک به او صندوق را به طور مستقیم رو به بالا بکشد. کمترین نیروی قائم باید چقدر باشد تا کارگر اول بتواند با نیروی ۱۱۰N صندوق را حرکت دهد؟ (ث) اگر، به جای این کار، کارگر دوم برای کمک به او صندوق را به طور افقی بکشد، کمترین مقدار نیروی کشیدن او باید چقدر باشد تا کارگر اول بتواند آن را حرکت دهد؟

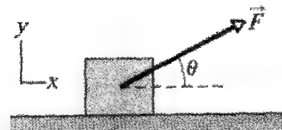
•۱۲- شکل ۶-۲۳ مقطعی از یک جاده را نشان می‌دهد که از کنار کوهی می‌گذرد. خط توپر $AA'$ صفحهٔ تخت سستی را نشان می‌دهد که در امتداد آن لغزش امکان‌پذیر است. صخرهٔ $B$ که مستقیماً بالای جاده است از صخرهٔ بالایی خود با شکاف بزرگی (موسوم به درزه) جدا شده است، به گونه‌ای که فقط نیروی اصطکاک میان صخره و صفحهٔ تخت از لغزیدن آن جلوگیری می‌کند. جرم صخره $۱/۸\times۱۰^{۷}$ kg، *زاویهٔ سرازیری* $\theta$ صفحهٔ تخت $۲۴^\circ$ و ضریب اصطکاک ایستایی بین صخره و صفحهٔ تخت ۰/۶۳ است. (الف) نشان دهید که صخره نخواهد لغزید. (ب) آبی که به داخل درزه نفوذ می‌کند به هنگام یخ زدن منبسط می‌شود و بدین ترتیب بر صخره نیروی $\vec{F}$ را که موازی با $AA'$ است وارد می‌کند. کمترین مقدار $F$ باید چقدر باشد تا صخره شروع به لغزیدن کند؟



**شکل ۶-۲۳** مسئلهٔ ۱۲

•۱۳- صندوقی به جرم ۶۸kg با طنابی که با افق زاویهٔ رو به بالای $۱۵^\circ$ می‌سازد روی کف اتاق کشیده می‌شود. (الف) اگر ضریب اصطکاک ایستایی ۰/۵۰ باشد، برای شروع حرکت صندوق کمترین مقدار نیروی لازم از طرف طناب باید چقدر باشد؟ (ب) اگر $\mu_k = ۰/۳۵$ باشد، بزرگی شتاب اولیهٔ صندوق چقدر است؟ SSM

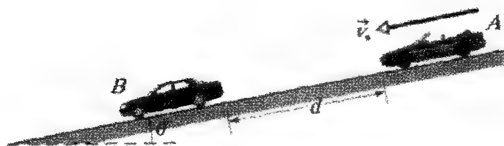
•۱۴- شکل ۶-۲۴ قطعه‌ای به جرم $m$ را نشان می‌دهد که در آغاز روی کف اتاق ساکن است. سپس نیرویی به بزرگی ۰/۵۰۰mg با زاویهٔ $\theta = ۲۰^\circ$ به سمت بالا بر آن وارد می‌شود. بزرگی شتاب قطعه روی کف اگر (الف) $\mu_s = ۰/۶۰۰$ و $\mu_k = ۰/۵۰۰$ و (ب) $\mu_s = ۰/۴۰۰$ و $\mu_k = ۰/۳۰۰$ باشد، چقدر است؟



شکل ۶-۲۴ مسئلهٔ ۱۴

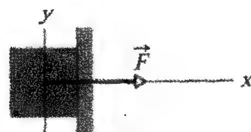
●۱۵- ضریب اصطکاک ایستایی میان تفلون و تخم‌مرغ نیمرو شده در حدود ۰/۰۴ است. کوچکترین زاویه نسبت به افق باید چقدر باشد تا باعث لغزیدن نیمرو به سمت پایین تابهٔ تفلون شود؟

●●۱۶- شما به عنوان یک *شاهد* خبره در مورد یک تصادف اظهارنظر می‌کنید. این تصادف، روی جاده‌ای که از بالای یک تپه رو به پایین امتداد یافته پیش آمده و در آن اتومبیل $A$ به اتومبیل جلویی $B$ که پشت چراغ قرمز متوقف بوده، برخورد کرده است (شکل ۶-۲۵). شما درمی‌یابید که شیب تپه $\theta = ۱۲/۰°$ است و فاصلهٔ اتومبیلها در لحظه‌ای که رانندهٔ اتومبیل $A$ ترمز کرده $d = ۲۴/۰\,\mathrm{m}$ و تندی اتومبیل $A$ در آن لحظه $v_0 = ۱۸/۰\,\mathrm{m/s}$ بوده است. اتومبیل $A$ با چه تندی به اتومبیل $B$ برخورد کرده است در صورتی که ضریب اصطکاک جنبشی (الف) ۰/۶۰ (سطح جادهٔ خشک) و (ب) ۰/۱ (سطح جادهٔ خیس) بوده باشد؟



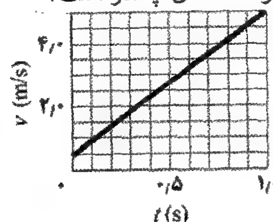
شکل ۶-۲۵ مسئلهٔ ۱۶

●●۱۷- نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۱۲N، قطعه‌ای به وزن ۵/۰N را بر دیوار قائمی می‌فشارد (شکل ۶-۲۶). ضریب اصطکاک ایستایی میان دیوار و قطعه ۰/۶۰، و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها ۰/۴۰ است. فرض کنید که قطعه در آغاز حرکتی ندارد. (الف) آیا قطعه حرکت خواهد کرد؟ (ب) نیروی وارد بر قطعه از طرف دیوار برحسب بردارهای یکه چیست؟ SSM



شکل ۶-۲۶ مسئلهٔ ۱۷

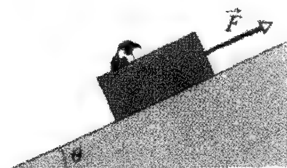
●●۱۸- قطعه‌ای به جرم ۴/۱۰kg توسط یک نیروی افقی ثابت به بزرگی ۴۰/۰N بر امتداد کف اتاقی هل داده می‌شود. شکل ۶-۲۷ تندی $v$ قطعه را بر حسب زمان $t$ حرکت قطعه بر امتداد یک محور $x$ واقع بر کف اتاق نشان می‌دهد. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و کف اتاق چقدر است؟



شکل ۶-۲۷ مسئلهٔ ۱۸

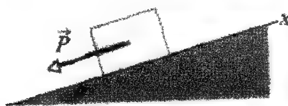
●●۱۹- یک جعبهٔ پر از شن که در آغاز در حال سکون است به وسیلهٔ طنابی که کشش آن نباید از ۱۱۰۰N بیشتر شود در کف اتاقی کشیده می‌شود. ضریب اصطکاک ایستایی میان جعبه و کف اتاق ۰/۳۵ است. (الف) برای کشیدن بیشترین مقدار ممکن شن، زاویهٔ میان طناب و افق باید چقدر باشد؟ (ب) وزن شن و جعبه در این حالت چقدر است؟

●●۲۰- سورتمه‌ای که در آن پنگوئنی قرار دارد به حالت سکون روی سطح شیبداری که با افق زاویهٔ $\theta = ۲۰°$ می‌سازد قرار دارد (شکل ۶-۲۸). وزن سورتمه به همراه پنگوئن ۸۰N است. ضریب اصطکاک ایستایی میان سورتمه و سطح ۰/۲۵ و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها ۰/۱۵ است. (الف) کمترین مقدار نیروی $\vec{F}$ که موازی سطح است باید چقدر باشد تا از لغزش رو به پایین سورتمه جلوگیری کند؟ (ب) کمترین اندازهٔ $F$ باید چقدر باشد تا سورتمه رو به بالا شروع به حرکت کند؟ (پ) برای آنکه سورتمه با سرعت ثابت رو به بالا حرکت کند، مقدار $F$ باید چقدر باشد؟



شکل ۶-۲۸ مسئله‌های ۲۰ و ۲۶

●●۲۱- در شکل ۶-۲۹، نیروی $\vec{P}$ به قطعه‌ای به وزن ۴۵N وارد می‌شود. قطعه در ابتدا به حالت سکون روی سطح شیبداری است که با افق زاویهٔ $\theta = ۱۵°$ می‌سازد. ضریبهای اصطکاک بین قطعه و سطح عبارت‌اند از $\mu_s = ۰/۵۰$ و $\mu_k = ۰/۳۴$. نیروی اصطکاک وارد بر قطعه از طرف سطح شیبدار را بر حسب بردارهای یکه تعیین کنید در صورتی که $\vec{P}$ (الف) $(-۵/۰\,\mathrm{N})\hat{i}$، (ب) $(-۸/۰\,\mathrm{N})\hat{i}$، و (پ) $(-۱۵\mathrm{N})\hat{i}$ باشد.



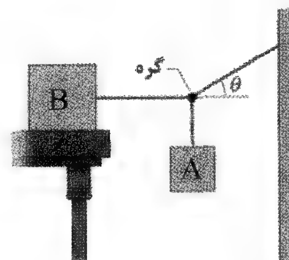
شکل ۶-۲۹ مسئلهٔ ۲۱

●●۲۲- در شکل ۶-۳۰، دو جعبه یکی به جرم $m_C = ۱/۰\,\mathrm{kg}$ و دیگری به جرم $m_W = ۳/۰\,\mathrm{kg}$ با نیروی افقی $\vec{F}$ که بر جعبهٔ ۱ کیلوگرمی وارد شده است، روی یک سطح افقی شتاب پیدا کرده‌اند. بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر جعبه ۱ کیلوگرمی برابر با ۲/۰N و بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر جعبهٔ ۳ کیلوگرمی برابر با ۴/۰N است. اگر بزرگی $\vec{F}$ برابر با ۱۲N باشد، بزرگی نیروی وارد بر جعبه ۳ کیلوگرمی از سوی جعبهٔ ۱ کیلوگرمی چقدر است؟



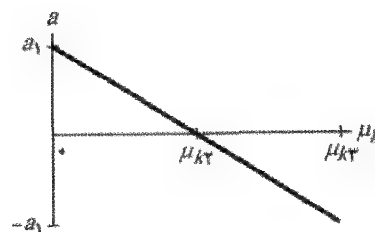
شکل ۶-۳۰ مسئلهٔ ۲۲

●●۲۳- وزن قطعهٔ $B$ در شکل ۶-۳۱ برابر با ۷۱۱N است. ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و میز ۰/۲۵ و زاویهٔ $\theta$ برابر °۳۰ است. فرض کنید ریسمان بین $B$ و گره ، افقی است. بیشترین وزن قطعهٔ $A$ باید چقدر باشد تا دستگاه ساکن بماند؟ SSM WWW



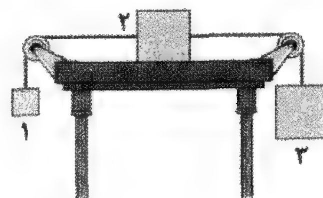
شکل ۶-۳۱ مسئلهٔ ۲۳

●●۲۴- قطعه‌ای را روی کف اتاق به وسیلهٔ نیرویی که با زاویهٔ $\theta$ به سمت پایین وارد می‌شود، (شکل ۶-۲۰) هل می‌دهیم. بزرگی شتاب $a$ برحسب محدوده‌ای از مقدارهای ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k$ بین قطعه و کف: $a_1 = ۳/۰\,\text{m/s}^2$ ، $\mu_{k2} = ۰/۲۰$ و $\mu_{k3} = ۰/۴۰$ ، در شکل ۶-۳۲ داده شده است. مقدار θ چقدر است؟



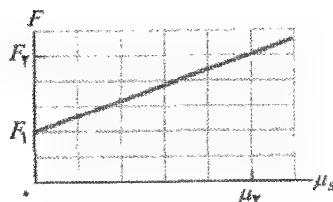
شکل ۶-۳۲ مسئلهٔ ۲۴

●●۲۵- وقتی سه قطعهٔ شکل ۶-۳۳ از حالت سکون رها شوند، آنها به شتابی به بزرگی $۰/۵۰۰\,\text{m/s}^2$ می‌رسند. جرم قطعهٔ ۱ برابر با $M$ ، جرم قطعهٔ ۲ برابر با $2M$ و جرم قطعهٔ ۳ برابر با $3M$ است. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعهٔ ۲ و میز چقدر است؟



شکل ۶-۳۳ مسئلهٔ ۲۵

●●۲۶- در شکل ۶-۲۸ سورتمه‌ای به وسیلهٔ ریسمانی روی سطح شیبداری مستقیماً به سمت بالا کشیده می‌شود. سورتمه در آستانهٔ حرکت قرار دارد. بزرگی $F$ نیروی مورد نیاز ریسمان روی سورتمه برحسب محدوده‌ای از مقدارهای ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s$ ، بین سورتمه و سطح: $F_1 = ۲/۰\,\text{N}$ ، $F_2 = ۵/۰\,\text{N}$ و $\mu_2 = ۰/۵۰$ ، در شکل ۶-۳۴ رسم شده است. زاویهٔ $\theta$ سطح شیبدار چقدر است؟



شکل ۶-۳۴ مسئلهٔ ۲۶

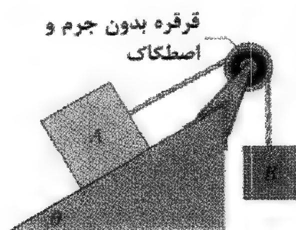
●●۲۷- دو قطعه به وزنهای ۳/۶N و ۷/۲N توسط ریسمان بدون جرمی به هم متصل شده‌اند و روی یک سطح شیبدار °۳۰ رو به پایین می‌لغزند. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعهٔ سبکتر و سطح برابر با ۰/۱۰ و میان قطعهٔ سنگینتر و سطح برابر با ۰/۲۰ است. با فرض اینکه قطعهٔ سبکتر در جلو باشد، مطلوب است (الف) بزرگی شتاب قطعه‌ها و (ب) کشش ریسمان. SSM

●●۲۸- شکل ۶-۳۵ سه صندوق را نشان می‌دهد که روی کف افقی همواری با نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۴۴۰N هل داده شده‌اند. جرم صندوقها عبارت‌اند از: $m_1 = ۳۰/۰\,\text{kg}$ ، $m_2 = ۱۰/۰\,\text{kg}$ ، و $m_3 = ۲۰/۰\,\text{kg}$ . ضریب اصطکاک جنبشی میان کف و هر یک از صندوقها ۰/۷۰۰ است. (الف) بزرگی $F_{32}$ نیروی وارد بر صندوق ۳ از طرف صندوق ۲ چقدر است؟ (ب) اگر صندوقها روی یک کف صیقل خورده که ضریب اصطکاک جنبشی آن کمتر از ۰/۷۰۰ است لغزانده شوند، آیا بزرگی $F_{32}$ بیشتر از، کمتر از، یا برابر با هنگامی می‌شود که ضریب اصطکاک ۰/۷۰۰ بود؟



شکل ۶-۳۵ مسئلهٔ ۲۸

●●۲۹- وزن قطعهٔ $A$ در شکل ۶-۳۶ برابر با ۱۰۲N و وزن قطعهٔ $B$ برابر با ۳۲N است. ضریبهای اصطکاک میان $A$ و سطح شیبدار عبارت‌اند از $\mu_s = ۰/۵۶$ و $\mu_k = ۰/۲۵$ . زاویهٔ شیب $\theta$ برابر با °۴۰ است. جهت مثبت محور $x$ را رو به بالای سطح شیبدار اختیار می‌کنیم. شتاب قطعهٔ $A$ بر حسب بردارهای یکه چه می‌شود، اگر $A$ در ابتدا (الف) در حال سکون باشد، (ب) رو به بالای سطح شیبدار حرکت کند، و (پ) رو به پایین سطح شیبدار حرکت کند؟

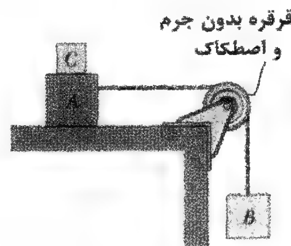


شکل ۶-۳۶ مسئلهٔ ۲۹ و ۳۰

●●۳۰- در شکل ۶-۳۶، دو قطعه از روی قرقره‌ای به هم متصل شده‌اند. جرم قطعهٔ $A$ برابر با ۱۰kg، و ضریب اصطکاک

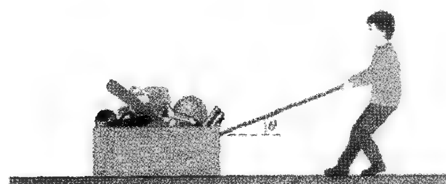
جنبشی میان $A$ و سطح شیبدار ۰/۲۰ است. زاویهٔ $\theta$ سطح شیبدار $30°$ است. قطعهٔ $A$ با تندی ثابت رو به پایین می‌لغزد. جرم قطعهٔ $B$ چقدر است؟

●●۳۱- در شکل ۶-۳۷، وزن قطعه‌های $A$ و $B$ به ترتیب ۴۴N و ۲۲N است. (الف) اگر $\mu_s$ میان $A$ و میز برابر با ۰/۲۰ باشد، کمینهٔ وزن قطعهٔ $C$ باید چقدر باشد تا قطعهٔ $A$ را از لغزش بازدارد؟ (ب) قطعهٔ $C$ ناگهان از روی $A$ برداشته می‌شود. اگر $\mu_k$ میان $A$ و میز ۰/۱۵ باشد، شتاب قطعهٔ $A$ چقدر است؟



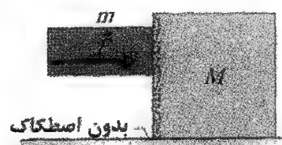
شکل ۶-۳۷ مسئلهٔ ۳۱

●●۳۲- وزن جعبه‌ای به همراه اسباب بازیهای داخل آن روی هم ۱۸۰N است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جعبه و کف اتاق ۰/۴۲ است. در شکل ۶-۳۸ بچه‌ای سعی می‌کند این جعبه را با کشیدن ریسمان متصل به آن روی کف اتاق حرکت دهد. (الف) اگر $\theta$ برابر با $42°$ باشد، بزرگی نیروی $\vec{F}$ که بچه باید بر ریسمان وارد کند تا جعبه در آستانهٔ حرکت قرار گیرد چقدر است؟ (ب) بر حسب تابعی از $\theta$، رابطه‌ای برای بزرگی $F$ مورد نیاز جهت قراردادن جعبه در آستانهٔ حرکت بنویسید. (پ) مقدار $\theta$ که در آن $F$ کمینه است و (ت) آن مقدار کمینه را تعیین کنید.



شکل ۶-۳۸ مسئلهٔ ۳۲

●●۳۳- دو قطعهٔ ($m = 16\,kg$ و $M = 88\,kg$) شکل ۶-۳۹ به یکدیگر متصل نیستند. ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه‌ها $\mu_s = 0/38$ است، ولی سطح زیرین قطعهٔ بزرگتر بدون اصطکاک است. بزرگی کمینهٔ نیروی $\vec{F}$ باید چقدر باشد تا از لغزیدن قطعهٔ کوچکتر بر قطعهٔ بزرگتر جلوگیری کند؟ ILW



شکل ۶-۳۹ مسئلهٔ ۳۳

●●●۳۴- در شکل ۶-۴۰، تخته سنگی به جرم $m_1 = 40\,kg$ روی کف بدون اصطکاکی ساکن است، و قطعه‌ای به جرم $m_2 = 10\,kg$ به حالت سکون روی تخته سنگ قرار داده شده است. ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و تخته سنگ ۰/۶۰ و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها ۰/۴۰ است. قطعه توسط نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی $100N$ کشیده می‌شود. بر حسب بردارهای یکه شتاب حاصل در (الف) قطعه و (ب) تخته سنگ چیست؟



شکل ۶-۴۰ مسئلهٔ ۳۴

●●●۳۵- تندی یک قایق موتوری به جرم $1000\,kg$ در لحظه‌ای که موتور آن خاموش می‌شود برابر با $90\,km/h$ است. بزرگی نیروی اصطکاک $\vec{f_k}$ میان قایق و آب متناسب با تندی $v$ قایق است: $f_k = 70v$، که در آن $v$ بر حسب متر بر ثانیه و $f_k$ بر حسب نیوتون است. زمان لازم برای آنکه قایق تا تندی $45\,km/h$ کند شود، چقدر است؟ SSM

## بخش ۶-۴ نیروی کششی و تندی حد

●۳۶- تندی حد یک شیرجه رونده هوایی در وضعیت «عقاب گسترده بال» $160\,km/h$ و در وضعیت «شیرجه با سر» $310\,km/h$ است. با فرض آنکه ضریب کششی $C$ از وضعیتی به وضعیت دیگر تغییر نکند، نسبت مساحت سطح مقطع مؤثر $A$ در وضعیت کندتر به همین مساحت در وضعیت سریعتر چقدر است؟

●●۳۷- نسبت نیروی کششی وارد بر یک هواپیمای جت که در ارتفاع $10\,km$ با تندی $1000\,km/h$ حرکت می‌کند بر نیروی کششی وارد بر یک هواپیمای باری ملخ دار که در نصف آن ارتفاع و با نصف آن تندی حرکت می‌کند چقدر است؟ چگالی هوا در ارتفاع $10\,km$ برابر با $0/38\,kg/m^3$ و در ارتفاع $5/0\,km$ برابر با $0/67\,kg/m^3$ است. فرض کنید مساحت سطح مقطع مؤثر هر دو هواپیما و ثابت کششی $C$ آنها یکسان باشد.

●●۳۸- تندی اسکی‌باز در حین اسکی به سمت پایین، هم به وسیلهٔ نیروی مقاومت هوا روی بدن او و هم نیروی اصطکاک جنبشی به وسیلهٔ اسکیها، کاهش می‌یابد. (الف) فرض کنید زاویهٔ شیب $\theta = 40/0°$ و برف خشک بوده و ضریب اصطکاک جنبشی آن $\mu_k = 0/0400$ و جرم اسکی‌باز و وسایل همراهش $m = 85/0\,kg$ است. مساحت سطح مقطع اسکی‌باز $A = 1/30\,m^2$، ضریب کششی $C = 0/150$ و چگالی هوا برابر $1/20\,kg/m^3$ است. (الف) تندی حد چقدر است؟ (ب) اگر اسکی‌باز بتواند $C$ را با تغییر حالت بدنش به مقدار کمی مانند $dC$ تغییر دهد، تغییر تندی حد متناظر چقدر خواهد بود؟

●●●۳۹- *ادامهٔ مسئلهٔ ۲.* اکنون فرض کنید معادلهٔ ۶-۱۴ بزرگی نیروی کشش وارد بر یک سنگ نوعی ۲۰ کیلوگرمی را به دست می‌دهد که مساحت سطح مقطع عمودی آن در برابر باد برابر با $0/040\,m^2$ و ضریب کششی $C$ آن ۰/۸۰ است.

چگالی هوا را $1/21 \mathrm{kg/m^3}$ و ضریب اصطکاک جنبشی را $0/80$ بگیرید. (الف) تندی باد $V$ در امتداد سطح زمین بر حسب کیلومتر بر ساعت باید چقدر باشد تا سنگ به همان ترتیبی که حرکتش را شروع کرده به آن ادامه دهد؟ چون باد در امتداد سطح زمین توسط زمین کُند می‌شود، اغلب تندی باد گزارش شده برای یک توفان سخت در ارتفاع $10 \mathrm{m}$ اندازه‌گیری می‌شود. فرض کنیدتندی باد در ارتفاع $10 \mathrm{m}$ دو برابر تندی آن در امتداد سطح زمین باشد. (ب) برای پاسخ خود به قسمت (الف) تندی گزارش شده برای توفان چقدر بوده است؟ (پ) آیا این مقدار برای بادهای پرسرعت در یک توفان سخت معقول است؟ (این داستان با مسئلهٔ ۶۱ ادامه می‌یابد.)

●●●۴۰- فرض کنید معادلهٔ ۶-۱۴ نیروی کششی وارد بر یک خلبان به اضافهٔ صندلی پرتاب او را پس از پرت شدن به بیرون از هواپیمایی که به طور افقی با تندی $1300 \mathrm{km/h}$ پرواز می‌کند، به دست دهد. همچنین فرض کنید که جرم صندلی با جرم خلبان برابر است و ضریب کششی آنها برابر با ضریب کششی یک شیرجه روندهٔ هوایی است. با اختیار یک عدد معقول برای جرم خلبان و استفاده از مقدار $v_t$ مناسب از جدول ۶-۱، بزرگیهای زیر را تخمین بزنید: (الف) نیروی کششی وارد بر *خلبان* + *صندلی* و (ب) شتاب افقی آنها (بر حسب $g$)، هر دو درست پس از پرت شدن. (نتیجهٔ (الف) بر این الزام مهندسی اشاره دارد که: صندلی خلبان باید دارای یک مانع محافظ باشد تا وزش باد اولیه را از سر خلبان منحرف کند.)

## بخش ۶-۵ حرکت دایره‌ای یکنواخت

●۴۱-اگر تندی یک دوچرخه‌سوار $29 \mathrm{km/h}$ و ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s$ میان چرخها و مسیر $0/32$ باشد، کمترین شعاع یک پیچ شیب‌بندی نشده باید چقدر باشد تا دوچرخه‌سوار بتواند در آن حرکت کند؟ ILW

●۴۲- در مسابقه‌های سورتمه رانی دو نفرهٔ المپیک زمستانی، تیم جامائیکا پیچی به شعاع $7/6 \mathrm{m}$ را با تندی $96/6 \mathrm{km/h}$ دور زده است. شتاب این تیم بر حسب $g$ چقدر بوده است؟

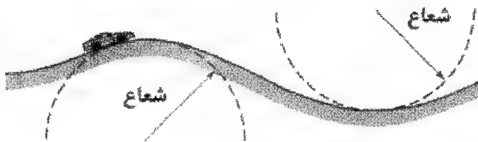
●۴۳- گربه‌ای روی یک چرخ و فلک افقی ساکن در شعاع $5/4 \mathrm{m}$ از مرکز دوران آن چرت می‌زند. در همین زمان مسئول چرخ فلک آن را روشن می‌کند و آهنگ چرخش آن را در مقدار مناسب یک دور کامل در هر $6/0 \mathrm{s}$ تنظیم می‌کند. کمترین ضریب اصطکاک ایستایی میان گربه و چرخ فلک باید چقدر باشد تا گربه بدون لغزیدن در سر جایش باقی بماند؟

●۴۴- فرض کنید ضریب اصطکاک ایستایی میان جاده و لاستیکهای اتومبیلی $0/60$ باشد و بر اتومبیل هیچ نیروی بالابر منفی وارد نمی‌شود. تندی اتومبیل موقع دورزدن یک پیچ مسطح به شعاع $30/5 \mathrm{m}$ در آستانهٔ لغزش چقدر است؟

●●۴۵- شخصی به جرم $80 \mathrm{kg}$ سوار چرخ و فلکی می‌شود که به دور یک دایرهٔ عمودی به شعاع $10 \mathrm{m}$ با تندی ثابت $6/1 \mathrm{m/s}$ می‌چرخد. (الف) دورهٔ حرکت چقدر است؟ بزرگی نیروی عمودی وارد بر شخص از طرف صندلی به هنگام عبور هر دو از (ب) بالاترین نقطهٔ مسیر و (پ) پایینترین نقطهٔ مسیر چقدر است؟

●۴۶- جرم یک قطار هوایی تفریحی پر از سرنشین $1200 \mathrm{kg}$ است. قطار روی ریلهای مارپیچ یک شهربازی حرکت می‌کند. تندی قطار هنگامی که از بالاترین نقطهٔ یکی از دایره‌های مارپیچ به شعاع $18 \mathrm{m}$ می‌گذرد تغییر نمی‌کند. در بالاترین نقطهٔ این دایره، مطلوب است (الف) بزرگی $F_N$ و (ب) جهت (رو به بالا یا رو به پایین) نیروی عمودی وارد از مسیر بر قطار، در صورتی که تندی قطار $v = 11 \mathrm{m/s}$ باشد. اگر $v = 14 \mathrm{m/s}$ باشد (پ) $F_N$ و (ت) جهت آن چیست؟

●۴۷- در شکل ۶-۴۱ اتومبیلی با تندی ثابت از بالای یک تپهٔ دایره‌ای عبور می‌کند و سپس وارد یک درهٔ دایره‌ای به همان شعاع می‌شود. در بالاترین نقطهٔ تپه، نیروی عمودی وارد بر راننده از طرف صندلی اتومبیل برابر با صفر است. جرم راننده $70/0 \mathrm{kg}$ است. هنگامی که اتومبیل از پایین‌ترین نقطهٔ دره عبور می‌کند، بزرگی نیروی عمودی وارد بر راننده از طرف صندلی چقدر است؟




**شکل ۶-۴۱** مسئلهٔ ۴۷

●۴۸- یک افسر پلیس در یک تعقیب و گریز نفس‌گیر اتومبیل خود را با تندی ثابت $80 \mathrm{km/h}$ در یک پیچ دایره‌ای به شعاع $300 \mathrm{m}$ می‌راند. جرم او $55/0 \mathrm{kg}$ است. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به خط قائم) نیروی *خالص* وارد بر صندلی از طرف افسر پلیس چیست؟ (*راهنمایی*: هم نیروهای افقی و هم قائم را در نظر بگیرید.)

●●۴۹- دانشجویی به وزن $667 \mathrm{N}$ بر چرخ و فلکی که با تندی ثابت می‌چرخد سوار است (دانشجو راست نشسته است). در بالاترین نقطه، بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد بر دانشجو از طرف صندلی $556 \mathrm{N}$ است. (الف) آیا در آن نقطه دانشجو احساس «سبکی» می‌کند یا «سنگینی»؟ (ب) بزرگی $\vec{F}_N$ در پایینترین نقطه چقدر است؟ اگر تندی چرخ فلک دو برابر شود، بزرگی $F_N$ در (پ) بالاترین نقطه و (ت) پایینترین نقطه چقدر است؟ SSM ILW

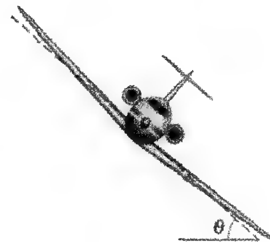
●●۵۰- در یک پارک تفریحی، اتومبیلی روی یک دایرهٔ قائم که در انتهای دیرک صلبی با جرم ناچیز قرار دارد، حرکت می‌کند. مجموع وزن ماشین و سرنشینان آن $5/0 \mathrm{kN}$ و شعاع دایره

۱۰m است. در بالاترین نقطهٔ دایره (الف) بزرگی $F_B$ و (ب) جهت (رو به بالا یا رو به پایین) نیروی وارد بر ماشین از طرف دیرک را در صورتی که $v = ۵/۰ m/s$ باشد، تعیین کنید. اگر $v = ۱۲ m/s$ باشد (پ) بزرگی $F_B$ و (ت) جهت آن چیست؟

●●۵۱- یک تراموای قدیمی با تندی ۱۶km/h پیچ تختی به شعاع ۹/۱m را دور می‌زند. دستگیره‌های آویزان از سقف تراموا چه زاویه‌ای با خط قائم می‌سازند؟

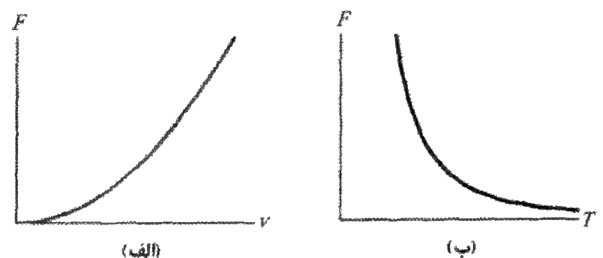
●●۵۲- در طراحی یک مسیر دایره‌ای برای سواری در یک پارک تفریحی، مهندسان مکانیک باید تغییرات ناچیزی را در عوامل معینی که می‌تواند نیروی وارد بر شخص را تغییر دهد در نظر بگیرند. شخصی با جرم $m$ را در نظر بگیرید که روی دایره‌ای افقی با شعاع $r$ و با تندی $v$ سواری می‌کند. تغییر $dF$ در بزرگی نیروی خالص برای (الف) تغییر $dr$ در شعاع و $v$ ثابت، (ب) تغییر $dv$ و $r$ ثابت و (پ) تغییر $dT$ در دورهٔ تناوب با $r$ ثابت چقدر است؟

●●۵۳- هواپیمایی با تندی ۴۸۰km/h در حال پرواز روی یک دایرهٔ افقی است (شکل ۶-۴۲). اگر بالهای هواپیما نسبت به افق به اندازهٔ $\theta = ۴۰^\circ$ کج شده باشند، شعاع دایره‌ای که هواپیما در آن پرواز می‌کند چقدر است؟ فرض کنید که نیروی لازم توسط یک «نیروی بالابرندهٔ آیرودینامیکی» که عمود بر سطح بال است، فراهم می‌شود. SSM WWW



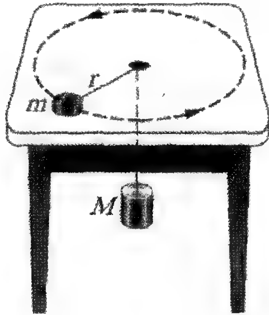
شکل ۶-۴۲ مسئلهٔ ۵۳

●●۵۴- مسافری به جرم ۸۵/۰kg در امتداد مسیری دایره‌ای به شعاع $r = ۳/۵۰ m$ و با حرکت دایره‌ای یکنواخت، حرکت می‌کند. (الف) شکل ۶-۴۳ الف نموداری است از بزرگی $F$ نیروی مرکزگرای خالص مورد نیاز برای محدودهٔ مقدارهای ممکن تندی $v$ مسافر. نمودار شیب در $v = ۸/۳۰ m/s$ چگونه است؟ (ب) شکل ۶-۴۳ ب نموداری است از $F$ برای محدودهٔ مقدارهای ممکن $T$، دورهٔ تناوب حرکت. نمودار شیب در $T = ۲/۵۰ s$ چگونه است؟



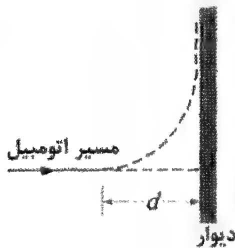
شکل ۶-۴۳ مسئلهٔ ۵۴

●●۵۵- قرصی به جرم $m = ۱/۵۰ kg$ واقع بر یک میز بدون اصطکاک به وسیلهٔ ریسمانی که از سوراخی در میز گذشته است به یک وزنهٔ استوانه‌ای به جرم $M = ۲/۵۰ kg$ متصل شده است و روی دایره‌ای به شعاع $r = ۲۰/۰ cm$ حرکت می‌کند (شکل ۶-۴۴). تندی $m$ باید چقدر باشد تا وزنهٔ استوانه‌ای به حالت سکون باقی بماند؟



شکل ۶-۴۴ مسئلهٔ ۵۵

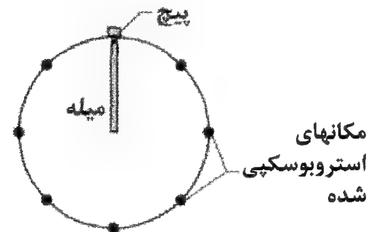
●●۵۶- *باید ترمز کرد یا پیچید؟* شکل ۶-۴۵ دید از بالای مسیر اتومبیلی را که به سمت دیواری در حرکت است نشان می‌دهد. فرض کنید وقتی اتومبیل در فاصلهٔ $d = ۱۰۷ m$ از دیوار قرار دارد، راننده ترمز کند، جرم اتومبیل را $m = ۱۴۰۰ kg$، تندی اولیهٔ آن را $v_0 = ۳۵ m/s$ و ضریب اصطکاک ایستایی را $\mu_s = ۰/۵۰$ در نظر بگیرید. فرض کنید وزن اتومبیل حتی در حین ترمز گرفتن به طور یکسان روی چهار چرخ توزیع شده باشد. (الف) بزرگی اصطکاک ایستایی (بین لاستیکها و جاده) مورد نیاز برای اینکه اتومبیل درست موقع رسیدن به دیوار متوقف شود، چقدر است؟ (ب) اصطکاک ایستایی ممکن بیشینهٔ $f_{s,max}$ چقدر است؟ (پ) اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین لاستیکها (در حال لغزش) و جاده برابر $\mu_k = ۰/۴۰$ باشد، اتومبیل با چه تندی به دیوار برخورد می‌کند؟ برای پیشگیری از تصادف، راننده می‌تواند تصمیم بگیرد که ماشین را طوری بپیچاند که مطابق شکل تقریباً مماس و موازی با دیوار ادامهٔ حرکت دهد. (ت) بزرگی نیروی اصطکاک مورد نیاز باید چقدر باشد تا اتومبیل را در یک مسیر دایره‌ای با شعاع $d$ و با تندی $v_0$ داده شده، نگه دارد؟ (ث) آیا نیرویی کمتر از $f_{s,max}$ مورد نیاز است به طوری که مسیر دایره‌ای ممکن باشد؟



شکل ۶-۴۵ مسئلهٔ ۵۶

●●۵۷- پیچی به داخل انتهای یک میلهٔ افقی پیچ و سپس میله به طور افقی حول سر دیگرش چرخانده می‌شود. مهندسی این حرکت را با درخشش یک لامپ استربوسکوپی روی میله و پیچ

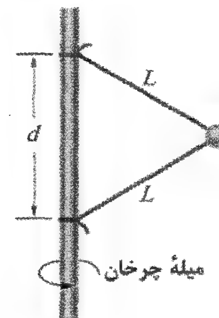
ثبت می‌کند. آهنگ استروبوسکوپی طوری تنظیم شده است که در هر دور کاملی که میله می‌زند، پیچ در هشت مکان که به فاصلهٔ یکسانی از هم قرار گرفته‌اند دیده می‌شود (شکل ۶-۴۶). آهنگ استروبوسکوپی برابر با ۲۰۰۰ درخشش در ثانیه است. جرم پیچ ۳۰g و شعاع حرکت ۳/۵cm است. بزرگی نیرویی که میله بر پیچ وارد می‌کند چقدر است؟




شکل ۶-۴۶ مسئلهٔ ۵۷

●●۵۸- پیچ دایره‌ای شیب‌بندی شدهٔ یک بزرگراه برای حرکت با تندی ۶۰km/h طراحی شده است. شعاع پیچ ۲۰۰m است. در روزهای بارانی اتومبیلها پیچ دایره‌ای را با تندی ۴۰km/h طی می‌کنند. کمینهٔ ضریب اصطکاک میان لاستیکها و جاده باید چقدر باشد تا اتومبیلها بتوانند بدون لغزیدن پیچ را دور بزنند؟ (فرض کنید بر اتومبیلها نیروی بالابر منفی وارد نمی‌شود.)

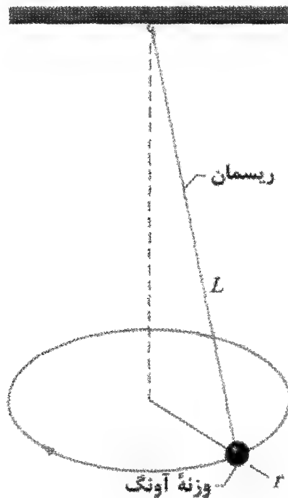
●●●۵۹- در شکل ۶-۴۷، گلوله‌ای به جرم ۱/۳۴kg به وسیلهٔ دو ریسمان بدون جرم که طول هر کدام $L=$ ۱/۷۰m است به میلهٔ قائم در حال چرخشی متصل شده است. ریسمانها با فاصلهٔ $d=$ ۱/۷۰m، محکم به میله بسته شده‌اند. کشش در ریسمان بالایی ۳۵N است. (الف) کشش در ریسمان پایینی، (ب) بزرگی نیروی خالص ریسمان $\vec{F}_{\text{net}}$ که بر گلوله وارد می‌شود، و (پ) تندی گلوله چقدر است؟ (ت) جهت $\vec{F}_{\text{net}}$ چیست؟
SSM ILW




شکل ۶-۴۷ مسئلهٔ ۵۹

## مسئله‌های اضافی

۶۰- شکل ۶-۴۸ یک *آونگ مخروطی* را نشان می‌دهد که در آن وزنهٔ آونگ (یک جسم کوچک که به انتهای پایینی ریسمان وصل است) با تندی ثابت بر یک دایرهٔ افقی حرکت می‌کند. (با چرخش وزنهٔ آونگ، ریسمان سطح یک مخروط را جاروب می‌کند.) جرم وزنهٔ آونگ ۰/۰۴۰kg، طول ریسمان $L=$ ۰/۹۰m و جرم آن ناچیز است. پیرامون مسیر دایره‌ای که وزنهٔ آونگ می‌پیماید برابر با ۰/۹۴m است. (الف) کشش ریسمان و (ب) دورهٔ حرکت چقدر است؟




شکل ۶-۴۸ مسئلهٔ ۶۰

۶۱- *ادامهٔ مسئله‌های ۲ و ۳۹*. توضیح دیگر این است که سنگها تنها زمانی حرکت می‌کنند که آب انباشته شدهٔ ناشی از یک توفان سخت روی سطح صحرا یخ بزند و یک لایهٔ نازک و بزرگ یخی تشکیل شود. سنگها به دام این لایهٔ یخی می‌افتند. آنگاه همین که بادی در امتداد لایهٔ یخی بوزد، بر اثر جریان باد، نیروهای کشش هوا بر یخ و سنگها وارد می‌شوند و باعث حرکت هر دو آنها می‌گردند و بدین ترتیب سنگها ردّی از خود بر جای می‌گذارند. بزرگی نیروی کشش هوای وارد بر این «کشتی بادی یخی» با رابطهٔ $D_{\text{ice}} = ۴C_{\text{ice}}\rho A_{\text{ice}}v^۲$ داده می‌شود که در آن $C_{\text{ice}}$ ضریب کشش یخ ($۲/۰\times۱۰^{-۳}$)، $\rho$ چگالی هوا ($۱/۲۱\ \text{kg/m}^۳$)، $A_{\text{ice}}$ مساحت افقی یخ، و $v$ تندی باد در امتداد یخ است.

فرض کنید اندازه‌های لایهٔ یخی ۴۰۰m در ۵۰۰m در ۴/۰mm، ضریب اصطکاک جنبشی آن با سطح زمین ۰/۱۰ و چگالی آن ۹۱۷kg/m³ باشد. همچنین فرض کنید صد سنگ مشابه تک سنگ مسئلهٔ ۲ به دام لایهٔ یخی افتاده باشند. برای آنکه حرکت لایهٔ یخی تداوم یابد، تندی باد (الف) در نزدیک لایه و (ب) در ارتفاع ۱۰m بالای آن باید چقدر باشد؟ (پ) آیا این مقدارها برای بادهای پر سرعت در یک توفان سخت معقول است؟

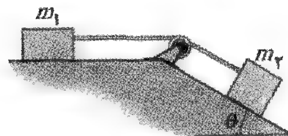
۶۲- *مهندسی در پیچ یک بزرگراه*. اگر اتومبیلی پیچی را با تندی بالایی بپیماید، اتومبیل متمایل به لغزیدن روی پیچ می‌شود. برای یک پیچ شیب‌بندی شدهٔ با اصطکاک، نیروی اصطکاکی بر اتومبیل وارد می‌شود که جهت آن مخالف جهت تمایل لغزش اتومبیل بر پیچ است. یک پیچ دایره‌ای به شعاع $R=$ ۲۰۰m و زاویهٔ شیب $\theta$ را در نظر بگیرید که ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیکها و سطح $\mu_s$ است. اتومبیلی (بدون نیروی بالابر منفی) روی پیچ نشان داده شده در شکل

۶-۱۳ حرکت می‌کند. (الف) رابطه‌ای برای تندی بیشینهٔ $v_{max}$ اتومبیل به دست آورید که اتومبیل را در آستانهٔ لغزش قرار دهد. (ب) روی یک نمودار، $v_{max}$ را بر حسب زاویهٔ $\theta$ در گسترهٔ ۰ تا °۵۰ به ترتیب برای دو حالت $\mu_s = ۰/۰۶۰$ (جادهٔ خشک) و $\mu_s = ۰/۰۵۰$ (جادهٔ خیس یا یخ زده) رسم کنید. $v_{max}$ را بر حسب km/h برای جاده‌ای با زاویهٔ شیب $\theta = ۱۰°$ در صورتی که (پ) $\mu_s = ۰/۶۰$ و (ت) $\mu_s = ۰/۰۵۰$ باشد، محاسبه کنید. (اکنون شما درمی‌یابید که چرا تصادفهای رانندگی در پیچهایی که یخ‌زدگی سطح آنها واضح نیست برای رانندگانی که در حال حرکت با تندی معمولی هستند رخ می‌دهد.)

۶۳- در شکل ۶-۴۹، ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و سطح شیبدار ۰/۲۰ و زاویهٔ شیب $\theta$ برابر با °۶۰ است. در صورتی که قطعه در حال لغزش رو به پایین بر سطح شیبدار باشد (الف) بزرگی شتاب $a$ قطعه و (ب) جهت (رو به پایین یا رو به بالا) آن چیست؟ اگر قطعه رو به بالا بر سطح شیبدار لغزانده شود (پ) بزرگی $a$ و (ت) جهت آن چه می‌شوند؟

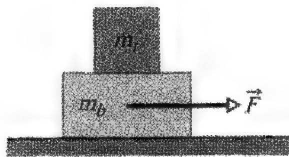

شکل ۶-۴۹ مسئلهٔ ۶۳

۶۴- در شکل ۶-۵۰، قطعهٔ ۱ به جرم $m_1 = ۲/۰\,kg$ و قطعهٔ ۲ به جرم $m_2 = ۳/۰\,kg$ توسط ریسمانی با جرم ناچیز به هم متصل شده‌اند. مجموعه در ابتدا در وضعیت شکل، ثابت نگه داشته شده است. قطعهٔ ۲ روی سطح بدون اصطکاک شیبداری با زاویهٔ شیب $\theta = ۳۰°$ قرار گرفته است. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعهٔ ۱ و سطح افقی ۰/۲۵ است. جرم و اصطکاک قرقره قابل چشمپوشی است. وقتی مجموعه رها شود، قطعه‌ها شروع به حرکت می‌کنند. در این موقع کشش ریسمان چقدر است؟



شکل ۶-۵۰ مسئلهٔ ۶۴

۶۵- قطعه‌ای به جرم $m_t = ۴/۰\,kg$ روی قطعه‌ای به جرم $m_b = ۵/۰\,kg$ گذاشته می‌شود. در حالی که قطعهٔ پایینی ثابت نگه داشته شده است، برای آنکه قطعهٔ بالایی روی قطعهٔ پایینی بلغزد، باید یک نیروی افقی که بزرگی آن دست کم ۱۲N باشد بر قطعهٔ بالایی وارد شود. حال مجموعهٔ قطعه‌ها را روی میز افقی بدون اصطکاکی قرار می‌دهیم (شکل ۶-۵۱). بزرگیهای (الف) بیشینهٔ نیروی افقی $\vec{F}$ را که باید بر قطعهٔ پایینی وارد کرد تا دو قطعه با هم حرکت کنند و (ب) شتابی را که قطعه‌ها به آن می‌رسند پیدا کنید. SSM

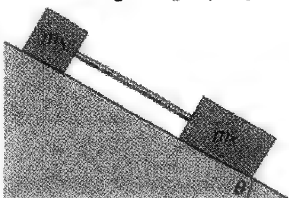


شکل ۶-۵۱ مسئلهٔ ۶۵

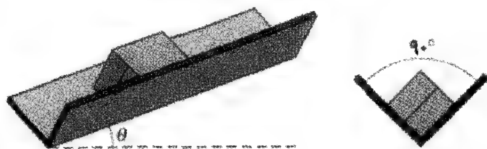
۶۶- جعبهٔ کنسروی روی سطح شیبداری که ابتدای آن هم تراز با سطح خیابان است با شتاب رو به پایین $۰/۷۵\,m/s^2$ به داخل زیرزمین یک مغازهٔ خواربار فروشی می‌لغزد. زاویهٔ سطح شیبدار با افق °۴۰ است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و سطح شیبدار چقدر است؟

۶۷- قطعه‌ای فولادی به جرم $۸/۰۰\,kg$ به حالت سکون روی یک میز افقی قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و میز ۰/۴۵۰ است. قرار است نیرویی بر قطعه وارد شود. بزرگی این نیرو باید چقدر باشد تا در هر سه وضعیت زیر، قطعه در آستانهٔ لغزش قرار گیرد؟ (الف) نیرو به طور افقی، (ب) نیرو رو به بالا در زاویهٔ °۶۰ نسبت به افق و (پ) نیرو رو به پایین در زاویهٔ °۶۰ نسبت به افق وارد شود.

۶۸- در شکل ۶-۵۲، جعبه‌ای به جرم $m_1 = ۱/۶۵\,kg$ توسط میلهٔ بدون جرمی که موازی سطح شیبدار است به جعبه‌ای به جرم $m_2 = ۳/۳۰\,kg$ متصل شده است و هر دو روی سطح به پایین می‌لغزند. زاویهٔ شیب $\theta = ۳۰/۰°$ است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جعبهٔ $m_1$ و سطح $\mu_1 = ۰/۲۲۶$ و میان جعبهٔ $m_2$ و سطح $\mu_2 = ۰/۱۱۳$ است. (الف) کشش در میله و (ب) بزرگی شتاب مشترک دو جعبه را محاسبه کنید. (پ) اگر جای جعبه‌ها با هم عوض شود و $m_1$ در جلوی $m_2$ قرار گیرد، پاسخهای (الف) و (ب) چگونه خواهند شد؟


شکل ۶-۵۲ مسئلهٔ ۶۸

۶۹- در شکل ۶-۵۳، جعبه‌ای داخل ناودانی که از دو سطح شیبدار عمود بر هم ساخته شده است، رو به پایین می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و ناودان $\mu_k$ است. شتاب بر حسب $\mu_k$ ، $\theta$ ، و $g$ چقدر است؟



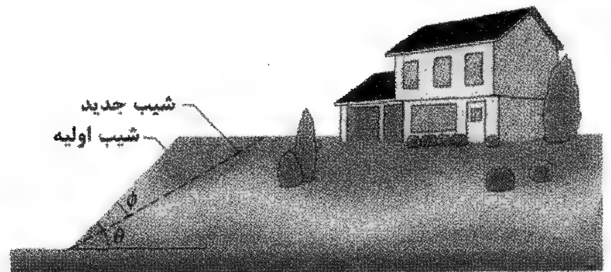
شکل ۶-۵۳ مسئلهٔ ۶۹

۷۰- دانشجویی می‌خواهد ضریبهای اصطکاک ایستایی و جنبشی میان یک جعبه و تخته‌ای را تعیین کند. او جعبه را روی تخته می‌گذارد و بتدریج یک انتهای تخته را بلند می‌کند.

هنگامی که زاویهٔ شیب آن نسبت به افق به $30^\circ$ می‌رسد، جعبه شروع به لغزیدن می‌کند و در مدت ۴/۰s مسافت ۲/۵m را رو به پایین با شتاب ثابت روی تخته طی می‌کند. (الف) ضریب اصطکاک ایستایی و (ب) ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و تخته چقدر است؟

۷۱- لوکوموتیوی به ۲۵ واگن در امتداد مسیر هموار شتاب می‌دهد. جرم هر واگن $5/0\times10^4$ kg، و نیروی اصطکاک وارد بر آن $f_k = 250v$ است که در آن تندی $v$ بر حسب متر بر ثانیه و نیروی $f$ بر حسب نیوتون است. در لحظه‌ای که تندی لوکوموتیو ۳۰km/h است، شتاب آن $0/20\,m/s^2$ است. (الف) کشش در اتصال اولین واگن به لوکوموتیو چقدر است؟ (ب) اگر این کشش برابر با نیروی بیشینه‌ای باشد که لوکوموتیو می‌تواند بر واگنها وارد کند، تندترین شیب رو به بالایی که لوکوموتیو می‌تواند واگنها را با تندی ۳۰km/h روی آن بالا بکشد، چقدر است؟

۷۲- خانه‌ای بر بالای تپه‌ای نزدیک به شیب $\theta = 45^\circ$ ساخته شده است (شکل ۶-۵۴). بررسیهای یک مهندس نشان می‌دهد که زاویهٔ شیب باید کاسته شود، زیرا ممکن است لایه‌های بالایی خاک در امتداد شیب روی لایه‌های پایینی بلغزند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان این دو لایه ۰/۵ باشد، کمترین زاویهٔ $\phi$ که باید از شیب کنونی کاسته شود تا از لغزش لایه‌ها جلوگیری گردد چقدر است؟



**شکل ۶-۵۴** مسئلهٔ ۷۲

۷۳- تندی حد یک گوی کروی به جرم ۶/۰۰kg و شعاع ۳/۰۰cm را در صورتی که ضریب کشش آن ۱/۶۰ باشد محاسبه کنید. چگالی هوایی که توپ در آن سقوط می‌کند $1/20\,kg/m^3$ است.

۷۴- یک قطار سریع السیر با تندی ثابت به دور یک دایرهٔ افقی به شعاع ۴۷۰m حرکت می‌کند. بزرگی مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد از قطار بر مسافری به جرم ۵۱/۰kg، به ترتیب ۲۱۰N و ۵۰۰N است. (الف) بزرگی نیروی خالص (ناشی از *کلیهٔ* نیروها) وارد بر مسافر چقدر است؟ (ب) تندی قطار چقدر است؟

۷۵- یک قطعهٔ فولادی به جرم ۱۱kg روی یک میز افقی به حالت سکون قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و میز ۰/۵۲ است. (الف) بزرگی نیروی افقی‌ای که قطعه را در آستانهٔ حرکت قرار می‌دهد چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی رو به بالایی که با افق زاویهٔ $60^\circ$ می‌سازد و قطعه را در آستانهٔ حرکت قرار می‌دهد چقدر است؟ (پ) اگر نیرو رو به پایین باشد و با افق زاویهٔ $60^\circ$ بسازد، بزرگی آن چقدر می‌تواند باشد بدون اینکه باعث حرکت قطعه شود؟

۷۶- بزرگی نیروی کششی وارد بر گلوله‌ای به قطر ۵۳cm را که با تندی ۲۵۰m/s در ارتفاع پایین و در هوایی با چگالی $1/2\,kg/m^3$ حرکت می کند، محاسبه کنید. فرض کنید $C = 0/75$ است.

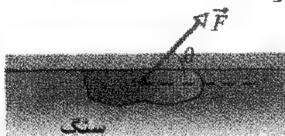
۷۷- دوچرخه سواری دایره‌ای به شعاع ۲۵/۰m را با تندی ثابت ۹/۰۰m/s، دور می‌زند. جرم مجموع دوچرخه و دوچرخه سوار ۸۵/۰kg است. بزرگیهای (الف) نیروی اصطکاک وارد بر دوچرخه از طرف مسیر و (ب) نیروی *خالص* وارد بر دوچرخه از طرف مسیر را محاسبه کنید. **SSM**

۷۸- یک قرص هاکی به جرم ۱۱۰g که روی سطحی یخی لغزانده شده است، پس از پیمودن ۱۵m توسط نیروی اصطکاک وارد از یخ، متوقف می‌شود. (الف) اگر تندی اولیهٔ قرص ۶/۰m/s باشد، بزرگی نیروی اصطکاک چقدر است؟ (ب) ضریب اصطکاک میان قرص و یخ چقدر است؟

۷۹- شکل ۶-۵۵، صخره‌نوردی به جرم ۴۹kg را نشان می‌دهد که در حال صعود از میان دو صخره است. ضریب اصطکاک ایستایی میان کفشهای او و صخره ۱/۲ و میان پشت او و صخره ۰/۸۰ است. او فشار وارد بر صخره را کم می‌کند تا پشت و کفشهایش در آستانهٔ لغزیدن قرار گیرند. (الف) یک نمودار جسم-آزاد برای او رسم کنید. (ب) بزرگی نیرویی که او با آن بر صخره فشار وارد می‌آورد چقدر است؟ (پ) چه کسری از وزن او توسط نیروی اصطکاک وارد بر کفشهایش نگه داشته شده است؟

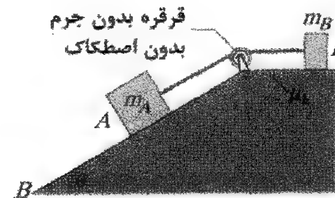

**شکل ۶-۵۵** مسئلهٔ ۷۹

۸۰- سنگی به جرم ۵/۰۰kg در امتداد سقف افقی گذرگاه غاری کشیده می‌شود (شکل ۶-۵۶). اگر ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۶۵ باشد و نیرو با زاویهٔ $\theta = 70/0^\circ$ به سنگ وارد شده باشد، بزرگی نیروی وارد بر سنگ باید چقدر باشد تا سنگ با سرعت ثابت حرکت کند؟



**شکل ۶-۵۶** مسئلهٔ ۸۰

۸۱- جرم قطعهٔ $A$ در شکل ۶-۵۷ برابر با $m_A = ۴/۰ \text{kg}$ و جرم قطعهٔ $B$ برابر با $m_B = ۲/۰ \text{kg}$ است. ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعهٔ $B$ و سطح افقی $\mu_k = ۰/۵۰$ است. سطح شیبدار بدون اصطکاک و زاویهٔ شیب آن $\theta = ۳۰°$ است. قرقره فقط جهت ریسمان رابط قطعه‌ها را تغییر می‌دهد .جرم ریسمان قابل چشمپوشی است. مطلوب است (الف) کشش ریسمان و (ب) بزرگی شتاب قطعه‌ها. **SSM**




**شکل ۶-۵۷** مسئلهٔ ۸۱

۸۲- وقتی چوب اسکی روی برف قرار گیرد، به برف می‌چسبد. ولی وقتی روی برف حرکت کند، بر اثر کشیده شدن باعث گرم شدن و ذوب شدن بخشی از برف می‌شود و این منجر به کاهش ضریب اصطکاک جنبشی و لغزش بیشتر می‌شود. موم اندود کردن چوب اسکی باعث می‌شود تا آب را دفع کند و این به کاهش اصطکاک با لایهٔ آب به وجود آمده می‌انجامد. مجله‌ای گزارش کرده است که نوع تازه‌ای از چوب اسکی پلاستیکی ساخته شده است که به ویژه دافع آب است. اسکی بازی که یک شیب ملایم ۲۰۰ متری را در آلپ از بالا به پایین با چوب اسکیهای معمولی در ۶۱s طی می‌کرد، با این چوب اسکیهای جدید همان مسیر را در ۴۲s طی می‌کند. بزرگی شتاب میانگین اسکی باز را (الف) با چوب اسکیهای معمولی و (ب) با چوب اسکیهای جدید، تعیین کنید. با فرض اینکه زاویهٔ شیب $۳/۰°$ باشد، ضریب اصطکاک جنبشی را برای (پ) چوب اسکیهای معمولی و (ت) چوب اسکیهای جدید محاسبه کنید.

۸۳- بچه‌ای که در حال بازی کردن در نزدیکی محلی برای جاده‌سازی است از روی یک نردهٔ محافظ به داخل یک شیب گلی که زاویهٔ شیب رو به پایین آن $۳۵°$ است، سقوط می‌کند. در هنگامی که بچه روی شیب *رو به پایین* می‌لغزد، شتابی به بزرگی $۰/۵۰ \text{m/s}^2$ دارد که جهت آن *رو به بالای* شیب است. ضریب اصطکاک جنبشی میان بچه و شیب چقدر است؟

۸۴- در شکل ۶-۵۸ ، بدل کاری یک اتومبیل را (بدون نیروی بالابر منفی) روی تپه‌ای که برش مقطعی از آن را می‌توان دایره‌ای به شعاع $R = ۲۵۰ \text{m}$ در نظر گرفت، می‌راند. بیشترین تندی‌ای که اتومبیل می‌تواند داشته باشد بدون آنکه در بالاترین نقطهٔ تپه از جاده جدا شود، چقدر است؟

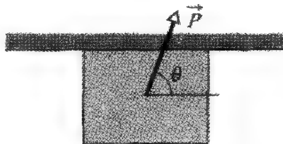



**شکل ۶-۵۸** مسئلهٔ ۸۴

۸۵- اتومبیلی به وزن $۱۰/۷ \text{kN}$ می‌خواهد پیچ شیب‌بندی نشده‌ای به شعاع $۶۱/۰ \text{m}$ را بدون نیروی بالابر منفی، با تندی $۱۳/۴ \text{m/s}$ دور بزند، (الف) بزرگی نیروی اصطکاک لازم برای نگه داشتن اتومبیل روی مسیر دایره‌ای باید چقدر باشد؟ (ب) اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیکها و جاده $۰/۳۵۰$ باشد، آیا اتومبیل می‌تواند با موفقیت پیچ را دور بزند؟ **SSM**

۸۶- یک نیروی ۱۰۰ نیوتونی با زاویهٔ $\theta$ رو به بالای یک کف افقی بر نیمکتی به جرم $۲۵/۰ \text{kg}$ که روی کف اتاق قرار دارد وارد شده است. اگر $\theta = ۰°$ باشد، (الف) مؤلفهٔ افقی $F_h$ نیروی وارد شده و (ب) بزرگی $F_N$ نیروی عمودی وارد از کف بر نیمکت چقدر است؟ اگر $\theta = ۳۰/۰°$ باشد، مطلوب است (پ) $F_h$ و (ت) $F_N$ . اکنون فرض کنید که ضریب اصطکاک ایستایی میان نیمکت و کف ۰/۴۲۰ باشد. اگر $\theta$ برابر با (ج) $۰°$ ، (ح) $۳۰/۰°$، و (خ) $۶۰/۰°$ باشد، آیا نیمکت بر کف می‌لغزد یا در حالت سکون باقی می‌ماند؟

۸۷-دانشجویی که بر اثر امتحانهای پایان ترم به سرش زده است، با استفاده از نیروی $\vec{P}$ به بزرگی $۸۰ \text{N}$ و با زاویهٔ $\theta = ۷۰°$ یک قطعهٔ ۵/۰ کیلوگرمی را در امتداد سقف اتاقش هل می‌دهد (شکل ۶-۵۹). اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و سقف ۰/۴۰ باشد، بزرگی شتاب قطعه چقدر است؟




**شکل ۶-۵۹** مسئلهٔ ۸۷

۸۸- ریسمانی می‌تواند کشش بیشینهٔ $۴۰ \text{N}$ را بدون پاره‌شدن تحمل کند. بچه‌ای سنگی به جرم $۰/۳۷ \text{kg}$ را به یک انتهای این ریسمان می‌بندد، انتهای دیگر آن را در دست خود می‌گیرد و آنگاه سنگ را در دایرهٔ قائمی به شعاع $۰/۹۱ \text{m}$ می‌چرخاند. او تندی سنگ را به آرامی افزایش می‌دهد تا اینکه ریسمان پاره شود. هنگامی که ریسمان پاره شود، (الف) سنگ در کجای مسیر خود قرار دارد؟ و (ب) تندی آن چقدر است؟

۸۹- شما می‌خواهید صندوقی را در امتداد یک کف به سمت باراندازی هل بدهید. وزن صندوق $۱۶۵ \text{N}$ است. ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و کف ۰/۵۱۰، و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها ۰/۳۲ است. نیروی وارد از شما بر صندوق در راستای افقی است. (الف) بزرگی نیروی شما باید چقدر باشد تا صندوق در آستانهٔ لغزیدن قرار گیرد؟ (ب) بزرگی نیرویی که از آن پس باید بر صندوق وارد کنید تا با سرعت ثابت حرکت کند چقدر است؟ (پ) اگر شما به جای این نیرو، همان نیروی پاسخ (الف) را به کار گیرید، بزرگی شتاب صندوق چقدر خواهد شد؟

۹۰-بچه‌ای به وزن $۱۴۰ \text{N}$ به حالت سکون بر بالای ... که با افق زاویهٔ $۲۵°$ می‌سازد نشسته است. بچه ...

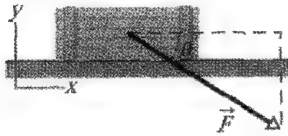
کناره‌های سرسره از لغزیدن خود جلوگیری می‌کند. پس از اینکه بچه کناره‌های سرسره را رها می‌کند به شتاب ثابت $۰/۸۶ m/s^2$ (البته رو به پایین) می‌رسد. (الف) ضریب اصطکاک جنبشی میان بچه و سرسره چقدر است؟ (ب) مقدارهای بیشینه و کمینهٔ ضریب اصطکاک ایستایی میان بچه و سرسره که با اطلاعات داده شده سازگار باشد چقدر است؟

۹۱- یک قفسهٔ پرونده به وزن ۵۵۶N به حالت سکون روی کف اتاق قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان قفسه و کف اتاق ۰/۶۸، و ضریب اصطکاک جنبشی بین آنها ۰/۵۶ است. در چهار تلاش متفاوت برای حرکت دادن آن، قفسه با نیروهای افقی (الف) ۲۲۲N، (ب) ۳۳۴N، (پ) ۴۴۵N، و (ت) ۵۵۶N هل داده می‌شود. برای هر یک از تلاشها بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر قفسه را از سوی کف اتاق تعیین کنید. (قفسه در ابتدا برای کلیهٔ تلاشها ساکن است.) (ث) در کدامیک از تلاشها قفسه حرکت می‌کند؟ SSM

۹۲- شخصی، سنگی به جرم ۰/۲۵۰kg را در کیسهٔ قلاب سنگی به جرم ۰/۰۱kg می‌گذارد و سپس سنگ و کیسه را روی یک دایرهٔ قائم به شعاع ۰/۶۵۰m می‌چرخاند. جرم ریسمان بین کیسه و دست شخص ناچیز است و وقتی کشش ریسمان به ۳۳/۰N یا بیشتر برسد، پاره می‌شود. فرض کنید که شخص بتواند تندی سنگ را بتدریج افزایش دهد. (الف) آیا ریسمان در پایینترین نقطهٔ دایره پاره می‌شود یا در بالاترین نقطهٔ آن؟ (ب) در لحظهٔ پاره‌شدن ریسمان، تندی سنگ چقدر است؟

۹۳- یک سورتمهٔ مسابقهٔ چهار نفره (با جرم کل ۶۳۰kg) از مسیر مستقیمی که در ابتدای یک مسیر مسابقه قرار دارد پایین می‌آید. طول مسیر مستقیم ۸۰/۰m و زاویهٔ ثابت شیب آن نسبت به افق $۱۰/۲^\circ$ است. فرض کنید بر اثر توأم اصطکاک و کشش هوا، نیروی ثابت ۶۲/۰N موازی با شیب و رو به بالای آن بر سورتمه وارد می‌شود. (الف) اگر تندی سورتمه در آغاز مسابقه ۶/۲۰m/s باشد، چقدر طول می‌کشد تا سورتمه مسیر مستقیم را طی کند؟ (ب) فرض کنید بتوان اثرهای اصطکاک و کشش هوا را تا ۴۲/۰N کاهش داد. با همان سرعت اولیهٔ سابق، اکنون چقدر طول می‌کشد تا سورتمه مسیر مستقیم را طی کند؟ به پرسش‌های بالا با سه رقم بامعنا پاسخ دهید.

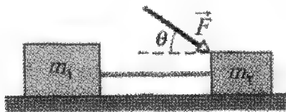
۹۴- در شکل ۶-۶۰، نیروی $\vec{F}$ بر صندوقی به جرم $m$ واقع بر کف اتاقی وارد شده است. ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و کف $\mu_s$ است. زاویهٔ $\theta$ از مقدار اولیهٔ °۰ بتدریج افزایش پیدا می‌کند به گونه‌ای که بردار نیرو در صفحهٔ شکل به طور ساعتگرد می‌گردد. در حین این چرخش، بزرگی $F$ نیرو به طور مداوم طوری تنظیم می‌شود که صندوق همواره در آستانهٔ لغزش باشد. به ازای $\mu_s = ۰/۷۰$، (الف) نسبت $F/mg$ را برحسب $\theta$ رسم کنید و (ب) زاویهٔ $\theta_{\text{inf}}$ را که در آن این نسبت به یک مقدار نامتناهی می‌رسد، تعیین کنید. (پ) آیا روغن مالی کردن کف، مقدار $\theta_{\text{inf}}$ را افزایش می‌دهد یا کاهش؟ یا بدون تغییر نگه می‌دارد؟ (ت) مقدار $\theta_{\text{inf}}$ به ازای $\mu_s = ۰/۶۰$ چقدر است؟




شکل ۶-۶۰ مسئلهٔ ۹۴

۹۵- اتومبیلی در خیابانی واقع بر تپه‌ای که با افق زاویهٔ $۳۵/۰^\circ$ می‌سازد، در اوایل غروب پارک کرده است. درست در آن لحظه ضریب اصطکاک میان لاستیکها و سطح خیابان ۰/۷۲۵ است. مدتی بعد به هنگام شب، توفانی به همراه تگرگ سر می‌گیرد و از برخورد تگرگها با سطح خیابان، ضریب اصطکاک هم به دلیل حضور یخ و هم به دلیل کاهش دما که منجر به تغییرات شیمیایی در سطح خیابان می‌شود، کاهش می‌یابد. ضریب اصطکاک با چه درصدی باید تغییر کند تا اتومبیل در وضعیت خطرناک لغزش رو به پایین در خیابان قرار گیرد؟

۹۶- در شکل ۶-۶۱، قطعهٔ ۱ به جرم $m_1 = ۲/۰$kg و قطعهٔ ۲ به جرم $m_2 = ۱/۰$kg به وسیلهٔ ریسمانی با جرم ناچیز به هم متصل شده‌اند. قطعهٔ ۲ توسط نیروی $\vec{F}$ به بزرگی ۲۰N در زاویهٔ $\theta = ۳۵^\circ$ هل داده می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان هر قطعه و سطح افقی ۰/۲۰ است. کشش ریسمان چقدر است؟




شکل ۶-۶۱ مسئلهٔ ۹۶

۹۷- در شکل ۶-۶۲ یک کارگر سخت‌کوش با نیروی $\vec{F}$ که به طور مستقیم در امتداد دستهٔ یک زمین‌شوی است آن را بر کف اتاق فشار می‌دهد. دسته با امتداد قائم زاویهٔ $\theta$ می‌سازد و ضریبهای اصطکاک ایستایی و جنبشی میان سر زمین‌شوی و کف به ترتیب $\mu_s$ و $\mu_k$ است. از جرم دسته چشمپوشی و فرض کنید که همهٔ جرم زمین‌شوی در سر آن قرار گرفته است. (الف) اگر سر زمین‌شوی روی کف با سرعت ثابت حرکت کند، بزرگی $F$ چقدر است؟ (ب) نشان دهید اگر $\theta$ کمتر از مقدار معین $\theta_0$ باشد، آنگاه $\vec{F}$ (که همچنان در امتداد دسته است) نمی‌تواند سر زمین‌شوی را حرکت دهد، $\theta_0$ را بیابید.

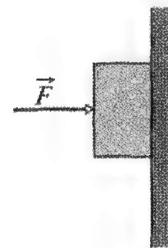



شکل ۶-۶۲ مسئلهٔ ۹۷

۹۸- پیچ دایره‌ای بزرگراهی برای حرکت اتومبیلها با تندی ۶۰km/h طراحی شده است. فرض کنید که در هنگام حرکت اتومبیلها بر آنها نیروی بالابر منفی وارد نمی‌شود. (الف) اگر شعاع پیچ ۱۵۰m باشد، زاویهٔ درست شیب‌بندی جاده چقدر است؟ (ب) اگر پیچ شیب‌بندی نشده باشد، کمینهٔ ضریب اصطکاک میان لاستیکها و مسیر باید چقدر باشد تا از لغزیدن اتومبیلها به هنگامی که پیچ را با تندی ۶۰km/h دور می‌زنند، جلوگیری شود؟

۹۹- قطعه‌ای روی سطح شیبداری به زاویهٔ شیب $\theta$ ، با سرعت ثابت رو به پایین می‌لغزد. قطعه سپس روی همان سطح با تندی اولیهٔ $v_0$ رو به بالا پرتاب می‌شود. (الف) قطعه تا پیش از رسیدن به حالت سکون، چقدر روی سطح بالا می‌رود؟ (ب) وقتی قطعه به حالت سکون برسد، آیا دوباره رو به پایین می‌لغزد؟ دلیلی برای پاسخ خود ارائه کنید. SSM

۱۰۰- در شکل ۶-۶۳، قطعه‌ای به وزن ۲۲N توسط نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۶۰N به حالت سکون بر دیوارهٔ قائمی ثابت نگه داشته شده است. ضریب اصطکاک ایستایی میان دیواره و قطعه ۰/۵۵، و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها ۰/۳۸ است. در شش آزمایش متفاوت نیروی دوم $\vec{P}$ موازی با دیواره بر قطعه وارد شده است. بزرگیها و جهتهای $\vec{P}$ در این شش آزمایش به این قرارند: (الف) ۳۴N ، رو به بالا، (ب) ۱۲N، رو به بالا، (پ) ۴۸N، رو به بالا،(ت) ۶۲N، رو به بالا، (ث) ۱۰N، رو به پایین، و (ج) ۱۸N رو به پایین. در هر آزمایش، بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر قطعه چقدر است؟ در کدام آزمایش، قطعه (چ) رو به بالای دیواره و (ح) رو به پایین دیواره حرکت می‌کند؟ (خ) در کدام آزمایش جهت نیروی اصطکاک به سمت پایین دیواره است؟



شکل ۶-۶۳ مسئلهٔ ۱۰۰

۱۰۱- سکهٔ کوچکی به جرم ۲/۰g در شعاع ۵/۰cm روی یک صفحهٔ گردان افقی که در هر ۳/۱۴s سه دور کامل می‌زند، قرار دارد. مشاهده می‌شود که سکه روی صفحهٔ گردان نمی‌لغزد. (الف) تندی سکه، (ب) بزرگی و (پ) جهت (به طور شعاعی رو به داخل یا رو به خارج) شتاب سکه چیست؟ (ت) بزرگی و (ث) جهت (رو به داخل و یا رو به خارج) نیروی اصطکاک وارد بر سکه چیست؟ اگر سکه در شعاع ۱۰cm قرار داده شود، در آستانهٔ لغزش قرار می‌گیرد. (ج) ضریب اصطکاک ایستایی میان سکه و صفحهٔ گردان چقدر است؟

۱۰۲- بچه‌ای سبد کوچکی را بر پیرامون خارجی یک چرخ و فلک افقی به شعاع ۴/۶m قرار می‌دهد. چرخ و فلک در هر ۳۰s، یک بار می‌چرخد. (الف) تندی نقطه‌ای واقع بر پیرامون چرخ و فلک چقدر است؟ (ب) کمترین مقدار ضریب اصطکاک ایستایی میان سبد و چرخ و فلک باید چقدر باشد تا سبد در سر جایش باقی بماند؟

۱۰۳- جعبه‌ای به جرم ۱/۵kg در ابتدا به حالت سکون روی سطحی افقی قرار دارد. در لحظهٔ $t=0$ نیروی افقی $\vec{F}=(1/8t)\hat{i}\,N$ (که $t$ بر حسب ثانیه است) بر جعبه وارد می‌شود. شتاب جعبه بر حسب تابعی از زمان $t$ به این قرار است: $\vec{a}=0$ به ازای $0\le t\le 2/8s$ و $\vec{a}=(1/2t-2/4)\hat{i}\,m/s^2$ به ازای $t>2/8s$ . (الف) ضریب اصطکاک ایستایی میان جعبه و سطح چقدر است؟ (ب) ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و سطح چقدر است؟

۱۰۴- تنهٔ درختی به وزن ۲۲۰N به حالت سکون روی کف اتاقی قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان تنهٔ درخت و کف اتاق ۰/۴۱ و ضریب اصطکاک جنبشی آنها ۰/۳۲ است. (الف) بزرگی نیروی افقی کمینه‌ای که شخص باید بر تنهٔ درخت وارد کند تا شروع به حرکت کند چقدر است؟ (ب) هنگامی که تنهٔ درخت به حرکت درآمد بزرگی نیروی افقی که شخص باید وارد کند تا حرکتش را با سرعت ثابت ادامه دهد چقدر است؟ (پ) اگر شخص با همان نیروی به کار رفته برای شروع حرکت به هل دادن ادامه دهد، بزرگی شتاب چقدر می‌شود؟

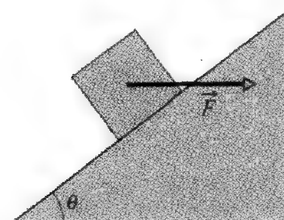
۱۰۵- کارگر انباری نیروی افقی ثابتی به بزرگی ۸۵N را بر جعبه‌ای به جرم ۴۰kg که در ابتدا به حالت سکون بر کف افقی انبار قرار دارد، وارد می‌کند. در لحظه‌ای که جعبه مسافت ۱/۴m را پیموده است، تندی آن ۱/۰m/s است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و کف انبار چقدر است؟ SSM

۱۰۶- تصور کنید کیلوگرم استاندارد روی استوای زمین قرار گرفته است و بر دایره‌ای به شعاع $6/40\times10^6$ m (شعاع زمین) با تندی ثابت ۴۶۵ m/s که ناشی از چرخش زمین است، حرکت می‌کند. (الف) بزرگی نیروی مرکزگرای وارد بر کیلوگرم استاندارد در حین چرخش چقدر است؟ حال تصور کنید که کیلوگرم استاندارد از یک ترازوی فنری واقع در همان مکان آویخته شده است و فرض کنید که اگر زمین نمی‌چرخید وزن آن دقیقاً ۹/۸۰N می‌شد. (ب) ترازوی فنری چه عددی را نشان می‌دهد؟ به عبارت دیگر، بزرگی نیروی وارد بر ترازو از طرف کیلوگرم استاندارد چقدر است؟

۱۰۷- وقتی یک قطعهٔ ۴۰ نیوتونی روی سطح شیبداری که با افق زاویهٔ $25^\circ$ می‌سازد رو به پایین بلغزد، شتاب آن $0/80\,m/s^2$ ، رو به بالای سطح است. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و سطح شیبدار چقدر است؟

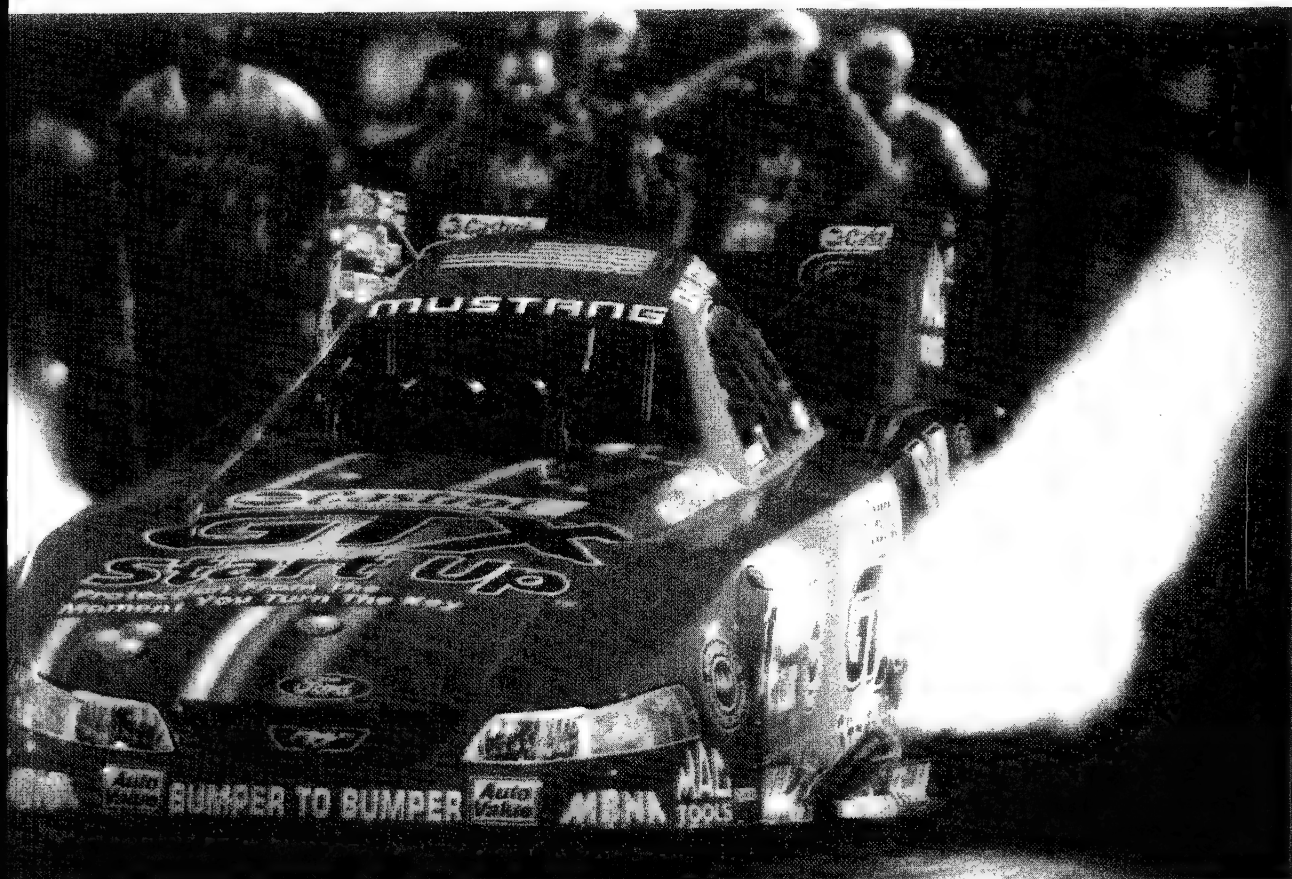
۱۰۸- چمدانی در فرودگاه توسط تسمه‌نقاله‌ای از یک مکان به مکان دیگری منتقل می‌شود. در یک مکان معین، تسمه از شیبی که با افق زاویهٔ $۲/۵^\circ$ می‌سازد پایین می‌رود. فرض کنید با چنین زاویهٔ شیب اندکی، لغزشی برای چمدان رخ نمی‌دهد. هنگامی که چمدان با وزن ۶۹N از بخش شیبدار می‌گذرد، بزرگی نیروی اصطکاکی را که بر چمدان از سوی تسمه وارد می‌شود تعیین کنید. در صورتی که تندی تسمه (الف) ۰ و ثابت، (ب) ۰/۶۵m/s و ثابت، (پ) ۰/۶۵m/s و زیاد شونده با آهنگ $۰/۲۰\,m/s^2$، (ت) ۰/۶۵m/s و کم شونده با آهنگ $۰/۲۰\,m/s^2$، و (ث) ۰/۶۵m/s و زیاد شونده با آهنگ $۰/۷۵\,m/s^2$ باشد. (ج) برای کدامیک از این پنج وضعیت جهت نیروی اصطکاک به سمت پایین سطح شیبدار است؟

۱۰۹- در شکل ۶-۶۴، در حالی که بر قطعه‌ای به جرم ۵/۰kg نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۵۰N وارد می‌شود، قطعه روی سطح شیبداری با زاویهٔ شیب $\theta = ۳۷^\circ$ رو به بالا لغزانده می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و سطح ۰/۳۰ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (رو به پایین یا رو به بالا) شتاب قطعه چقدر است؟ تندی اولیهٔ قطعه ۴/۰m/s است. (پ) قطعه تا کجا بر سطح شیبدار بالا می‌رود؟ (ت) وقتی قطعه به بالاترین نقطهٔ مسیرش رسید، آیا در حالت سکون باقی می‌ماند یا رو به پایین می‌لغزد؟



**شکل ۶-۶۴** مسئلهٔ ۱۰۹

# ۷ انرژی جنبشی و کار




**کدام خاصیت اتومبیل زمان برنده شدن را تعیین می‌کند؟**

رانندهٔ اتومبیل مخصوص مسابقه جهت اماده شدن در یک مسیر یک چهارم مایلی چرخها را می‌چرخاند تا لاستیکها و جاده چسبنده شوند به طوری که اصطکاک موقع حرکت زیاد باشد. پس از این راننده آماده است تا با علامت لازم شروع به حرکت کند. شروع حرکت اتومبیل آنچنان پر قدرت است که اصولاً مشابه پرتاب افقی یک موشک به حرکت در می‌آید. امروزه اساس علمی و مهندسی این اتومبیلها آنچنان پیشرفته است که برد و باخت اغلب فقط به اختلاف ۱ ms بستگی دارد.

پاسخ در همین فصل.

## ۷-۱ فیزیک چیست؟

یکی از هدفهای بنیادی فیزیک بررسی چیزی است که همه دربارهٔ آن حرف می‌زنند: انرژی. این موضوع به‌وضوح اهمیت دارد. در واقع، تمدن ما بر اساس کسب انرژی و استفادهٔ بهینه از آن بنا نهاده شده است.

برای مثال، هر کسی می‌داند که لازمهٔ هر نوع حرکتی انرژی است. پرواز بر فراز اقیانوس آرام به انرژی نیاز دارد. بردن اجسام به طبقهٔ بالای یک ساختمان یا به داخل یک ایستگاه فضایی در حال دوران به انرژی نیاز دارد. پرتاب یک توپ بسکتبال نیازمند آن است. ما پول هنگفتی برای به دست آوردن و استفاده از انرژی می‌پردازیم. جنگهایی بر سر منابع انرژی در گرفته‌اند. جنگهایی به دلیل استفادهٔ شدید و ناگهانی انرژی توسط یک طرف به پایان رسیده‌اند. هر کسی مثالهای فراوانی از انرژی و کاربردهایش می‌داند، ولی به راستی اصطلاح *انرژی* به چه معناست؟

## ۷-۲ انرژی چیست؟

اصطلاح *انرژی* به حدی گسترده است که ارائه یک تعریف روشن برای آن دشوار است. از جنبهٔ فنی، انرژی کمیتی نرده‌ای است که به حالت (یا وضعیت) یک یا چند جسم وابسته است. ولی این تعریف، مبهم‌تر از آن است که فعلاً بتواند کمکی به ما بکند.

شاید یک تعریف نادقیقتر بتواند دست کم شروعی برای کار ما باشد: انرژی عددی است که به سامانه‌ای که از یک یا چند جسم تشکیل شده وابسته می‌کنیم. اگر نیرویی یکی از این جسمها را مثلاً با حرکت دادن آن تغییر دهد، آنگاه عدد انرژی تغییر می‌کند. پس از آزمایشهای بی‌شمار، دانشمندان و مهندسان دریافتند که اگر طرحی که با آن عددهای انرژی را نسبت می‌دهیم به دقت برنامه‌ریزی شده باشد، آنگاه این عددها می‌توانند برای پیش بینی نتیجهٔ آزمایشها و حتی مهمتر از آن، ساختن ماشینها، از قبیل ماشینهای پرواز به کار گرفته شوند. این موفقیت مبتنی بر یک ویژگی شگفت انگیز جهان ماست: انرژی می‌تواند از نوعی به نوع دیگر تبدیل شود و می‌تواند از جسمی به جسم دیگر انتقال یابد، ولی مقدار کل آن همواره ثابت باقی می‌ماند (انرژی *پایسته* است). تاکنون هیچ استثنایی برای این *اصل پایستگی انرژی* یافت نشده است.

انواع مختلف انرژی را می‌توان به صورت عددهایی که مقدار پول را در انواع حسابهای بانکی نشان می‌دهند در نظر گرفت. برای اینکه این عددها به چه معنی هستند و اینکه آنها را چگونه می‌شود تبدیل کرد قاعده‌هایی ساخته شده‌اند. شما می‌توانید این عددها را از یک حساب به حساب دیگر یا از یک سامانه به سامانهٔ دیگر، شاید به طور الکترونیکی، منتقل کنید بدون آنکه ابداً چیزی مادی حرکت کرده باشد. با این حال، مقدار کل (کل عدد پولها) همواره می‌تواند محاسبه شود: این مقدار، همواره پایسته است.

در این فصل تنها بر یک نوع از انواع انرژی (*انرژی جنبشی*) و تنها یکی از راههایی که با آن انرژی می‌تواند منتقل شود (*کار*) متمرکز می‌شویم. در فصل بعد، چند نوع دیگر انرژی را و اینکه چگونه می‌توان اصل پایستگی انرژی را به صورت معادله‌هایی قابل حل نوشت، بررسی می‌کنیم.

## ۷-۳ انرژی جنبشی

**انرژی جنبشی** $K$ انرژی وابسته به *حالت* حرکت یک جسم است. هر چه جسم سریعتر حرکت کند، انرژی جنبشی آن بیشتر است. هنگامی که جسم ساکن باشد، انرژی جنبشی آن صفر است.

برای جسمی به جرم $m$ که تندی آن خیلی کمتر از تندی نور است

$$K=\frac{۱}{۲}mv^{۲} \qquad \text{(انرژی جنبشی)} \qquad (۷-۱)$$

به طور مثال یک اردک ۳/۰ کیلوگرمی که با تندی $۲/۰\ \mathrm{m/s}$ پرواز می‌کند، دارای انرژی جنبشی $۶/۰\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}/s^{۲}}$ است؛ این بدین معناست که ما این عدد را به حرکت اردک وابسته کرده‌ایم.

یکای SI انرژی جنبشی (و هر نوع دیگری از انرژی) به یاد جیمز *پرسکات ژول*[1] دانشمند انگلیسی سالهای ۱۸۰۰ میلادی، **ژول** (J) گذاشته شده است. این یکا به طور مستقیم از معادلهٔ ۷-۱ برحسب یکاهای جرم و سرعت تعریف شده است

$$۱\ \text{ژول} = ۱\ \mathrm{J} = ۱\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}/s^{۲}} \qquad (۷-۲)$$

بنابراین، انرژی جنبشی یک اردک در حال پرواز $۶/۰\mathrm{J}$ است.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۱**

در سال ۱۸۹۶/۱۲۷۵ در *واکو*[2] در ایالت تگزاس، *ویلیام کراش*[3] دو لوکوموتیو را که در دو انتهای خط آهنی به طول $۶/۴\mathrm{km}$ پارک شده بودند روشن کرد، ساسات آنها را باز گذاشت، و اجازه داد که آنها در مقابل ۳۰۰۰۰ تماشاگر، در بالاترین سرعت ممکن سر به سر به هم کوبیده شوند (شکل ۷-۱). صدها نفر بر اثر ترکش تکه پاره‌های آهن زخمی و چندین نفر کشته شدند. با فرض اینکه وزن هر لوکوموتیو $۱/۲\times ۱۰^{۶}\ \mathrm{N}$ و شتاب آن مقدار ثابت $۰/۲۶\mathrm{m/s^{۲}}$ بود، انرژی جنبشی کل دو لوکوموتیو درست پیش از برخورد چقدر بوده است؟

1. James Prescott Joule
2. Waco
3. William Crush



**شکل ۷-۱** پیامد برخورد دو لوکوموتیو در سال ۱۸۹۶/۱۲۷۵.

**نکته‌های کلیدی** (۱) برای یافتن انرژی جنبشی هر لوکوموتیو باید از معادلهٔ ۷-۱ استفاده کنیم، که این بدین معناست که ما به تندی هر لوکوموتیو درست پیش از برخورد و جرم آنها نیاز داریم. (۲) چون می‌توانیم فرض کنیم که هر لوکوموتیو شتاب ثابتی داشته است، از معادله‌های جدول ۲-۱ می‌توانیم برای یافتن تندی $v$ آنها درست پیش از برخورد استفاده کنیم.

***محاسبه‌ها:*** از معادلهٔ ۲-۱۶ استفاده می‌کنیم، چرا که همهٔ متغیرهای آن به جز $v$ معلوم است

$$v^{2}=v_{\circ}^{2}+2a(x-x_{\circ})$$

که با $v_{\circ}=\circ$ و $x-x_{\circ}=3/2\times10^{3}\ \mathrm{m}$ (نیمی از فاصلهٔ اولیه) به دست می‌دهد

$$v^{2}=\circ+2\,(\circ/26\,\mathrm{m/s^{2}})(3/2\times10^{3}\ \mathrm{m})$$

یا

$$v=40/8\ \mathrm{m/s}$$

(که در حدود $150\,\mathrm{km/h}$ است).

جرم هر لوکوموتیو را می‌توانیم با تقسیم وزن آن بر $g$ به دست آوریم

$$m=\frac{1/2\times10^{6}\ \mathrm{N}}{9/8\,\mathrm{m/s^{2}}}=1/22\times10^{5}\ \mathrm{kg}$$

اکنون با استفاده از معادلهٔ ۷-۱، انرژی جنبشی کل دو لوکوموتیو را درست پیش از برخورد به دست می‌آوریم

$$K=2\left(\frac{1}{2}mv^{2}\right)=(1/22\times10^{5}\ \mathrm{kg})(40/8\ \mathrm{m/s})^{2}$$
$$=2/0\times10^{8}\ \mathrm{J}$$ (پاسخ)

این برخورد مشابه انفجار یک بمب بوده است.

## ۷-۴ کار

اگر با وارد آوردن نیرو بر جسمی، آن را با رساندن به یک تندی بزرگتر شتابدار کنید، انرژی جنبشی جسم $K\left(=\frac{1}{2}mv^{2}\right)$ افزایش می‌یابد. به همین ترتیب، اگر با وارد آوردن نیرو تندی جسم را کوچکتر کنید، انرژی جنبشی آن کاهش می‌یابد. این تغییرات در انرژی جنبشی را این‌گونه توجیه می‌کنیم که نیروی شما، انرژی را از جسم به شخص یا از شخص به جسم انتقال داده است. در چنین انتقالی از انرژی که توسط نیرو صورت پذیرفته، گفته می‌شود که **کار** $W$ *توسط نیرو روی جسم انجام شده است*. به طور رسمی‌تر کار به صورت زیر تعریف می‌شود

> ☜ کار $W$ عبارت است از انرژی انتقال یافته به جسم یا از جسم، به وسیلهٔ نیرویی که بر جسم وارد می‌شود. انرژی انتقال یافته به جسم کار مثبت و انرژی انتقال یافته از آن کار منفی است.

بنابراین، «کار» انرژی انتقال یافته است و «انجام کار» عمل انتقال انرژی است. کار همان یکای انرژی را دارد و یک کمیت نرده‌ای است.

واژهٔ *انتقال* می‌تواند گمراه کننده باشد. آن به این معنا نیست که ماده‌ای به داخل جسم وارد یا از آن خارج شده است. یعنی مانند جریان آب نیست، بلکه شبیه انتقال الکترونیکی پول بین دو حساب بانکی است: موجودی یک حساب افزایش می‌یابد، در حالی که موجودی حساب دیگر کم می‌شود، بی‌آنکه چیزی مادی میان دوحساب منتقل شده باشد.

توجه کنید که در اینجا معنی متداول واژهٔ «کار» که اشاره به هر نوع تلاش فیزیکی یا ذهنی دارد، مورد نظر ما نیست. مثلاً اگر دیواری را به سختی فشار دهید، بر اثر انقباضهای مداوم و متوالی عضله‌های خود که لازمهٔ این عمل است، خسته می‌شوید و در اصطلاح متداول کار انجام می‌دهید. ولی چنین تلاشی باعث انتقال انرژی به دیوار یا از آن نمی‌شود و بنابراین بنابر تعریفی که در اینجا ارائه کردیم، کاری روی دیوار انجام نگرفته است.

در این فصل برای آنکه نمادها را با هم اشتباه نگیریم، از نماد $W$ فقط برای کار استفاده می‌کنیم و وزن را با معادلش $mg$ نمایش می‌دهیم.

## ۷-۵ کار و انرژی جنبشی

### *یافتن رابطه‌ای برای کار*

اکنون می‌خواهیم برای کار مهره‌ای که می‌تواند در امتداد یک سیم بدون اصطکاک واقع بر محور افقی $x$ بلغزد (شکل ۷-۲)، رابطه‌ای به دست آوریم. نیروی ثابت $\vec{F}$ که جهتش با سیم زاویهٔ $\phi$ می‌سازد، به مهره در امتداد سیم شتاب می‌دهد. نیرو و شتاب را می‌توانیم با قانون دوم نیوتون که برای مؤلفه‌های در امتداد محور $x$ نوشته شده است، به هم مربوط کنیم:

$$F_{x}=ma_{x} \qquad (7\text{-}3)$$

که در آن $m$ جرم مهره است. وقتی مهره به اندازهٔ جابه‌جایی $\vec{d}$ حرکت کند، این نیرو سرعت مهره را از مقدار اولیهٔ $\vec{v}_{\circ}$ به مقدار

دیگر $\vec{v}$ تغییر می‌دهد، چون نیرو ثابت است، می‌دانیم که شتاب نیز ثابت است. بنابراین، می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۲-۱۶ برای مؤلفه‌های واقع بر امتداد محور $x$ چنین بنویسیم

$$v^{2} = v_{0}^{2} + 2a_x d \qquad (۷-۴)$$

با حل این معادله برای $a_x$، قرار دادن آن در معادلهٔ ۷-۳، و مرتب کردن نتیجهٔ آن به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2}mv^{2} - \frac{1}{2}mv_{0}^{2} = F_x d \qquad (۷-۵)$$

اولین جمله در طرف چپ این معادله انرژی جنبشی $K_f$ مهره در پایان جابه‌جایی $d$، و دومین جمله انرژی جنبشی $K_i$ مهره در آغاز جابه‌جایی است. بنابراین، طرف چپ معادلهٔ (۷-۵) انرژی تغییر یافته بر اثر نیرو، و طرف راست آن برابر با $F_x d$ است. از اینرو، کار $W$ که نیرو روی مهره انجام داده است (انرژی انتقال یافته بر اثر نیرو) برابر است با

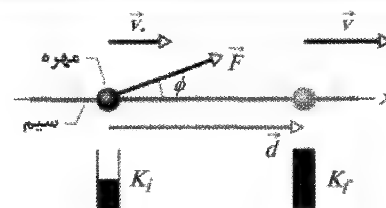
$$W = F_x d \qquad (۷-۶)$$

اگر مقدارهای $F_x$ و $d$ معلوم باشند، از این معادله می‌توانیم برای محاسبهٔ کار $W$ که نیرو روی مهره انجام داده است استفاده کنیم.

> برای محاسبهٔ کار یک نیرو روی جسمی که تحت تأثیر آن نیرو یک جابه‌جایی انجام می‌دهد، فقط از آن مؤلفهٔ نیرو که در امتداد جابه‌جایی جسم است استفاده می‌کنیم. کار مؤلفهٔ نیرویی که عمود بر جابه‌جایی است برابر با صفر است.

از شکل ۷-۲ در می‌یابیم که $F_x$ را می‌توانیم به صورت $F\cos\phi$ بنویسیم که در آن $\phi$ زاویهٔ میان جهتهای جابه‌جایی $\vec{d}$ و نیروی $\vec{F}$ است. معادلهٔ ۷-۶ را می‌توانیم در کلی‌ترین حالت به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$W = Fd\cos\phi \quad \text{(کار انجام شده توسط یک نیروی ثابت)} \qquad (۷-۷)$$



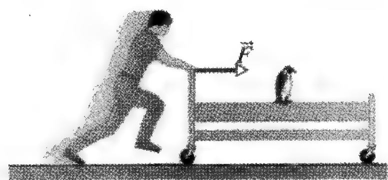

**شکل ۷-۲** نیروی ثابت $\vec{F}$ که با جهت جابه‌جایی $\vec{d}$ مهره در امتداد سیم زاویهٔ $\phi$ می‌سازد، با تغییر سرعت مهره از $\vec{v}_0$ به $\vec{v}$ آن را شتابدار می‌کند. یک «سنجهٔ انرژی جنبشی» نتیجهٔ تغییر در انرژی جنبشی ذره را از مقدار $K_i$ به مقدار $K_f$ نشان می‌دهد.

چون طرف راست این معادله برابر با ضرب نرده‌ای (نقطه‌ای) $\vec{F}\cdot\vec{d}$ است، آن را می‌توانیم به این صورت نیز بنویسیم

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} \quad \text{(کار انجام شده توسط یک نیروی ثابت)} \qquad (۷-۸)$$

که در آن $F$ بزرگی $\vec{F}$ است. (بهتر است که بحث ضربهای نرده‌ای در بخش ۳-۸ را مرور کنید.) معادلهٔ ۷-۸ به‌ویژه هنگامی برای محاسبهٔ کار مفید است که $\vec{F}$ و $\vec{d}$ برحسب بردارهای یکه داده شده باشند.

*هشدار:* برای استفاده از معادله‌های ۷-۶ تا ۷-۸ به منظور محاسبهٔ کاری که یک نیرو روی جسمی انجام داده است، دو محدودیت وجود دارد. اول آنکه، نیرو باید *نیرویی ثابت* باشد؛ به این معنا که در هنگام حرکت جسم، بزرگی یا جهت آن تغییر نکند. (بعداً درمورد *نیروی متغیری* که بزرگی آن تغییر می‌کند بحث خواهیم کرد.) دوم آنکه، جسم باید *ذره مانند* باشد. به این معنا که جسم باید *صلب* باشد؛ یعنی تمام بخشهای آن باید با هم در یک جهت حرکت کنند. در این فصل فقط جسمهای ذره مانندی از قبیل آنچه که در شکل ۷-۳ نشان داده شده است را در نظر می‌گیریم.




**شکل ۷-۳** تخت و سرنشین آن را می‌توانیم به منظور محاسبهٔ کار انجام شده بوسیلهٔ نیروی وارد شده توسط دانشجو بر آن، به صورت یک ذره در نظر بگیریم.

*علامتهای کار.* کار انجام شده توسط یک نیرو روی یک جسم می‌تواند مثبت یا منفی باشد. مثلاً اگر زاویهٔ $\phi$ در معادلهٔ ۷-۷ کمتر از $۹۰^\circ$ باشد، آنگاه $\cos\phi$ مثبت و در نتیجه کار نیز مثبت است. اگر زاویهٔ $\phi$ بزرگتر از $۹۰^\circ$ (تا $۱۸۰^\circ$) باشد، آنگاه $\cos\phi$ منفی و در نتیجه کار نیز منفی است. (آیا می‌توانید دریابید که کار به ازای $\phi = ۹۰^\circ$، صفر می‌شود؟) این نتیجه‌ها به قاعدهٔ ساده‌ای منتهی می‌شوند. برای یافتن علامت کار انجام شده توسط یک نیرو، مؤلفهٔ بردار نیرویی را که موازی جابه‌جایی است در نظر می‌گیریم:

> کار یک نیرو در صورتی مثبت است که مؤلفهٔ برداری آن نیرو در همان جهت جابه‌جایی باشد، و در صورتی منفی است که مؤلفهٔ برداری آن نیرو در جهت مخالف جابه‌جایی باشد. هرگاه نیرو چنین مؤلفه‌ای موازی با جابه‌جایی نداشته باشد، کار آن صفر است.

*یکاهای کار.* یکای کار همچون یکای انرژی جنبشی در دستگاه یکاهای SI، ژول است. با این حال از معادله‌های ۷-۶ و ۷-۷ می‌توانیم دریابیم که یکای معادل آن نیوتون- متر $(\mathrm{N\cdot m})$ است. یکای کار در دستگاه بریتانیایی فوت- پاوند $(\mathrm{ft\cdot lb})$ است. با بسط معادلهٔ ۷-۲ خواهیم داشت

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\cdot m^2/s^2} = 1\,\mathrm{N\cdot m} = 0/738\,\mathrm{ft\cdot lb} \qquad (۷-۹)$$

*کار خالص انجام شده توسط چند نیرو.* هرگاه دو یا تعداد بیشتری نیرو بر یک جسم اثر کنند، **کار خالص** انجام شده روی

جسم مجموع کارهای انجام شده توسط هر نیروی منفرد است. کار خالص را به دو روش می‌توان محاسبه کرد: (۱) می‌توانیم کار انجام شده توسط هر نیرو را بیابیم و آنگاه آنها را با هم جمع کنیم. (۲) یا در ابتدا می‌توانیم نیروی برایند $\vec{F}_{net}$ نیروها را به دست آوریم. آنگاه می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۷-۷، مقدار $F_{net}$ را به جای $F$ قرار دهیم و نیز از زاویهٔ میان جهتهای $\vec{F}_{net}$ و $\vec{d}$ به جای $\phi$ استفاده کنیم. به همین ترتیب می‌توانیم از معادلهٔ ۷-۸ که در آن $\vec{F}_{net}$ را به جای $\vec{F}$ قرار داده‌ایم استفاده کنیم.

## *قضیهٔ کار- انرژی جنبشی*

معادلهٔ ۷-۵ تغییر در انرژی جنبشی مهره (از مقدار اولیهٔ $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$ به مقدار بعدی $K_f = \frac{1}{2}mv^2$) را به کار انجام شده روی مهره $W(= F_x d)$ مربوط می‌کند. برای چنین جسمهای ذره مانندی، می‌توانیم این معادله را تعمیم دهیم. $\Delta K$ را تغییر در انرژی جنبشی جسم، و $W$ را کار خالص انجام شده بر آن در نظر می‌گیریم. در این صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\Delta K = K_f - K_i = W \qquad (۷-۱۰)$$

که نشان می‌دهد

(کار خالص انجام شده روی ذره) = (تغییر در انرژی جنبشی یک ذره)

همچنین می‌توانیم بنویسیم

$$K_f = K_i + W \qquad (۷-۱۱)$$

که حاکی از آن است که

(کار خالص انجام شده) + (انرژی جنبشی پیش از کار خالص) = (انرژی جنبشی پس از انجام کار خالص)

این دو عبارت به طور سنتی به عنوان **قضیهٔ کار- انرژی جنبشی** برای ذره‌ها شناخته می‌شوند و هم برای کار مثبت و هم برای کار منفی برقرارند: اگر کار خالص انجام شده روی یک ذره مثبت باشد، آنگاه انرژی جنبشی ذره به اندازهٔ آن کار افزایش می‌یابد. اگر کار خالص انجام شده منفی باشد، آنگاه انرژی جنبشی ذره به اندازهٔ آن کار کاهش می‌یابد.

به عنوان مثال، اگر انرژی جنبشی اولیهٔ یک ذره 5J باشد و یک انتقال خالص انرژی 2J به ذره صورت پذیرفته باشد (کار خالص مثبت)، آنگاه انرژی جنبشی نهایی ذره 7J خواهد بود. اما اگر یک انتقال خالص انرژی 2J از ذره صورت پذیرفته باشد (کار خالص منفی)، آنگاه انرژی جنبشی نهایی 3J خواهد بود.

**✔ *نکتهٔ وارسی ۱*** ذره‌ای در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند. در صورتی که سرعت ذره (الف) از $-3\text{m/s}$ به $-2\text{m/s}$ و (ب) از $-2\text{m/s}$ به $2\text{m/s}$ تغییر کند، آیا انرژی جنبشی ذره افزایش می‌یابد یا کاهش، یا بدون تغییر می‌ماند؟ (پ) در هر حالت آیا کار انجام شده روی ذره مثبت است یا منفی یا صفر است؟

### مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۲

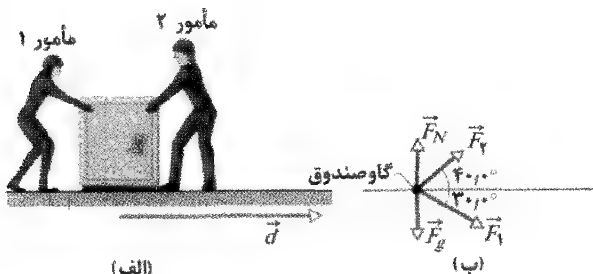
شکل ۷-۴ الف دو مأمور مخفی را نشان می‌دهد که گاو صندوقی به جرم 225kg را که در ابتدا روی کف ساکن است روی یک خط راست به طرف وسیلهٔ نقلیهٔ خود می‌لغزانند. گاو صندوق جابه‌جایی $\vec{d}$ را که اندازهٔ آن 8/50m است انجام می‌دهد. مأمور ۱ با نیروی $\vec{F}_1$ به بزرگی 12/0N و جهت 30° زیر افق گاو صندوق را هل می‌دهد و مأمور ۲ با نیروی $\vec{F}_2$ به بزرگی 10/0N و جهت 40° بالای افق آن را می‌کشد. در حین حرکت گاو صندوق، بزرگی و جهتهای این دو نیرو تغییر نمی‌کند و کف بدون اصطکاک است.

(الف) کار خالص انجام شده توسط نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ روی گاو صندوق در حین جابه‌جایی $\vec{d}$ چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) کار خالص $W$ انجام شده توسط دو نیرو روی گاو صندوق برابر با مجموع کارهایی است که به طور مجزا روی گاو صندوق انجام می‌گیرد. (۲) چون با گاو صندوق می‌توانیم مثل یک ذره رفتار کنیم و نیروها هم از لحاظ بزرگی و هم از لحاظ جهت ثابت‌اند، در نتیجه می‌توانیم یا از معادلهٔ ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ یا از معادلهٔ ۷-۸ $(W = \vec{F}\cdot\vec{d})$ برای محاسبهٔ هر یک از کارها استفاده کنیم. چون بزرگیها و جهتهای نیروها را می‌شناسیم، معادلهٔ ۷-۷ را انتخاب می‌کنیم.

***محاسبه‌ها:*** با استفاده از معادلهٔ ۷-۷ و نمودار جسم- آزاد گاو صندوق در شکل ۷-۴ ب، کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}_1$ چنین است

$$W_1 = F_1 d\cos\phi_1 = (12/0\,\text{N})(8/50\,\text{m})(\cos 30/0°)$$
$$= 88/33\text{J}$$




**شکل ۷-۴** (الف) دو مأمور، گاو صندوقی را روی کف حرکت می‌دهند؛ گاو صندوق جابه‌جایی $\vec{d}$ را انجام می‌دهد. (ب) نمودار جسم- آزاد گاو صندوق.

و کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}_2$ چنین است

$$W_2 = F_2\, d\cos\phi_2 = (10/0\,\text{N})(8/50\,\text{m})(\cos 40/0^\circ) = 65/11\text{J}$$

بنابراین، کار خالص $W$ برابر است با

$$W = W_1 + W_2 = 88/33\text{J} + 65/11\text{J} = 153/4\text{J} \approx 153\text{J} \quad \text{(پاسخ)}$$

پس در حین $8/50\text{m}$ جابه‌جایی، مأمورین $153\text{J}$ انرژی را به انرژی جنبشی گاو صندوق تبدیل می‌کنند.

(ب) در حین جابه‌جایی، کار $W_g$ انجام شده توسط نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ و کار $W_N$ انجام شده توسط نیروی عمودی $\vec{F}_N$ ناشی از کف، روی گاو صندوق چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** چون این نیروها هم از لحاظ بزرگی و هم از لحاظ جهت ثابت‌اند، کار انجام شده توسط آنها را می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۷-۷ به دست آوریم.

***محاسبه‌ها:*** بنابراین، می‌نویسیم

$$W_g = mgd\cos 90^\circ = mgd(0) = 0 \quad \text{(پاسخ)}$$

که در آن $mg$ بزرگی نیروی گرانشی است.

و

$$W_N = F_N d\cos 90^\circ = F_N d(0) = 0 \quad \text{(پاسخ)}$$

این نتیجه را باید از قبل می‌دانستیم. چون این دو نیرو عمود بر جابه‌جایی گاو صندوق هستند، کار آنها روی گاو صندوق برابر با صفر است و با گاو صندوق هیچ انرژیی مبادله نمی‌کنند.

(پ) گاو صندوق در آغاز ساکن است. تندی $v_f$ آن در پایان $8/50\text{m}$ جابه‌جایی چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** چون انرژی جنبشی گاو صندوق در هنگام انتقال انرژی به آن توسط نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ تغییر می‌کند، تندی گاو صندوق هم تغییر می‌کند.

***محاسبه‌ها:*** با ترکیب معادله‌های ۷-۱۰ و ۷-۱ تندی را به کار انجام شده ارتباط می‌دهیم

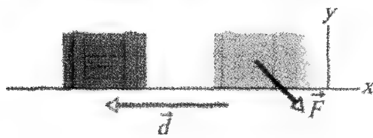
$$W = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

تندی اولیهٔ $v_i$ برابر با صفر است و اکنون می‌دانیم که کار انجام شده $153/4\text{J}$ است. با حل آن برای $v_f$ و سپس با قرار دادن مقدارهای معلوم، داریم

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(153/4\text{J})}{225\text{kg}}} = 1/17\text{m/s} \quad \text{(پاسخ)}$$

**مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۳**

در یک روز توفانی، یک صندوق محتوی پارچه روی کف روغنی و لیز یک پارکینگ لغزانده می‌شود و در حالی که صندوق جابه‌جایی $\vec{d} = (-3/0\,\text{m})\hat{\text{i}}$ را انجام می‌دهد باد پایایی برخلاف جهت حرکت صندوق، نیروی $\vec{F} = (2/0\,\text{N})\hat{\text{i}} + (-6/0\,\text{N})\hat{\text{j}}$ را بر آن وارد می‌کند. وضعیت و محورهای مختصات در شکل ۷-۵ نشان داده شده است.




**شکل ۷-۵** نیروی ثابت $\vec{F}$ حرکت صندوق را در حین جابه‌جایی $\vec{d}$ کند می‌کند.

(الف) در حین این جابه‌جایی چقدر کار روی صندوق انجام شده است؟

**نکتهٔ کلیدی** چون با صندوق می‌توانیم مثل یک ذره رفتار کنیم و چون نیروی باد در حین این جابه‌جایی هم از لحاظ بزرگی و هم از لحاظ جهت ثابت («پایا») است، در نتیجه می‌توانیم یا از معادلهٔ ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ یا از معادلهٔ ۷-۸ $(W = \vec{F}\cdot\vec{d})$ برای محاسبهٔ کار استفاده کنیم. چون $\vec{F}$ و $\vec{d}$ برحسب بردارهای یکه معلوم‌اند، معادلهٔ ۷-۸ را انتخاب می‌کنیم.

***محاسبه‌ها:*** چنین می‌نویسیم

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = [(2/0\,\text{N})\hat{\text{i}} + (-6/0\,\text{N})\hat{\text{j}}]\cdot[(-3/0\,\text{m})\hat{\text{i}}]$$

از ضربهای نقطه‌ای بردارهای یکه فقط $\hat{\text{i}}\cdot\hat{\text{i}}$، $\hat{\text{j}}\cdot\hat{\text{j}}$ و $\hat{\text{k}}\cdot\hat{\text{k}}$ صفر نیستند (به پیوست ث نگاه کنید). در اینجا داریم

$$W = (2/0\,\text{N})(-3/0\,\text{m})\hat{\text{i}}\cdot\hat{\text{i}} + (-6/0\,\text{N})(-3/0\,\text{m})\hat{\text{j}}\cdot\hat{\text{i}} = (-6/0\,\text{J})(1) + 0 = -6/0\,\text{J} \quad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، نیرو به اندازهٔ $6/0\text{J}$ کار منفی روی صندوق انجام می‌دهد که به این معناست که $6/0\text{J}$ از انرژی جنبشی صندوق گرفته شده است.

(ب) اگر انرژی جنبشی صندوق در آغاز جابه‌جایی $\vec{d}$ برابر با $10\text{J}$ باشد، انرژی جنبشی آن در پایان جابه‌جایی $\vec{d}$ چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** چون نیرو روی صندوق کار منفی انجام می‌دهد، انرژی جنبشی صندوق کاهش می‌یابد.

***محاسبه‌ها:*** با استفاده از قضیهٔ کار- انرژی جنبشی به شکل معادلهٔ ۷-۱۱ خواهیم داشت

$$K_f = K_i + W = 10\,\text{J} + (-6/0\,\text{J}) = 4/0\,\text{J} \quad \text{(پاسخ)}$$

چون انرژی جنبشی به $4/0\,\text{J}$ کاهش یافته، حرکت صندوق آهسته شده است.

## ۷-۶ کار انجام شده به وسیلهٔ نیروی گرانشی

در اینجا می‌خواهیم کار انجام شده روی یک جسم توسط نیروی گرانشی وارد بر آن را بررسی کنیم. شکل ۷-۶ یک گوجه فرنگی ذره مانند به جرم $m$ را نشان می‌دهد که با تندی اولیهٔ $v_0$ و در نتیجه انرژی جنبشی اولیهٔ $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$ رو به بالا

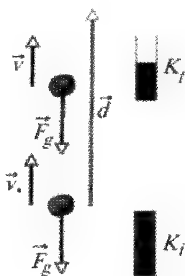
پرتاب شده است. حرکت رو به بالای گوجه فرنگی توسط نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر آن آهسته شده است؛ این بدین معناست که انرژی جنبشی گوجه فرنگی هنگامی که رو به بالا حرکت می‌کند بر اثر کاری که $\vec{F}_g$ روی آن انجام می‌دهد، کاهش می‌یابد. چون با گوجه فرنگی می‌توانیم مثل یک ذره رفتار کنیم، در نتیجه می‌توانیم از معادلهٔ ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ برای توصیف کار انجام شده در حین جابه‌جایی $\vec{d}$ استفاده کنیم. به جای بزرگی $F$، از $mg$ که بزرگی $\vec{F}_g$ است استفاده می‌کنیم. بنابراین، کار $W_g$ انجام شده توسط نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ چنین می‌شود

$$W_g = mgd\cos\phi \quad \text{(کار انجام شده توسط نیروی گرانشی)} \qquad (۱۲\text{-}۷)$$

برای جسمی که رو به بالا حرکت می‌کند، جهت نیروی $\vec{F}_g$ همان‌گونه که در شکل ۷-۶ نشان داده شده است، برخلاف جابه‌جایی $\vec{d}$ است. بنابراین، $\phi = ۱۸۰^\circ$ است و داریم

$$W_g = mgd\cos ۱۸۰^\circ = mgd(-۱) = -mgd \qquad (۱۳\text{-}۷)$$

علامت منفی حاکی از آن است که در حین بالا رفتن جسم، نیروی گرانشی وارد بر جسم مقداری انرژی به اندازهٔ $mgd$ را از




**شکل ۷-۶** یک گوجه فرنگی ذره مانند به جرم $m$ رو به بالا پرتاب شده و سرعت آن بر اثر نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر آن در حین جابه‌جایی $\vec{d}$ از $\vec{v}_0$ به $\vec{v}$ کاهش یافته است. یک سنجهٔ انرژی جنبشی نتیجهٔ تغییر انرژی جنبشی گوجه فرنگی را از $K_i\,(=۱/۲mv_0^2)$ به $K_f\,(=۱/۲mv^2)$ نشان می‌دهد.

انرژی جنبشی جسم می‌گیرد. این با آهسته شدن حرکت جسم در هنگام بالا رفتن سازگار است.

جسم پس از رسیدن به ارتفاع بیشینه‌اش رو به پایین سقوط می‌کند، و زاویهٔ $\phi$ میان نیروی $\vec{F}_g$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ صفر می‌شود. بنابراین

$$W_g = mgd\cos ۰^\circ = mgd(+۱) = +mgd \qquad (۱۴\text{-}۷)$$

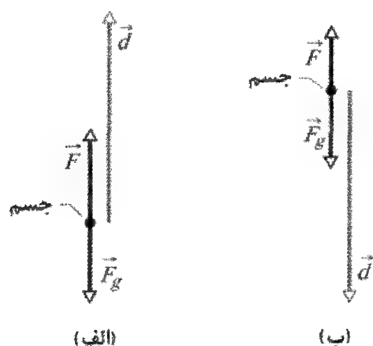
علامت مثبت بر آن دلالت دارد که اکنون نیروی گرانشی وارد بر جسم مقداری انرژی به اندازهٔ $mgd$ را به انرژی جنبشی جسم داده است. این با افزایش تندی جسم در هنگام سقوط سازگار است. (در واقع، همان‌گونه که در فصل ۸ خواهیم دید، انتقال انرژی در موقع بالا بردن و پایین آوردن یک جسم، به کل سامانهٔ جسم- کرهٔ زمین بستگی دارد.

## کار انجام شده هنگام بالا بردن و پایین آوردن یک جسم

حال فرض کنید یک جسم ذره مانند را با وارد آوردن نیروی قائم $\vec{F}$ بر آن، بالا ببریم. در حین این جابه‌جایی رو به بالا، نیروی ما کار مثبت $W_a$، و در همان حال نیروی گرانشی، کار منفی $W_g$ روی جسم انجام می‌دهد. در حالی که نیروی ما می‌خواهد به جسم انرژی بدهد، نیروی گرانشی می‌خواهد از جسم انرژی بگیرد. با استفاده از معادلهٔ ۷-۱۰، تغییر انرژی جنبشی جسم بر اثر این دو انتقال انرژی چنین می‌شود

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g \qquad (۱۵\text{-}۷)$$

که در آن $K_f$ انرژی جنبشی در پایان جابه‌جایی و $K_i$ مقدار آن در آغاز جابه‌جایی است. این معادله در صورتی که جسم پایین آورده شود هم برقرار است؛ ولی این بار نیروی گرانشی




**شکل ۷-۷** (الف) نیروی وارد شدهٔ $\vec{F}$ جسم را بالا می‌برد. جابه‌جایی $\vec{d}$ جسم، با نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر جسم زاویهٔ $\phi = ۱۸۰^\circ$ می‌سازد. نیروی وارد شده روی جسم کار مثبت انجام می‌دهد. (ب) نیروی وارد شدهٔ $\vec{F}$ جسم را پایین می‌برد. جابه‌جایی $\vec{d}$ جسم، با نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ زاویهٔ $\phi = ۰^\circ$ می‌سازد. نیروی وارد شده روی جسم کار منفی انجام می‌دهد.

می‌خواهد به جسم انرژی بدهد در حالی که نیروی ما می‌خواهد از جسم انرژی بگیرد.

در شرایط عادی جسم پیش و پس از بالا بردن ساکن است. مثلاً وقتی کتابی را از کف اتاق بلند می‌کنید و در قفسهٔ کتابها می‌گذارید، کتاب هم پیش و هم پس از بلند کردن آن در حالت سکون است. بنابراین، $K_f$ و $K_i$ هر دو برابر صفرند و معادلهٔ ۷-۱۵ تبدیل می‌شود به

$$W_a + W_g = ۰$$

یا

$$W_a = -W_g \qquad (۱۶\text{-}۷)$$

توجه کنید که اگر $K_f$ و $K_i$ صفر نباشند، ولی با هم برابر باشند باز هم به همین نتیجه می‌رسیم. در هر یک از این دو روش، نتیجه به این معناست که کار انجام گرفته توسط نیروی وارد شده برابر با منهای کار انجام شده توسط نیروی گرانشی است؛ یعنی نیروی وارد شده همان مقدار انرژی را به جسم

می‌دهد که نیروی گرانشی آن را از جسم می‌گیرد. با استفاده از معادلهٔ ۷-۱۲، معادلهٔ ۷-۱۶ را چنین می‌نویسیم

$$W_a = -mgd\cos\phi \qquad (۷-۱۷)$$

(کار انجام شده در بالا بردن و پایین آوردن؛ $K_f = K_i$)

که در آن $\phi$ زاویهٔ میان $\vec{F}_g$ و $\vec{d}$ است. اگر جابه‌جایی به طور قائم رو به بالا باشد (شکل ۷-۷ الف)، آنگاه $\phi = ۱۸۰°$ و کار انجام شده توسط نیروی وارده برابر $mgd$ است. اگر جابه‌جایی به طور قائم رو به پایین باشد (شکل ۷-۷ ب) آنگاه $\phi = ۰°$ و کار انجام شده توسط نیروی وارده برابر $-mgd$ است.

معادله‌های ۷-۱۶ و ۷-۱۷ در هر حالتی که یک جسم بالا برده شود یا پایین آورده شود، در صورتی که جسم پیش و پس از بالا بردن آن در حالت سکون باشد، برقرارند. آنها از بزرگی نیروی به کار رفته مستقل‌اند. مثلاً اگر لیوانی را از کف اتاق تا بالای سرتان بالا بیاورید، نیروی وارد از شما بر لیوان در حین بالا بردن آن به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌کند. با این حال، چون لیوان پیش و پس از بالا برده شدن ساکن است، کاری که نیروی شما بر لیوان انجام می‌دهد با معادله‌های ۷-۱۶ و ۷-۱۷ داده می‌شود که در معادلهٔ ۷-۱۷، $mg$ وزن لیوان و $d$ مسافتی است که آن را بالا برده‌اید.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۴

در سالهای ۱۹۵۰ میلادی، *پل اندرسون*[1] شکل (۷-۸) در یکی از وزنه بلند کردنهای خود رکوردی بر جای گذاشت: اندرسون زیر یک تخت چوبی سنگین شده خم شد، دستان خود را روی سکوی کوچکی گذاشت تا خود را برای تحمل فشار محکم کند، و آنگاه با پشتش تخت را رو به بالا فشار داد و آن را به طور مستقیم در حدود $۱/۰ \text{cm}$ بالا برد. روی تخت قطعه‌های اتومبیل و گاو صندوقی پر از سرب بود که وزن مجموع آنها $۲۷۹۰۰\text{N} (۶۲۷۰ \text{lb})$ می‌شد.

(الف) هنگامی که اندرسون بار را بلند کرده بود، چقدر کار به وسیلهٔ نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ روی بار انجام می‌گرفت؟



**شکل ۷-۸** پل اندرسون با استفاده از بندهایی بر پشت خود، سکویی را به همراه گروهی از دانش‌آموزان از روی زمین بلند کرده است.

1. Paul Anderson

**نکتهٔ کلیدی** بار را می‌توانیم به عنوان یک تک ذره در نظر بگیریم؛ چرا که اجزای آن به طور جدا ناپذیری با هم حرکت کرده‌اند. بنابراین، برای یافتن کار $W_g$ انجام شده به وسیلهٔ $\vec{F}_g$ روی بار می‌توانیم از معادلهٔ ۷-۱۲ $(W_g = mgd\cos\phi)$ استفاده کنیم.

***محاسبه‌ها:*** زاویهٔ $\phi$ میان جهتهای نیروی گرانشی رو به پایین و جابه‌جایی رو به بالا، $۱۸۰°$ بود. با قرار دادن این زاویه و مقدارهای داده شده در معادلهٔ ۷-۱۲ در می‌یابیم که

$$W_g = mgd\cos\phi = (۲۷۹۰۰\text{N})(۰/۰۱۰\text{m})(\cos ۱۸۰°)$$
$$= -۲۸۰\text{J} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) هنگامی که اندرسون بار را بلند کرده بود، چقدر کار توسط نیروی او روی بار انجام شده بود؟

**نکته‌های کلیدی** نیروی اندرسون مسلماً ثابت نبوده است. بنابراین، *نمی‌توانیم* فقط با قرار دادن بزرگی نیرو در معادلهٔ ۷-۷ کار انجام شده را حساب کنیم. ولی، می‌دانیم که بار، هم در آغاز و هم در پایان بالا برده شدن ساکن بوده است. بنابراین، کار $W_A$ انجام شده توسط نیروی اندرسون، برابر با منهای کار $W_g$ انجام شده توسط نیروی $\vec{F}_g$ است.

***محاسبه:*** معادلهٔ ۷-۱۶ به دست می‌دهد

$$W_A = -W_g = +۲۸۰\text{J} \qquad \text{(پاسخ)}$$

***اظهارنظر:*** این فقط کمی بیشتر از کار مورد نیاز برای بالا بردن یک کوله پشتی پر شده از کف اتاق تا شانه‌هاست. پس چرا وزنه بلند کردن اندرسون آنقدر حیرت‌آور جلوه می‌کرد؟ کار (انتقال انرژی) و نیرو کمیتهای متفاوتی هستند؛ اگر چه وزنه بلند کردن اندرسون نیازمند یک نیروی فوق العاده بزرگ بود، ولی به انتقال انرژی اندکی نیاز داشت.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۵

یک صندوق پنیر به جرم $۱۵/۰\text{kg}$ که در آغاز ساکن است توسط کابلی روی شیبی بدون اصطکاک به اندازهٔ $d = ۵/۷۰\text{m}$ رو به بالا تا ارتفاع $h$ به بلندی $۲/۵۰\text{m}$ که محل توقف آن است، کشیده می‌شود (شکل ۷-۹ الف).

(الف) در حین بالا کشیده شدن صندوق چقدر کار توسط نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ روی آن انجام می‌گیرد؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توانیم با صندوق مثل یک ذره رفتار کنیم و بنابراین برای یافتن کار $W_g$ انجام شده توسط $\vec{F}_g$ از معادلهٔ ۷-۱۲ $(W_g = mgd\cos\phi)$ استفاده می‌کنیم.

***محاسبه‌ها:*** زاویهٔ $\phi$ میان جهتهای $\vec{F}_g$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ معلوم نیست. با استفاده از نمودار جسم- آزاد شکل ۷-۹ ب در می‌یابیم که $\phi$ برابر با $\theta + ۹۰°$ است که در آن $\theta$ زاویهٔ (نامعلوم) شیب است. پس، معادلهٔ ۷-۱۲ چنین به دست می‌دهد

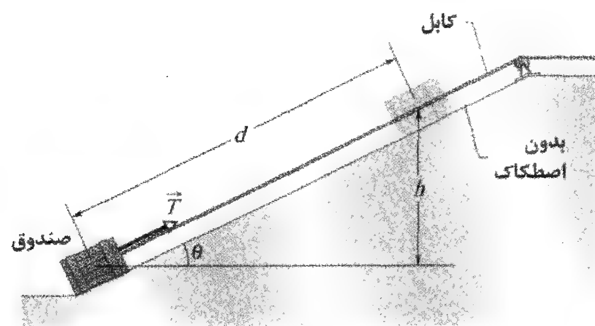
$$W_g = mgd\cos(\theta + ۹۰°) = -mgd\sin\theta \qquad (۷-۱۸)$$

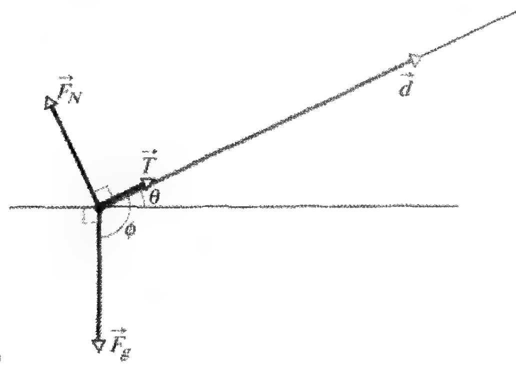
که در آن از یک اتحاد مثلثاتی برای ساده کردن استفاده کرده‌ایم. چون $\theta$ نامعلوم است، چنین به نظر می‌رسد که این نتیجه بی فایده است. ولی از شکل ۷-۹ الف درمی‌یابیم که $d\sin\theta = h$ که در آن $h$ کمیتی معلوم است. با این جایگزینی، معادلهٔ ۷-۱۸ چنین می‌شود

$$W_g = -mgh \quad (۷\text{-}۱۹)$$

$$= -(۱۵/۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۲/۵۰\,\text{m})$$

$$= -۳۶۸\,\text{J} \quad (\text{پاسخ})$$




**شکل ۷-۹** (الف) صندوقی توسط نیروی $\vec{T}$ که موازی سطح شیبدار است به بالا کشیده می‌شود. (ب) نمودار جسم- آزاد برای صندوق که جابه‌جایی $\vec{d}$ را نیز نشان می‌دهد.

توجه کنید که معادلهٔ ۷-۱۹ حاکی از آن است که کار $W_g$ انجام شده توسط نیروی گرانشی نه به جابه‌جایی افقی، بلکه (به طور غافلگیر کننده‌ای) به جابه‌جایی قائم بستگی دارد. (به این نکته در فصل ۸ باز می‌گردیم.)

(ب) چقدر کار $W_T$ توسط نیروی کشش $\vec{T}$ کابل روی جعبه در حین بالا رفتن از شیب، انجام شده است؟

**نکتهٔ کلیدی** چون مقدار $T$ را معلوم نیست، نمی‌توانیم با قرار دادن $T$ به جای $F$ در معادلهٔ ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ کار $W_T$ را به دست آوریم. ولی می‌توانیم با صندوق مثل یک ذره رفتار کنیم و آنگاه قضیهٔ کار- انرژی جنبشی $(\Delta K = W)$ را برای آن به کار بریم.

***محاسبه‌ها:*** چون صندوق پیش و پس از بالا رفتن در حالت سکون است، تغییر $\Delta K$ انرژی جنبشی آن برابر با صفر است.

برای محاسبهٔ کار خالص $W$ انجام شده روی صندوق، باید کارهای انجام شده توسط هر سه نیرو روی صندوق را با هم جمع کنیم. از قسمت (الف) می‌دانیم که کار $W_g$ انجام شده توسط نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ برابر با $-۳۶۸\,\text{J}$ است. کار $W_N$ انجام شده توسط نیروی عمودی $\vec{F}_N$ ناشی از سطح شیبدار، برابر با صفر است؛ زیرا $\vec{F}_N$ عمود بر جابه‌جایی است. به دنبال کار $W_T$ که توسط $\vec{T}$ انجام شده است می‌گردیم. بنابراین، قضیهٔ کار- انرژی جنبشی چنین به دست می‌دهد

$$\Delta K = W_T + W_g + W_N$$

یا

$$۰ = W_T - ۳۶۸\,\text{J} + ۰$$

و در نتیجه

$$W_T = ۳۶۸\,\text{J} \quad (\text{پاسخ})$$

## مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۶ مهارت خود را تقویت کنید

اتاقک بالابری به جرم $m = ۵۰۰\,\text{kg}$ که در حال حرکت رو به پایین با تندی $v_۰ = ۴/۰\,\text{m/s}$ است، هنگامی که کابل نگهدارندهٔ آن شروع به لغزیدن می‌کند، در نتیجه با شتاب ثابت $\vec{a} = \vec{g}/۵$ سقوط می‌کند (شکل ۷-۱۰ الف).

(الف) در حین سقوط به اندازهٔ $d = ۱۲\,\text{m}$، کار $W_g$ که توسط نیروی گرانشی روی اتاقک انجام می‌گیرد، چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** با اتاقک می‌توانیم مثل یک ذره رفتار کنیم و بنابراین برای یافتن کار $W_g$ انجام شده توسط $\vec{F}_g$، از معادلهٔ ۷-۱۲ $(W_g = mgd\cos\phi)$ استفاده می‌کنیم.

***محاسبه:*** از شکل ۷-۱۰ ب درمی‌یابیم که زاویهٔ میان جهتهای $\vec{F}_g$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ اتاقک، صفر است. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۷-۱۲ داریم

$$W_g = mgd\cos ۰° = (۵۰۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۱۲\,\text{m})(۱)$$

$$= ۵/۸۸ \times ۱۰^۴\,\text{J} \approx ۵۹\,\text{kJ}$$

(ب) در حین $۱۲\,\text{m}$ سقوط، کار $W_T$ که توسط نیروی رو به بالای کشش $\vec{T}$ کابل روی اتاقک انجام می‌گیرد، چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** (۱) کار $W_T$ را در صورتی می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ به دست آوریم که در ابتدا رابطه‌ای برای بزرگی $T$ کشش کابل بیابیم. (۲) این رابطه را می‌توانیم با نوشتن قانون دوم نیوتون برای مؤلفه‌های واقع بر محور $y$ در شکل ۷-۱۰ ب $(F_{\text{net},y} = ma_y)$ به دست آوریم.

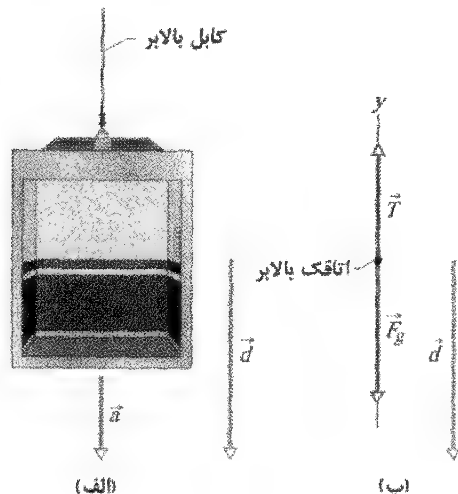
***محاسبه‌ها:*** داریم

$$T - F_g = ma$$

با حل آن برای $T$، قرار دادن $mg$ به جای $F_g$، و سرانجام قرار دادن نتیجهٔ نهایی در معادلهٔ ۷-۷ به دست می‌آوریم

$$W_T = Td\cos\phi = m(a+g)\,d\cos\phi$$

سپس به جای شتاب (رو به پایین) $a$ مقدار $g/5-$ و به جای زاویهٔ $\phi$ میان جهتهای نیروهای $\vec{T}$ و $m\vec{g}$ زاویهٔ ۱۸۰° را قرار می‌دهیم و از آنجا داریم




**شکل ۷-۱۰** اتاقک بالابری که با تندی $v_i$ پایین می‌آید، ناگهان رو به پایین شتاب می‌گیرد. (الف) اتاقک جابه‌جایی $\vec{d}$ را با شتاب ثابت $\vec{a}=\vec{g}/5$ انجام می‌دهد. (ب) نمودار جسم- آزاد برای اتاقک که جابه‌جایی را نیز دربر دارد.

$$W_T = m\left(-\frac{g}{5}+g\right)d\cos\phi=\frac{4}{5}mgd\cos\phi$$
$$=\frac{4}{5}(500\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(12\,\text{m})\cos 180^\circ$$
$$=-4.70\times10^4\ \text{J}\approx -47\,\text{kJ} \qquad \text{(پاسخ)}$$

***هشدار:*** توجه کنید که $W_T$ دیگر به سادگی، منفی $W_g$ نیست. دلیل این امر آن است که چون اتاقک در حین سقوط شتاب می‌گیرد، تندی و در نتیجه انرژی جنبشی آن در حین سقوط تغییر می‌کند. از اینرو، معادلهٔ ۷-۱۶ (که تساوی انرژیهای جنبشی اولیه و نهایی را فرض می‌گیرد) در اینجا برقرار *نیست*.

(پ) کار خالص انجام شدهٔ $W$ روی اتاقک در حین سقوط چقدر است؟

***محاسبه:*** کار خالص، مجموع کارهای انجام شده توسط نیروها روی اتاقک است:

$$W=W_g+W_T=5.88\times10^4\ \text{J}-4.70\times10^4\ \text{J}$$
$$=1.18\times10^4\ \text{J}\approx 12\,\text{kJ} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ت) در پایان ۱۲m سقوط، انرژی جنبشی اتاقک چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** انرژی جنبشی *به دلیل* کار خالص انجام شده روی اتاقک، بنابر معادلهٔ ۷-۱۱ ($K_f=K_i+W$) تغییر می‌کند.

***محاسبه:*** با استفاده از معادلهٔ ۷-۱، انرژی جنبشی در آغاز سقوط را می‌توانیم به صورت $K_i=\frac{1}{2}mv_i^2$ بنویسیم. آنگاه می‌توانیم معادلهٔ ۷-۱۱ را چنین بنویسیم

$$K_f=K_i+W=\frac{1}{2}mv_i^2+W$$
$$=\frac{1}{2}(500\,\text{kg})(4.0\,\text{m/s})^2+1.18\times10^4\ \text{J}$$
$$=1.58\times10^4\ \text{J}\approx 16\,\text{kJ} \qquad \text{(پاسخ)}$$

## ۷-۷ کار انجام شده به وسیلهٔ نیروی فنر

اکنون می‌خواهیم کار انجام شده توسط نوع ویژه‌ای از *نیروی متغیر* به نام **نیروی فنر** را که نیرویی است که از سوی فنر وارد می‌شود، روی یک جسم ذره مانند بررسی کنیم. بسیاری از نیروهای موجود در طبیعت شکل ریاضی یکسانی با نیروی فنر دارند. بنابراین، با بررسی این نیرو می‌توان بسیاری دیگر از انواع نیروها را درک کرد.

### *نیروی فنر*

شکل ۷-۱۱ الف فنری را در **حالت واهلیده** [یا حالت آرامش] نشان می‌دهد؛ به این معنی که فنر نه فشرده است و نه کشیده. یک سر فنر در جایی ثابت شده است، و سر آزاد دیگر آن به جسمی ذره مانند- مثلاً یک قطعه- وصل است. اگر فنر را با کشیدن قطعه به سمت راست، به طوری که در شکل ۷-۱۱ ب نشان داده شده است، باز کنیم بر قطعه نیروی کششی از سوی فنر رو به سمت چپ وارد می‌شود. (چون نیروی فنر قطعه را به سمت حالت واهلیده باز می‌گرداند گاهی به آن *نیروی باز گرداننده* می‌گویند.) اگر فنر را با فشار دادن قطعه به سمت چپ، آنطورکه در شکل ۷-۱۱ پ نشان داده شده است، فشرده کنیم بر قطعه نیروی رانشی از سوی فنر رو به سمت راست وارد می‌شود.

برای بسیاری از فنرها، با تقریب خوبی، نیروی $\vec{F}_s$ ناشی از فنر متناسب است با جابه‌جایی $\vec{d}$ سر آزاد فنر از مکانش در هنگامی که فنر در حالت واهلیده است. *نیروی فنر* با رابطهٔ زیر داده می‌شود

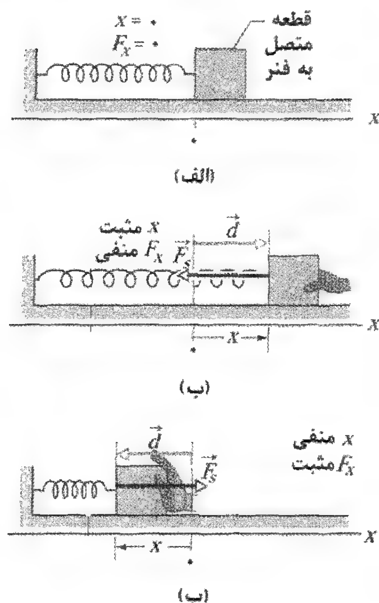
$$\vec{F}_s=-k\vec{d} \qquad \text{(قانون هوک)} \qquad (۷-۲۰)$$

که به یاد *رابرت هوک*[1] دانشمند انگلیسی سالهای آخر ۱۶۰۰ میلادی، به نام **قانون هوک** نامیده شده است. علامت منفی در معادلهٔ ۷-۲۰ نشان می‌دهد که جهت نیروی فنر همواره در سوی مخالف جهت جابه‌جایی سر آزاد فنر است. ثابت $k$، **ثابت فنر** (یا **ثابت نیرو**) نامیده می‌شود و معیاری از سختی فنر است. هر چه $k$ بزرگتر باشد، سختی فنر بیشتر است؛ یعنی برای یک جابه‌جایی معین، کشیدن یا فشردن فنری با $k$ بزرگتر، دشوارتر است. یکای SI برای $k$، نیوتون بر متر است.

1. Robert Hooke

در شکل ۷-۱۱، محور $x$ موازی با طول فنر به گونه‌ای قرار داده شده است که مبداء آن $(x=0)$ در مکان سر آزاد فنر به هنگامی است که فنر در حالت واهلیده‌اش قرار دارد. برای این شکل متداول، معادلهٔ ۷-۲۰ را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$F_x = -k\,x \qquad \text{(قانون هوک)} \qquad (۷-۲۱)$$




**شکل ۷-۱۱** (الف) فنری در حالت واهلیده‌اش قرار دارد. مبداء محور $x$ در آن سر فنر که به قطعه متصل است، قرار داده شده است. (ب) قطعه به اندازهٔ $\vec{d}$ جابه‌جا شده، و فنر به اندازهٔ مقدار مثبت $x$ کشیده شده است. (پ) فنر به اندازهٔ مقدار منفی $x$ فشرده شده است. باز هم به نیروی بازگرداننده توجه کنید.

که در قانون هوک شاخص پایین آن را عوض کرده‌ایم. اگر $x$ مثبت باشد (فنر روی محور $x$ رو به سمت راست باز شده است)، در این صورت $F_x$ منفی است (کشش رو به سمت چپ است.) اگر $x$ منفی باشد (فنر رو به سمت چپ فشرده شده است)، آنگاه $F_x$ مثبت است (رانشی رو به سمت راست است). توجه کنید که نیروی فنر، به دلیل آنکه تابعی از $x$ یعنی مکان سر آزاد فنر است، یک *نیروی متغیر* است. بنابراین، $F_x$ را می‌توان به صورت $F(x)$ نشان داد. همچنین توجه کنید که قانون هوک رابطه‌ای *خطی* میان $F_x$ و $x$ است.

### کار انجام شده به وسیلهٔ نیروی فنر

برای یافتن کار انجام شده توسط نیروی فنر وقتی که قطعهٔ شکل ۷-۱۱ (الف) را حرکت می‌دهیم، برای ساده سازی دو فرض را در مورد فنر در نظر می‌گیریم (۱) فنر *بدون* جرم است؛ یعنی جرم آن در مقایسه با جرم قطعه ناچیز است. (۲) فنر، یک *فنر آرمانی* است؛ یعنی دقیقاً از قانون هوک تبعیت می‌کند. همچنین فرض می‌کنیم که تماس میان قطعه و کف بدون اصطکاک و قطعه ذره مانند است.

قطعه را رو به سمت راست می‌کشیم تا به حرکت بیفتد و سپس آن را رها می‌کنیم. تا هنگامی که قطعه رو به سمت راست حرکت می‌کند، نیروی فنر $F_x$ که روی قطعه کار انجام می‌دهد، انرژی جنبشی آن را می‌کاهد و قطعه را آهسته می‌کند. ولی ما نمی‌توانیم این کار را با استفاده از معادلهٔ ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ به دست آوریم؛ چرا که برای استفاده از این معادله نیرو باید ثابت باشد. نیروی فنر یک نیروی متغیر است.برای یافتن کار انجام شد توسط فنر از حسابان استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم مکان اولیهٔ قطعه $x_i$ و مکان نهایی آن $x_f$ باشد. فاصلهٔ بین این دو مکان را به بخشهای زیادی که طول هر یک مقدار بسیار کوچک $\Delta x$ است، تقسیم می‌کنیم. با شروع از $x_i$، این بخشها را با شماره‌های ۱، ۲ الی آخر نشان می‌دهیم. وقتی قطعه از هر یک از این بخشها می‌گذرد، نیروی فنر به میزان ناچیزی تغییر می‌کند؛ چرا که طول هر قطعه بسیار کوتاه است و $x$ به اندازهٔ ناچیزی تغییر می‌کند. بنابراین، بزرگی این نیرو را می‌توانیم به طور تقریبی در هر بخش مقدار ثابتی در نظر بگیریم. این مقدارها را مثلاً با $F_{x1}$ برای قطعهٔ ۱، $F_{x2}$ برای قطعهٔ ۲، و الی آخر نشان می‌دهیم.

با نیرویی که اکنون در هر بخش ثابت است، *می‌توانیم* کار انجام شده در هر بخش را به کمک معادلهٔ ۷-۷ بیابیم. در اینجا $\phi = 180°$ و در نتیجه $\cos\phi = -1$ است. بنابراین، کار انجام شده در بخش ۱ برابر با $-F_{x1}\Delta x$، در بخش ۲ برابر با $-F_{x2}\Delta x$، و الی آخر است. کار خالص $W_s$ انجام شده توسط فنر از $x_i$ تا $x_f$، مجموع همهٔ این کارهاست، یعنی

$$W_s = \sum -F_{xj}\,\Delta x \qquad (۷-۲۲)$$

که $j$ شمارهٔ هر بخش است. در حدی که $\Delta x$ به سمت صفر میل کند، معادلهٔ ۷-۲۲ چنین می‌شود

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -F_x\,dx \qquad (۷-۲۳)$$

با استفاده از معادلهٔ ۷-۲۱، بزرگی نیروی $F_x$ برابر با $kx$ است. بنابراین، با قرار دادن آن خواهیم داشت

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dz = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx$$
$$= \left(-\frac{1}{2}k\right)[x^2]_{x_i}^{x_f} = \left(-\frac{1}{2}k\right)(x_f^2 - x_i^2) \qquad (۷-۲۴)$$

که به دست می‌دهد

$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \qquad \text{(کار انجام شده توسط نیروی فنر)} \qquad (۷-۲۵)$$

کار $W_s$ که توسط نیروی فنرانجام شده است می‌تواند بسته به اینکه در هنگام حرکت قطعه از $x_i$ به $x_f$ انرژی *خالص* به آن داده شود یا از آن گرفته شود، مقداری مثبت یا منفی داشته باشد. *هشدار:* مکان نهایی $x_f$ در دومین جملهٔ سمت راست معادلهٔ ۷-۲۵ ظاهر می‌شود. بنابراین، معادلهٔ ۷-۲۵ حاکی از آن است که

☜ اگر مکان نهایی قطعه نسبت به مکان اولیه‌اش نزدیکتر به مکان واهلیدگی ($x=0$) باشد، کار $W_s$ مثبت، و اگر دورتر از مکان واهلیدگی باشد، کار $W_s$ منفی، و اگر در همان فاصلهٔ اولیه‌اش از مکان واهلیدگی باشد، کار $W_s$ صفر است.

اگر $x_i = 0$ و مکان نهایی $x$ باشد، آنگاه معادلهٔ ۷-۲۵ چنین می‌شود

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2 \quad \text{(کار انجام شده توسط نیروی فنر)} \quad (۷-۲۶)$$

## کار انجام شده توسط نیروی وارد شده

حال فرض کنید که قطعه را در حالی که نیروی $\vec{F}_a$ به طور پیوسته بر آن وارد می‌شود در امتداد محور $x$ جابه‌جا کنیم. در حین این جابه‌جایی، نیروی ما کار $W_a$ را روی قطعه انجام می‌دهد در حالی که نیروی فنر کار $W_s$ را روی آن انجام می‌دهد. با استفاده از معادلهٔ ۷-۱۰ تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی قطعه بر اثر این دو انتقال انرژی چنین می‌شود

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_s \quad (۷-۲۷)$$

که در آن $K_f$ انرژی جنبشی در انتهای جابه‌جایی و $K_i$ مقدار آن در آغاز جابه‌جایی است. اگر قطعه پیش و پس از جابه‌جایی در حالت سکون باشد، آنگاه $K_f$ و $K_i$ هر دو برابر صفرند و معادلهٔ ۷-۲۷ به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$W_a = -W_s \quad (۷-۲۸)$$

☜ اگر قطعه‌ای که به یک فنر متصل است پیش و پس از جابه‌جایی در حالت سکون باشد، آنگاه کار انجام شده روی قطعه توسط نیرویی که آن را جابه‌جا کرده است منهای کار انجام شده روی آن توسط نیروی فنر است.

*هشدار:* اگر قطعه پیش و پس از جابه‌جایی ساکن نباشد، عبارت بالا صحیح *نیست*.

✔ **نکتهٔ وارسی ۲** برای سه وضعیت، مکانهای اولیه و نهایی قطعه در امتداد محور $x$ شکل ۷-۱۱ به ترتیب عبارت‌اند از (الف) $-3\text{cm}, 2\text{cm}$؛ (ب) $2\text{cm}, 3\text{cm}$؛ و (پ) $-2\text{cm}, 2\text{cm}$. در هر وضعیت آیا کار انجام شده توسط نیروی فنر روی قطعه مثبت است یا منفی یا صفر است؟

### مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۷

یک بستهٔ غذایی روی کف بدون اصطکاکی قرار دارد و مانند شکل ۷-۱۱ الف به سر آزاد فنری متصل است. برای آنکه قطعه را در $x_1 = 12\text{mm}$ نگهداریم، لازم است نیرویی به بزرگی $F_a = 4/9\text{N}$ رو به سمت راست بر آن وارد کنیم.

(الف) اگر بسته، رو به سمت راست از $x_0 = 0$ تا $x_2 = 17\text{mm}$ کشیده شود، چقدر کار توسط نیروی فنر روی بسته انجام می‌شود؟

**نکتهٔ کلیدی** وقتی بسته از مکانی به مکان دیگر حرکت می‌کند، نیروی فنر کاری روی بسته انجام می‌دهد که مقدار آن با معادلهٔ ۷-۲۵ یا معادلهٔ ۷-۲۶ داده می‌شود.

***محاسبه‌ها:*** می‌دانیم که مکان اولیهٔ $x_i$ برابر صفر و مکان نهایی $x_f$ برابر $17\text{mm}$ است، ولی از ثابت فنر $k$ اطلاعی نداریم. ثابت $k$ را احتمالاً می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۷-۲۱ (قانون هوک) به دست آوریم؛ ولی برای این منظور به این واقعیت نیاز داریم: برای نگهداشتن بسته به حالت سکون در $x_1 = 12\text{mm}$ باید (بنابر قانون دوم نیوتون) نیروی فنر و نیروی وارد شده با هم در تعادل باشند. بنابراین، نیروی فنر $F_x$ باید برابر $-4/9\text{N}$ باشد (رو به سمت چپ در شکل ۷-۱۱ ب)؛ در نتیجه معادلهٔ ۷-۲۱ ($F_x = -kx$) به دست می‌دهد

$$k = -\frac{F_x}{x_1} = -\frac{-4/9\text{N}}{12\times10^{-3}\text{m}} = 408\text{N/m}$$

اکنون با استفاده از معادلهٔ ۷-۲۶ برای وضعیتی که بسته در $x_2 = 17\text{mm}$ واقع است، داریم

$$W_s = -\frac{1}{2}kx_2^2 = -\frac{1}{2}(408\text{N/m})(17\times10^{-3}\text{m})^2$$
$$= -0/059\text{J} \quad \text{(پاسخ)}$$

(ب) حال بسته رو به سمت چپ تا $x_3 = -12\text{mm}$ حرکت داده می‌شود. نیروی فنر در این جابه‌جایی چقدر کار روی بسته انجام می‌دهد؟ علامت کار را توضیح بدهید.

***محاسبه‌ها:*** اکنون معادلهٔ ۷-۲۵ به ازای $x_i = +17\text{ mm}$ و $x_f = -12\text{ mm}$ چنین به دست می‌دهد

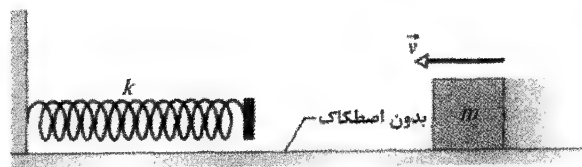
$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)$$
$$= \frac{1}{2}(408\text{N/m})[(17\times10^{-3}\text{m})^2 - (-12\times10^{-3}\text{m})^2]$$
$$= 0/030\text{J} = 30\text{mJ} \quad \text{(پاسخ)}$$

این کار انجام شده توسط نیروی فنر روی بسته، مثبت است. زیرا کار مثبت نیروی فنر به هنگام حرکت بسته از $x_i = +17\text{mm}$ به مکان واهلیدگی فنر بیشتر از کار منفی آن به هنگام حرکت بسته از مکان واهلیدگی فنر به $x_f = -12\text{mm}$ است.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۸

در شکل ۷-۱۲، یک قوطی به جرم $m = 0/40\text{ kg}$ با تندی $v = 0/50\text{ m/s}$ روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد و پس از برخورد با فنری با ثابت فنر $k = 750\text{ N/m}$، آن را می‌فشارد.

وقتی قوطی توسط فنر به وضعیت سکون لحظه‌ای می‌رسد، اندازهٔ متراکم شدن $d$ فنر چقدر است؟




**شکل ۷-۱۲** یک قوطی به جرم $m$ با سرعت $\vec{v}$ به سمت فنری با ثابت فنر $k$ حرکت می‌کند.

**نکتهٔ کلیدی**

۱. کار $W_s$ انجام شده توسط نیروی فنر روی قوطی بنابر معادلهٔ ۷-۲۶ $(W_s = -\frac{1}{2}kx^2)$ به مقدار متراکم شدهٔ $d$ فنر بستگی دارد که در آن $d$ به جای $x$ قرار می‌گیرد.

۲. کار $W_s$ همچنین بنابر معادلهٔ ۷-۱۰ $(K_f - K_i = W)$ به انرژی جنبشی قوطی نیز بستگی دارد.

۳. انرژی جنبشی قوطی در ابتدا برابر با $K = \frac{1}{2}mv^2$ و در لحظهٔ سکون لحظه‌ای برابر با صفر است.

***محاسبه‌ها:*** با ترکیب دو نکتهٔ کلیدی اول، قضیهٔ کار- انرژی را برای قوطی چنین می‌نویسیم

$$K_f - K_i = -\frac{1}{2}kd^2$$

با قرار دادن مقدارها از سومین نکتهٔ کلیدی به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kd^2$$

با حل این معادله برای $d$ و پس از قرار دادن داده‌های معلوم در آن به دست می‌آوریم

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (0/50\ \text{m/s})\sqrt{\frac{0/40\ \text{kg}}{750\ \text{N/m}}}$$
$$= 1/2\times10^{-2}\ \text{m} = 1/2\text{cm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

## ۷-۸ کار انجام شده به وسیلهٔ یک نیروی متغیر در حالت کلی

### *تحلیل یک بعدی*

حال به وضعیت شکل ۷-۲ برمی‌گردیم، ولی با این تفاوت که اکنون نیرو در جهت مثبت محور $x$ است و بزرگی آن با مکان $x$ تغییر می‌کند. بنابراین، وقتی مهره (ذره) حرکت کند، بزرگی نیرویی $F(x)$ که روی آن کار انجام می‌دهد تغییر می‌کند. تنها بزرگی این نیروی متغیر تغییر می‌کند ولی جهت آن تغییر نمی‌کند. همچنین بزرگی آن در هر مکان با زمان تغییر نمی‌کند.

شکل ۷-۱۳ الف نموداری از چنین *نیروی متغیر یک بعدی* را نشان می‌دهد. می‌خواهیم رابطه‌ای برای کار انجام شده توسط این نیرو روی ذره، وقتی از نقطهٔ ابتدایی $x_i$ به نقطهٔ نهایی $x_f$ می‌رود، به دست آوریم. ولی از معادلهٔ ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ *نمی‌توانیم* استفاده کنیم، زیرا این معادله فقط برای نیروی ثابت $\vec{F}$ برقرار است. دوباره در اینجا از حسابان استفاده می‌کنیم. ناحیهٔ زیر منحنی شکل ۷-۱۳ الف را به نوارهای باریکی به پهنای $\Delta x$ تقسیم می‌کنیم (شکل ۷-۱۳ ب). $\Delta x$ را به حد کافی کوچک اختیار می‌کنیم تا مجاز باشیم که نیروی $F(x)$ را در آن بازه به طور معقولی ثابت در نظر بگیریم. $F_{j,\text{avg}}$ را مقدار متوسط $F(x)$ در بازهٔ $j$اُم در نظر می‌گیریم. آنگاه در شکل ۷-۱۳ ب $F_{j,\text{avg}}$ ارتفاع نوار $j$اُم است.

اگر $F_{j,\text{avg}}$ را ثابت در نظر بگیریم، افزایش (به اندازهٔ کوچک) کار انجام شدهٔ $\Delta W_j$ توسط نیرو در بازهٔ $j$اُم، اینک به طور تقریبی با معادلهٔ ۷-۷ داده می‌شود و عبارت است از

$$\Delta W_j = F_{j,\text{avg}}\ \Delta x \qquad (۷-۲۹)$$

پس در شکل ۷-۱۳ ب $\Delta W_j$ برابر با مساحت مستطیل (نوار سایه دار) $j$اُم خواهد بود.

برای تعیین تقریبی کار کل انجام شدهٔ $W$ توسط این نیرو وقتی ذره از $x_i$ به $x_f$ می‌رود، مساحتهای همهٔ نوارهای میان $x_i$ و $x_f$ در شکل ۷-۱۳ ب را با هم جمع می‌کنیم

$$W = \sum\Delta W_j = \sum F_{j,\text{avg}}\ \Delta x \qquad (۷-۳۰)$$

معادلهٔ ۷-۳۰ یک رابطهٔ تقریبی است، زیرا «خط افقی» شکسته‌ای که در قسمتهای بالایی نوارهای مستطیلی در شکل ۷-۱۳ ب تشکیل شده است، تنها تقریبی از منحنی واقعی $F(x)$ است.

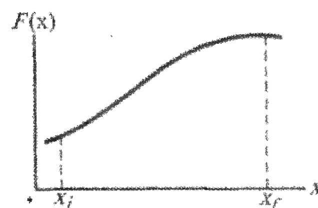
با کاهش پهنای $\Delta x$ نوارها و استفاده از نوارهای بیشتر، به طوری که در شکل ۷-۱۳ پ نشان داده شده است، می‌توانیم این تقریب را بهتر بکنیم. در حد، پهنای نوار را به سمت صفر میل می‌دهیم؛ در این صورت تعداد نوارها نامتناهی می‌شود و به یک نتیجهٔ دقیق می‌رسیم

$$W = \lim_{\Delta x\to 0}\sum F_{j,\text{avg}}\ \Delta x \qquad (۷-۳۱)$$

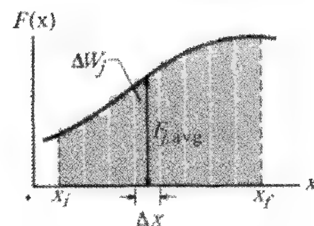
این حد، دقیقاً به معنی انتگرال تابع $F(x)$ میان دو حد $x_i$ و $x_f$ است. بنابراین، معادلهٔ ۷-۳۱ چنین می‌شود

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \quad \text{(کار انجام شده توسط نیروی متغیر)} \qquad (۷-۳۲)$$

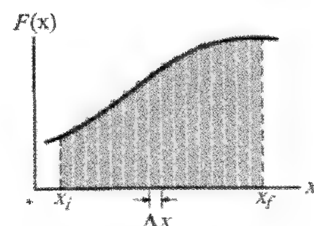
اگر تابع $F(x)$ را بشناسیم، آن را می‌توانیم در معادلهٔ ۷-۳۲ قرار دهیم و با استفاده از حدهای مناسب انتگرالگیری، انتگرال را محاسبه کنیم و در نتیجه کار را به دست آوریم. (پیوست ث شامل تعدادی از انتگرالهای متداول است.) از نظر هندسی، کار برابر با مساحت میان منحنی $F(x)$ و محور $x$ در فاصلهٔ میان دو حد $x_i$ و $x_f$ است (ناحیهٔ سایه‌دار در شکل ۷-۱۳ ت).



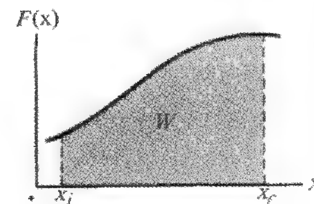
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

**شکل ۷-۱۳** (الف) منحنی تغییرات نیروی یک بعدی $\vec{F}(x)$ وارد به یک ذره بر حسب جابه‌جایی $x$؛ ذره از $x_i$ به $x_f$ حرکت می‌کند. (ب) همان شکل الف ولی مساحت زیر منحنی به نوارهای باریکی تقسیم شده است. (پ) همان شکل ب ولی مساحت زیر منحنی به نوارهای باریکتری تقسیم شده است. (ت) حالت حدی. کار انجام شده توسط نیرو با معادلهٔ ۷-۳۲ داده شده است و با ناحیهٔ سایه‌دار بین منحنی و محور $x$ در فاصلهٔ میان دو حد $x_i$ و $x_f$ نشان داده شده است

## تحلیل سه بعدی

اکنون ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که بر آن نیروی سه بعدی زیر اثر می‌کند

$$\vec{F} = F_x\hat{\mathrm{i}} + F_y\hat{\mathrm{j}} + F_z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۷-۳۳)$$

که در آن مؤلفه‌های $F_x$، $F_y$ و $F_z$ می‌توانند به مکان ذره بستگی داشته باشند؛ یعنی می‌توانند تابعهایی از مکان ذره باشند. با این حال، برای ساده سازی سه فرض را اختیار می‌کنیم: $F_x$ می‌تواند به $x$ بستگی داشته باشد ولی به $y$ و $z$ نه، $F_y$ می‌تواند به $y$ بستگی داشته باشد ولی به $x$ و $z$ نه، $F_z$ می‌تواند به $z$ بستگی داشته باشد ولی به $x$ و $y$ نه. حال ذره‌ای را در نظر بگیرید که جابه‌جایی افزایشی زیر را انجام بدهد

$$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} \qquad (۷-۳۴)$$

افزایش کار $dW$ انجام شده روی ذره توسط $\vec{F}$ در حین جابه‌جایی $d\vec{r}$ با معادلهٔ ۷-۸ داده می‌شود

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \qquad (۷-۳۵)$$

بنابراین، کار $W$ انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ موقع حرکت ذره از مکان اولیهٔ $r_i$ با مختصات $(x_i, y_i, z_i)$ به مکان نهایی $r_f$ با مختصات $(x_f, y_f, z_f)$ چنین می‌شود

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\,dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\,dz \qquad (۷-۳۶)$$

اگر $\vec{F}$ فقط مؤلفهٔ $x$ داشته باشد، در این صورت جمله‌های $y$ و $z$ در معادلهٔ ۷-۳۶ صفر می‌شوند و این معادله به معادلهٔ ۷-۳۲ تبدیل می‌شود.

## قضیهٔ کار- انرژی با نیروی متغیر

معادلهٔ ۷-۳۲ کار انجام شده توسط نیروی متغیر یک بعدی روی یک ذره را به دست می‌دهد. می‌خواهیم مطمئن شویم که این کار محاسبه شده، همان گونه که قضیهٔ کار- انرژی جنبشی بیان می‌دارد، در واقع برابر با تغییر انرژی جنبشی ذره است.

ذره‌ای به جرم $m$ را در نظر می‌گیریم که در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند و بر آن نیروی خالص $F(x)$ که در همان جهت محور $x$ است وارد می‌شود. کار انجام شده توسط این نیرو وقتی ذره از مکان اولیهٔ $x_i$ به مکان نهایی $x_f$ حرکت می‌کند با معادلهٔ ۷-۳۲، چنین داده می‌شود

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx \qquad (۷-۳۷)$$

که در آن با استفاده از قانون دوم نیوتون $F(x)$ را با $ma$ جایگزین کرده‌ایم. کمیت $ma\ dx$ در معادلهٔ ۷-۳۷ را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$ma\ dx = m\frac{dv}{dt}dx \qquad (۷-۳۸)$$

با استفاده از قاعدهٔ زنجیری در حسابان داریم

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v \qquad (۷-۳۹)$$

و از آنجا معادلهٔ ۷-۳۸ این گونه می‌شود

$$ma\ dx = m\frac{dv}{dx}v\,dx = mv\ dv \qquad (۷-۴۰)$$

با قرار دادن معادلهٔ ۷-۴۰ در معادلهٔ ۷-۳۷ به دست می‌آوریم

$$W = \int_{v_i}^{v_f} mv\ dv = m\int_{v_i}^{v_f} v\ dv$$
$$= \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲ \qquad (۷-۴۱)$$

توجه کنید که در هنگام تغییر متغیر از $x$ به $v$ لازم است که حدود انتگرال را بر حسب متغیر جدید بنویسیم. همچنین توجه کنید که چون جرم $m$ ثابت است، آن را می‌توانیم از انتگرال بیرون بیاوریم.

با توجه به اینکه جمله‌های سمت راست معادلهٔ ۷-۴۱ به صورت انرژیهای جنبشی هستند، مجازیم که این معادله را به صورت زیر بنویسیم

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

که همان قضیهٔ کار- انرژی جنبشی است.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۹

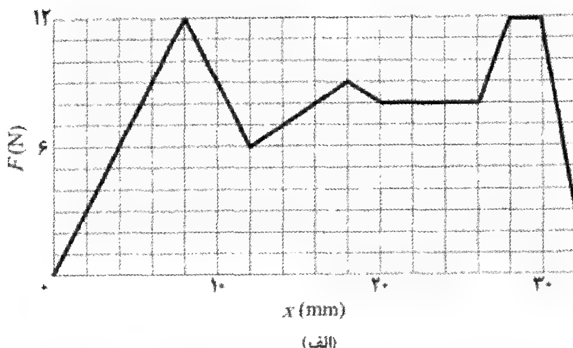
در عمل تزریق نخاعی، مثل موردی که در زایمان به کار می‌رود، جراح یا متخصص بیهوشی باید سوزنی را از پوست بیمار در پشت او و از لایه‌های بافت مختلفی به ناحیهٔ باریکی به نام فضای نخاعی که درون کانال نخاعی که نخاع را احاطه کرده است قرار دارد عبور دهد. سوزن باید مایع بیهوشی را وارد کند. این روش هوشمندانه به تمرین زیادی احتیاج دارد به طوری که پزشک می‌داند که چه وقت سوزن به فضای نخاعی رسیده و خطایی نشده است، چون هر اشتباهی می‌تواند خطرات جدی فراهم آورد.

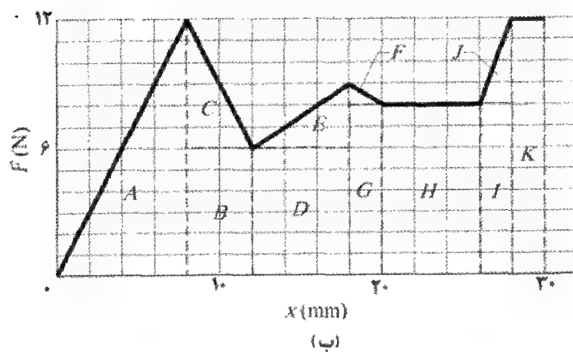
احساسی که پزشک از نفوذ سوزن دارد برآمده از نیروی متغیری است که باید برای پیشروی سوزن در داخل بافتها، وارد کند. شکل ۷-۱۴ الف نموداری از بزرگی نیروی $F$ برحسب جابه‌جایی $x$ نوک سوزن در یک عمل تزریق نخاعی نوعی است. (پاره خطهای نمودار قدری نسبت به داده‌های واقعی مستقیم نشان داده شده‌اند.) وقتی $x$ از مقدار صفر افزایش یابد، پوست در برابر ورود سوزن مقاومت می‌کند، ولی در $x = ۸/۰\,\text{mm}$ نیرو برای رخنه در پوست به حد کافی بزرگ است، و از آن پس نیروی مورد نیاز کاهش می‌یابد. به همین ترتیب سوزن به ترتیب در $x = ۱۸\text{mm}$ به رباط بین نخاعی و در $x = ۳۰\,\text{mm}$ به رباط به نسبت سخت *flavum* نفوذ می‌کند. سپس سوزن وارد ناحیهٔ نخاعی می‌شود (که همان جایی است که باید ماده بیهوشی رها شود)، و نیرو به شدت افت می‌کند. به یک پزشک تازه کار باید این رفتار نیرو برحسب جابه‌جایی، برای تشخیص زمان توقف تو بردن سوزن آموخته شود. (این رفتار، همان الگویی است که باید در شبیه سازی واقعیت مجازی برای تزریق نخاعی برنامه‌ریزی شود.) چه مقدار کار $W$ برای وارد کردن سوزن در فضای تزریق نخاعی به فاصلهٔ ۳۰ mm توسط نیروی وارده به سورن انجام می‌گیرد؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) کار انجام شدهٔ $W$ توسط نیروی متغیر $F(x)$ را می‌توان با انتگرالگیری نیرو روی مکان $x$ محاسبه کرد. معادلهٔ ۷-۳۲ حاکی از آن است که

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

آنچه که مورد نظر است کار انجام شده توسط نیرو در حین جابه‌جایی از $x_i = ۰$ تا $x_f = ۰/۰۳۰\text{ m}$ است. (۲) انتگرال را می‌توانیم با یافتن مساحت زیر منحنی نمودار شکل ۷-۱۴ الف محاسبه کنیم




**شکل ۷-۱۴** (الف) بزرگی نیروی $F$ برحسب جابه‌جایی $x$ سوزن در روش تزریق نخاعی. (ب) تفکیک ناحیهٔ میان منحنی رسم شده و محور جابه‌جایی برای محاسبهٔ مساحت زیر منحنی.

$$W = \begin{pmatrix} \text{مساحت میان منحنی نیرو} \\ \text{و محور } x\text{، از } x_i \text{ تا } x_f \end{pmatrix}$$

***محاسبه‌ها:*** چون این نمودار شامل بخشهایی از پاره خطهاست، مساحت را می‌توانیم با تقسیم بندی ناحیهٔ زیر منحنی به ناحیه‌های مستطیلی و مثلثی، آنچنانکه در شکل ۷-۱۴ ب نشان داده شده است، به دست آوریم. مثلاً مساحت ناحیهٔ مثلثی $A$ برابر است با

$$A \text{ مساحت} = \frac{۱}{۲}(۰/۰۰۸۰\,\text{m})(۱۲\text{N}) = ۰/۰۴۸\text{N}\cdot\text{m} = ۰/۰۴۸\,\text{J}$$

با محاسبهٔ مساحت همهٔ ناحیه‌های علامتگذاری شده در شکل ۷-۱۴ ب می‌توانیم کار کل را به دست آوریم

$$W = (\text{مجموع مساحتهای ناحیه‌های } A \text{ تا } K)$$
$$= ۰/۰۴۸ + ۰/۰۲۴ + ۰/۰۱۲ + ۰/۰۳۶ + ۰/۰۰۹ + ۰/۰۰۱ + ۰/۰۱۶$$
$$+ ۰/۰۴۸ + ۰/۰۱۶ + ۰/۰۰۴ + ۰/۰۲۴$$
$$= ۰/۲۳۸\text{J}$$ (پاسخ)

### مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۱۰

نیروی $\vec{F} = (۳x^۲\,\text{N})\hat{\text{i}} + (۴\text{N})\hat{\text{j}}$ که در آن $x$ برحسب متر است، بر ذره‌ای اثر می‌کند و فقط انرژی جنبشی آن را تغییر می‌دهد.

چقدر کار روی ذره، به هنگام حرکت از مختصات $(2m,3m)$ به $(3m,0m)$ انجام شده است؟ آیا تندی ذره افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟

**نکتهٔ کلیدی** چون مؤلفهٔ $x$ نیرو به مقدار $x$ بستگی دارد، نیرو متغیر است. بنابراین، از معادله‌های ۷-۷ و ۷-۸ برای یافتن کار انجام شده نمی‌توانیم استفاده کنیم. به جای آن، باید از معادلهٔ ۷-۳۶ برای انتگرالگیری از نیرو استفاده کنیم

***محاسبه:*** انتگرالها را در امتداد هر محور محاسبه می‌کنیم

$$W = \int_2^3 3x^2\,dx + \int_3^0 4\,dy = 3\int_2^3 x^2\,dx + 4\int_3^0 dy$$

$$= 3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3 + 4[y]_3^0 = [3^3 - 2^3] + 4[0-3]$$

$$= 7.0\,J \qquad \text{(پاسخ)}$$

علامت مثبت به این معناست که انرژی توسط نیروی $\vec{F}$ به ذره داده شده است. بنابراین، انرژی جنبشی ذره افزایش می‌یابد و چون $K = \frac{1}{2}mv^2$ است پس تندی آن هم باید افزایش یابد.

## ۷-۹ توان

به آهنگ زمانی کار انجام شده توسط یک نیرو **توان** ناشی از آن نیرو گفته می‌شود. اگر یک نیرو در زمان $\Delta t$ کاری به اندازهٔ $W$ انجام دهد، **توان میانگین** ناشی از آن نیرو در این بازهٔ زمانی برابر است با

$$P_{avg} = \frac{W}{\Delta t} \qquad \text{(توان میانگین)} \qquad (7\text{-}42)$$

**توان لحظه‌ای** $P$ آهنگ زمانی لحظه‌ای انجام کار است که آن را می‌توان چنین نوشت

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad \text{(توان لحظه‌ای)} \qquad (7\text{-}43)$$

فرض کنید کار $W(t)$ انجام شده توسط یک نیرو برحسب زمان را بدانیم. آنگاه برای محاسبهٔ توان لحظه‌ای، مثلاً در زمان $t = 3.0\,s$ که کار انجام شده است، نخست از آن نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و سپس نتیجهٔ آن را به ازای $t = 3.0\,s$ محاسبه می‌کنیم.

یکای توان در SI، ژول بر ثانیه است. این یکا غالباً به یاد جیمز *وات*[1]، کسی که به طور قابل ملاحظه‌ای آهنگ انجام کار موتورهای بخار را بهبود بخشید، **وات** (W) نامیده می‌شود. در دستگاه بریتانیایی، یکای توان فوت- پاوند بر ثانیه است. اغلب از اسب بخار هم استفاده می‌شود. رابطهٔ میان این یکاها به این قرار است

$$\text{وات } 1 = 1\,W = 1\,J/s = 0.738\,ft\cdot lb/s \qquad (7\text{-}44)$$

و

$$\text{اسب بخار } 1 = 1\,hp = 550\,ft\cdot lb/s = 746\,W \qquad (7\text{-}45)$$

1. James Watt

بررسی معادلهٔ ۷-۴۲ نشان می‌دهد که کار را می‌توان به صورت حاصلضرب توان در زمان، برحسب یکای متداول کیلووات- ساعت نوشت. بنابراین، داریم

$$\text{کیلووات ساعت } 1 = 1\,kW\cdot h = (10^3)(3600\,s)$$
$$= 3.60\times10^6\,J = 3.60\,MJ \qquad (7\text{-}46)$$

شاید به خاطر اینکه یکاهای وات و کیلووات ساعت در قبضهای برق ما ظاهر می‌شوند، آنها به عنوان یکاهای الکتریکی شناخته شده‌اند. ولی این یکاها را می‌توان برای نمونه‌های دیگری از توان و انرژی هم به کار برد. بنابراین اگر کتابی را از کف اتاق بردارید و آن را روی میز بگذارید، می‌توانید کاری را که انجام داده‌اید به صورت، مثلاً $4\times10^{-6}\,kW$ (یا آن طور که مرسوم‌تر است به صورت $4\,mW\cdot h$) بیان کنید.

آهنگی را که با آن نیرو روی یک ذره (یا جسم ذره مانند) کار انجام می‌دهد می‌توان برحسب آن نیرو و سرعت ذره بیان کرد. برای ذره‌ای که در امتداد یک خط راست (مثلاً محور $x$) تحت تأثیر نیروی $\vec{F}$ حرکت می‌کند و زاویهٔ میان نیرو و خط راست $\phi$ است، از معادلهٔ ۷-۴۳ داریم

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cos\phi\,dx}{dt} = F\cos\phi\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

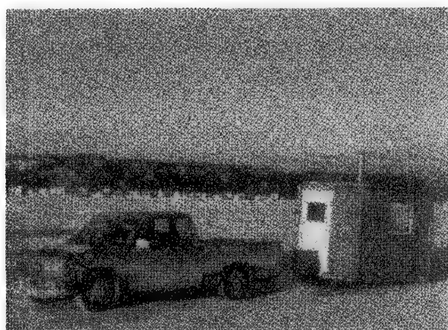
یا

$$P = Fv\cos\phi \qquad (7\text{-}47)$$

با در نظر گرفتن اینکه سمت راست معادلهٔ ۷-۴۷ به صورت ضرب نقطه‌ای $\vec{F}\cdot\vec{v}$ است، این معادله را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad \text{(توان لحظه‌ای)} \qquad (7\text{-}48)$$

برای مثال، کامیون شکل ۷-۱۵ نیروی $\vec{F}$ را بر بارکش که در لحظه‌ای با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند وارد می‌آورد. توان لحظه‌ای ناشی از $\vec{F}$ آهنگی است که با آن $\vec{F}$ در آن لحظه روی بارکش کار انجام می‌دهد و با معادله‌های ۷-۴۷ و ۷-۴۸



**شکل ۷-۱۵** توان ناشی از نیروی وارد شدهٔ کامیون بر بارکش، آهنگی است که با آن نیرو روی بارکش کار انجام می‌دهد.

داده می‌شود. گفتن این جمله که این توان، «توان کامیون است» غالباً قابل قبول است، ولی باید این مفهوم را به خاطر بسپاریم که: توان آهنگی است که با آن *نیروی* وارد شده کار انجام می‌دهد.

> ✓ **نکتهٔ وارسی ۳** جسمی که توسط ریسمانی به مرکز یک دایره محکم شده است، حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. آیا توان ناشی از نیرویی که توسط ریسمان بر جسم وارد می‌شود مثبت است یا منفی، یا صفر است؟

### مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۱۱

شکل ۷-۱۶ نیروهای ثابت $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ وارد بر جعبه‌ای را نشان می‌دهد که در حال لغزش به طرف راست روی سطحی بدون اصطکاک است. نیروی $\vec{F}_1$ افقی و بزرگی آن $2.0\,\mathrm{N}$ است؛ نیروی $\vec{F}_2$ رو به بالاست، زاویهٔ $60°$ با کف می‌سازد و بزرگی آن $4.0\,\mathrm{N}$ است. تندی $v$ جعبه در یک لحظهٔ معین $3.0\,\mathrm{m/s}$ است. توان ناشی از هر یک از نیروهای وارد بر جعبه و توان خالص در آن لحظهٔ معین چقدر است؟

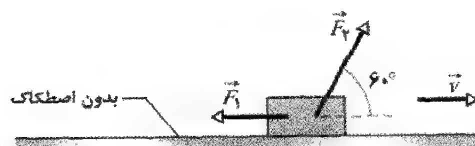
**نکتهٔ کلیدی** ما توان لحظه‌ای و نه توان میانگین در یک بازهٔ زمانی را می‌خواهیم. همچنین سرعت جعبه (به جای کار انجام شده روی آن) معلوم است.

***محاسبه:*** برای هر یک از نیروها از معادلهٔ ۷-۴۷ استفاده می‌کنیم. برای نیروی $\vec{F}_1$ که با راستای سرعت $\vec{v}$ زاویهٔ $\phi_1 = 180°$ می‌سازد، داریم

$$P_1 = F_1 v\cos\phi_1 = (2.0\,\mathrm{N})(3.0\,\mathrm{m/s})\cos 180° = -6.0\,\mathrm{W} \quad \text{(پاسخ)}$$

این نتیجهٔ منفی حاکی از آن است که نیروی $\vec{F}_1$ انرژی را با آهنگ $6.0\,\mathrm{J/s}$ «از» جعبه می‌گیرد.

برای نیروی $\vec{F}_2$، که با راستای سرعت $\vec{v}$ زاویهٔ $\phi_2 = 60°$ می‌سازد، داریم




**شکل ۷-۱۶** دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بر جعبه‌ای که روی کف بدون اصطکاکی به سمت راست می‌لغزد وارد می‌شوند. سرعت جعبه $\vec{v}$ است.

$$P_2 = F_2 v\cos\phi_2 = (4.0\,\mathrm{N})(3.0\,\mathrm{m/s})\cos 60° = 6.0\,\mathrm{W}$$

این نتیجهٔ مثبت بر آن دلالت دارد که نیروی $\vec{F}_2$ انرژی را با آهنگ $6.0\,\mathrm{J/s}$ «به» جعبه می‌دهد.

توان خالص، مجموع هر یک از توانهاست

$$P_{net} = P_1 + P_2 = -6.0\,\mathrm{W} + 6.0\,\mathrm{W} = 0 \quad \text{(پاسخ)}$$

و بدان معناست که آهنگ خالص دادن انرژی به جعبه یا گرفتن از آن برابر با صفر است. بنابراین، انرژی جنبشی ($K = \frac{1}{2}mv^2$) جعبه تغییر نمی‌کند، و در نتیجه تندی جعبه در $3.0\,\mathrm{m/s}$ باقی می‌ماند. چون نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ و سرعت $\vec{v}$ تغییر نمی‌کنند، از معادلهٔ ۷-۴۸ درمی‌یابیم که $P_1$ و $P_2$ ثابت‌اند و بنابراین $P_{net}$ نیز تغییر نمی‌کند.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۷-۱۲

با در نظر گرفتن اصطکاک چرخ موقع حرکت، برای اتومبیل مخصوص مسابقه، زمان طی شده از شروع تا پایان فاصلهٔ $D$ مسابقه اصولاً به توان $P$ موتور بستگی دارد. فرض کنید توان ثابت است، آن را برحسب $D$ و $P$ به دست آورید.

**نکته‌های کلیدی** (۱) توان موتور آهنگی است که می‌تواند با آن کار انجام دهد و با معادلهٔ ۷-۴۳ ($P = dW/dt$) بیان شده است. (۲) کار انجام شده در حین مسابقه را می‌توان با معادلهٔ ۷-۱۰ به انرژی جنبشی، قضیهٔ کار- انرژی جنبشی ($W = K_f - K_i$) ربط داد.

***توان و انرژی جنبشی:*** از قضیهٔ کار- انرژی جنبشی، مقدار کوچک کار $dW$ منجر به تغییر کوچک $dK$ در انرژی جنبشی می‌شود: $dW = dK$. قرار دادن این در معادلهٔ ۷-۴۳ و بازنویسی آن به دست می‌دهد

$$dK = P\,dt$$

با انتگرالگیری از دو طرف و قرار دادن اینکه در شروع مسابقه، در $t = 0$ انرژی جنبشی $K = 0$ است، داریم

$$\int_0^K dK = \int_0^t P\,dt$$

و

$$K = Pt$$

پس از قرار دادن $\frac{1}{2}mv^2$ به جای $K$ و حل معادله برای $v$، تندی در آخر مسابقه، داریم

$$v = \left(\frac{2Pt}{m}\right)^{1/2} \qquad (7\text{-}49)$$

***مسافت و تندی:*** از تعریف سرعت در فصل ۲، می‌دانیم که $v = dx/dt$. با بازنویسی تعریف و انتگرالگیری از دو طرف، داریم

$$\int_0^D dx = \int_0^t v\,dt.$$

با جایگزینی از معادلهٔ ۷-۴۹، داریم

$$\int_0^D dx = \int_0^t \left(\frac{2Pt}{m}\right)^{1/2} dt = \left(\frac{2P}{m}\right)^{1/2} \int_0^t t^{1/2}\,dt$$

سپس انتگرالگیری به دست می‌آید

$$D = \left(\frac{2P}{m}\right)^{1/2} \frac{2}{3} t^{3/2}$$

حل این رابطه برای $t$ بیانگر این است که زمان $t$ طی شده توسط اتومبیل مسابقه با رابطهٔ زیر به $D$ و $P$ بستگی دارد.

$$t = \left(\frac{3}{2}D\right)^{2/3} \left(\frac{m}{2P}\right)^{1/3} \quad \text{(پاسخ)}$$

*اظهارنظر:* به صورت کلمات، زمان طی شده به وارون ریشهٔ سوم توان بستگی دارد. اگر گروه همراه کننده در مسابقه بتوانند توان بیشتر از موتور بگیرند، زمان طی شده به خاطر این وابستگی وارون، کاهش می‌یابد اما به خاطر وابستگی به ریشهٔ سوم این کاهش مقدار اندکی است.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**انرژی جنبشی** **انرژی جنبشی** $K$ وابسته به حرکت ذره‌ای به جرم $m$ و تندی $v$، که در آن $v$ خیلی کمتر از تندی نور است، به این قرار است

$$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲} \qquad \text{(انرژی جنبشی)} \qquad (۷-۱)$$

**کار** کار $W$، انرژی داده شده به یک جسم یا گرفته شده از آن جسم توسط نیرویی است که بر آن جسم وارد می‌شود. انرژی داده شده به یک جسم، کار مثبت و انرژی گرفته شده از آن، کار منفی انجام می‌دهد.

**کار انجام شده توسط نیروی ثابت** کار انجام شده توسط نیروی ثابت $\vec{F}$ روی ذره در طی جابه‌جایی $\vec{d}$ برابر است با

$$W = Fd\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{d} \qquad \text{(کار انجام شده توسط نیروی ثابت)} \qquad (۷-۷ \text{ و } ۷-۸)$$

که در آن $\phi$ زاویهٔ ثابت میان بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{d}$ است. تنها آن مؤلفه‌ای از $\vec{F}$ که در امتداد جابه‌جایی $\vec{d}$ است می‌تواند روی جسم کار انجام دهد. وقتی دو یا چند نیرو بر جسمی اثر کنند، **کار خالص** آنها از مجموع کارهای هر یک از نیروها به دست می‌آید که همچنین برابر است با کاری که توسط نیروی خالص $\vec{F}_{net}$ روی جسم انجام می‌شود.

**کار و انرژی جنبشی** تغییر انرژی جنبشی $\Delta K$ یک ذره را می‌توان به کار خالص انجام شده روی ذره مربوط کرد

$$\Delta K = K_f - K_i = W \qquad \text{(قضیهٔ کار- انرژی جنبشی)} \qquad (۷-۱۰)$$

که در آن $K_i$ انرژی جنبشی اولیهٔ ذره و $K_f$ انرژی جنبشی پس از انجام کار روی آن است. معادلهٔ ۷-۱۰ را چنین نیز می‌توان نوشت

$$K_f = K_i + W \qquad (۷-۱۱)$$

**کار انجام شده توسط نیروی گرانشی** کار $W_g$ که نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ روی جسمی ذره مانند به جرم $m$ در طی جابه‌جایی $\vec{d}$ انجام می‌دهد، برابر است با

$$W_g = mgd\cos\phi \qquad (۷-۱۲)$$

که در آن $\phi$ زاویهٔ میان بردارهای $\vec{F}_g$ و $\vec{d}$ است.

**کار انجام شده هنگام بالا بردن و پایین آوردن یک جسم** کار $W_a$ که توسط نیروی وارد شده به یک جسم ذره مانند در هنگام بالا بردن یا پایین آورده شدن انجام می‌شود، با کار $W_g$ انجام شده توسط نیروی گرانشی و تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی جسم با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g \qquad (۷-۱۵)$$

اگر انرژی جنبشی در آغاز بالا بردن برابر با مقدار آن در پایان بالا بردن باشد، آنگاه معادلهٔ ۷-۱۵ به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$W_a = -W_g \qquad (۷-۱۶)$$

که نشان می‌دهد نیروی وارد شده همان مقدار انرژی به جسم می‌دهد که نیروی گرانشی از آن می‌گیرد.

**نیروی فنر** نیروی $\vec{F}_s$ ناشی از یک فنر برابر است با

$$\vec{F}_s = -k\vec{d} \qquad \text{(قانون هوک)} \qquad (۷-۲۰)$$

که در آن $\vec{d}$ جابه‌جایی سر آزاد فنر از مکانش به هنگامی است که فنر در **حالت واهلیدگی** (نه فشرده شده و نه کشیده شده) است، و $k$ **ثابت فنر** (معیاری از سختی فنر) است. اگر محور $x$ در امتداد فنر به گونه‌ای قرار گیرد که مبداء آن در مکان سر آزاد فنر در حالت واهلیدگی باشد، معادلهٔ ۷-۲۰ را می‌توان چنین نوشت

$$F_x = -kx \qquad \text{(قانون هوک)} \qquad (۷-۲۱)$$

بنابراین، نیروی فنر یک نیروی متغیر است: این نیرو با جابه‌جایی سر آزاد فنر تغییر می‌کند.

**کار انجام شده توسط نیروی فنر** اگر جسمی به سر آزاد فنری متصل شده باشد، کار $W_s$ انجام شده توسط نیروی فنر روی جسم هنگامی که جسم از مکان اولیهٔ $x_i$ به مکان نهایی $x_f$ می‌رود، برابر است با

$$W_s = \frac{۱}{۲}kx_i^{۲} - \frac{۱}{۲}kx_f^{۲} \qquad (۷-۲۵)$$

اگر $x_i = ۰$ و $x_f = x$ باشد، آنگاه معادله ۷-۲۵ چنین می‌شود

$$W_s = -\frac{۱}{۲}kx^{۲} \qquad (۷-۲۶)$$

**کار انجام شده توسط نیروی متغیر** هرگاه نیروی $\vec{F}$ وارد بر یک جسم ذره مانند به مکان جسم بستگی داشته باشد، کار انجام شده توسط $\vec{F}$ روی جسم در حین حرکت جسم از مکان اولیه $r_i$ به مختصات $(x_i, y_i, z_i)$ به مکان نهایی $r_f$ به مختصات $(x_f, y_f, z_f)$ را، باید از انتگرالگیری نیرو به دست آورد. اگر فرض کنیم که مؤلفهٔ $F_x$ به $x$ بستگی داشته باشد ولی به $y$ و $z$ نه، مؤلفهٔ $F_y$ به $y$ بستگی داشته باشد ولی به $x$ و $z$ نه، و مؤلفهٔ $F_z$ به $z$ بستگی داشته باشد ولی به $x$ و $y$ نه، در این صورت کار انجام شده برابر است با

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\,dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\,dz \qquad (۷-۳۶)$$

اگر $\vec{F}$ فقط دارای مؤلفهٔ $x$ باشد، آنگاه معادلهٔ ۷-۳۶ به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \qquad (۷-۳۲)$$

**توان**   **توان** ناشی از یک نیرو آهنگی است که با آن نیرو روی یک جسم کار انجام می‌دهد. اگر نیرو در بازهٔ زمانی $\Delta t$ کار $W$ را انجام دهد، *توان* میانگین ناشی از نیرو در آن بازهٔ زمانی برابر است با

$$P_{\text{avg}} = \frac{W}{\Delta t} \qquad (۷-۴۲)$$

توان لحظه‌ای آهنگ لحظه‌ای انجام کار است

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (۷-۴۳)$$

اگر راستای نیروی $\vec{F}$ با راستای حرکت جسم زاویهٔ $\phi$ بسازد، توان لحظه‌ای چنین می‌شود

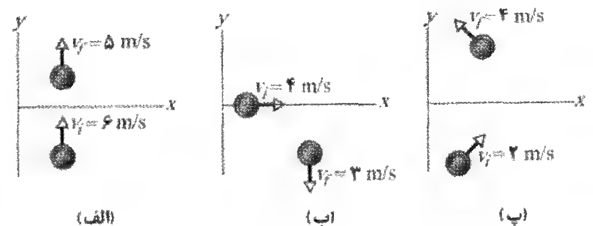
$$P = Fv\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad (۷-۴۷ \text{ و } ۷-۴۸)$$

که در آن $\vec{v}$ سرعت لحظه‌ای جسم است.

## پرسشها

۱-کار انجام شده توسط نیروی ثابت $\vec{F}$ روی ذره‌ای که بر یک خط راست جابه‌جایی $\vec{d}$ انجام می‌دهد مثبت است یا منفی، در صورتی که (الف) زاویهٔ میان $\vec{F}$ و $\vec{d}$ برابر با ۳۰° باشد؛ (ب) آن زاویه ۱۰۰° باشد؛ (پ) $\vec{F} = ۲\hat{i} - ۳\hat{j}$ و $\vec{d} = -۴\hat{i}$ باشد.

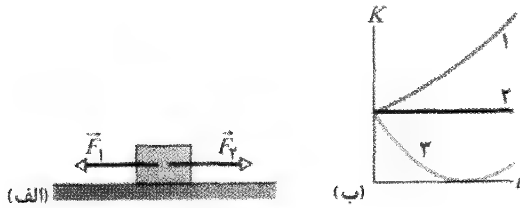
۲-در سه وضعیت، یک نیروی افقی به طور لحظه‌ای به یک قرص هاکی که روی سطح یخی بدون اصطکاکی می‌لغزد، وارد شده است. دید از بالای شکل ۷-۱۷، برای هر وضعیت تندی اولیهٔ $v_i$، تندی نهایی $v_f$ و جهتهای مربوط به بردارهای سرعت قرص را نشان می‌دهد. این وضعیتها را بنابر کار انجام شده روی قرص توسط نیروی وارد شده، از مثبت‌ترین تا منفی‌ترین مرتب کنید.




شکل ۷-۱۷ پرسش ۲

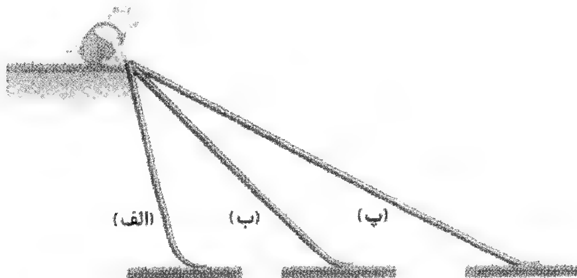
۳-سرعتهای زیر را با توجه به انرژی جنبشی به دست آمده توسط ذره با هر یک از آنها از بیشترین تا کمترین مرتب کنید: (الف) $\vec{v} = ۴\hat{i} + ۳\hat{j}$، (ب) $\vec{v} = -۴\hat{i} + ۳\hat{j}$، (پ) $\vec{v} = -۳\hat{i} + ۴\hat{j}$، (ت) $\vec{v} = ۳\hat{i} - ۴\hat{j}$، (ث) $\vec{v} = ۵\hat{i}$، و (ج) $v = ۵\,\text{m/s}$ با زاویهٔ ۳۰° نسبت به افق.

۴-شکل ۷-۱۸ الف دو نیروی افقی را نشان می‌دهد که بر قطعه‌ای که روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد وارد شده‌اند. شکل ۷-۱۸ ب سه نمودار انرژی جنبشی $K$ قطعه را برحسب زمان $t$ نشان می‌دهد. هر یک از این سه نمودار با کدامیک از سه وضعیت زیر بهترین تطابق را دارند: (الف) $F_۱ = F_۲$، (ب) $F_۱ > F_۲$، (پ) $F_۱ < F_۲$؟



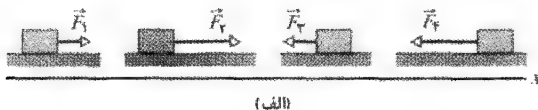

شکل ۷-۱۸ پرسش ۴

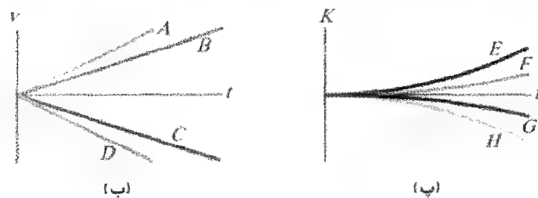
۵-در شکل ۷-۱۹، یک بچه خوک روغن مالی شده برای رسیدن به زمین سه شیب بدون اصطکاک را برای لغزیدن پیش رو دارد. شیبها را با توجه به مقدار کاری که نیروی گرانشی بر بچه خوک در حین پایین آمدن انجام می‌دهد، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.




شکل ۷-۱۹ پرسش ۵

۶-شکل ۷-۲۰ الف چهار وضعیت را نشان می‌دهد که در آنها یک نیروی افقی بر قطعهٔ مشابهی که در ابتدا ساکن است وارد شده است. بزرگی نیروها عبارت‌اند از $F_۲ = F_۴ = ۲F_۱ = ۲F_۳$. مؤلفهٔ افقی $v_x$ سرعت قطعه برای چهار وضعیت در شکل ۷-۲۰ ب نشان داده شده است. (الف) هر یک از نمودارهای شکل ۷-۲۰ ب با کدامیک از نیروهای شکل ۷-۲۰ الف بهترین تطابق را دارند؟ (ب) هر یک از نمودارهای شکل ۷-۲۰ پ (انرژی جنبشی $K$ برحسب زمان $t$) با کدامیک از نمودارهای شکل ۷-۲۰ ب بهترین تطابق را دارند؟

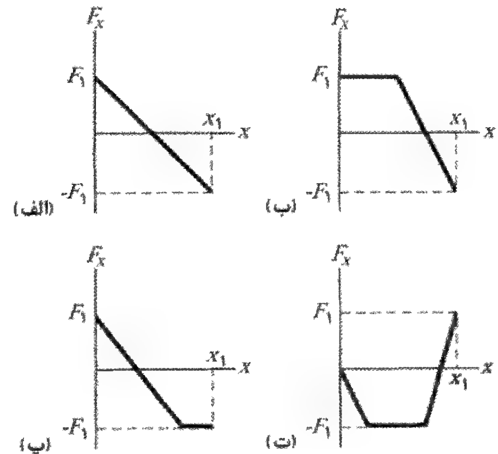



شکل ۷-۲۰ پرسش ۶

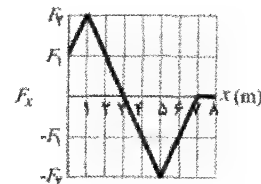
۷-شکل ۷-۲۱ چهار نمودار (رسم شده در یک مقیاس) $F_x$ که مؤلفهٔ $x$ یک نیروی متغیر (در امتداد محور $x$) است را

برحسب مکان $x$ ذره‌ای که بر ان نیرو وارد می‌شود، نشان می‌دهد. نمودارها را با توجه به کار انجام شده توسط نیروی وارد بر ذره در بازهٔ $x=0$ تا $x=x_1$، از مثبت‌ترین کار تا منفی‌ترین کار مرتب کنید.




شکل ۷-۲۱ پرسش ۷

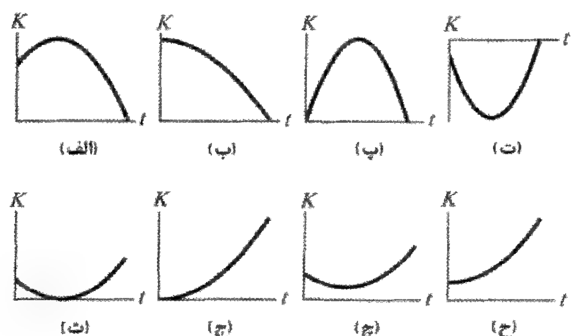
۸- شکل ۷-۲۲ مؤلفهٔ $x$ یک نیرو، $F_x$، را که می‌تواند بر ذره‌ای وارد شود نشان می‌دهد. اگر ذره از حالت سکون در $x=0$ شروع به حرکت کند، مختصات آن هنگامی که دارای (الف) بیشترین انرژی جنبشی است، (ب) بیشترین تندی است، و (ت) تندی صفر است، چیست؟ راستای حرکت ذره پس از رسیدن به $x=6\,m$ چگونه است؟




شکل ۷-۲۲ پرسش ۸

۹- فنر $A$ سخت‌تر از فنر $B$ است $(k_A > k_B)$. اگر فنرها فشرده شوند، نیروی فنر کدامیک (الف) در فاصله‌ای یکسان و (ب) با نیروی وارد شدهٔ یکسان، کار بیشتری انجام می‌دهد؟

۱۰- یک گلولهٔ گلی از لبهٔ صخره‌ای پرتاب یا رها شده است. کدامیک از نمودارهای شکل ۷-۲۳ احتمالاً می‌تواند چگونگی تغییرات انرژی جنبشی گلوله را در حین پرواز نشان دهد؟




شکل ۷-۲۳ پرسش ۱۰

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)

SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها

WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است

•-••• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.

اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

### بخش ۷-۳ انرژی جنبشی

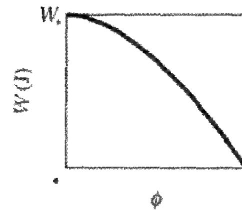
•۱- در ۱۰ آگوست سال ۱۹۷۲ میلادی (۱۹ مرداد سال ۱۳۵۱)، شهاب سنگ بزرگی ردّی در آسمان غرب آمریکا و کانادا بر جای گذاشت که بسیار شبیه به ردّی بود که یک سنگ به هنگام برخورد با آب برجای می‌گذارد. گوی آتشین همراه آن به حدی فروزان بود که می‌شد آن را در آسمان روز مشاهده کرد و از دنبالهٔ معمول یک شهاب سنگ درخشانتر بود. جرم شهاب سنگ در حدود $4\times10^6$ kg و تندی آن در حدود ۱۵km/s بود. با فرض آنکه چنین شهاب سنگی به طور قائم وارد جو شود، تقریباً با همین تندی با سطح زمین برخورد می‌کند. (الف) اتلاف انرژی جنبشی شهاب سنگ را (برحسب ژول) به هنگام برخورد قائم با زمین محاسبه کنید. (ب) این انرژی را برحسب مضربی از انرژی یک مگاتُن TNT که $4/2\times10^{15}$ J است، بیان کنید. (پ) انرژی مربوط به انفجار بمب اتمی هیروشیما معادل ۱۳ کیلوتن TNT بود. برخورد شهاب سنگ با زمین معادل با انفجار چند بمب هیروشیماست؟

•۲- اگر جرم موشک *ساترن* V[1] با فضاپیمای *آپولو*[2] متصل به آن مجموعاً $2/9\times10^5$ kg باشد و به تندی ۱۱/۲km/s رسیده باشند، آنگاه انرژی جنبشی آنها چقدر است؟

•۳- پروتونی (به جرم $m=1/67\times10^{-27}$kg) در امتداد یک خط مستقیم در شتابدهنده‌ای تا $3/6\times10^{15}$m/s$^2$ شتابدار شده است. اگر تندی اولیهٔ پروتون $2/4\times10^7$ m/s باشد و ۳/۵ cm را طی کند، (الف) تندی و (ب) افزایش در انرژی جنبشی آن چقدر است؟ SSM

•۴- بر مهره‌ای که در امتداد یک سیم مستقیم ۵/۰cm+ جابه‌جایی یافته است، نیروی $\vec{F}_a$ وارد شده است. بزرگی $\vec{F}_a$ در مقدار معینی ثابت می‌شود، ولی زاویهٔ $\phi$ میان $\vec{F}_a$ و جابه‌جایی مهره را می‌توان انتخاب کرد. شکل ۷-۲۴ کار $W$ انجام شده توسط $\vec{F}_a$ روی مهره را برای گستره‌ای از مقدارهای $\phi$ به دست می‌دهد. اگر $\phi$(الف) ۶۴° و (ب) ۱۴۷° باشد، چقدر کار توسط $\vec{F}_a$ انجام شده است؟

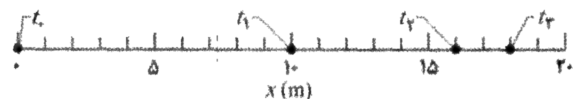
1. Saturn V
2. Apollo




شکل ۷-۲۴ مسئلهٔ ۴

●●۵- انرژی جنبشی پدری که با پسرش مسابقه دو می‌دهد نصف انرژی جنبشی پسرش است و پسر نصف پدر جرم دارد. وقتی که پدر بر تندی خود به میزان ۱/۰m/s می‌افزاید، همان انرژی جنبشی پسر را دارد. تندیهای اولیهٔ (الف) پدر و (ب) پسر چقدر بوده است؟

●●۶- مهره‌ای به جرم $۱/۸\times۱۰^{-۲}$ kg در امتداد سیمی واقع در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کند. وقتی مهره در لحظهٔ $t=۰$ با تندی ۱۲ m/s از $x=۰$ شروع به حرکت کند، نیروی ثابتی بر مهره وارد می‌شود. شکل ۷-۲۵ مکان مهره را در زمانهای $t=۰$ ،۱/۰، ۲/۰، ۳/۰s نشان می‌دهد. مهره در $t=۳/۰$ s به سکون لحظه‌ای می‌رسد. انرژی جنبشی مهره در $t=۱۰$ s چیست؟



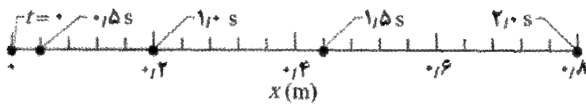

شکل ۷-۲۵ مسئلهٔ ۶

## بخش ۷-۵ کار و انرژی جنبشی

●۷- تحت تأثیر تک نیرویی به بزرگی ۵/۰N، یک قوطی به جرم ۲/۰kg در صفحهٔ $xy$ حرکت می‌کند. قوطی در ابتدا سرعت ۴/۰m/s در جهت مثبت محور $x$ و چند لحظه بعد سرعت ۶/۰m/s در جهت مثبت محور $y$ دارد. در این مدت، نیروی ۵/۰N چقدر کار روی قوطی انجام داده است؟

●۸- سکه‌ای تحت تأثیر نیروی ثابتی از نقطه‌ای واقع بر مبداء یک دستگاه مختصات $xy$ به نقطه‌ای به مختصات (۳/۰m, ۴/۰m) روی صفحهٔ بدون اصطکاکی می‌لغزد. بزرگی نیرو ۲/۰N و جهت آن °۱۰۰ پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور $x$ است. در طی این جابه‌جایی چقدر کار توسط نیرو انجام شده است؟

●●۹- بر جسمی به جرم ۳/۰ kg که روی تخت هوای افقی بدون اصطکاکی ساکن است، نیروی افقی ثابت $\vec{F}$ در جهت مثبت محور $x$ در امتداد تخت هوا وارد می‌شود. نمودار استروبوسکپی مکان جسم در هنگامی که به سمت راست می‌لغزد در شکل ۷-۲۶ نشان داده شده است. نیروی $\vec{F}$ در زمان $t=۰$ بر جسم وارد شده است و این نمودار، مکان جسم را در بازه‌های زمانی ۰/۵۰s ثبت کرده است. در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۲/۰$s، نیروی $\vec{F}$ چقدر کار روی جسم انجام داده است؟

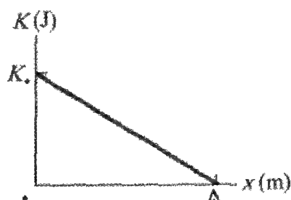



شکل ۷-۲۶ مسئلهٔ ۹

●۱۰- قالب یخی که در آب شناور است تحت تأثیر نیروی $\vec{F}=(۲۱۰\,\text{N})\hat{i}-(۱۵۰\,\text{N})\hat{j}$ که از سوی جریان آب به آن وارد شده است، جابه‌جایی $\vec{d}=(۱۵\,\text{m})\hat{i}-(۱۲\,\text{m})\hat{j}$ را انجام می‌دهد. نیروی جریان آب در طی این جابه‌جایی چقدر کار روی قطعه انجام می‌دهد؟

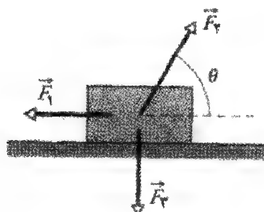
●●۱۱- یک سورتمهٔ مسابقه و سرنشین آن که جرم کل آنها ۸۵kg است با تندی اولیهٔ ۳۷m/s از یک سراشیبی پایین می‌آید و وارد یک مسیر مستقیم افقی می‌شود. اگر نیرویی با آهنگ $۲/۰\text{m/s}^۲$ حرکت آنها را تا لحظهٔ توقف آهسته کند (الف) بزرگی $F$ مورد نیاز چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ $d$ که آنها در حین آهسته شدن طی می‌کنند چقدر است؟ (پ) نیرو چه کار $W$ روی آنها انجام می‌دهد؟ اگر حرکت آنها با شتاب $۴/۰\text{m/s}^۲$ آهسته شود، آنگاه (ت) $F$، (ث) $d$ و (ج) $W$ چقدرند؟

●●۱۲- جسمی به جرم ۸/۰kg در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کند. وقتی جسم از $x=۰$ می‌گذرد، نیروی ثابتی در امتداد محور $x$ شروع به تأثیر روی آن می‌کند. شکل ۷-۲۷ انرژی جنبشی $K$ جسم را برحسب مکان آن هنگامی که از $x=۰$ به $x=۵/۰$m می‌رود نشان می‌دهد. $K_\circ=۳۰/۰$J است. نیرو به طور پیوسته بر جسم وارد می‌شود. وقتی جسم رو به عقب حرکت کند، تندی $v$ آن در $x=-۳/۰$m چقدر است؟



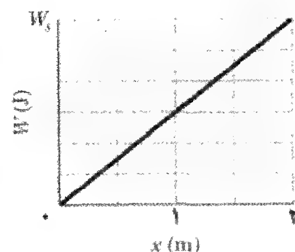

شکل ۷-۲۷ مسئلهٔ ۱۲

●●۱۳- شکل ۷-۲۸ سه نیروی وارد شده بر یک جعبهٔ بزرگ را نشان می‌دهد که جعبه را ۳/۰۰m روی کف بدون اصطکاکی به سمت چپ حرکت می‌دهند. بزرگی نیروها عبارت‌اند از $F_1=۵/۰۰$N، $F_2=۹/۰۰$N، و $F_3=۳/۰۰$N، و زاویهٔ نشان داده شده در شکل $\theta=۶۰/۰^\circ$ است. در طی جابه‌جایی (الف) کار خالص انجام شده روی جعبه توسط این سه نیرو چقدر است؟ و (ب) آیا انرژی جنبشی جعبه افزایش می‌یابد یا کاهش؟




شکل ۷-۲۸ مسئلهٔ ۱۳

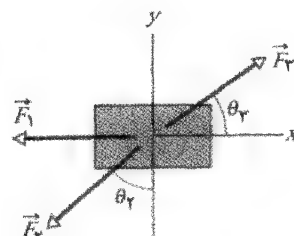
●●۱۴- یک قوطی پیچ و مهره در امتداد محور $x$ توسط زمین شویی روی کف روغنی (بدون اصطکاک) یک تعمیرگاه اتومبیل هل داده می‌شود. شکل ۷-۲۹ کار $W$ انجام شده روی قوطی توسط نیروی ثابت افقی ناشی از زمین شوی را برحسب مکان $x$ قوطی نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با $W_s = ۶/۰\,J$ مشخص شده است. (الف) بزرگی این نیرو چقدر است؟ (ب) اگر انرژی جنبشی اولیهٔ قوطی $۳/۰۰\,J$ بوده باشد، انرژی جنبشی آن پس از پیمودن $۲/۰۰\,m$ در جهت مثبت محور $x$ چقدر است؟




**شکل ۷-۲۹** مسئلهٔ ۱۴

●●۱۵- یک نیروی $۱۲/۰$ نیوتونی با سمتگیری ثابت روی ذره‌ای کار انجام می‌دهد به گونه‌ای که ذره جابه‌جایی $\vec{d} = (۲/۰۰\hat{i} - ۴/۰۰\hat{j} + ۳/۰۰\hat{k})\,m$ را پیدا می‌کند. زاویهٔ میان نیرو و جابه‌جایی در صورتی که تغییر انرژی جنبشی ذره (الف) $+۳۰/۰\,J$ و (ب) $-۳۰/۰\,J$ باشد، چقدر است؟

●●۱۶- شکل ۷-۳۰، دید از بالای سه نیروی افقی وارد بر یک محمولهٔ بار را نشان می‌دهد. محموله که در ابتدا ساکن بوده است، اکنون روی کف بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. بزرگی نیروها عبارت‌اند از $F_1 = ۳/۰۰\,N$، $F_2 = ۴/۰۰\,N$، و $F_3 = ۱۰/۰\,N$، و زاویه‌های نشان داده شده در شکل عبارت‌اند از $\theta_2 = ۵۰/۰°$ و $\theta_3 = ۳۵/۰°$. کار خالص انجام شده روی محموله توسط این سه نیرو در حین نخستین $۴/۰۰\,m$ جابه‌جایی چقدر است؟




**شکل ۷-۳۰** مسئلهٔ ۱۶

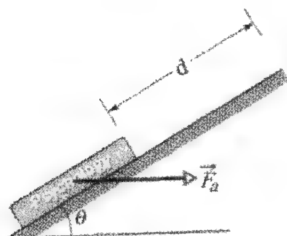
## بخش ۷-۶ کار انجام شده به وسیلهٔ نیروی گرانشی

●۱۷- بالگردی یک فضانورد به جرم $۷۲\,kg$ را توسط کابلی از سطح اقیانوس به طور قائم به اندازهٔ $۱۵\,m$ بالا می‌کشد. شتاب فضانورد $g/۱۰$ است. چقدر کار روی فضانورد توسط (الف) نیروی وارد از بالگرد و (ب) نیروی گرانشی وارد به او، انجام شده است؟ درست پیش از آنکه او به بالگرد برسد، (پ) انرژی جنبشی و (ت) تندی او چقدر است؟ SSM WWW

●۱۸- (الف) در سال ۱۹۷۵/۱۳۵۴ سقف سالن دوچرخه سواری مونترال به وزن $۳۶۰\,kN$ به اندازهٔ $۱۰\,cm$ بالا برده شد تا مرکز آن تنظیم شود. چقدر کار روی سقف توسط نیروهایی که آن را بالا بردند، انجام شده بود؟ (ب) در سال ۱۹۶۰/۱۳۳۹ مادری از شهر *تامپا*[1] در فلوریدا گزارش داد که او یک سر اتومبیل را که بر اثر شکستن جک روی پسرش افتاده بود، بلند کرده است. اگر او در این بلند کردن اضطراب آمیز به طور مؤثری $۴۰۰۰\,N$ (حدود $\frac{1}{4}$ وزن اتومبیل) را به اندازهٔ $۵/۰\,cm$ بلند کرده باشد، چقدر کار توسط نیروی او روی اتومبیل انجام شده است؟

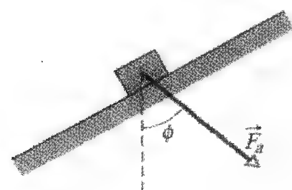
●●۱۹- از ریسمانی برای پایین آوردن قائم قطعه‌ای به جرم $M$ استفاده می‌شود. قطعه که در ابتدا ساکن است با شتاب ثابت رو به پایین $g/۴$ پایین آورده می‌شود. هنگامی که قطعه به اندازهٔ مسافت $d$ پایین آورده شد، مطلوب است (الف) کار انجام شده توسط نیروی ریسمان روی قطعه، (ب) کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی قطعه، (پ) انرژی جنبشی قطعه، و (ت) تندی قطعه. SSM

●●۲۰- در شکل ۷-۳۱، نیروی افقی $\vec{F}_a$ به بزرگی $۲۰/۰\,N$ به کتابی به جرم $۳/۰۰\,kg$ وارد شده است و بر اثر آن، کتاب مسافت رو به بالای $d = ۰/۵۰۰\,m$ را روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta = ۳۰/۰°$ طی می‌کند. (الف) در حین این جابه‌جایی، کار خالص انجام شده روی کتاب توسط نیروی $\vec{F}_a$، نیروی گرانشی وارد بر کتاب، و نیروی عمودی وارد بر کتاب، چقدر است؟ (ب) اگر انرژی جنبشی کتاب در آغاز این جابه‌جایی برابر با صفر باشد، تندی آن در پایان جابه‌جایی چقدر است؟




**شکل ۷-۳۱** مسئلهٔ ۲۰

●●۲۱- در شکل ۷-۳۲، نیروی ثابت $\vec{F}_a$، به بزرگی $۸۲/۰\,N$ بر جعبهٔ کفشی به جرم $۳/۰۰\,kg$ در زاویهٔ $\phi = ۵۳/۰°$ وارد شده و بدین ترتیب باعث حرکت رو به بالای جعبه با تندی ثابت روی یک شیب بدون اصطکاک شده است. وقتی جعبه تا مسافت قائم $h = ۰/۱۵۰\,m$ حرکت کند، چقدر کار توسط $\vec{F}_a$ روی جعبه انجام شده است؟

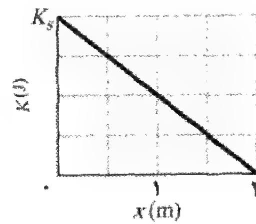



**شکل ۷-۳۲** مسئلهٔ ۲۱

●●۲۲- قطعه‌ای روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی به سمت بالا، در امتداد محور $x$ که در این راستا است، حرکت می‌کند. شکل ۷-۳۳ انرژی جنبشی را برحسب تابع مکان $x$ به دست

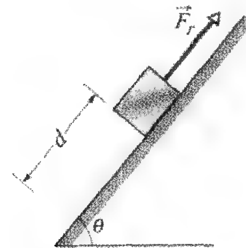
1. tampa

می‌دهد؛ مقیاس محور قائم شکل با $K_s = ۴۰/۰ J$ مشخص شده است. اگر تندی اولیهٔ قطعه برابر $۴/۰۰ m/s$ باشد، نیروی عمودی وارد بر قطعه چقدر است؟




**شکل ۷-۳۳** مسئلهٔ ۲۲

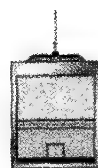
**●●۲۳**- در شکل ۷-۳۴، وقتی به قالب یخی توسط یک طناب نیروی $\vec{F}_r$ به بزرگی $۵۰N$ و رو به بالای سطح شیبداری با زاویهٔ شیب $\theta = ۵۰°$ وارد شود، قالب یخ رو به پایین بر سطح شیبدار بدون اصطکاک می‌لغزد. وقتی قالب یخ به اندازهٔ مسافت $d = ۰/۵۰m$ در امتداد شیب بلغزد، انرژی جنبشی آن به اندازهٔ $۸۰J$ افزایش می‌یابد. اگر طناب به قالب یخ متصل نشده باشد، انرژی جنبشی آن چقدر بیشتر می‌شود؟




**شکل ۷-۳۴** مسئلهٔ ۲۳

**●●۲۴**- یک تیم نجات غارنوردی، غارنورد مجروحی را توسط یک کابل متحرک مستقیماً رو به بالا می‌کشند و او را از گودالی بیرون می‌آورند. بالا آوردن مجروح در سه مرحله صورت می‌پذیرد که در هر مرحله لازم است یک مسافت قائم ۱۰/۰ متری طی شود: (الف) فرد مجروح که در ابتدا ساکن است تا تندی $۵/۰۰m/s$ شتابدار می‌شود؛ (ب) سپس با تندی ثابت $۵/۰۰m/s$ بالا برده می‌شود؛ (پ) و سرانجام تندی آن با یک شتاب کاهنده به صفر رسانده می‌شود. در طی هر مرحله، چقدر کار توسط نیروی بالا برنده روی مجروح که جرم او $۸۰/۰kg$ است انجام شده است؟

**●●●۲۵**- در شکل ۷-۳۵، قالب پنیری به جرم $۰/۲۵۰kg$ بر کف اتاقک بالابری به جرم $۹۰۰ kg$ قرار دارد. اتاقک توسط کابلی نخست به اندازهٔ مسافت $d_1 = ۲/۴۰m$ و سپس به اندازهٔ $d_2 = ۱۰/۵ m$ رو به بالا کشیده می‌شود. (الف) اگر در طی مسافت $d_1$، نیروی عمودی وارد بر قالب پنیر از سوی کف مقدار ثابت $F_N = ۳/۰۰ N$ را داشته باشد، چقدر کار توسط کابل روی اتاقک انجام شده است؟ (ب) اگر در طی مسافت $d_2$ کار انجام شده روی اتاقک توسط نیروی (ثابت) کابل برابر با $۹۲/۶۱ kg$ باشد، بزرگی $F_N$ چقدر است؟



**شکل ۷-۳۵** مسئلهٔ ۲۵

## بخش ۷-۷ کار انجام شده به وسیلهٔ نیروی فنر

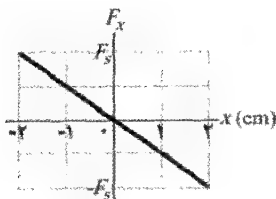
**●۲۶**- در طول ترم بهاره در دانشگاه MIT، دانشجویان مقیم در ساختمانهای موازی در خوابگاه پردیس شرقی با تیروکمانهای بزرگی که از لوله‌های لاستیکی جراحی متصل به قاب پنجره ساخته بودند با هم مبارزه می‌کردند. برای این کار یک بادکنک پر از آب رنگی را در کیسه‌ای متصل به لولهٔ لاستیکی قرار می‌دادند و آن را تا پهنای اتاق می‌کشیدند. فرض کنید کشش لولهٔ لاستیکی از قانون هوک پیروی کند و ثابت فنر آن $۱۰۰N/m$ باشد. اگر لولهٔ لاستیکی به اندازهٔ $۵/۰۰ m$ کشیده و سپس رها شود، نیروی لولهٔ لاستیکی تا زمانی که به طول واهلیدگی خود برگردد چقدر کار روی بادکنک داخل کیسه انجام می‌دهد؟

**●۲۷**- یک فنر و یک قطعه را به همان ترتیب شکل ۷-۱۱ در نظر بگیرید. وقتی قطعه رو به بیرون تا $x = +۴/۰cm$ کشیده شود، باید نیرویی به بزرگی $۳۶۰ N$ را برای نگه داشتن قطعه در این مکان به آن وارد کنیم. وقتی قطعه از $x_i = ۵/۰ cm$ به (الف) $x = +۳/۰ cm$، (ب) $x = -۳/۰ cm$، (پ) $x = -۵/۰ cm$، و (ت) $x = -۹/۰ cm$ حرکت کند، چقدر کار توسط فنر روی قطعه انجام می‌شود؟

**●۲۸**- در شکل ۷-۱۱، باید نیرویی به بزرگی $۸۰ N$ را برای نگه داشتن قطعه به حالت سکون در $x = -۲/۰cm$ وارد کنیم. آنگاه قطعه را از آن مکان به آرامی حرکت می‌دهیم به گونه‌ای که نیروی ما $+۴/۰ J$ کار روی دستگاه فنر- قطعه انجام دهد؛ سپس قطعه دوباره ساکن می‌شود. مکان قطعه در این لحظه چیست؟ (*راهنمایی:* دو پاسخ وجود دارد.)

**●●۲۹**- تنها نیروی وارد بر جسمی به جرم $۲/۰kg$ هنگامی که در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کند، دارای مؤلفهٔ $x$ به صورت $F_x = -۶x\ N$ است که در آن $x$ بر حسب متر است. سرعت جسم در $x = ۳/۰m$ برابر با $۸/۰m/s$ است. (الف) سرعت جسم در $x = ۴/۰m$ چقدر است؟ (ب) در چه مقدار مثبتی از $x$، جسم دارای سرعت $۵/۰m/s$ است؟ **SSM WWW**

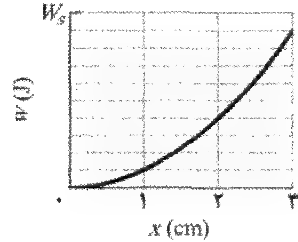
**●●۳۰**- شکل ۷-۳۶ نیروی فنر $F_x$ را برحسب مکان $x$ برای ترکیب فنر- قطعهٔ شکل ۷-۱۱ نشان می‌دهد. مقیاس با $F_s = ۱۶۰/۰N$ مشخص شده است. قطعه را رو به بیرون تا $x = ۱۲cm$ می‌کشیم و سپس رها می‌کنیم. وقتی قطعه از $x_i = +۸/۰cm$ به (الف) $x = +۵/۰cm$، (ب) $x = -۵/۰cm$، (پ) $x = -۸/۰ cm$ و (ت) $x = -۱۰/۰cm$ حرکت کند، چقدر کار توسط فنر روی قطعه انجام می‌شود؟




**شکل ۷-۳۶** مسئلهٔ ۳۰

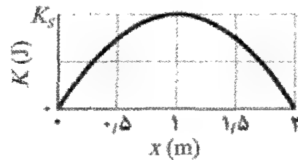
**●●۳۱**- در آرایش شکل ۷-۱۱، قطعه را بتدریج از $x = ۰$ تا $x = +۳/۰cm$، که در آنجا ساکن می‌شود، می‌کشیم. شکل

۷-۳۷ کار انجام شده توسط نیروی ما را بر قطعه نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با $W_s = ۱/۰\ \mathrm{J}$ مشخص شده است. سپس قطعه را رو به بیرون تا $x = +۵/۰\mathrm{cm}$ می‌کشیم و آن را از حالت سکون رها می‌کنیم. وقتی قطعه از $x_i = +۵/۰\mathrm{cm}$ به (الف) $x = +۴/۰\mathrm{cm}$، (ب) $x = -۲/۰\mathrm{cm}$، و (پ) $x = -۵/۰\mathrm{cm}$ حرکت کند، چقدر کار توسط فنر روی قطعه انجام می‌شود؟




شکل ۷-۳۷ مسئلهٔ ۳۱

••۳۲- در شکل ۷-۱۱ الف قطعه‌ای به جرم $m$ که روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد به یک سر فنری افقی (با ثابت فنر $k$) که سر دیگرش در جایی ثابت شده، وصل شده است. وقتی نیروی افقی $\vec{F}$ در جهت مثبت محور $x$ بر قطعه وارد شود، قطعه در ابتدا به حالت سکون در مکانی است که فنر کشیده نشده است $(x = ۰)$. نموداری از انرژی جنبشی قطعه برحسب مکان $x$ در شکل ۷-۳۸ نشان داده شده است. مقیاس محور قائم شکل با $K_s = ۴/۰\ J$ مشخص شده است. (الف) بزرگی $\vec{F}$ چقدر است؟ (ب) مقدار ثابت فنر $k$ چقدر است؟

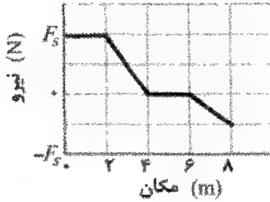



شکل ۷-۳۸ مسئلهٔ ۳۲

•••۳۳- قطعهٔ شکل ۷-۱۱ الف روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد و ثابت فنر برابر با $۵۰\ \mathrm{N/m}$ است. در ابتدا، فنر در طول واهلیده‌اش واقع است و قطعه به حالت سکون در مکان $x = ۰$ قرار دارد. آنگاه یک نیروی خارجی با بزرگی ثابت $۳/۰\mathrm{N}$ قطعه را آنقدر در جهت مثبت محور $x$ می‌کشد تا سرانجام متوقف شود. وقتی قطعه به نقطهٔ توقف برسد (الف) مکان قطعه چیست؟ (ب) کاری که توسط نیروی خارجی بر قطعه انجام شده چقدر است؟ و (پ) کار انجام شده توسط نیروی فنر بر قطعه چقدر است؟ در طی جابه‌جایی قطعه (ت) مکان قطعه به هنگامی که انرژی جنبشی آن بیشینه است چیست و (ت) مقدار آن انرژی جنبشی بیشینه چقدر است؟

## بخش ۷-۸ کار انجام شده به وسیلهٔ یک نیروی متغیر در حالت کلی

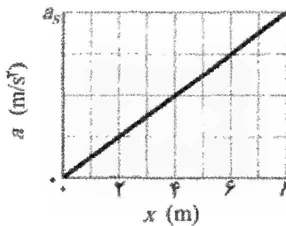
•۳۴- قطعه‌ای به جرم $۵/۰\mathrm{kg}$ در امتداد یک خط مستقیم روی سطح افقی بدون اصطکاکی تحت تأثیر نیرویی که با مکان مطابق شکل ۷-۳۹ تغییر می‌کند، در حرکت است. مقیاس محور قائم شکل با $F_s = ۱۰/۰\mathrm{N}$ مشخص شده است. وقتی قطعه از مبدأ تا $x = ۸/۰\mathrm{m}$ حرکت کند، چقدر کار توسط نیروی وارد بر آن، انجام می‌شود؟




شکل ۷-۳۹ مسئلهٔ ۳۴

•۳۵- نیروی وارد بر ذره‌ای که در امتداد محور $x$ بر آن وارد شده با رابطهٔ $F = F_۰(x/x_۰ - ۱)$ داده شده است. کار انجام شده توسط این نیرو را برای رفتن ذره از $x = ۰$ به $x = ۲x_۰$ (الف) با رسم $F(x)$ و اندازه‌گیری کار از روی نمودار و (ب) با انتگرالگیری از $F(x)$، به دست آورید. SSM WWW

•۳۶- آجری به جرم $۱۰\mathrm{kg}$ در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند. شتاب آن بر حسب تابعی از مکان در شکل ۷-۴۰ نشان داده شده است. وقتی آجر از $x = ۰$ به $x = ۸/۰\mathrm{m}$ حرکت کند، کار انجام شدهٔ خالص روی آن توسط نیروی ایجاد کنندهٔ شتاب چقدر است؟ ILW

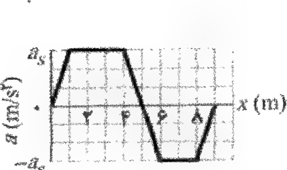



شکل ۷-۴۰ مسئلهٔ ۳۶

••۳۷- یک نیروی تنها بر جسم ذره مانندی به جرم $۳/۰\mathrm{kg}$ چنان اثر می‌کند که مکان جسم برحسب تابعی از زمان با $x = ۳/۰t - ۴/۰t^۲ + ۱/۰t^۳$ داده می‌شود، که در آن $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. کار انجام شده توسط نیرو روی جسم را از $t = ۰$ تا $t = ۴/۰\mathrm{s}$ به دست آورید.

••۳۸- یک قوطی ساردین توسط نیروی $F = \exp(-۴x^۲)$ که در آن $x$ برحسب متر و $F$ برحسب نیوتون است، در امتداد محور $x$ از $x = ۰/۲۵\mathrm{m}$ به $x = ۱/۲۵\ \mathrm{m}$ حرکت داده می‌شود. این نیرو چقدر کار روی قوطی انجام می‌دهد؟

•••۳۹- شکل ۷-۴۱ شتاب ذره‌ای به جرم $۲/۰۰\mathrm{kg}$ را نشان می‌دهد که تحت تأثیر نیروی $\vec{F}_a$ از حالت سکون در امتداد محور $x$ از $x = ۰$ تا $x = ۹/۰\mathrm{m}$ حرکت کرده است. مقیاس محور قائم در شکل با $a_s = ۶/۰\ \mathrm{m/s^2}$ مشخص شده است. وقتی ذره به (الف) $x = ۴/۰\mathrm{m}$، (ب) $x = ۷/۰\mathrm{m}$ و (پ) $x = ۹/۰\mathrm{m}$ می‌رسد، این نیرو چقدر روی ذره کار انجام داده است؟ وقتی ذره به (ت) $x = ۴/۰\mathrm{m}$، (ث) $x = ۷/۰\mathrm{m}$ و (ج) $x = ۹/۰\mathrm{m}$ می‌رسد، تندی و جهت حرکت ذره چیست؟

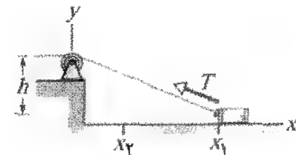



شکل ۷-۴۱ مسئلهٔ ۳۹

**●●●۴۰-** بر قطعه‌ای به جرم ۱/۵kg که در ابتدا روی سطح افقی بدون اصطکاکی ساکن است، یک نیروی افقی در جهت مثبت محور $x$ وارد می‌شود. این نیرو با رابطهٔ $\vec{F}(x)=(۲/۵-x^{۲})\hat{i}\,N$ داده می‌شود که در آن $x$ برحسب متر و مکان اولیهٔ قطعه $x=۰$ است. (الف) وقتی قطعه از $x=۲/۰m$ می‌گذرد، انرژی جنبشی آن چقدر است؟ (ب) در بازهٔ $x=۰$ تا $x=۲/۰m$ بیشینهٔ انرژی جنبشی قطعه چقدر است؟

**●●۴۱-** نیروی $\vec{F}=(cx-۳/۰۰x^{۲})\hat{i}$ که در آن $\vec{F}$ برحسب نیوتون، $x$ برحسب متر و $c$ ثابت است، بر ذره‌ای که در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند، وارد می‌شود. انرژی جنبشی ذره در $x=۰$ برابر ۲۰/۰J، و در $x=۳/۰۰m$ برابر ۱۱/۰J است. $c$ را پیدا کنید.

**●●●۴۲-** شکل ۷-۴۲ ریسمانی را نشان می‌دهد که به ارابه‌ای متصل شده است و می‌تواند روی ریل افقی بدون اصطکاکی در امتداد محور $x$ حرکت کند. انتهای چپ ریسمان از روی قرقره‌ای با جرم و اصطکاک ناچیز در ارتفاع ریسمان $h=۱/۲۰m$ گذشته است. وقتی ارابه از $x_{۱}=۳/۰۰m$ تا $x_{۲}=۱/۰۰m$ بلغزد، ریسمان کشش ثابت ۲۵/۰N را دارد. در طی این حرکت، تغییر در انرژی جنبشی ارابه چقدر است؟




**شکل ۷-۴۲** مسئلهٔ ۴۲

## بخش ۷-۹ توان

**●۴۳-** قطعه‌ای به جرم ۱۰۰kg با تندی ثابت ۵/۰m/s توسط نیرویی به بزرگی ۱۲۲N که جهتش ۳۷° بالای افق است، روی یک کف افقی کشیده می‌شود. با چه آهنگی نیرو روی قطعه کار انجام می‌دهد؟ **SSM ILW**

**●۴۴-** اتاقک بار شدهٔ بالابری به جرم $۳/۰\times۱۰^{۳}$ kg در مدت ۲۳s با تندی ثابت مسافت ۲۱۰m را بالا می‌رود. نیروی کابل با چه آهنگ متوسطی بر اتاقک کار انجام می‌دهد؟

**●۴۵-** یک نیروی ۵/۰ نیوتونی بر جسمی به جرم ۱۵kg که در ابتدا ساکن است وارد می‌شود. کار انجام شده توسط نیرو را (الف) در ثانیهٔ اول، (ب) در ثانیهٔ دوم، و (پ) در ثانیهٔ سوم محاسبه کنید. (ت) توان لحظه‌ای این نیرو در پایان ثانیهٔ سوم چقدر است؟ **SSM**

**●۴۶-** اسکی بازی روی شیب بدون اصطکاکی که با افق زاویهٔ ۱۲° می‌سازد، به کمک یک طناب یدک‌کش که موازی با شیب با تندی ثابت ۱/۰m/s حرکت می‌کند به بالا کشیده می‌شود. برای آنکه اسکی باز مسافت ۸/۰m را روی سطح شیبدار بالا برود، نیروی طناب کاری برابر با ۹۰۰J روی او انجام می‌دهد. (الف) اگر طناب با تندی ثابت ۲/۰m/s حرکت کند، نیروی طناب چقدر کار روی اسکی باز انجام می‌دهد؟ وقتی طناب (ب) با تندی ۱/۰m/s و (پ) با تندی ۲/۰m/s حرکت کند، نیروی طناب با چه آهنگی روی اسکی باز کار انجام می‌دهد؟

**●●۴۷-** اتاقک پر شدهٔ یک بالابر به جرم کل ۱۲۰۰kg با شروع از حالت سکون، ۵۴m مسافت را با تندی ثابت در مدت ۳/۰min رو به بالا طی می‌کند و سپس متوقف می‌شود. جرم وزنهٔ تعادل بالابر فقط ۹۵۰kg است و از اینرو موتور بالابر باید به این کار کمک کند. توان متوسط مورد نیاز که موتور توسط کابل بر اتاقک وارد می‌کند چقدر است؟ **SSM**

**●●۴۸-** (الف) در یک لحظهٔ معین، بر جسم ذره مانندی که در حال حرکت با سرعت $\vec{v}=-(۲/۰m/s)\hat{i}+(۴/۰m/s)\hat{k}$ است، نیروی $\vec{F}=(۴/۰N)\hat{i}-(۲/۰N)\hat{j}+(۹/۰N)\hat{k}$ وارد می شود. نیرو با چه آهنگ لحظه‌ای روی جسم کار انجام می‌دهد؟ (ب) در زمان دیگری، سرعت فقط دارای مؤلفهٔ $y$ است. اگر نیرو تغییر نکند و توان لحظه‌ای ‎-۱۲W باشد، سرعت جسم درست در آن لحظه چقدر است؟

**●●۴۹-** ماشینی، یک بسته به جرم ۴/۰kg را از مکان اولیهٔ $\vec{d}_i=(۰/۵۰m)\hat{i}+(۰/۷۵m)\hat{j}+(۰/۲۰m)\hat{k}$ در زمان $t=۰$ به مکان نهایی $\vec{d}_f=(۷/۵۰m)\hat{i}+(۱۲/۰m)\hat{j}+(۷/۲۰m)\hat{k}$ در زمان $t=۱۲s$ می‌رساند. نیروی ثابتی که ماشین بر بسته وارد کرده عبارت است از $\vec{F}=(۲/۰۰N)\hat{i}+(۴/۰۰N)\hat{j}+(۶/۰۰N)\hat{k}$. برای این جابه‌جایی، مطلوب است (الف) کار انجام شده توسط نیروی ماشین روی بسته و (ب) توان متوسط نیروی ماشین بر بسته.

**●●۵۰-** ملاقه‌ای به جرم ۰/۳۰kg که روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد به یک سر فنری افقی $(k=۵۰۰N/m)$ که سر دیگر آن به جایی ثابت شده، وصل شده است. هنگامی که ملاقه از مکان تعادلش (نقطه‌ای که در آنجا نیروی فنر صفر است) می‌گذرد دارای انرژی جنبشی ۱۰J است. (الف) هنگامی که ملاقه از مکان تعادلش می‌گذرد فنر با چه آهنگی روی آن کار انجام می‌دهد؟ (ب) هنگامی که فنر ۰/۱۰m فشرده شود و ملاقه در حال دور شدن از مکان تعادل باشد، فنر با چه آهنگی روی ملاقه کار انجام می‌دهد؟

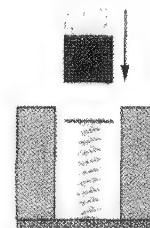
**●●●۵۱-** نیروی $\vec{F}=(۳/۰۰N)\hat{i}+(۷/۰۰N)\hat{j}+(۷/۰۰N)\hat{k}$ بر جسم متحرکی به جرم ۲/۰۰kg که از مکان اولیهٔ $\vec{d}_i=(۳/۰۰m)\hat{i}-(۲/۰۰m)\hat{j}+(۵/۰۰m)\hat{k}$ به مکان نهایی $\vec{d}_f=-(۵/۰۰m)\hat{i}+(۴/۰۰m)\hat{j}+(۷/۰۰m)\hat{k}$ در مدت ۴/۰۰s می‌رود، وارد شده است. مطلوب است (الف) کار انجام شده توسط نیرو بر جسم در بازهٔ زمانی ۴/۰۰s، (ب) توان متوسط ناشی از نیرو در آن بازه، و (پ) زاویهٔ میان بردارهای $\vec{d}_i$ و $\vec{d}_f$.

**●●●۵۲-** یک ماشین مسابقه از حالت سکون شتاب می‌گیرد و فاصلهٔ معینی از مسیر را در زمان $T$ با موتوری با توان ثابت $P$ طی می‌کند. اگر افراد یاری دهنده ماشین بتوانند توان موتور را به مقدار دیفرانسیلی $dP$ افزایش دهند، چه تغییری در زمان به حرکت درآمدن مورد نیاز است.

**مسئله‌های اضافی**

**۵۳-** انفجاری در سطح زمین دهانه‌ای را بر جای می‌گذارد که قطر آن متناسب با انرژی انفجار به توان $\frac{1}{3}$ است. انفجار یک مگاتن TNT دهانه‌ای با قطر ۱ km را بر جای می‌گذارد. در زیر دریاچهٔ *هورن*[1] در میشیگان، یک دهانهٔ ضربه‌ای قدیمی به قطر ۵۰ km وجود دارد. انرژی جنبشی وابسته به آن ضربه برحسب (الف) مگاتن TNT (۱ مگاتن، $۴/۲ \times ۱۰^{۱۵}$ J انرژی به دست می‌دهد) و (ب) معادل بمب هیروشیما (هر یک، ۱۳ کیلوتنTNT) چقدر است؟ (شهاب سنگها یا ستاره‌های دنباله‌داری که در قدیم به زمین برخورد کرده‌اند ممکن است آب و هوای کرهٔ زمین را به میزان قابل ملاحظه‌ای تغییر داده و در انقراض دایناسورها و سایر گونه‌های زیستی نقش بازی کرده باشند.)

**۵۴-** قطعه‌ای به جرم ۲۵۰g روی فنر واهلیدهٔ قائمی با ثابت فنر $k = ۲/۵$ N/cm فرو می‌افتد (شکل ۷-۴۳). قطعه به فنر می‌چسبد و فنر را تا پیش از توقف لحظه‌ای ۱۲ cm فشرده می‌کند. هنگامی که فنر فشرده می‌شود، چقدر کار توسط (الف) نیروی گرانشی وارد بر آن و (ب) نیروی فنر انجام شده است؟ (پ) تندی قطعه درست پیش از برخورد آن با فنر چقدر است؟ (فرض کنید اصطکاک ناچیز است.) (ت) اگر تندی در هنگام برخورد دو برابر شود، فشردگی بیشینهٔ فنر چقدر می‌شود؟



**شکل ۷-۴۳** مسئلهٔ ۵۴

**۵۵-** کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (۲x\text{N})\hat{i} + (۳\text{N})\hat{j}$، که در آن $x$ برحسب متر است، برای بردن ذره‌ای از مکان $\vec{r}_i = (۲\text{m})\hat{i} + (۳\text{m})\hat{j}$ به مکان $\vec{r}_f = -(۴\text{m})\hat{i} - (۳\text{m})\hat{j}$ چقدر است؟

**۵۶-** برای کشیدن صندوقی به جرم ۵۰kg روی یک کف افقی بدون اصطکاک، کارگری نیروی ۲۱۰N را در جهت °۲۰ بالای افق بر آن وارد می‌کند. هنگامی که صندوق به اندازهٔ ۳/۰m حرکت کند، چقدر کار توسط (الف) نیروی کارگر، (ب) نیروی گرانشی وارد بر صندوق، و (پ) نیروی عمودی وارد بر صندوق از طرف کف، انجام شده است؟ (ت) کار کل انجام شده روی صندوق چقدر است؟

**۵۷-** در شکل ۷-۴۴، ریسمانی از دور دو قرقرهٔ بدون جرم و بدون اصطکاک می‌گذرد. وزنه‌ای به جرم $m = ۲۰$ kg از یکی از قرقره‌ها آویزان است، و نیروی $\vec{F}$ بر سر آزاد ریسمان وارد می‌شود. (الف) اگر بخواهیم وزنه را با تندی ثابتی بالا بیاوریم، بزرگی $\vec{F}$ چقدر باید باشد؟ (ب) برای بالا بردن وزنه به اندازهٔ ۲/۰cm، طرف آزاد ریسمان را چقدر باید کشید؟ در حین بالا بردن، کار انجام شده روی وزنه توسط (پ) نیروی وارده (از طریق ریسمان) و (ت) نیروی گرانشی چقدر است؟ (*راهنمایی*: وقتی ریسمانی به دور یک قرقره مشابه شکل بپیچد، قرقره را با نیروی خالصی که دو برابر کشش ریسمان است، می‌کشد.)




**شکل ۷-۴۴** مسئلهٔ ۵۷

**۵۸-** ذره‌ای تحت تأثیر نیروی $\vec{F} = (۴/۰\text{N})\hat{i} + c\hat{j}$، جابه‌جایی $\vec{d} = (۳/۰\text{m})\hat{i} - (۲/۰\text{m})\hat{j}$ را انجام می‌دهد. (نیروهای دیگری نیز بر ذره وارد می‌شوند.) اگر کار x مکان $(۲/۰\text{m})\hat{i} - (۴/۰\text{m})\hat{j}$ می‌رود، چقدر کار توسط این نیرو انجام می‌شود؟

**۶۰-** جسمی به جرم ۲/۰kg که در ابتدا ساکن است به طور افقی و به گونه‌ای یکنواخت در مدت ۳/۰s تا تندی ۱۰m/s شتاب می‌گیرد. (الف) در این بازهٔ ۳/۰ ثانیه‌ای، چقدر کار روی جسم توسط نیرویی که به آن شتاب داده است، انجام می‌شود؟ توان لحظه‌ای ناشی از آن نیرو (ب) در پایان بازهٔ زمانی و (پ) در پایان نیمهٔ اول بازهٔ زمانی چقدر است؟

**۶۱-** اگر بالابری بخواهد ۱۰۰ اسکی باز با وزن میانگین ۶۶۰N را در مدت ۶۰/۰s با تندی ثابت تا ارتفاع ۱۵۰m بالا ببرد، توان میانگین لازم برای کار نیروی بالابر چقدر است؟

**۶۲-** جعبه‌هایی از یک مکان در انبار توسط تسمه‌نقاله‌ای که با تندی ثابت ۰/۵۰m/s حرکت می‌کند، به مکان دیگری منتقل می‌شوند. در یک مکان معین، تسمه‌نقاله از شیبی به طول ۲/۰m که با افق زاویهٔ °۱۰ می‌سازد بالا می‌رود، سپس به طور افقی ۲/۰m را طی می‌کند، و سرانجام از شیب دیگری به طول ۲/۰m که با افق زاویهٔ °۱۰ می‌سازد، پایین می‌آید. فرض کنید یک جعبهٔ ۲/۰ کیلوگرمی بدون لیز خوردن توسط تسمه نقاله منتقل شود. هنگامی که جعبه (الف) از شیب °۱۰ بالا می‌رود، (ب) به طور افقی حرکت می‌کند و (پ) از شیب °۱۰ پایین می‌آید، نیروی تسمه‌نقاله با چه آهنگی روی جعبه کار انجام می‌دهد؟

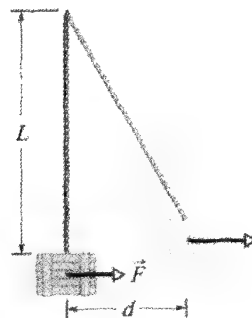
**۶۳-** اسبی یک صندوق را با نیروی ۴۰ lb با زاویهٔ °۳۰ بالای افق می‌کشد و با تندی ۶/۰mi/h حرکت می‌کند. (الف) در مدت ۱۰min، نیرو چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) توان متوسط نیرو (برحسب اسب بخار) چقدر است؟ **SSM**

**۶۴-** یک قایق یخی در لحظه‌ای که بادی ناگهانی نیروی ثابت ۲۰۰N را رو به شرق بر آن وارد می‌آورد، روی یک دریاچهٔ یخ

1. Huron

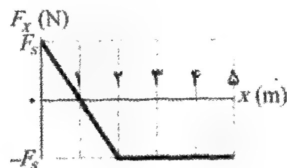
زدهٔ بدون اصطکاک ساکن است. به دلیل سمتگیری بادبان، نیروی باد قایق را در امتداد خطی مستقیم و در جهت ۲۰° شمال شرق به اندازهٔ مسافت ۸/۰m می‌لغزاند. انرژی جنبشی قایق در پایان این ۸/۰m چقدر است؟

۶۵- جعبه‌ای به جرم ۲۳۰kg از انتهای ریسمانی به طول $L=$ ۱۲/۰m آویزان است. با نیروی متغیر $\vec{F}$ جعبه را به طور افقی رو به جلو هل می‌دهیم تا به اندازهٔ $d=$ ۴/۰۰m به این طرف حرکت کند (شکل ۷-۴۵). (الف) وقتی جعبه در این مکان نهایی است، بزرگی $\vec{F}$ چقدر است؟ در طی جابه‌جایی جعبه (ب) کار کل انجام شده روی آن، (پ) کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی جعبه، و (ت) کار انجام شده توسط کششی که از ریسمان به جعبه وارد می‌آید، چقدر است؟ (ث) با توجه به اینکه جعبه پیش و پس از جابه‌جایی بدون حرکت است، با استفاده از پاسخهای (ب)، (پ) و (ت) کاری را که نیروی $\vec{F}$ روی جعبه انجام می‌دهد، به دست آورید. (ج) چرا کار نیرو برابر با حاصلضرب جابه‌جایی افقی در پاسخ (الف) نیست؟



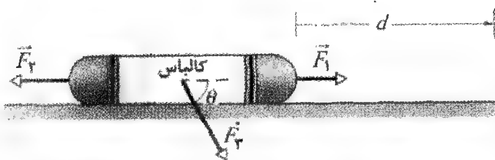

شکل ۷-۴۵ مسئلهٔ ۶۵

۶۶- تنها نیروی وارد بر جسمی به جرم ۲/۰kg هنگامی که جسم در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند، مطابق شکل ۷-۴۶ تغییر می‌کند. سرعت جسم در $x=$ ۰ برابر ۴/۰m/s است. (الف) انرژی جنبشی در $x=$ ۳/۰m چقدر است؟ (ب) به ازای چه مقداری از $x$، انرژی جنبشی جسم ۸/۰J است؟ (پ) انرژی جنبشی بیشینهٔ جسم در بازهٔ $x=$ ۰ تا $x=$ ۵/۰m چقدر است؟




شکل ۷-۴۶ مسئلهٔ ۶۶

۶۷- شکل ۷-۴۷ کالباسی را نشان می‌دهد که روی کف افقی بدون اصطکاکی در حالی که سه نیرو بر آن وارد می‌شوند، به اندازهٔ مسافت $d=$ ۲۰/۰cm می‌لغزد. دو تا از این نیروها افقی‌اند و بزرگی آنها $F_1=$ ۵/۰۰N و $F_2=$ ۱/۰۰N است. سومین نیرو به بزرگی $F_3=$ ۴/۰۰N در جهت رو به پایین و زاویهٔ $\theta=$ ۶۰/۰° قرار دارد. (الف) برای جابه‌جایی ۲۰/۰cm، کار خالص انجام شده روی کالباس توسط سه نیروی وارد شده، نیروی گرانشی وارد بر کالباس، و نیروی عمودی وارد بر کالباس چقدر است؟ (ب) اگر جرم کالباس ۲/۰kg و انرژی جنبشی اولیهٔ آن صفر باشد، تندی آن در پایان این جابه‌جایی چقدر است؟



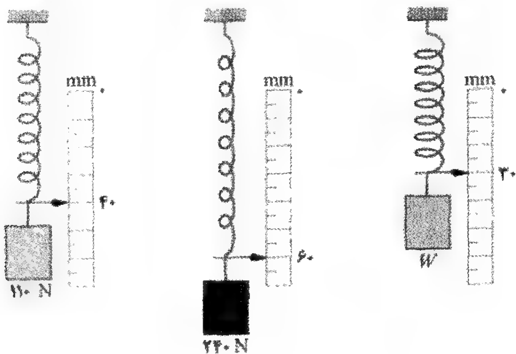

شکل ۷-۴۷ مسئلهٔ ۶۷

۶۸- کودک وحشت زده‌ای که توسط مادرش نگهداشته شده روی سرسرهٔ بدون اصطکاکی رو به پایین می‌لغزد. اگر بزرگی نیروی وارد از مادر به کودک ۱۰۰N و جهت آن رو به بالای شیب باشد، وقتی کودک ۱/۸m را رو به پایین بلغزد، انرژی جنبشی آن به میزان ۳۰J افزایش می‌یابد. (الف) نیروی گرانشی در طی ۱/۸m لغزش رو به پایین کودک، چقدر کار روی او انجام داده است؟ (ب) اگر کودک توسط مادرش نگهداشته نشده بود، پس از طی همان مسافت، انرژی جنبشی او به چه میزانی افزایش می‌یافت؟

۶۹- برای هل دادن رو به بالای صندوقی به جرم ۲۵/۰kg روی یک شیب بدون اصطکاک که با افق زاویهٔ ۲۵/۰° می‌سازد، کارگری نیروی ۲۰۹N را موازی با شیب بر آن وارد می‌کند. هنگامی که صندوق به اندازهٔ ۱/۵۰m بلغزد، چقدر کار روی صندوق توسط (الف) نیروی وارد شده از طرف کارگر، (ب) نیروی گرانشی وارد بر صندوق، و (پ) نیروی عمودی وارد شده از سطح شیبدار بر صندوق، انجام می‌گیرد؟ (ت) کار کل انجام شده روی صندوق چقدر است؟ **SSM**

۷۰- اگر اتومبیلی به جرم ۱۲۰۰kg در بزرگراهی با تندی ۱۲۰km/h حرکت کند، انرژی جنبشی آن از دید شخصی که در کنار بزرگراه ایستاده، چقدر است؟

۷۱- فنری که عقربه‌ای به آن متصل است، در کنار خط‌کشی که برحسب میلی متر نشانه گذاری شده، آویزان است. همان گونه




شکل ۷-۴۸ مسئلهٔ ۷۱

که در شکل ۷-۴۸ نشان داده شده است، سه وزنهٔ مختلف را به نوبت از فنر می‌آویزیم. (الف) وقتی هیچ وزنه‌ای به فنر متصل

نباشد، عقربه چه عددی را روی خط‌کش نشان می‌دهد؟ (ب) وزن $W$ وزنهٔ سوم چقدر است؟ **SSM**

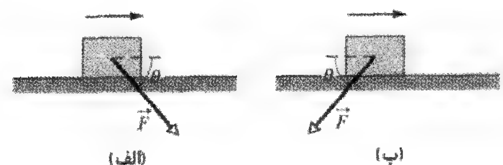
۷۲- ذره‌ای در امتداد مسیری مستقیم در حالی که نیروی $\vec{F}=(۲N)\hat{i}-(۴N)\hat{j}$ بر آن وارد می‌شود، جابه‌جایی $\vec{d}=(۸m)\hat{i}+c\hat{j}$ را انجام می‌دهد. (نیروهای دیگری نیز بر ذره وارد می‌شوند.) اگر کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی ذره (الف) صفر، (ب) مثبت، و (ت) منفی باشد، مقدار $c$ چقدر است؟

۷۳- جرم اتاقک بالابری ۴۵۰۰kg است و اتاقک می‌توانند تا حداکثر ۱۸۰۰kg بار را حمل کند. اگر اتاقک با بیشینهٔ بار خود و با تندی ۳/۸۰m/s رو به بالا حرکت کند، چه توانی برای نیرو لازم است تا حرکت اتاقک در این تندی ثابت بماند؟ **SSM**

۷۴- قالب یخی به جرم ۴۵kg روی شیب بدون اصطکاکی که طول آن ۱/۵m و بلندی آن ۰/۹۱m است رو به پایین می‌لغزد. کارگری یخ را موازی با شیب رو به بالا هل می‌دهد، به طوری که یخ با تندی ثابت رو به پایین حرکت کند. (الف) بزرگی نیروی کارگر را بیابید. چقدر کار روی قالب یخ توسط (ب) نیروی کارگر، (پ) نیروی گرانشی وارد بر قالب یخ، (ت) نیروی عمودی که از سطح شیب‌دار بر قالب یخ وارد می‌شود و (ث) نیروی برایند وارد بر قالب یخ، انجام شده است؟

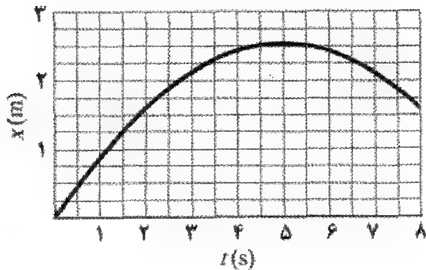
۷۵- نیروی $\vec{F}$ در جهت مثبت محور $x$ بر جسمی که در امتداد این محور حرکت می‌کند وارد می‌شود. اگر بزرگی نیرو $F=۱۰e^{-x/۲/۰}N$ باشد، که در آن $x$ برحسب متر است، کار انجام شده متوسط $\vec{F}$ را هنگامی که جسم از $x=۰$ به $x=۲/۰m$ می‌رود (الف) با رسم $F(x)$ و محاسبهٔ مساحت زیر منحنی و (ب) با انتگرالگیری به طور تحلیلی، بیابید.

۷۶- در شکل ۷-۴۹ الف نیرویی به بزرگی ۲/۰N با زاویهٔ رو به پایین $\theta$ بر قطعه‌ای به جرم ۴/۰kg وارد شده است، به طوری که قطعه مسافت ۱/۰m را روی کف بدون اصطکاک به سمت راست می‌پیماید. اگر سرعت اولیهٔ قطعه (الف) صفر و (ب) ۱/۰m/s رو به سمت راست باشد، رابطه‌ای برای تندی $v_f$ قطعه در پایان آن مسافت پیدا کنید. (پ) در شکل ۷-۴۹ ب قطعه با تندی اولیهٔ ۱/۰m/s رو به سمت راست حرکت می‌کند، ولی این بار جهت نیروی ۲/۰ نیوتونی به سمت چپ است. رابطه‌ای برای تندی $v_f$ قطعه در پایان مسافت ۱/۰m پیدا کنید. (ت) هر سه رابطهٔ به دست آمده برای $v_f$ را برحسب زاویهٔ رو به پایین $\theta$ در گسترهٔ $\theta=۰°$ تا $\theta=۹۰°$ رسم کنید و نمودارها را توضیح دهید.




**شکل ۷-۴۹** مسئلهٔ ۷۶

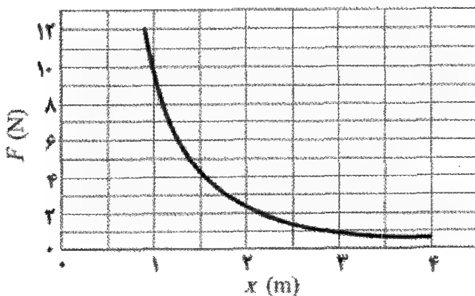
۷۷- جعبهٔ غذایی به جرم ۲/۰kg، روی سطح بدون اصطکاکی در جهت مثبت محور $x$ لغزانده می‌شود. باد پایایی با شروع در لحظهٔ $t=۰$ بر جعبه نیرویی در جهت منفی محور $x$ وارد می‌کند. شکل ۷-۵۰ مکان $x$ جعبه را برحسب تابعی از زمان $t$ که در آن باد بر جعبه نیرو وارد می‌آورد، نشان می‌دهد. با استفاده از این نمودار، انرژی جنبشی جعبه را در (الف) $t=۱/۰s$ و (ب) $t=۵/۰s$ پیدا کنید. (پ) نیروی باد در بازهٔ زمانی $t=۱/۰s$ تا $t=۵/۰s$ چقدر کار روی جعبه انجام می‌دهد؟ **SSM**




**شکل ۷-۵۰** مسئلهٔ ۷۷

۷۸- *انتگرالگیری عددی.* جعبهٔ نانی توسط نیرویی به بزرگی $F=\exp(-۲x^۲)$ که در آن $x$ برحسب متر و $F$ برحسب نیوتون است، از $x=۰/۱۵m$ به $x=۱/۲۰m$ حرکت داده می‌شود. این نیرو چقدر کار روی جعبه انجام داده است؟

۷۹- وقتی ذره‌ای در امتداد محور $x$ حرکت کند، نیرویی در جهت مثبت محور $x$ بر آن وارد می‌شود. شکل ۷-۵۱، بزرگی $F$ نیرو را بر حسب مکان $x$ ذره نشان می‌دهد. منحنی با رابطهٔ $F=a/x^۲$ داده می‌شود که در آن $a=۹/۰N\cdot m^۲$ است. کار انجام شده توسط این نیرو روی ذره را هنگامی که ذره از $x=۱/۰m$ به $x=۳/۰m$ می‌رود با (الف) محاسبهٔ کار از روی منحنی و (ب) انتگرالگیری از تابع نیرو، به دست آورید.




**شکل ۷-۵۱** مسئلهٔ ۷۹

۸۰- یک جعبهٔ CD در حالی که بر آن نیروی $\vec{F}_a$ وارد شده است، روی کفی در جهت مثبت محور $x$ می‌لغزد. نیرو در جهت محور $x$ است و دارای مؤلفهٔ $x$ برابر $F_{ax}=۹x-۳x^۲$ است که در آن $x$ برحسب متر و $F_{ax}$ برحسب نیوتون است. جعبه از حالت سکون در مکان $x=۰$ شروع به لغزش کرده و تا وضعیت سکون مجدد حرکت می‌کند. (الف) کار انجام شده توسط $\vec{F}_a$ روی جعبه را بر حسب تابعی از $x$ رسم کنید. (ب) در چه مکانی این کار بیشینه است؟ و (پ) این مقدار بیشینه چقدر است؟ (ت) در چه مکانی کار به مقدار صفر کاهش می‌یابد؟ (ث) جعبه در چه مکانی دوباره ساکن می‌شود؟

# ۸ انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی



**چرا بهمنهای عظیم دارای چنین فاصلهٔ سقوط زیادی هستند؟**

وقتی بهمنی از سنگها از کوه به سمت درّه سرازیر می‌شود، اصطکاک بین سنگها و زمین موجب کند شدن و سرانجام توقف سنگها می‌شود. فاصلهٔ سقوط (مسافتی که سنگها به سمت درّه حرکت می‌کنند) به طور نوعی برابر $\frac{۲}{۳}$ ارتفاعی است که از آن سنگها شروع به سقوط می‌کنند. ولی در بهمنهای عظیم، که مقدار زیادی از مواد از کوه سرازیر می‌شوند، فاصلهٔ سقوط ممکن است تا ۳۰ مرتبه بیشتر باشد که می‌تواند برای مردمی که امن به نظر می‌رسند به طور غیر منتظره‌ای مخرب باشد.

پاسخ در همین فصل

## ۸-۱ فیزیک چیست؟

یکی از وظایف فیزیک شناسایی انواع مختلف انرژی در جهان است، به‌ویژه آن انرژیهایی که اهمیت عمومی دارند. یک نوع کلی انرژی، **انرژی پتانسیل** $U$ است. از لحاظ فنی، انرژی پتانسیل انرژیی است که می‌تواند به پیکربندی (یا آرایش) دستگاه جسمهایی که بر یکدیگر نیرو وارد می‌آورند، وابسته باشد.

این تعریفی نسبتاً صوری از چیزهایی است که در واقع برای شما آشنا هستند. شاید یک مثال بتواند بهتر از این تعریف به شما کمک کند: یک پرش کننده با طناب کشسان (بانجی[1]) از پرتگاه بلندی به پایین شیرجه می‌رود. (شکل ۸-۱). دستگاه جسمها، شامل کرهٔ زمین و پرش کننده است. نیروی بین جسمها، نیروی گرانشی است. پیکربندی دستگاه تغییر می‌کند (فاصلهٔ میان پرش کننده و کرهٔ زمین کاهش می‌یابد- که البته هیجان پرش نیز ناشی از همین است). با تعریف **انرژی پتانسیل گرانشی** $U$ می‌توانیم حرکت پرش کننده و افزایش انرژی جنبشی او را توضیح دهیم. انرژی پتانسیل گرانشی، انرژیی است که به



**شکل ۸-۱** انرژی جنبشی یک پرش کننده با طناب کشسان، در طی سقوط آزاد افزایش می‌یابد، و سپس طناب با کشیده شدن، حرکت پرش کننده را آهسته می‌کند.

وضعیت جدایی میان دو جسم که یکدیگر را با نیروی گرانشی جذب می‌کنند، اینجا پرش کننده و کرهٔ زمین، وابسته است.

وقتی پرش کننده در آخرهای شیرجهٔ خود شروع به کشیدن طناب می‌کند، دستگاه جسمها شامل طناب و پرش کننده است. نیروی میان جسمها، یک نیروی کشسان (فنر مانند) است. پیکربندی دستگاه تغییر می‌کند (ریسمان کش می‌آید.) با تعریف **انرژی پتانسیل کشسانی** $U$ می‌توانیم کاهش انرژی جنبشی پرش کننده و افزایش طول طناب را توضیح دهیم. انرژی پتانسیل کشسانی، انرژیی است که به حالت فشردگی یا کشیدگی جسم کشسان، اینجا طناب کشسان، وابسته است.

فیزیک چگونگی محاسبهٔ انرژی پتانسیل یک دستگاه را که می‌تواند ذخیره شود یا مورد استفاده قرار گیرد، تعیین می‌کند. برای مثال، پیش از آنکه هر پرش کنندهٔ با طنابی شیرجه برود، کسی (احتمالاً یک مهندس مکانیک) باید با محاسبهٔ انرژیهای پتانسیل گرانشی و کشسانی، طناب مناسب پرش را تعیین کند. در این صورت است که پرش فقط هیجان انگیز خواهد بود نه کشنده.

## ۸-۲ کار و انرژی پتانسیل

در فصل ۷ رابطهٔ میان کار و تغییر انرژی جنبشی را بررسی کردیم. در اینجا در مورد رابطهٔ میان کار و تغییر انرژی پتانسیل بحث می‌کنیم.

فرض کنید یک گوجه فرنگی را رو به بالا پرتاب کنیم (شکل ۸-۲). از پیش می‌دانیم در هنگام بالا رفتن گوجه فرنگی، کار $W_g$ انجام شده روی گوجه فرنگی توسط نیروی گرانشی منفی است، زیرا این نیرو انرژی را «از» انرژی جنبشی گوجه فرنگی می‌گیرد. اکنون می‌توانیم بگوییم که این انرژی از نیروی گرانشی «به» انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گوجه فرنگی- کرهٔ زمین منتقل شده است.

حرکت گوجه فرنگی رو به بالا آرام می‌شود و پس از توقف، به دلیل نیروی گرانشی وارد بر آن، شروع به سقوط به پایین می‌کند. در حین سقوط، انتقال [انرژی] وارونه می‌شود: اکنون کار $W_g$ انجام شده توسط نیروی گرانشی روی گوجه فرنگی مثبت است و این نیرو انرژی را «از» انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گوجه فرنگی- کرهٔ زمین «به» انرژی جنبشی گوجه فرنگی منتقل می‌کند.

در حین بالا رفتن و پایین آمدن، تغییر $\Delta U$ انرژی پتانسیل گرانشی برابر با منفی کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی گوجه فرنگی، تعریف می‌شود. با استفاده از نماد عمومی $W$ برای کار، این تعریف را چنین می‌نویسیم

$$\Delta U = -W \qquad (۸-۱)$$

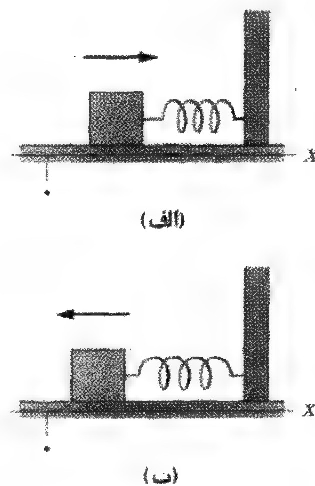
این معادله همچنین برای دستگاه قطعه- فنر، مانند شکل ۸-۳، برقرار است. اگر قطعه را ناگهان به سمت راست هل دهیم، نیروی فنر به سمت چپ بر آن اثر می‌کند و بنابراین، روی قطعه کار منفی انجام می‌دهد و انرژی را از انرژی جنبشی قطعه می‌گیرد و به انرژی پتانسیل کشسانی دستگاه فنر- قطعه تبدیل می‌کند. حرکت قطعه آهسته و سرانجام متوقف می‌شود،

1. bungee




**شکل ۸-۲** یک گوجه فرنگی به بالا پرتاب شده است. تا هنگامی که بالا می‌رود، نیروی گرانشی روی آن کار منفی انجام می‌دهد و انرژی جنبشی آن را کاهش می‌دهد. وقتی گوجه فرنگی پایین می‌آید، نیروی گرانشی روی آن کار مثبت انجام می‌دهد و انرژی جنبشی آن را افزایش می‌دهد.

و آنگاه به دلیل آن که نیروی فنر کماکان به طرف چپ است، شروع به حرکت به طرف چپ می‌کند. بنابراین، اکنون تبدیل انرژی وارونه شده است و انرژی پتانسیل دستگاه فنر- قطعه به انرژی جنبشی قطعه تبدیل می‌شود.




**شکل ۸-۳** قطعه‌ای که به یک فنر متصل شده است و در ابتدا به حالت سکون در $x = $ ه قرار دارد، به طرف راست حرکت داده می‌شود. (الف) وقتی قطعه به طرف راست حرکت کند (همان گونه که توسط پیکان نشان داده شده است)، نیروی فنر روی آن کار منفی انجام می‌دهد. (ب) آنگاه، وقتی که قطعه به طرف $x = o$ برمی‌گردد، نیروی فنر روی آن کار مثبت انجام می‌دهد.

### *نیروهای پایستار و ناپایستار*

اکنون عناصر کلیدی دو وضعیتی را که بررسی کردیم در اینجا فهرست می کنیم:

۱. دستگاه شامل دو یا چند جسم است.

۲. نیرویی میان جسم ذره مانند (گوجه فرنگی یا قطعه) در دستگاه و بقیهٔ دستگاه عمل می‌کند.

۳. وقتی پیکربندی دستگاه تغییر کند، نیرو روی جسم ذره مانند *کار* (آن را $W_1$ می‌نامیم) انجام می‌دهد و انرژی جنبشی $K$ جسم را به شکل دیگری از انرژی دستگاه تبدیل می‌کند.

۴. وقتی تغییر پیکربندی وارونه شود، نیرو تبدیل انرژی را وارونه می‌کند و در این فرایند کار $W_2$ انجام می‌شود.

در وضعیتی که در آن همواره رابطهٔ $W_1 = -W_2$ برقرار باشد، نوع دیگر انرژی، انرژی پتانسیل است و گفته می‌شود که نیرو، **نیرویی پایستار** است. همان‌طور که ممکن است حدس زده باشید، نیروی گرانشی و نیروی فنر هر دو پایستارند (زیرا در غیر این صورت نمی‌توانستیم در بالا از انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی پتانسیل کشسانی صحبت کنیم).

نیرویی که پایستار نباشد، **نیروی ناپایستار** نامیده می‌شود. نیروی اصطکاک جنبشی و نیروی کششی ناپایستارند. مثلاً، اگر قطعه‌ای را روی کفی که بدون اصطکاک نیست بلغزانیم، در حین لغزش، نیروی اصطکاک جنبشی از طرف کف روی قطعه کار منفی انجام می‌دهد و با تبدیل انرژی جنبشی قطعه به نوعی انرژی به نام *انرژی گرمایی* (که به حرکتهای تصادفی اتمها و مولکولها مربوط می‌شود) باعث آهسته شدن حرکت قطعه می‌شود. با تجربه می‌دانیم که این تبدیل انرژی را نمی‌توانیم وارونه انجام دهیم (انرژی گرمایی را نمی‌توان توسط نیروی اصطکاک جنبشی به انرژی جنبشی قطعه تبدیل کرد.) بنابراین، اگر چه دستگاهی (شامل قطعه و کف) داریم و نیرویی میان بخشهای آن عمل می‌کند و توسط این نیرو تبدیل انرژی صورت می‌گیرد، ولی نیرو پایستار نیست. از اینرو، انرژی گرمایی یک انرژی پتانسیل نیست.

*وقتی فقط نیروهای پایستار بر یک جسم ذره مانند وارد شوند، می‌توانیم مسئله‌های دشواری را که شامل حرکت جسم می‌شوند، به مقدار زیادی ساده کنیم.* بخش بعد، که در آن روش شناسایی نیروهای پایستار بسط داده می‌شود، روشی را برای ساده سازی مسائلی از این دست ارائه می‌کند.

## ۸-۳ ناوابستگی نیروهای پایستار به مسیر حرکت

آزمون مقدماتی برای تعیین اینکه آیا یک نیرو پایستار است یا ناپایستار به این قرار است: فرض کنید نیرویی بر ذره‌ای وارد شود و ذره در امتداد یک مسیر بسته، با شروع از مکانی اولیه و سرانجام بازگشت به همان مکان، حرکت کند (یعنی ذره یک *حرکت رفت و برگشت* را از یک مکان اولیه شروع کند و در همان مکان به پایان برساند). نیرو تنها در صورتی پایستار است که انرژی کل مبادله شده با ذره در طی یک حرکت رفت و برگشت یا هر مسیر بستهٔ دیگر صفر باشد. به عبارت دیگر

> کار خالص انجام شده توسط یک نیروی پایستار روی ذره‌ای که در مسیر بسته‌ای حرکت می‌کند برابر با صفر است.

از تجربه می‌دانیم که نیروی گرانشی یکی از نیروهایی است که برای آن *آزمون مسیر بسته* برقرار است. یک مثال، گوجه فرنگی به بالا پرتاب شدهٔ شکل ۸-۲ است. گوجه فرنگی نقطهٔ پرتاب را با تندی $v_0$ و انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv_0^2$ ترک می‌کند. نیروی گرانشی وارد بر گوجه فرنگی حرکت آن را آهسته می‌کند و پس از توقف آن، باعث سقوط رو به پایین آن می‌شود. وقتی گوجه فرنگی به نقطهٔ پرتاب بازمی‌گردد، دوباره به تندی $v_0$ و انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv_0^2$ می‌رسد. بنابراین، نیروی گرانشی همان قدر که در حین بالا رفتن گوجه فرنگی «از» آن انرژی می‌گیرد، در طی فرود آمدن گوجه فرنگی به سوی نقطهٔ پرتاب، «به» آن انرژی می‌دهد. کار انجام شده روی گوجه فرنگی توسط نیروی گرانشی در طی این حرکت رفت و برگشت برابر با صفر است.

نتیجهٔ مهم آزمون مسیر بسته به این قرار است:

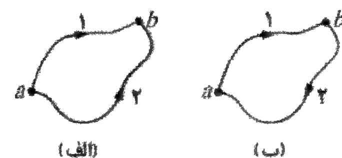
> کار انجام شده توسط یک نیروی پایستار روی ذره‌ای که میان دو نقطه حرکت می‌کند به مسیری که ذره می‌پیماید بستگی ندارد.

مثلاً، فرض کنید ذره‌ای از نقطهٔ $a$ به نقطهٔ $b$ در امتداد یکی از مسیرهای ۱ یا ۲ شکل ۸-۴ الف حرکت کند. اگر فقط یک نیروی پایستار بر ذره اثر کند، آنگاه کار انجام شده روی ذره در امتداد هر مسیر یکسان است. به صورت فرمولی این نتیجه را می‌توان چنین نوشت

$$W_{ab,1} = W_{ab,2} \qquad (۸-۲)$$

که در آن شاخص پایین $ab$، به ترتیب نقطه‌های ابتدایی و نهایی و شاخصهای ۱ و ۲ مسیر را مشخص می‌کنند.

این نتیجه اهمیت زیادی دارد، زیرا امکان می دهد تا مسائل دشواری که در آنها فقط یک نیروی پایستار اثر می‌کند به سادگی حل شوند. فرض کنید می‌خواهیم کار انجام شده توسط یک نیروی پایستار را در امتداد مسیر معینی میان دو نقطه




**شکل ۸-۴** (الف) ذره‌ای که بر آن یک نیرو پایستار وارد می‌شود، می‌تواند در امتداد هر یک از مسیرهای ۱ یا ۲ از نقطهٔ $a$ به نقطهٔ $b$ حرکت کند. (ب) ذره در یک حرکت رفت و برگشت، از نقطهٔ $a$ به نقطهٔ $b$ در امتداد مسیر ۱ حرکت می‌کند و سپس در امتداد مسیر ۲ به نقطهٔ $a$ باز می‌گردد.

محاسبه کنیم و این محاسبه بدون داشتن اطلاعات کافی، دشوار یا حتی ناممکن باشد. می‌توان با وارسی مسیرهای دیگری میان آن دو نقطه، مسیری را که محاسبهٔ کار در آن ممکن و از همه ساده‌تر است انتخاب و بدین ترتیب کار را محاسبه کرد. مسئلهٔ نمونهٔ ۸-۱ مثالی از چنین مسائلی است، ولی پیش از آن نیاز به اثبات معادلهٔ ۸-۲ داریم.

### اثبات معادلهٔ ۸-۲

شکل ۸-۴ ب یک حرکت رفت و برگشت دلخواه را برای ذره‌ای که فقط تحت تأثیر یک نیرو است نشان می‌دهد. ذره از نقطهٔ ابتدایی $a$ در طول مسیر ۱ به نقطهٔ $b$ می‌رود و سپس در طول مسیر ۲ به نقطهٔ $a$ بازمی‌گردد. وقتی ذره در طول هر مسیر حرکت می‌کند، نیرو روی آن کار انجام می‌دهد. بدون نگرانی از این که در کجا کار مثبت و در کجا کار منفی انجام شده است، کار انجام شده از $a$ به $b$ در امتداد مسیر ۱ را با $W_{ab,1}$ و کار انجام شده از $b$ به $a$ در امتداد مسیر ۲ را با $W_{ab,2}$ نمایش می‌دهیم. اگر نیرو پایستار باشد، آنگاه کار خالص انجام شده در طی این حرکت رفت و برگشت باید صفر باشد

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

و از آنجا

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2} \qquad (۸-۳)$$

که به این معناست که کار انجام شده در مسیر رفت باید برابر کار انجام شده در مسیر برگشت با علامت منفی باشد.

اکنون کار $W_{ab,2}$ انجام شده توسط نیرو روی ذره را هنگامی که در امتداد مسیر ۲ از $a$ به $b$ می‌رود، همان گونه که در شکل ۸-۴ الف نشان داده شده است، بررسی می کنیم. اگر نیرو پایستار باشد، این کار برابر با منفی $W_{ba,2}$ است

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2} \qquad (۸-۴)$$

با قرار دادن $W_{ab,2}$ به جای $-W_{ba,2}$ در معادلهٔ ۸-۳ به دست می‌آوریم

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

که همان نتیجه‌ای است که باید ثابت می‌کردیم.

> ✔ **نکتهٔ وارسی ۱** شکل سه مسیر را که نقطه‌های $a$ و $b$ را به هم متصل می‌کنند نشان می‌دهد. تک نیروی $\vec{F}$ روی ذره‌ای که در جهتهای نشان داده شده حرکت می‌کند کارهای نوشته شده در کنار هر مسیر را انجام می‌دهد. بر اساس این داده‌ها، آیا نیروی $\vec{F}$ پایستار است یا خیر؟
>
> 
> 

**مسئلهٔ نمونهٔ ۸-۱**

شکل ۸-۵ الف قالب پنیر لیزی به جرم $2/0kg$ را نشان می‌دهد که در امتداد مسیری بدون اصطکاک از نقطهٔ $a$ به سمت نقطهٔ $b$ می‌لغزد. قالب پنیر مسافت کل $2/0m$ را در امتداد مسیر، و مسافت قائم خالص $0/8m$ را می‌پیماید. در طی این لغزش، نیروی گرانشی چقدر کار روی پنیر انجام داده است؟

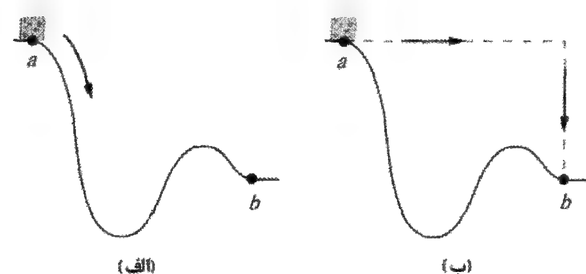
**نکته‌های کلیدی** (۱) *نمی‌توانیم* از معادلهٔ ۷-۱۲ $(W_g = mgd\cos\phi)$ برای محاسبهٔ کار انجام شده توسط نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ هنگامی که پنیر در امتداد مسیر حرکت می‌کند، استفاده کنیم. دلیل این امر آن است که زاویهٔ $\phi$ میان نیروی $\vec{F}_g$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ در طول مسیر به نحو نامعلومی تغییر می‌کند. (حتی اگر شکل مسیر را هم بدانیم و بتوانیم زاویهٔ $\phi$ را در طول آن محاسبه کنیم، باز هم محاسبه بسیار دشوار خواهد بود.) (۲) چون $\vec{F}_g$ یک نیروی پایستار است، کار انجام شده را می‌توانیم با انتخاب مسیر دیگری میان $a$ و $b$ که محاسبه‌ها را آسان کند، بیابیم.

***محاسبه‌ها:*** برای این کار مسیر خط‌چین در شکل ۸-۵ ب را انتخاب می‌کنیم؛ این مسیر از دو بخش مستقیم تشکیل شده است. در امتداد بخش افقی، زاویهٔ $\phi$ ثابت و برابر با $90°$ است. حتی اگر اندازهٔ جابه‌جایی در طول بخش افقی معلوم نباشد، معادلهٔ ۷-۱۲ نشان می‌دهد که کار $W_h$ انجام شده برابر است با

$$W_h = mgd\cos 90° = 0$$

در طول بخش قائم، اندازهٔ جابه‌جایی $d$ برابر با $0/80m$ است، و چون $\vec{F}_g$ و $\vec{d}$ هر دو به طرف پایین هستند، زاویهٔ $\phi$ مقدار ثابت صفر را دارد. بنابراین، معادلهٔ ۷-۱۲ کار انجام شدهٔ $W_v$ در امتداد بخش قائم مسیر خط چین را چنین به دست می‌دهد

$$W_v = mgd\cos 0° = (2/0kg)(9/8m/s^2)(0/80m)(1) = 15/7J$$




**شکل ۸-۵** (الف) قالب پنیری در طول مسیری بدون اصطکاک از نقطهٔ $a$ به سمت نقطهٔ $b$ می‌لغزد. (ب) یافتن کار انجام شده روی پنیر توسط نیروی گرانشی، در طول مسیر خط‌چین آسانتر از یافتن کار در طول مسیر واقعی است؛ نتیجه برای هر دو مسیر یکسان است.

پس کار انجام شدهٔ کل توسط $\vec{F}_g$ روی پنیر، هنگامی که پنیر در طول مسیر خط‌چین از نقطهٔ $a$ به نقطهٔ $b$ می‌رود، چنین می‌شود

$$W = W_h + W_v = 0 + 15/7J \approx 16J \qquad \text{(پاسخ)}$$

این برابر همان کاری است که روی قالب پنیر وقتی در طول مسیر، از $a$ به سمت $b$ بلغزد انجام می‌گیرد.

## ۸-۴ تعیین مقدارهای انرژی پتانسیل

در اینجا می‌خواهیم معادله‌هایی را بیابیم که مقدار دو نوع انرژی پتانسیل مورد بحث قرار گرفته در این فصل یعنی، انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی پتانسیل کشسانی را به دست دهند. البته باید در ابتدا رابطه‌ای کلی میان نیروی پایستار و انرژی پتانسیل وابسته به آن را به دست آوریم.

جسم ذره مانندی را در نظر بگیرید که بخشی از دستگاهی است که به آن نیروی پایستار $\vec{F}$ وارد می‌شود. وقتی این نیرو کار $W$ را روی جسم انجام دهد، تغییر $\Delta U$ انرژی پتانسیل وابسته به دستگاه برابر کار انجام شده با علامت منفی است. این واقعیت را به صورت معادلهٔ ۸-۱ $(\Delta U = -W)$ نوشتیم. در کلی‌ترین حالت، که در آن نیرو می‌تواند با مکان تغییر کند، کار $W$ را می‌توانیم مشابه معادلهٔ ۷-۳۲ بنویسیم

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \qquad (۸\text{-}۵)$$

این معادله کار انجام شده توسط نیرو را هرگاه پیکربندی دستگاه با حرکت جسم از نقطهٔ $x_i$ به نقطهٔ $x_f$ تغییر کند، به دست می‌دهد. (چون نیرو پایستار است، کار برای همهٔ مسیرهای میان آن دو نقطه یکسان است.)

با قرار دادن معادلهٔ ۸-۵ در معادلهٔ ۸-۱، درمی‌یابیم که تغییر انرژی پتانسیل ناشی از تغییر پیکربندی در رابطهٔ کلی چنین می‌شود

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \qquad (۸\text{-}۶)$$

### *انرژی پتانسیل گرانشی*

نخست ذره‌ای به جرم $m$ را در نظر می‌گیریم که به طور قائم در امتداد محور $y$ حرکت می‌کند (جهت مثبت محور رو به بالاست). وقتی ذره از نقطهٔ $y_i$ به نقطهٔ $y_f$ برود، نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ روی آن کار انجام می‌دهد. برای یافتن تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه ذره- کرهٔ زمین وابسته به این نیرو، از معادلهٔ ۸-۶ با دو تغییر استفاده می‌کنیم: (۱) چون نیروی گرانشی به طور قائم وارد می‌شود، به جای محور $x$ در امتداد محور $y$ انتگرالگیری می‌کنیم. (۲) چون بزرگی $\vec{F}_g$ برابر با $mg$ و جهت آن رو به پایین محور $y$ است، به جای نماد $F$ مقدار $-mg$ را قرار می‌دهیم. آنگاه خواهیم داشت

$$\Delta U = -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)\, dy = mg \int_{y_i}^{y_f} dy = mg\left[y\right]_{y_i}^{y_f}$$

که به دست می‌دهد

$$\Delta U = mg\,(y_f - y_i) = mg\,\Delta y \qquad (۸-۷)$$

تنها *تغییرات* $\Delta U$ در انرژی پتانسیل گرانشی (یا هر نوع دیگری از انرژی پتانسیل) از لحاظ فیزیکی معنی دارند. اما، هنگامی که ذره در ارتفاع معین $y$ قرار دارد، گاهی برای ساده کردن محاسبه یا بحث علاقه‌مندیم که از مقدار معین پتانسیل گرانشی وابسته دستگاه ذره- کرهٔ زمین صحبت کنیم. برای این کار، معادلهٔ ۸-۷ را چنین بازنویسی می‌کنیم

$$U - U_i = mg\,(y - y_i) \qquad (۸-۸)$$

حال، $U_i$ را انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه وقتی که در **پیکربندی مرجع** است در نظر می‌گیریم که در آن ذره در **نقطهٔ مرجع** $y_i$ قرار دارد. معمولاً فرض می‌کنیم $U_i = ۰$ و $y_i = ۰$. با انجام این تغییرات، معادلهٔ ۸-۸ چنین می‌شود

$$U(y) = mgy \qquad \text{(انرژی پتانسیل گرانشی)} \qquad (۸-۹)$$

این معادله حاکی از آن است که

> انرژی پتانسیل گرانشی وابسته به دستگاه ذره- کرهٔ زمین فقط به مکان قائم $y$ (یا ارتفاع) ذره نسبت به مکان مرجع $y = ۰$ بستگی دارد، نه به مکان افقی آن.

## انرژی پتانسیل کشسانی

اکنون دستگاه قطعه - فنر نشان داده شده در شکل ۸-۳ را در نظر بگیرید که در آن قطعه‌ای در انتهای فنری با ثابت فنر $k$ حرکت می‌کند. وقتی قطعه از نقطهٔ $x_i$ به نقطهٔ $x_f$ برود، نیروی فنر $F_x = -kx$ روی آن کار انجام می‌دهد. برای یافتن تغییر انرژی پتانسیل کشسانی دستگاه قطعه- فنر وابسته به این نیرو، در معادلهٔ ۸-۶ به جای $F(x)$ مقدار $-kx$ را قرار می‌دهیم. آنگاه خواهیم داشت

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} (-kx)\, dx = k\int_{x_i}^{x_f} x\, dx = \frac{۱}{۲}k\left[x^۲\right]_{x_i}^{x_f}$$

یا

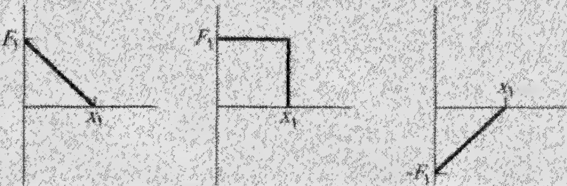
$$\Delta U = \frac{۱}{۲}k x_f^۲ - \frac{۱}{۲}k x_i^۲ \qquad (۸-۱۰)$$

برای وابسته کردن مقدار انرژی پتانسیل $U$ به قطعه در مکان $x$، وضعیتی را که در آن فنر در طول واهلیده‌اش قرار دارد و قطعه در $x_i = ۰$ است به عنوان پیکر بندی مرجع انتخاب می‌کنیم. بنابراین، انرژی پتانسیل کشسانی $U_i$ برابر با صفر است، و معادلهٔ ۸-۱۰ چنین می‌شود

$$U - ۰ = \frac{۱}{۲}k x^۲ - ۰$$

که به دست می‌دهد

$$U(x) = \frac{۱}{۲}k x^۲ \qquad \text{(انرژی پتانسیل کشسانی)} \qquad (۸-۱۱)$$

> ✔ **نکتهٔ وارسی ۲** در حالی که یک نیروی پایستار روی ذره‌ای در امتداد محور $x$ وارد می‌شود، ذره در امتداد محور $x$ از $x = ۰$ به $x_۱$ می‌رود. شکل، سه وضعیت را نشان می‌دهد که در آن مؤلفهٔ $x$ نیرو با $x$ تغییر می‌کند. در هر سه وضعیت، نیرو دارای بزرگی بیشینهٔ یکسان $F_۱$ است. وضعیتها را بنابر تغییر انرژی پتانسیل وابسته به هر نیرو در طی حرکت ذره طوری مرتب کنید که مثبت‌ترین در ابتدا باشد.
>
> 
> 

# تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱: استفاده از اصطلاح «انرژی پتانسیل»*

انرژی پتانسیل به کل یک دستگاه وابسته است. با این حال، ممکن است با جمله‌هایی مواجه شویم که در آنها انرژی پتانسیل فقط به بخشی از دستگاه نسبت داده شده است. مثلاً ممکن است در جایی بخوانید: «سیبی که از درختی آویزان است انرژی پتانسیل گرانشی ۳۰J دارد.» اگرچه چنین جمله‌هایی هم اغلب قابل قبول‌اند، ولی همواره باید به خاطر داشته باشید که انرژی پتانسیل در واقع به یک دستگاه نسبت داده می‌شود (در اینجا دستگاه سیب- کرهٔ زمین). همچنین به خاطر داشته باشید که اختصاص دادن یک مقدار انرژی پتانسیل خاص، مثلاً در اینجا ۳۰J، به یک جسم یا حتی یک دستگاه *فقط* در صورتی مفهوم دارد که مقدار انرژی پتانسیل مرجع مشخص شده باشد. مسئلهٔ نمونهٔ ۸-۲ مثالی از این دست است.

**مسئلهٔ نمونه ۸-۲**

میمونی به جرم ۲/۰kg از شاخهٔ درختی به بلندی ۵/۰m از سطح زمین، آویزان است (شکل ۸-۶).

(الف) اگر نقطهٔ مرجع $y = ۰$ را (۱) در سطح زمین، (۲) در کف بالکنی که ۳/۰m بالای سطح زمین است، (۳) در روی شاخه، و (۴) ۱/۰m بالاتر از شاخه بگیریم، انرژی پتانسیل گرانشی $U$ دستگاه میمون- کرهٔ زمین چقدر است؟ انرژی پتانسیل گرانشی را در $y = ۰$، برابر با صفر بگیرید.

**نکتهٔ کلیدی** چون در همهٔ وضعیتها نقطهٔ مرجع را در $y = ۰$ انتخاب کرده‌ایم، بنابراین، می‌توانیم انرژی پتانسیل گرانشی $U$

دستگاه را نسبت به *این نقطه* مرجع با استفاده از معادلهٔ ۸-۹ محاسبه کنیم.

***محاسبه‌ها:*** برای انتخاب (۱)، میمون در $y = ۵/۰\ \text{m}$ است و داریم

$$U = mgy = (۲/۰\text{kg})(۹/۸\text{m/s}^۲)(۵/۰\text{m}) = ۹۸\,\text{J}$$ (پاسخ)

و برای انتخابهای دیگر، مقدارهای U چنین می‌شوند

$$(۲)\ U = mgy = mg(۲/۰\text{m}) = ۳۹\,\text{J}$$

$$(۳)\ U = mgy = mg(۰) = ۰\,\text{J}$$

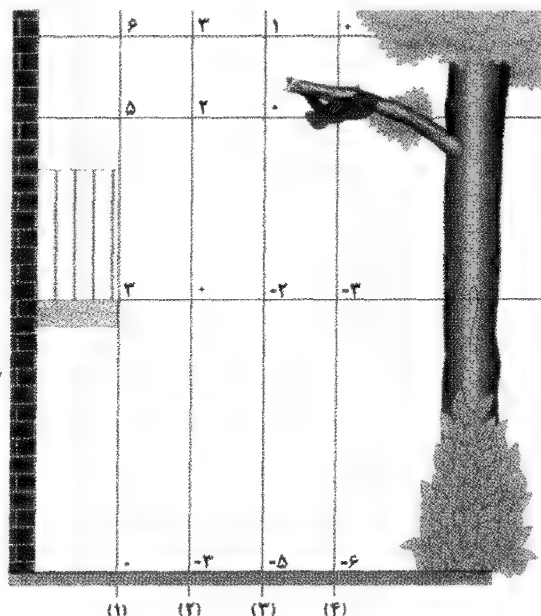
$$(۴)\ U = mgy = mg(-۱/۰\text{m}) = -۱۹/۶\text{J} \approx -۲۰\text{J}$$ (پاسخ)

(ب) میمون به زمین می‌افتد. تغییر $\Delta U$ انرژی پتانسیل دستگاه میمون کرهٔ زمین بر اثر این سقوط، برای هر یک از چهار انتخاب نقطهٔ مرجع چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** تغییر در انرژی پتانسیل به انتخاب نقطهٔ مرجع برای $y = ۰$ بستگی ندارد؛ بلکه، به تغییر در ارتفاع $\Delta y$ بستگی دارد.

***محاسبه:*** برای هر چهار وضعیت، $\Delta y = -۵/۰\text{m}$ است. بنابراین، برای هر چهار انتخاب، معادلهٔ ۸-۷ چنین به دست می‌دهد

$$U = mg\,\Delta y = (۲/۰\text{kg})(۹/۸\text{m/s}^۲)(-۵/۰\text{m}) = -۹۸\,\text{J}$$ (پاسخ)




**شکل ۸-۶** چهار انتخاب برای نقطهٔ مرجع $y = ۰$. هر محور $y$ برحسب یکای متر نشانه‌گذاری شده است. مقدار انرژی پتانسیل $U$ دستگاه میمون- کرهٔ زمین به انتخاب مرجع بستگی دارد. ولی اگر مثلاً میمون بر اثر افتادن حرکت کند، تغییر انرژی پتانسیل $\Delta U$ دستگاه به انتخاب مرجع بستگی ندارد.

## ۸-۵ پایستگی انرژی مکانیکی

**انرژی مکانیکی** $E_{\text{mec}}$ یک دستگاه برابر است با مجموع انرژی پتانسیل $U$ و انرژی جنبشی $K$ جسمهای درون آن

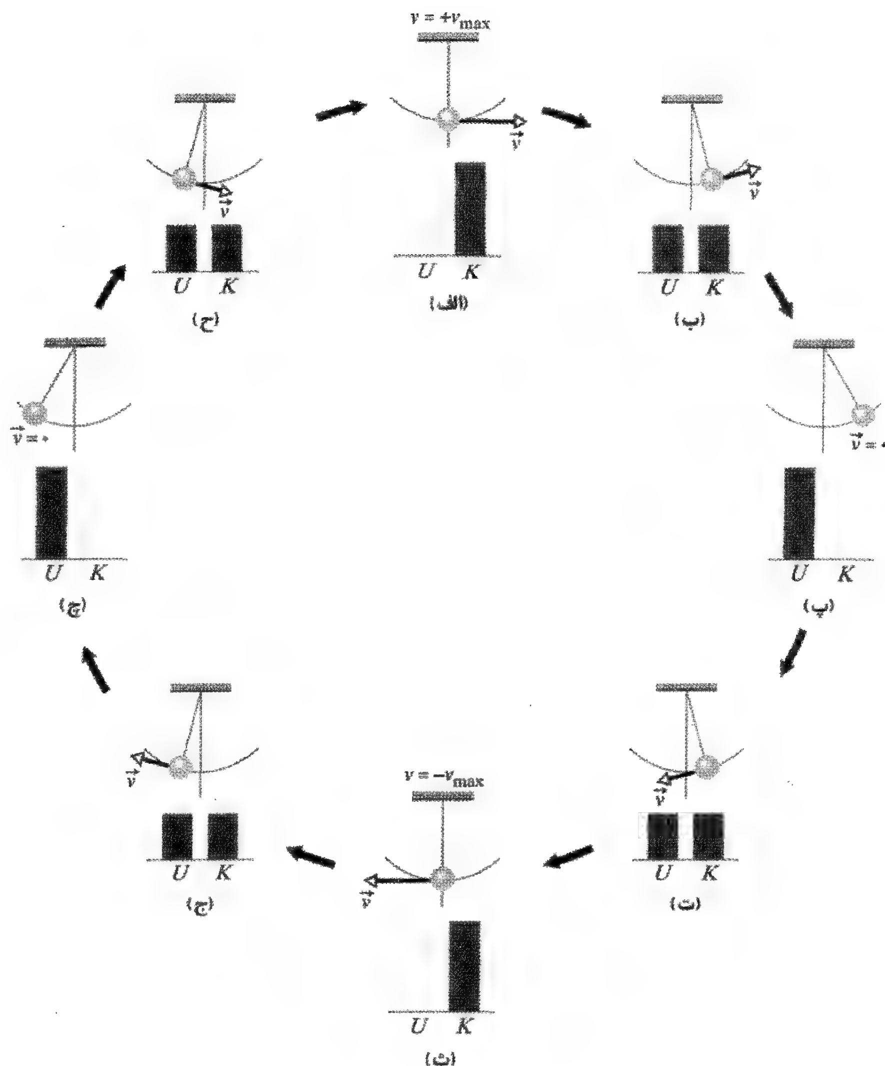
$$E_{\text{mec}} = K + U \quad \text{(انرژی مکانیکی)} \quad (۸\text{-}۱۲)$$

در این بخش، بررسی می‌کنیم وقتی که فقط نیروهای پایستار باعث تبدیل انرژی در دستگاه شوند- یعنی وقتی که نیروهای اصطکاک و کششی روی جسمهای داخل دستگاه اثر نکنند- برای انرژی مکانیکی چه رخ می‌دهد. همچنین، فرض می‌کنیم که دستگاه نسبت به محیط اطرافش *منزوی* است: به این معنی که هیچ *نیروی خارجی* از جسمی خارج از دستگاه باعث تغییر انرژی در دستگاه نمی‌شود.

وقتی نیروی پایستار روی جسمی داخل دستگاه کار انجام می‌دهد، این نیرو انرژی را بین انرژی جنبشی $K$ جسم و انرژی پتانسیل $U$ دستگاه مبادله می‌کند. با استفاده از معادلهٔ ۷-۱۰، تغییر $\Delta K$ انرژی جنبشی چنین می‌شود



در زمانهای قدیم، بومیان الاسکایی توسط پتو به بالا پرتاب می‌شدند تا بتوانند بر فراز یک دشت تخت، مسافتهای دورتر را مشاهده کنند. امروزه این کار را فقط برای تفریح انجام می‌دهند. در حین بالا رفتن بچه‌ای که در عکس نشان داده شده است، انرژی از انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل گرانشی تبدیل می‌شود. وقتی تبدیل انرژی به طور کامل انجام شود، ارتفاع بیشینه به دست می‌آید. سپس در هنگام پایین آمدن، تبدیل انرژی وارونه می‌شود.




**شکل ۸-۷** آونگی که جرم آن در وزنهٔ متصل به انتهای آن متمرکز شده است نوسان می‌کند. یک چرخهٔ کامل حرکت، در شکل نشان داده شده است. در حین این چرخه، مقدارهای انرژیهای پتانسیل و جنبشی دستگاه آونگ- کرهٔ زمین با بالا و پایین رفتن وزنهٔ آونگ تغییر می‌کنند، ولی انرژی مکانیک $E_{mec}$ دستگاه ثابت باقی می‌ماند. انرژی $E_{mec}$ را می‌توان به صورت مبادلهٔ انرژی به صورتهای انرژی جنبشی و پتانسیل توصیف کرد. در مرحله‌های (الف) و (ث)، کلّ انرژی، انرژی جنبشی است. در آن هنگام وزنه بیشترین تندی را دارد و در پایینترین نقطهٔ مسیر واقع است. در مرحله‌های (پ) و (چ)، کلّ انرژی، انرژی پتانسیل است. در آن هنگام تندی وزنه صفر است و در بالاترین نقطهٔ مسیر قرار دارد. در مرحله‌های (ب)، (ت)، (ج)، و (ح)، نیمی از انرژی، به صورت انرژی جنبشی و نیمی دیگر، انرژی پتانسیل است. اگر در نقطهٔ اتصال آونگ با سقف اصطکاک وجود داشته باشد، یا بر حرکت آونگ نیروی کششی ناشی از هوا اثر کند، آنگاه $E_{mec}$ پایسته نخواهد بود و سرانجام آونگ متوقف خواهد شد.

$$\Delta K = W \qquad (۸-۱۳)$$

و از معادلهٔ ۸-۱، تغییر $\Delta U$ انرژی پتانسیل برابر است با

$$\Delta U = -W \qquad (۸-۱۴)$$

از ترکیب معادله‌های ۸-۱۳ و ۸-۱۴، به دست می‌آوریم

$$\Delta K = -\Delta U \qquad (۸-۱۵)$$

که به این معناست که هرگاه یکی از این انرژیها افزایش یابد، انرژی دیگر دقیقاً به همان میزان کاهش می‌یابد.

معادلهٔ ۸-۱۵ را می‌توانیم چنین بازنویسی کنیم

$$K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1) \qquad (۸-۱۶)$$

که شاخصهای پایین اشاره به دو لحظهٔ مختلف و بنابراین دو پیکربندی مختلف جسمها در دستگاه دارند. معادلهٔ ۸-۱۶ را می‌توانیم چنین مرتب کنیم

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \quad \text{(پایستگی انرژی مکانیکی)} \qquad (۸-۱۷)$$

این معادله حاکی از آن است که

$$\left(\text{مجموع } K \text{ و } U \text{ برای هر حالت دیگر دستگاه}\right) = \left(\text{مجموع } K \text{ و } U \text{ برای هر حالت دستگاه}\right)$$

هرگاه دستگاهی منزوی باشد و تنها نیروهای پایستار بر جسمهای داخل دستگاه اثر کند. به عبارت دیگر

> ☞ در یک دستگاه منزوی که فقط نیروهای پایستار باعث تغییرات انرژی می‌شوند، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل می‌توانند تغییر کنند، ولی مجموع آنها، یعنی انرژی مکانیکی $E_{mec}$ دستگاه، نمی‌تواند تغییر کند.

این نتیجه، **اصل پایستگی انرژی مکانیکی** نامیده می‌شود. (اکنون می‌توانید به دلیل نامگذاری نیروهای *پایستار* پی ببرید.) با استفاده از معادلهٔ ۸-۱۵، این اصل را می‌توانیم به شکل دیگری هم بنویسیم

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0 \qquad (۸-۱۸)$$

اصل پایستگی انرژی مکانیکی به ما این امکان را می دهد تا مسئله‌هایی را که حل آنها فقط با استفاده از قانونهای نیوتون واقعاً دشوار هستند، حل کنیم:

> هرگاه انرژی مکانیکی یک دستگاه پایسته باشد، می‌توانیم مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در یک لحظه را به مجموع این دو انرژی در لحظه‌ای دیگر مربوط کنیم، *بی آنکه حرکت میانی را در نظر بگیریم یا کار انجام شده توسط نیروهای مربوط را محاسبه کنیم.*

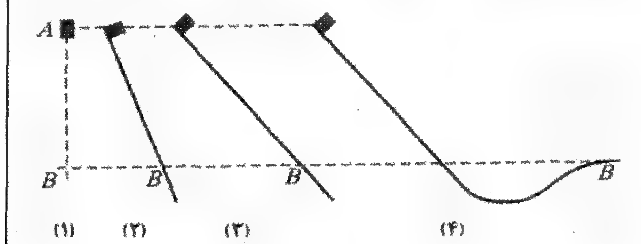
شکل ۸-۷ نمونه‌ای از کاربرد اصل پایستگی انرژی را نشان می‌دهد: وقتی آونگ نوسان کند، انرژی دستگاه آونگ- کرهٔ زمین بین انرژی جنبشی $K$ و انرژی پتانسیل گرانشی $U$ مبادله می‌شود، ولی مجموع $K+U$ ثابت می‌ماند. اگر انرژی پتانسیل گرانشی وزنهٔ آونگ در بالاترین نقطه‌اش (شکل ۸-۷ پ) معلوم باشد، آنگاه معادلهٔ ۸-۱۷ انرژی جنبشی وزنه را در پایینترین نقطه (شکل ۸-۷ ث) به دست می‌دهد.

برای مثال، فرض کنیم پایینترین نقطهٔ مسیر را به عنوان نقطهٔ مرجع، با انرژی پتانسیل گرانشی $U_۲=۰$ ، انتخاب کنیم. سپس، فرض می‌کنیم که انرژی پتانسیل در بالاترین نقطه نسبت به نقطهٔ مرجع برابر $U_۱=۲۰\,\mathrm{J}$ باشد، چون وزنه در بالاترین نقطه‌اش به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود، انرژی جنبشی در آنجا برابر $K_۱=۰$ است. با قرار دادن این مقدارها در معادلهٔ ۸-۱۷، انرژی جنبشی $K_۲$ را در پایینترین نقطه به دست می‌آوریم:

$$K_۲+۰=۰+۲۰\,\mathrm{J} \quad \text{یا} \quad K_۲=۲۰\,\mathrm{J}$$

توجه کنید که این نتیجه را بدون در نظر گرفتن حرکت میان بالاترین و پایینترین نقطه‌ها (از قبیل وضعیت شکل ۸-۷ ت) و بدون محاسبه کار انجام شده توسط نیروهای مؤثر در حرکت به دست آوریم.

> ***نکتهٔ وارسی ۳*** شکل، چهار وضعیت را نشان می‌دهد: در یکی قطعه‌ای که در ابتدا ساکن است سقوط می‌کند و در سه تای دیگر قطعه روی سطحهای شیبدار بدون اصطکاکی رو به پایین می‌لغزند. (الف) این وضعیتها را بنا بر انرژی جنبشی قطعه در نقطهٔ B، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید. (ب) آنها را بنا بر تندی قطعه در نقطهٔ B از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.




## مسئلهٔ نمونهٔ ۸-۳

در شکل ۸-۸ ، بچه‌ای به جرم $m$ از حالت سکون در بالای یک سرسرهٔ آبی به ارتفاع $h=۸/۵\,\mathrm{m}$ از کف سرسره، رو به پایین می‌لغزد. با این فرض که به دلیل وجود آب در مسیر، لغزش بدون اصطکاک باشد، تندی بچه در پایین سرسره چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) چون زاویهٔ شیب سرسره را نمی‌دانیم، تندی بچه در پایین سرسره را نمی‌توانیم با استفاده از شتاب او در امتداد مسیر لغزش، آن‌گونه که در فصلهای پیشین انجام دادیم، به دست آوریم. اما، چون تندی به انرژی جنبشی مربوط است، شاید بتوانیم با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی، تندی را به دست آوریم. در این صورت دیگر نیازی به دانستن زاویهٔ شیب سرسره نخواهیم داشت. (۲) انرژی مکانیکی یک دستگاه پایسته است، *اگر* آن دستگاه منزوی باشد و *اگر* فقط نیروهای پایستار باعث مبادلهٔ انرژی به داخل آن شوند. حال این موارد را بررسی کنیم.

*نیروها:* دو نیرو بر بچه اثر می‌کنند. یکی *نیروی گرانشی*، که یک نیروی پایستار است و روی او کار انجام می‌دهد. دیگری *نیروی عمودی* که از طرف سرسره بر او وارد می‌شود، و به دلیل آنکه راستای آن در هر نقطهٔ مسیر همواره عمود بر راستای حرکت بچه است، کاری انجام نمی‌دهد.

*دستگاه:* چون تنها نیرویی که روی بچه کار انجام می‌دهد، نیروی گرانشی است، دستگاه بچه- کرهٔ زمین را می‌توانیم به عنوان دستگاهی که می‌تواند منزوی در نظر گرفته شود، انتخاب کنیم.

بنابراین، تنها یک نیروی پایستار داریم که در یک دستگاه منزوی کار انجام می‌دهد، و از اینرو *می‌توانیم* اصل پایستگی انرژی مکانیکی را به کار بریم.

***محاسبه‌ها:*** فرض کنید انرژی مکانیکی بچه وقتی در بالای سرسره است برابر $E_{\mathrm{mec},t}$ و وقتی در پایین آن است $E_{\mathrm{mec},b}$ باشد. آنگاه پایستگی انرژی مبین آن است که

$$E_{\mathrm{mec},b}=E_{\mathrm{mec},t} \tag{۸-۱۹}$$

برای نشان دادن هر دو نوع انرژی مکانیکی، داریم

$$K_b+U_b=K_t+U_t \tag{۸-۲۰}$$

یا

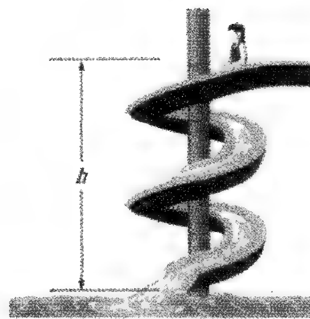
$$\frac{۱}{۲}mv_b^۲+mgy_b=\frac{۱}{۲}mv_t^۲+mgy_t$$

با تقسیم طرفین معادله بر $m$ و مرتب کردن آن به دست می‌آوریم

$$v_b^۲=v_t^۲+۲g(y_t-y_b)$$

که با قرار دادن $v_t=۰$ و $y_t-y_b=h$ به این رابطه می‌رسیم

$$v_b=\sqrt{۲gh}=\sqrt{(۲)(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۸/۵\,\mathrm{m})}$$
$$=۱۳\ \mathrm{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$



**شکل ۸-۸** بچه‌ای از ارتفاع $h$ از یک سرسرهٔ آبی رو به پایین می‌لغزد.

این همان تندی است که اگر بچه به طور قائم $8/5 m$ سقوط می‌کرد به آن می‌رسید. در یک سرسرهٔ واقعی، مقداری نیروی اصطکاک بر بچه وارد می‌شود و او با چنین تندی بالایی به پایین سرسره نمی‌رسد.

***اظهار نظر:*** با اینکه حل این مسئله با استفادهٔ مستقیم از قانونهای نیوتون بسیار دشوار است، ولی با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی، حل آن بسیار ساده‌تر می‌شود. با این حال، اگر بخواهیم زمان رسیدن بچه به پایین سرسره را به دست آوریم، روشهای مبتنی بر انرژی کار ساز نیستند؛ در آن صورت به شکل سرسره نیاز داشتیم و با مسئله دشواری مواجه می‌شویم.

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۲: پایستگی انرژی مکانیکی*

پرسشهای زیر شما را در حل مسئله‌های مربوط به اصل پایستگی انرژی، کمک می‌کند.

*برای چه دستگاهی انرژی مکانیکی پایسته است؟* شما باید بتوانید دستگاه خود را از محیطش جدا کنید. سطح بسته‌ای را چنان در نظر می‌گیریم که هر چه در داخل آن است دستگاه، و هر چه در خارج آن است محیط دستگاه باشد. در مسئله نمونهٔ ۸-۳ دستگاه *بچه + کرهٔ زمین* است؛ در مسئله نمونهٔ ۸-۴ *سرْطناب‌دار + کرهٔ زمین + طناب* دستگاه را تشکیل می‌دهند.

*آیا اصطکاک یا نیروی کششی وجود دارد؟* اگر اصطکاک یا نیروی کششی وجود داشته باشد، انرژی مکانیکی پایسته نیست.

*آیا دستگاه منزوی است؟* اصل پایستگی انرژی فقط برای دستگاههای منزوی برقرار است. این بدین معناست که هیچ *نیروی خارجی* (نیروهایی که توسط جسمهای خارج دستگاه وارد می‌شوند) نباید روی جسمهای داخل دستگاه کار انجام دهد.

*حالتهای ابتدایی و نهایی دستگاه کدام‌اند؟* دستگاه از یک پیکربندی اولیه به پیکر بندی نهایی تغییر می‌یابد. اصل پایستگی انرژی مکانیکی را با بیان اینکه $E_{mec}$ در هر دو پیکربندی مقدار یکسانی دارد، به کار می‌بریم. وضعیت دو پیکربندی باید کاملاً روشن باشد.

## ۸-۶ استفاده از منحنی انرژی پتانسیل

دوباره ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که بخشی از دستگاهی است که یک نیروی پایستار به آن اثر می‌کند. این بار فرض می‌کنیم که وقتی یک نیروی پایستار روی ذره کار انجام می‌دهد، حرکت ذره محدود به امتداد محور $x$ است. از نمودار انرژی پتانسیل $U(x)$ دستگاه می‌توانیم دربارهٔ حرکت ذره اطلاعات بیشتری به دست آوریم. اما، پیش از بررسی چنین نمودارهایی، به رابطهٔ دیگری نیاز داریم.

### *یافتن نیرو به روش تحلیلی*

معادلهٔ ۸-۶ نحوهٔ یافتن تغییر انرژی پتانسیل $\Delta U$ میان دو نقطه در یک وضعیت یک بعدی را در صورتی که نیروی $F(x)$ معلوم باشد به دست می‌دهد. حال می‌خواهیم از روش دیگری استفاده کنیم، به این ترتیب که، با در دست داشتن تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ می‌خواهیم نیرو را پیدا کنیم.

برای حرکت یک بعدی، کار $W$ انجام شده توسط نیرویی که بر یک ذره در طی پیمودن مسافت $\Delta x$ وارد می‌شود برابر با $F(x)\Delta x$ است. پس می‌توانیم معادلهٔ ۸-۱ را چنین بنویسیم

$$\Delta U(x) = -W = -F(x)\Delta x \qquad (۸-۲۱)$$

با حل آن برای $F(x)$ و نوشتن آن به صورت حد دیفرانسیلی، خواهیم داشت

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad \text{(حرکت یک بعدی)} \qquad (۸-۲۲)$$

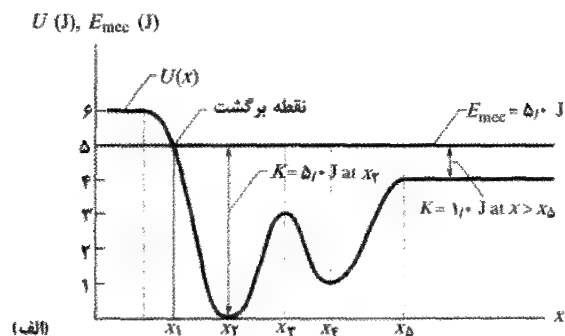
که همان رابطه‌ای است که به دنبال آن می‌گشتیم.

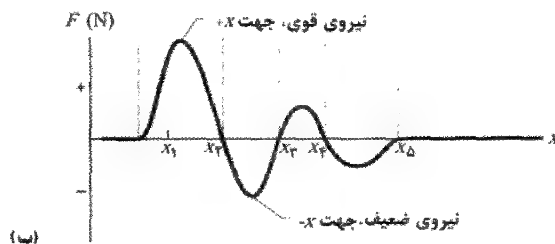
این نتیجه را می‌توانیم با قرار دادن $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ که تابع انرژی پتانسیل کشسانی برای یک فنر است، وارسی کنیم. آنگاه با استفاده از معادلهٔ ۸-۲۲، همان‌گونه که انتظار داریم، معادله $F(x) = -kx$ به دست می‌آید که بیان کننده قانون هوک است. به همین ترتیب رابطهٔ $U(x) = mgx$، یعنی تابع انرژی پتانسیل گرانشی مربوط به دستگاه ذره- کرهٔ زمین، را که در آن $x$ ارتفاع ذره‌ای به جرم $m$ در بالای سطح زمین است، در معادلهٔ ۸-۲۲ قرار می‌دهیم. آنگاه به رابطهٔ $F = -mg$ می‌رسیم که همان نیروی گرانشی وارد بر یک ذره است.

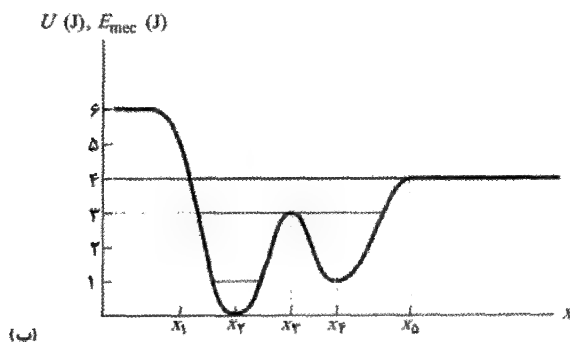
### *منحنی انرژی پتانسیل*

شکل ۸-۹ الف نمودار تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ برای دستگاهی است که در آن ذره‌ای دارای حرکت یک بعدی است و نیروی پایستار $F(x)$ روی ذره کار انجام می‌دهد. به سادگی می‌توانیم $F(x)$ را (به روش ترسیمی) با یافتن شیب منحنی $U(x)$ در نقطه‌های مختلف، به دست آوریم. (معادلهٔ ۸-۲۲ نشان می‌دهد که $F(x)$، برابر شیب منحنی $U(x)$ با علامت منفی است.) شکل

۸-۹ ب نشان‌دهندهٔ نمودار $F(x)$ است که به همین روش به دست آمده است.




**شکل ۸-۹** (الف) نمودار $U(x)$، تابع انرژی پتانسیل دستگاهی شامل ذره‌ای که حرکتش محدود به امتداد محور $x$ است. هیچ اصطکاکی وجود ندارد و از اینرو انرژی مکانیکی پایسته است. (ب) نمودار تغییرات نیروی $F(x)$ مؤثر بر ذره که با یافتن شیب نمودار انرژی پتانسیل در نقطه‌های مختلف به دست می‌آید. (پ) نمودار تغییرات $U(x)$ قسمت (الف) با سه مقدار ممکن $E_{mec}$ نشان داده شده است.

## نقطه‌های برگشت

در نبود نیروی ناپایستار، انرژی مکانیکی $E$ دستگاه مقدار ثابتی دارد که با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$U(x)+K(x)=E_{mec} \qquad (۸-۲۳)$$

که در آن $K(x)$ *تابع انرژی جنبشی* ذره در دستگاه است ($K(x)$ انرژی جنبشی را برحسب تابعی از مکان $x$ ذره به دست می‌دهد.) می‌توانیم معادلهٔ ۸-۲۳ را چنین بازنویسی کنیم

$$K(x)=E_{mec}-U(x) \qquad (۸-۲۴)$$

فرض کنید $E_{mec}$ (به خاطر داشته باشد که مقدار ثابتی دارد) برابر ۵/۰J باشد. این مقدار در شکل ۸-۹ الف با خطی افقی که از مقدار ۵/۰J روی محور انرژی می‌گذرد، نشان داده شده است. (در واقع، در آنجا این طور نشان داده شده است).

معادلهٔ ۸-۲۴ چگونگی تعیین انرژی جنبشی $K$ را برای هر مکان $x$ ذره به دست می‌دهد: روی منحنی $U(x)$، $U$ را برای مکان $x$ مورد نظر پیدا و سپس آن را از $E_{mec}$ کم می‌کنیم. مثلاً اگر ذره در نقطه‌ای در سمت راست $x_5$ باشد، آنگاه $K=۱/۰\text{J}$ است. وقتی ذره در مکان $x_2$ باشد، مقدار $K$ بیشترین (۵/۰J) و هرگاه در مکان $x_1$ باشد، $K$ کمترین (۰J) مقدار را دارد.

چون $K$ هرگز نمی‌تواند منفی باشد (زیرا $v^2$ همواره مثبت است)، ذره هرگز نمی‌تواند رو به سمت چپ $x_1$، که در آنجا $E_{mec}-U$ منفی است، حرکت کند. ولی، وقتی ذره از $x_2$ به سمت $x_1$ حرکت کند، $K$ کاهش می‌یابد (حرکت ذره آهسته می‌شود) تا این که در $x_1$، $K=۰$ می‌شود (جایی که ذره در آنجا متوقف می‌شود).

توجه کنید که وقتی ذره به $x_1$ می‌رسد، نیروی وارد بر ذره، که با معادلهٔ ۸-۲۲ داده می‌شود، مثبت است (زیرا شیب $dU/dx$ منفی است). این بدین معناست که ذره در $x_1$ باقی نمی‌ماند، بلکه شروع به حرکت به سمت راست، یعنی در خلاف جهت حرکت قبلی می کند. از اینرو، $x_1$ یک **نقطهٔ برگشت** است، مکانی که در آنجا $K=۰$ است (چون $U=E$ است) و ذره تغییر جهت می‌دهد. هیچ نقطهٔ برگشتی (که در آنجا $K=۰$ است) در طرف راست منحنی وجود ندارد. وقتی ذره رو به سمت راست حرکت کند، حرکت آن به طور نامحدودی ادامه پیدا می‌کند.

## نقطه‌های تعادل

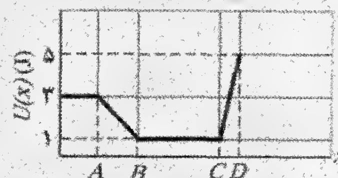
شکل ۸-۹ پ سه مقدار مختلف $E_{mec}$ را روی تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ شکل ۸-۹ الف نشان می‌دهد. حال می‌خواهیم ببینیم که این مقدارها چگونه وضعیت را تغییر می‌دهند. اگر $E_{mec}=۴/۰\text{J}$ باشد (خط بالایی)، نقطهٔ برگشت از $x_1$ به نقطه‌ای میان $x_1$ و $x_2$ منتقل می‌شود. همچنین، در هر نقطه‌ای در سمت راست $x_5$، انرژی مکانیکی دستگاه برابر با انرژی پتانسیل آن است؛ بنابراین، ذره انرژی جنبشی ندارد و (بنا بر معادلهٔ ۸-۲۲) هیچ نیرویی بر آن وارد نمی‌شود. از اینرو ذره باید ساکن باشد. به ذره‌ای که در چنین حالتی قرار دارد گفته می‌شود در حال **تعادل بی‌تفاوت** است. (تیله‌ای که روی میزی افقی قرار دارد در چنین حالتی است).

اگر $E_{mec}=۳/۰\text{J}$ باشد (خط میانی)، دو نقطهٔ برگشت وجود دارد: یکی میان $x_1$ و $x_2$، و دیگری میان $x_4$ و $x_5$. به علاوه، $x_3$ نقطه‌ای است که در آن $K=۰$ است. اگر ذره‌ای دقیقاً در این نقطه قرار گرفته باشد، نیروی وارد بر آن صفر است، و ذره به حالت سکون باقی می‌ماند. ولی اگر ذره به میزان حتی ناچیزی به یک طرف جابه‌جا شود، نیرویی غیر صفر آن را

به همان طرف هل می‌دهد و ذره به حرکت ادامه می‌دهد. به ذره‌ای که در چنین حالتی قرار دارد گفته می‌شود که در **تعادل ناپایدار** قرار دارد. (تیله‌ای که بر بالای یک توپ بولینگ در حال تعادل است مثالی از این دست است).

حال رفتار ذره را در صورتی که $E_{mec} = 1.0\,J$ باشد (خط پایینی) در نظر می‌گیریم. اگر ذره را در $x_4$ قرار دهیم، در همانجا می‌ماند و ذره نمی‌تواند به خودی خود به سمت چپ یا راست حرکت کند، چرا که انجام چنین حرکتی به انرژی جنبشی منفی نیاز دارد. اگر ذره را کمی به سمت چپ یا راست هل دهیم، نیروی بازگرداننده‌ای آن را به سمت $x_4$ باز می‌گرداند. به ذره‌ای که در چنین حالتی قرار دارد گفته می‌شود که در **تعادل پایدار** است. (تیله‌ای که در کف یک کاسهٔ نیم کروی قرار دارد مثالی از این دست است.) اگر ذره را در *چاه پتانسیل* فنجانی شکل به مرکز $x_2$ قرار دهیم، ذره میان دو نقطهٔ برگشت قرار دارد و هنوز می‌تواند کمی، ولی در محدودهٔ تا $x_1$ یا تا $x_3$ حرکت کند.

**نکتهٔ وارسی ۴** شکل، تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ را برای دستگاهی که در آن ذره در حرکت یک بعدی است نشان می‌دهد. (الف) ناحیه‌های $AB$، $BC$، و $CD$ را با توجه به بزرگی نیروی وارد بر ذره، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید. (ب) هنگامی که ذره در ناحیهٔ $AB$ است، جهت نیروی وارد بر آن چگونه است؟




## مسئلهٔ نمونهٔ ۸-۴

ذره‌ای به جرم $2000\,kg$ در راستای محور $x$ دارای حرکت یک بعدی است در حالی که یک نیروی پایستار در امتداد آن محور بر آن وارد می‌شود. انرژی پتانسیلی $U(x)$ مربوط به این نیرو در شکل ۸-۱۰ الف رسم شده است. یعنی، اگر ذره در هر مکانی بین $x = 0$ و $x = 7.00\,m$ قرار گیرد دارای مقدار نشان داده شدهٔ $U$ است. در $x = 6.5\,m$ سرعت ذره برابر $v_0 = (-4.00\,m/s)\hat{i}$ است. (الف) از شکل ۸-۱۰ الف، تندی ذره را در $x_1 = 4.5\,m$ حساب کنید.

**نکته‌های کلیدی** (۱) انرژی جنبشی ذره با معادلهٔ ۷-۱ ($K = \frac{1}{2}mv^2$) داده شده است. (۲) چون فقط یک نیروی پایستار بر ذره وارد می‌شود، انرژی مکانیکی $E_{mec}(= K + U)$ در طی حرکت پایسته است. (۳) بنابراین، روی نمودار $U(x)$ مانند شکل ۸-۱۰ الف، انرژی جنبشی برابر با تفاوت بین $E_{mec}$ و $U$ است.

***محاسبه‌ها:*** در $x = 6.5\,m$ ، ذره دارای انرژی جنبشی زیر است

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(2.00\,kg)(4.00\,m/s)^2$$
$$= 16.0\,J$$

چون انرژی پتانسیل در اینجا برابر $U = 0$ است، پس انرژی مکانیکی برابر است با

$$E_{mec} = K_0 + U_0 = 16.0\,J + 0 = 16.0\,J$$

این مقدار برابر $E_{mec}$ در شکل ۸-۱۰ الف به صورت یک خط افقی رسم شده است. از این شکل مشاهده می‌کنیم که در $x = 4.5\,m$ ، انرژی پتانسیل برابر $U_1 = 7.0\,J$ است. انرژی جنبشی $K_1$ برابر با تفاوت بین $E_{mec}$ و $U_1$ است:

$$K_1 = K_{mec} - U_1 = 16.0\,J - 7.0\,J = 9.0\,J$$

چون $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ است پس در می‌یابیم که

$$v_1 = 3.0\,m/s \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) نقطهٔ برگشت ذره در کجا واقع است؟

**نکتهٔ کلیدی** نقطهٔ برگشت جایی است که در آنجا نیرو موجب توقف لحظه‌ای ذره می‌شود و سپس جهت حرکت آن را معکوس می‌کند. یعنی، در آنجا به طور لحظه‌ای برای ذره $v = 0$ و در نتیجه $K = 0$ است.

***محاسبه‌ها:*** چون $K$ اختلاف بین $E_{mec}$ و $U$ است، نقطه‌ای در شکل ۸-۱۰ الف را می‌خواهیم که نمودار $U$ افزایش یابد و خط افقی $E_{mec}$ را در شکل ۸-۱۰ ب قطع کند. چون نمودار $U$ در شکل ۸-۱۰ ب افقی است می‌توانیم از مثلث‌های قائم الزاویه نشان داده شده استفاده کنیم و نسبت اضلاع را بنویسیم

$$\frac{16 - 7.0}{d} = \frac{20 - 7.0}{4.0 - 1.0}$$

که $d = 2.08\,m$ را به دست می‌دهد. بنابراین، نقطهٔ برگشت برابر است با

$$x = 4.0\,m - d = 1.9\,m \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) وقتی ذره در محدودهٔ $1.9\,m < x < 4.0\,m$ قرار دارد نیروی وارد بر آن را حساب کنید.

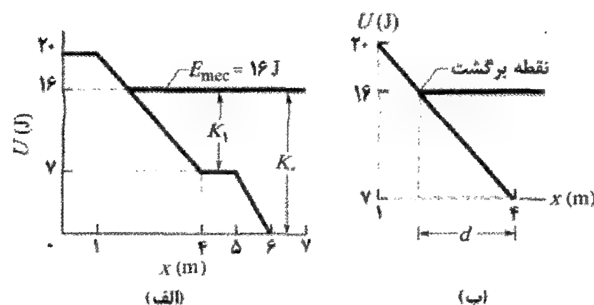
**نکتهٔ کلیدی** نیرو با معادلهٔ ۸-۲۲ $(F(x) = -dU(x)/dx)$ داده شده است. این معادله بیانگر این است که نیرو برابر با شیب نمودار $U(x)$ با علامت منفی است.

***محاسبه‌ها:*** برای نمودار شکل ۸-۱۰ ب مشاهده می‌کنیم که برای گسترهٔ $1.0\,m < x < 4.0\,m$ نیرو برابر است با

$$F = -\frac{20\,J - 7.0\,J}{1.0\,m - 4.0\,m} = 4.3\,N \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، بزرگی نیرو برابر $4.3\,N$ و در جهت مثبت محور $x$ است. این نتیجه با این واقعیت که ذره در ابتدا به سمت چپ

حرکت می‌کند و توسط نیرو متوقف و سپس به سمت راست رانده شده است، سازگاری دارد.




**شکل ۸-۱۰** (الف) نمودار انرژی پتانسیل $U$ برحسب $x$. (ب) قسمتی از نمودار که برای به دست آوردن محل برگشتن ذره از آن استفاده شده است.

## ۸-۷ کار انجام شده توسط نیرویی خارجی روی یک دستگاه

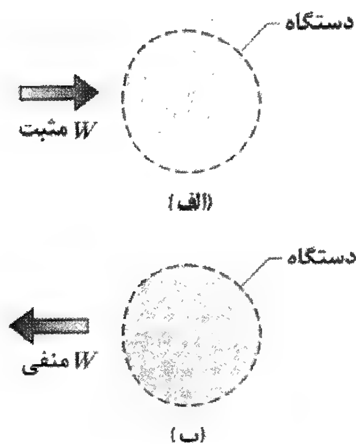
در فصل ۷، کار را به صورت انرژی داده شده به یک جسم یا گرفته شده از آن توسط نیرویی که بر جسم وارد می‌شود، تعریف کردیم. اکنون این تعریف را می‌توانیم برای نیروی خارجی وارد بر دستگاهی از جسمها تعمیم دهیم.

> کار، انرژی داده شده به یک دستگاه یا گرفته شده از آن توسط نیروی خارجی وارد بر آن دستگاه است.

شکل ۸-۱۱ الف کار مثبت (دادن انرژی «*به*» دستگاه)، و شکل ۸-۱۱ ب کار منفی (گرفتن انرژی «*از*» دستگاه) را نشان می‌دهد. هرگاه بیش از یک نیرو بر دستگاه وارد شود، *کار خالص* آنها برابر انرژی داده شده به آن دستگاه یا گرفته شده از آن است.

این انتقالهای انرژی شبیه انتقال پول به یک حساب بانکی و یا از یک حساب بانکی به حساب بانکی دیگر است. اگر دستگاهی شامل یک تک ذره یا جسمی ذره مانند، مشابه فصل ۷، باشد کار انجام شده توسط نیرو روی دستگاه تنها می‌تواند انرژی جنبشی دستگاه را تغییر دهد. رابطهٔ انرژی برای چنین انتقالهایی توسط قضیهٔ کار - انرژی جنبشی، معادلهٔ ۷-۱۰ ($\Delta K = W$) بیان می‌شود؛ یعنی تک ذره فقط یک حساب انرژی به نام انرژی جنبشی دارد. نیروهای خارجی می‌توانند انرژی را به داخل یا خارج این حساب منتقل کنند. اما اگر دستگاه پیچیده‌تر باشد، نیروی خارجی می‌تواند سایر شکلهای انرژی (از قبیل انرژی پتانسیل) را نیز تغییر دهد؛ یعنی دستگاه پیچیده‌تر می‌تواند چند حساب انرژی داشته باشد.

اکنون، رابطهٔ انرژی را برای چنین دستگاه‌هایی بر مبنای دو حالت اصلی، یکی حالت بدون اصطکاک و دیگری حالت با اصطکاک به دست می‌آوریم.




**شکل ۸-۱۱** (الف) کار مثبت $W$ انجام شده روی یک دستگاه اختیاری به معنای دادن انرژی به دستگاه است. (ب) کار منفی انجام شده $W$ به معنای گرفتن انرژی از دستگاه است.

### *حالت بدون اصطکاک*

در مسابقهٔ پرتاب توپ بولینگ، بازیکن نخست دولا می‌شود و دستها را به صورت فنجان زیر توپ روی زمین قرار می‌دهد. سپس، در حین بالا کشیدن دستها، به سرعت بدن خود را راست می‌کند و دستهایش را نیز به‌سرعت بالا می‌کشد و توپ را به بالا در حدود سطح صورت خود پرتاب می‌کند. در حین حرکت رو به بالای بازیکن، نیروی وارد شده از بازیکن به توپ به وضوح کار انجام می‌دهد؛ یعنی نیرویی خارجی انرژی را منتقل می‌کند، ولی به چه دستگاهی؟

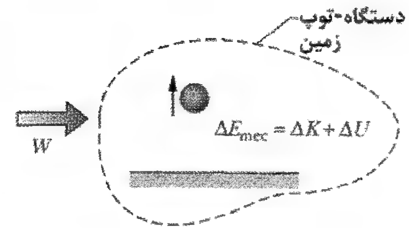
برای پاسخ به این پرسش، بررسی می‌کنیم که کدامیک از انرژیها تغییر می‌کنند. یک تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی توپ وجود دارد، و چون توپ از زمین فاصله می‌گیرد یک تغییر $\Delta U$ در انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه توپ- زمین نیز وجود دارد. برای آنکه هر دو متغیر را به حساب آوریم، لازم است که دستگاه توپ- زمین را در نظر بگیریم. بنابراین، نیروی بازیکن نیرویی خارجی است که روی دستگاه کار انجام می‌دهد، و این کار به قرار زیر است

$$W = \Delta K + \Delta U \qquad (۸\text{-}۲۵)$$

یا

$$W = \Delta E_{mec} \quad \text{(کار انجام شده روی دستگاه در نبود اصطکاک)} \qquad (۸\text{-}۲۶)$$

که در آن $\Delta E_{mec}$ تغییر در انرژی مکانیکی دستگاه است. این دو معادله، که در شکل ۸-۱۲ نمایش داده شده‌اند، برای بیان کار انجام شده روی دستگاه توسط یک نیروی خارجی در حالت بدون اصطکاک هم ارزند.




**شکل ۸-۱۲** کار مثبت $W$ که روی دستگاهی شامل توپ بولینگ و زمین انجام شده است، باعث تغییر $\Delta E_{mec}$ انرژی مکانیکی دستگاه، تغییر $\Delta K$ انرژی جنبشی توپ، و تغییر $\Delta U$ انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه می‌شود.

## حالت با اصطکاک

حال مثال شکل ۸-۱۳ الف را در نظر می‌گیریم. نیروی افقیِ و ثابت $\vec{F}$ قطعه را در امتداد محور $x$ می‌کشد و پس از طی یک جابه‌جایی به بزرگی $d$، سرعت قطعه از $\vec{v}_0$ به $\vec{v}$ افزایش می‌یابد. در حین حرکت، نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$ از طرف کف بر قطعه وارد می‌شود. ابتدا قطعه را به عنوان دستگاه انتخاب کنیم و قانون دوم نیوتون را برای آن به کار می‌بریم. این قانون را می‌توانیم برای مؤلفه‌های در امتداد محور $x$ ($F_{net,x} = ma_x$) چنین بنویسیم

$$F - f_k = ma \qquad (۸-۲۷)$$

چون نیروها ثابت‌اند، شتاب $\vec{a}$ نیز ثابت است. بنابراین، می‌توانیم از معادلهٔ ۲-۱۶ استفاده کنیم و بنویسیم

$$v^2 = v_0^2 + 2ad$$

با حل این معادله برای $a$، و قرار دادن نتیجهٔ آن در معادلهٔ ۸-۲۷، و مرتب کردن آن داریم

$$Fd = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + f_k d \qquad (۸-۲۸)$$

که چون برای قطعه $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta K$ است، خواهیم داشت

$$Fd = \Delta K + f_k d \qquad (۸-۲۹)$$

در حالتی کلی‌تر (مثلاً حالتی که قطعه رو به بالای یک سطح شیبدار حرکت می‌کند)، انرژی پتانسیل هم می‌تواند تغییر کند. برای آنکه چنین تغییر ممکنی را در نظر بگیریم، معادلهٔ ۸-۲۹ را چنین تعمیم می‌دهیم

$$Fd = \Delta E_{mec} + f_k d \qquad (۸-۳۰)$$

بنا بر تجربه می‌دانیم که قطعه و بخشی از کف که قطعه روی آن می‌لغزد، در هنگام لغزش قطعه گرم می‌شوند. همان گونه که در فصل ۱۸ خواهیم دید، دمای یک جسم به انرژی گرمایی $\Delta E_{th}$ جسم بستگی دارد (یعنی به انرژی وابسته به حرکت تصادفی اتمها و مولکولها در جسم). در اینجا، انرژی گرمایی قطعه و کف به دو دلیل افزایش می‌یابد: (۱) وجود اصطکاک میان آنها و (۲) وجود لغزش. به یاد آورید که اصطکاک ناشی از جوش سرد میان دو سطح است. وقتی قطعه‌ای روی کف می‌لغزد، لغزش به طور مکرر باعث پاره شدن و تشکیل مجدد جوشها میان قطعه و کف می‌شود که نتیجهٔ آن گرمتر شدن قطعه و کف است. بنابراین، لغزش انرژی گرمایی $E_{th}$ آنها را افزایش می‌دهد.

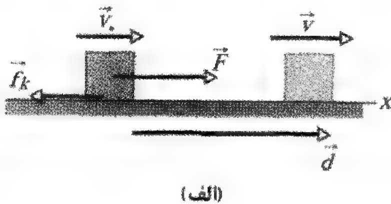
از آزمایش در می‌یابیم که افزایش $\Delta E_{th}$ انرژی گرمایی برابر با حاصلضرب بزرگیهای $f_k$ و $d$ است:

$$\Delta E_{th} = f_k d \qquad \text{(افزایش انرژی گرمایی بر اثر لغزش)} \qquad (۸-۳۱)$$

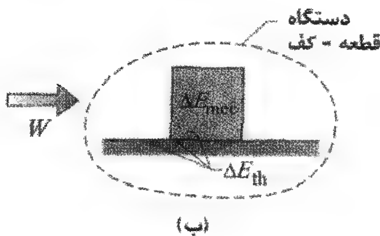
بنابراین معادلهٔ ۸-۳۰ را می‌توانیم چنین بازنویسی کنیم

$$Fd = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th} \qquad (۸-۳۲)$$

مقدار $Fd$ کار $W$ انجام شده توسط نیروی خارجی $\vec{F}$ است (انرژی داده شده توسط نیرو)، ولی کار روی کدام دستگاه انجام شده است؟ (انتقال انرژی در کجا صورت گرفته است؟) برای پاسخ دادن به این پرسش، باید ببینیم که کدامیک از انرژیها تغییر می‌کنند. انرژی مکانیکی قطعه، و نیز انرژیهای گرمایی




(الف)




(ب)

**شکل ۸-۱۳** (الف) قطعه‌ای توسط نیروی $\vec{F}$ در حالی که بر آن نیروی اصطکاک جنبشی در خلاف جهت حرکت وارد می‌شود، روی کف کشیده می‌شود. سرعت قطعه در آغاز جابه‌جایی $\vec{d}$ برابر $\vec{v}_0$ و در پایان این جابه‌جایی، برابر $\vec{v}$ است. (ب) کار مثبت $W$ که توسط نیروی $\vec{F}$ بر دستگاه قطعه- کف انجام شده است، باعث تغییر $\Delta E_{mec}$ انرژی مکانیکی قطعه و تغییر $\Delta E_{th}$ انرژی گرمایی قطعه و کف می‌شود.

قطعه و کف تغییر می‌کنند. بنابراین، کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی دستگاه قطعه- کف صورت پذیرفته است. این کار برابر است با

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th} \qquad \text{(کار انجام شده روی دستگاه در حالت با اصطکاک)} \qquad (۸-۳۳)$$

این معادله که در شکل ۸-۱۳ ب نشان داده شده است، رابطهٔ انرژی برای کار انجام شده روی یک دستگاه توسط نیروی خارجی در حالت با اصطکاک است.

✓ **نکتهٔ وارسی ۵** در سه آزمایش، قطعه‌ای توسط یک نیروی افقی خارجی روی کف بدون اصطکاکی، مشابه شکل ۸-۱۳ الف هل داده می‌شود. بزرگی نیروی خارجی $F$ و نتیجهٔ تندی قطعه بر اثر این هل دادن در جدول زیر داده شده است. در هر سه آزمایش، قطعه به اندازهٔ مسافت یکسان $d$ هل داده شده است. این سه آزمایش را با توجه به تغییر انرژی گرمایی قطعه و کف که پس از طی مسافت $d$ حاصل می‌شود، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.

| آزمایش | $F$ | نتیجهٔ تندی قطعه |
|---|---|---|
| الف | ۵/۰N | کاهش می‌یابد |
| ب | ۷/۰N | ثابت باقی می‌ماند |
| پ | ۸/۰N | افزایش می‌یابد |

## مسئلهٔ نمونهٔ ۸-۵

مردمان ماقبل تاریخ جزیرهٔ ایستر[1] صدها مجسمهٔ سنگی عظیم را در معدن سنگ می‌تراشیدند و آنگاه آنها را به جایگاه‌هایی روی جزیره منتقل می‌کردند. اینکه آنها چگونه مجسمه‌ها را تا مسافت ۱۰km بدون استفاده از هیچ وسیلهٔ پیشرفته‌ای حرکت می‌دادند، مورد منازعه است. متحمل‌ترین حدس این است که آنها مجسمه‌ها را روی سورتمه‌هایی چوبی که روی کنده‌های چوبی استوانه‌ای شکلی قرار داشتند می‌گذاشتند و بدین ترتیب آنها را منتقل می‌کردند. در یک نمایش مجدد امروزی، ۲۵ مرد توانستند با همان روش مجسمه‌ای از نوع مجسمه‌های جزیرهٔ ایستر به جرم ۹۰۰۰kg را در مدت ۲min به جایگاهی به فاصلهٔ ۴۵m بر سطح زمین منتقل کنند.

(الف) کار نیروی برایند $\vec{F}$ مردها را که در حین ۴۵m جابه‌جایی مجسمه انجام گرفته است، تخمین بزنید و دستگاهی را که نیرو روی آن کار انجام داده است تعیین کنید.

**نکته‌های کلیدی** (۱) می‌توانیم کار انجام شده را با معادلهٔ ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ محاسبه کنیم. (۲) برای تعیین دستگاهی که کار روی آن انجام شده است باید ببینیم کدام انرژیها تغییر کرده‌اند.

***محاسبه‌ها:*** در معادلهٔ ۷-۷، $d$ مسافت ۴۵m، $F$ بزرگی نیروی برایند وارد بر مجسمه از سوی ۲۵ مرد، و $\phi = ۰°$ است. حال فرض می‌کنیم نیرویی که با آن هر مرد مجسمه را می‌کشد دو برابر وزن او باشد که آن را برای همهٔ مردان مقدار یکسان $mg$ می‌گیریم. بنابراین، بزرگی نیروی برایند $F = (۲۵)(۲mg) = ۵۰\,mg$ است. اگر جرم هر مرد را ۸۰kg تخمین بزنیم، آنگاه معادلهٔ ۷-۷ را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$W = Fd\cos\phi = ۵۰\,mgd\cos\phi$$
$$= (۵۰)(۸۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۴۵\,\text{m})\cos ۰°$$
$$= ۱/۸\times ۱۰^۶\ \text{J} \approx ۲\text{MJ} \qquad \text{(پاسخ)}$$

چون مجسمه حرکت کرده است، یقیناً در حین حرکت یک تغییر انرژی جنبشی $\Delta K$ وجود دارد. به‌سادگی می‌توانیم حدس بزنیم که باید اصطکاک جنبشی قابل ملاحظه‌ای میان سورتمه، کنده‌ها، و زمین وجود داشته باشد که این منجر به تغییر $\Delta E_{th}$ انرژی گرمایی می‌شود. بنابراین، دستگاهی که روی آن کار انجام شده شامل مجسمه، سورتمه، کنده‌ها و زمین است.

(ب) افزایش $\Delta E_{th}$ انرژی گرمایی دستگاه در طی ۴۵m جابه‌جایی چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** برای دستگاهی که شامل نیروی اصطکاک می‌شود، $\Delta E_{th}$ را می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۸-۳۳ به کار $W$ انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ مرتبط کنیم

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th}$$

***محاسبه‌ها:*** از قسمت (الف) مقدار $W$ به دست آمده است. چون مجسمه در آغاز و پایان انتقال، ساکن بوده است و بلندی آن نیز تغییر نکرده است، تغییر $\Delta E_{mec}$ انرژی مکانیکی مجسمه برابر صفر است. بنابراین، در می‌یابیم که

$$\Delta E_{th} = W = ۱/۸\times ۱۰^۶\ \text{J} \approx ۲\text{MJ} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) اگر ۲۵ مرد مجسمه را ۱۰km بر سطح زمین جزیرهٔ ایستر می‌کشیدند، کار انجام شده توسط این مردها را تخمین بزنید. همچنین تغییر کل $\Delta E_{th}$ را که در دستگاه مجسمه- سورتمه- کنده‌ها- زمین رخ داده است تخمین بزنید.

***محاسبه‌ها:*** $W$ را از قسمت (الف) محاسبه می‌کنیم، با این تفاوت که حالا به جای $d$ مقدار $۱\times ۱۰^۴$ m را قرار می‌دهیم. همچنین دوباره $\Delta E_{th}$ را با $W$ مساوی قرار می‌دهیم و از آنجا به دست می‌آوریم

$$W = \Delta E_{th} = ۳/۹\times ۱۰^۸\ \text{J} \approx ۴۰۰\,\text{MJ} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این مقداری حیرت انگیز برای انرژی مردهایی است که مجسمه را انتقال داده‌اند. با این حال، ۲۵ مرد توانسته‌اند مجسمه را ۱۰km بدون منبع انرژی اسرارآمیزی جابه‌جا کنند.



**شکل ۸-۱۴** مجسمه‌های سنگی جزیرهٔ ایستر

۱. Easter جزیره‌ای در جنوب شرقی اقیانوس آرام واقع در غرب شیلی است، م.

**مسئلهٔ نمونه ۸-۶**

کارگری جعبهٔ چوبی میوه‌ای (با جرم کل $m = ۱۴\text{kg}$) را روی کف بتونی با نیروی افقی ثابت $\vec{F}$ به بزرگی $۴۰\text{ N}$ هل می‌دهد. در یک جابه‌جایی راست‌خط به بزرگی $d = ۰/۵۰\text{m}$، تندی جعبه از $v_0 = ۰/۶۰\text{m/s}$ به $v = ۰/۲۰\text{m/s}$ کاهش می‌یابد.

(الف) چقدر کار توسط نیروی $\vec{F}$ انجام شده و این کار روی چه دستگاهی صورت پذیرفته است؟

**نکتهٔ کلیدی** چون نیروی $\vec{F}$ وارد شده ثابت است، می‌توان آن را با استفاده از معادلهٔ ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ محاسبه کرد.

***محاسبه:*** با جایگزینی داده‌ها و توجه به این واقعیت که نیروی $\vec{F}$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ در یک جهت قرار دارند، داریم

$$W = Fd\cos\phi = (۴۰\text{N})(۰/۵۰\text{m})\cos ۰^\circ$$
$$= ۲۰\text{ J} \qquad \text{(پاسخ)}$$

***استدلال:*** برای تعیین دستگاهی که کار روی آن انجام شده است باید ببینیم کدامیک از انرژیها تغییر کرده‌اند. چون تندی جعبه تغییر می‌کند، یقیناً تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی جعبه وجود دارد. آیا اصطکاکی میان کف و جعبه، و در نتیجه تغییری در انرژی گرمایی وجود دارد؟ توجه کنید که جهت $\vec{F}$ و سرعت جعبه یکسان هستند. بنابراین، اگر اصطکاک وجود نداشته باشد، آنگاه $\vec{F}$ باید صندوق را با تندی *بزرگتری* شتاب دهد. ولی حرکت صندوق آهسته شده است و از اینرو باید نیروی اصطکاک و در نتیجه تغییر $\Delta E_{th}$ در انرژی گرمایی جعبه و کف وجود داشته باشد. بنابراین، دستگاهی که کار روی آن انجام شده است، دستگاه جعبه- کف است، چرا که هر دو تغییر انرژی در این دستگاه رخ می‌دهد.

(ب) افزایش $\Delta E_{th}$ انرژی گرمایی جعبه و کف چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** برای دستگاهی که شامل نیروی اصطکاک می‌شود، $\Delta E_{th}$ را می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۸-۳۳ به کار $W$ انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ مرتبط کنیم:

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th} \qquad (۸\text{-}۳۴)$$

***محاسبه‌ها:*** از قسمت (الف) مقدار $W$ به دست آمده است. چون انرژی پتانسیل تغییر نکرده است، تغییر $\Delta E_{mec}$ انرژی مکانیکی جعبه دقیقاً برابر با تغییر انرژی جنبشی آن است و از اینرو داریم

$$\Delta E_{mec} = \Delta K = \frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv_0^۲$$

با قرار دادن این رابطه در معادلهٔ ۸-۳۴ و حل آن برای $\Delta E_{th}$ خواهیم داشت:

$$\Delta E_{th} = W - \left(\frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv_0^۲\right) = W - \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_0^۲)$$
$$= ۲۰\text{ J} - \frac{۱}{۲}(۱۴\text{kg})[(۰/۲۰\text{ m/s})^۲ - (۰/۶۰\text{ m/s})^۲]$$
$$= ۲۲/۲\text{J} \approx ۲۲\text{J} \qquad \text{(پاسخ)}$$

## ۸-۸ پایستگی انرژی

تا اینجا چندین حالت را مورد بحث قرار دادیم که در آنها انرژی، مشابه مبادلهٔ پول میان حسابهای بانکی، به جسمها و دستگاهها داده یا از آنها گرفته می‌شود. در هر حالت فرض کردیم که انرژی نمی‌تواند به طور اسرار آمیزی ظاهر یا ناپدید شود. به زبان فرمولی، فرض کردیم (به درستی) که انرژی از قانونی موسوم به **قانون پایستگی انرژی** پیروی می‌کند که به **انرژی کل** $E$ دستگاه ارتباط دارد. این انرژی کل، مجموع انرژی مکانیکی دستگاه، انرژی گرمایی، و هر نوع *انرژی داخلی* افزون بر انرژی گرمایی است. (هنوز سایر انواع انرژی داخلی را بررسی نکرده‌ایم.) این قانون حاکی از آن است که

> انرژی کل $E$ دستگاه فقط به اندازهٔ انرژی داده شده به دستگاه یا گرفته شده از آن می‌تواند تغییر کند.

تنها نوع تبادل انرژی که در نظر گرفتیم، کار انجام شده روی یک دستگاه بود. بنابراین، اکنون می‌توانیم این قانون را به صورت زیر بیان کنیم

$$W = \Delta E = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th} + \Delta E_{int} \qquad (۸\text{-}۳۵)$$

که در آن $\Delta E_{mec}$ هر تغییری در انرژی مکانیکی دستگاه، $\Delta E_{th}$ هر تغییری در انرژی گرمایی دستگاه، و $\Delta E_{int}$ هر تغییری در هر نوع دیگری از انرژی داخلی دستگاه است. $\Delta E_{mec}$ خود شامل تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی و تغییر $\Delta U$ در انرژی پتانسیل (کشسانی، گرانشی، یا هر صورت ممکن دیگر) است.

قانون پایستگی انرژی چیزی *نیست* که ما از اصلهای فیزیک مقدماتی به دست آورده باشیم. بلکه قانونی است که بر اساس آزمایشهای بی شماری بنا نهاده شده است و دانشمندان و مهندسان تاکنون هیچ استثنایی برای آن نیافته‌اند.

### *دستگاه منزوی*

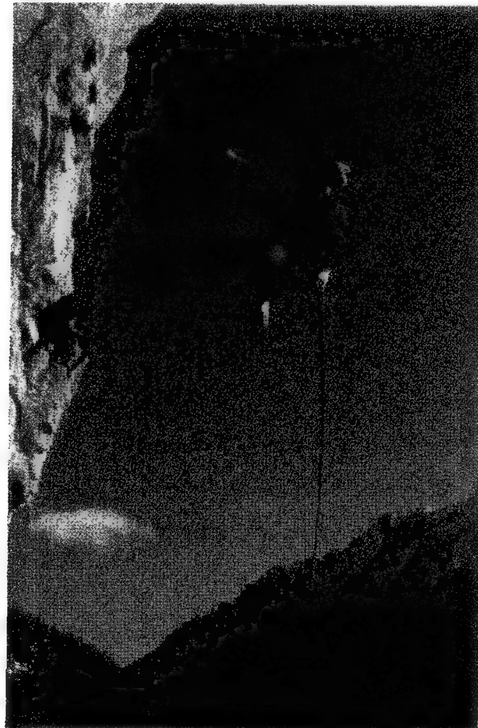
اگر دستگاهی از محیط اطرافش منزوی شده باشد، نمی‌توان هیچ انرژی به آن داد یا از آن گرفت. برای این حالت، قانون پایستگی انرژی چنین بیان می‌شود

> انرژی کل $E$ یک دستگاه منزوی نمی‌تواند تغییر کند.

تبدیلهای انرژی زیادی ممکن است در *داخل* دستگاه منزوی رخ بدهد- مثلاً میان انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل یا میان انرژی جنبشی و انرژی گرمایی. اما مجموع همهٔ صورتهای انرژی در این دستگاه *نمی‌تواند* تغییر کند.

به عنوان مثال، در شکل ۸-۱۵ به طور تقریبی می‌توانیم صخره نورد، وسایل او، و کرهٔ زمین را به عنوان دستگاهی منزوی در نظر بگیریم. وقتی صخره‌نورد با حالت دو طناب از

صخره پایین می‌آید، با تغییر پیکر بندی دستگاه، لازم است که او انتقال انرژی از انرژی پتانسیل گرانشی به دستگاه را کنترل کند. (این انرژی نمی‌تواند به طور کامل تلف شود.) قسمتی از این انرژی به انرژی جنبشی او تبدیل می‌شود. ولی روشن است که او نمی‌خواهد میزان تبدیل انرژی زیاد باشد یا سرعت حرکت او خیلی زیاد شود؛ از اینرو او طناب را دور حلقه‌های فلزی می‌پیچد تا در هنگام پایین آمدن، میان طناب و حلقه‌ها اصطکاک ایجاد شود. آنگاه با لغزیدن طناب بر حلقه‌ها، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه به روشی قابل کنترل به انرژی گرمایی حلقه‌ها و طناب منتقل می‌شود. انرژی کل دستگاه صخره نورد-



**شکل ۸-۱۵** صخره نورد به هنگام پایین آمدن باید انرژی را از انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه شامل خودش، وسایلش و زمین بگیرد. او طنابی را به دور حلقه‌های فلزی پیچیده است تا طناب بر اثر ساییده شدن بر حلقه‌ها تولید اصطکاک کند. با این کار بیشتر انرژی تبدیل شده ، به جای تبدیل به انرژی جنبشی، به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود.

وسایل- کرهٔ زمین (مجموع انرژی پتانسیل گرانشی، انرژی جنبشی، و انرژی گرمایی دستگاه) در حین فرود آمدن صخره نورد تغییر نمی‌کند.

برای یک دستگاه منزوی، قانون پایستگی انرژی را می‌توان به دو روش نوشت. نخست، با قرار دادن $W=0$ در معادلهٔ ۸-۳۵ به دست می‌آوریم

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_{th} + \Delta E_{int} = 0 \quad \text{(دستگاه منزوی)} \qquad (۸-۳۶)$$

همچنین داریم $\Delta E_{mec} = E_{mec,2} - E_{mec,1}$ که در آن شاخص‌های پایین ۱ و ۲ به دو لحظهٔ مختلف- مثلاً قبل و بعد از فرایند معینی که رخ داده است- اشاره دارند. آنگاه معادلهٔ ۸-۳۶ چنین می‌شود

$$E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_{th} - \Delta E_{int} \qquad (۸-۳۷)$$

معادلهٔ ۸-۳۷ حاکی از آن است که

> در یک دستگاه منزوی، انرژی کل در یک لحظه را می‌توانیم به انرژی کل در لحظه‌ای دیگر مرتبط کنیم *بی آنکه انرژیها در زمانهای میانی را در نظر بگیریم*.

این واقعیت می‌تواند ابزاری توانمند در حل مسائلی باشد که در آنها لازم است انرژیهای یک دستگاه منزوی پیش و پس از رخ دادن فرایندی معین به هم ربط داده شوند.

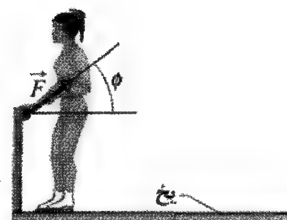
در بخش ۸-۵، حالت خاصی از دستگاه‌های منزوی یعنی، حالتی را که در آن نیروهای ناپایستار (از قبیل نیروی اصطکاک جنبشی) وجود ندارد بررسی کردیم. در این حالت خاص، $\Delta E_{th}$ و $\Delta E_{int}$ هر دو صفرند، و بنابراین معادلهٔ ۸-۳۷ به معادلهٔ ۸-۱۸ تبدیل می‌شود. به عبارت دیگر، انرژی مکانیکی یک دستگاه منزوی در نبود نیروهای ناپایستار پایسته است.

## *نیروهای خارجی و تبدیلهای انرژی داخلی*

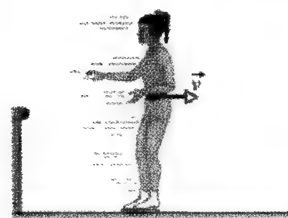
نیروی خارجی می‌تواند بدون انجام کار روی جسم- یعنی بدون انتقال انرژی به جسم- انرژی جنبشی یا انرژی پتانسیل آن جسم را تغییر دهد. اما، این نیرو مسئول تبدیلهای انرژی از نوعی به نوع دیگر در داخل جسم است.

شکل ۸-۱۶ مثالی از این دست را نشان می‌دهد. اسکیت بازی که در ابتدا ساکن است با هل دادن دیواره از آن فاصله می‌گیرد و سپس بر سطح یخی می‌لغزد (شکلهای ۸-۱۶ الف و ب). انرژی جنبشی او به دلیل آنکه از طرف دیواره نیروی خارجی $\vec{F}$ بر او وارد می‌شود افزایش می‌یابد. ولی این نیرو انرژی را از دیواره به او منتقل نمی‌کند. بنابراین، نیرو کاری روی او انجام نمی‌دهد. بلکه، انرژی جنبشی او به دلیل تبدیلهای داخلی ناشی از انرژی بیوشیمیایی در عضله‌هایش افزایش می‌یابد.

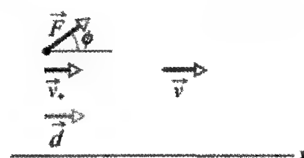
شکل ۸-۱۷ مثال دیگری را نشان می‌دهد. موتور اتومبیل، تندی آن را با حرکت دادن چهار چرخ اتومبیل افزایش می‌دهد (هر چهار چرخ طوری ساخته شده‌اند که بر اثر نیروی موتور می‌چرخند). در حین شتاب گرفتن اتومبیل، موتور باعث می‌شود که لاستیکها رو به عقب بر سطح جاده نیرو وارد کنند. این نیروهای رو به عقب، نیروهای اصطکاک $\vec{f}$ را ایجاد می‌کنند که به هر لاستیک رو به جلو وارد می‌شوند. نیروی خارجی برایند $\vec{F}$ از سوی جاده، که مجموع این نیروهای اصطکاک است، باعث شتاب گرفتن اتومبیل و افزایش انرژی جنبشی آن می‌شود. ولی $\vec{F}$ انرژی را از جاده به اتومبیل منتقل نمی‌کند و



(الف)

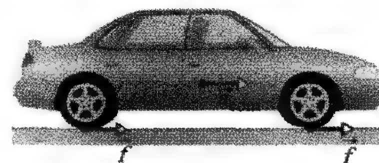


(ب)



(پ)

**شکل ۸-۱۶** (الف) وقتی اسکیت‌باز با هل دادن دیـواره از آن فاصله می‌گیرد، نیروی $\vec{F}$ از سوی دیواره بـر او وارد مـی‌شـود. (ب) پـس از جدا شدن اسکیت‌باز از دیواره سرعت او برابـر $\vec{v}$ اسـت. (پ) نیـروی خارجی $\vec{F}$ با زاویهٔ $\phi$ نسبت بـه محـور افقـی $x$ بـر اسـکیت‌بـاز وارد می‌شود. وقتی اسکیت باز به انـدازهٔ $\vec{d}$ جابـه‌جـایی یافـت، سـرعت او توسط مؤلفهٔ افقی $\vec{F}$ از $\vec{v}_\circ$ (= ۰) به $\vec{v}$ تغییر می‌کند.




**شکل ۸-۱۷** اتومبیلی بر اثر حرکت چهار چـرخ خـود، رو بـه سـمت راست شتاب می‌گیرد. جاده چهار نیروی اصطکاک (که دو تای آن در شکل نشان داده شده است) بر سـطح پـایین لاسـتیکها وارد مـی‌کنـد. مجموع این چهار نیرو، نیروی خارجی براینـد $\vec{F}$ را بـر اتومبیـل وارد می‌کند.

بنابراین، روی اتومبیل کار انجام نمی‌دهد. بلکه، انـرژی جنبشـی اتومبیل به دلیل تبدیلهای داخلی انرژی ذخیره شده در سـوخت افزایش می‌یابد.

در وضعیتهایی شبیه دو مورد بالا، در صورتی که بتـوانیم آن وضعیت را ساده سازی کنیم، گاهی می‌توانیم نیروی خارجی $\vec{F}$ وارد بر جسم را به تغییر انرژی مکانیکی جسم مرتبط کنیم. مثال اسـکیت بـاز را در نظـر بگیریـد. در طـی مسـافت $d$ در شـکل ۸-۱۶ پ می‌توانیم فرض کنیم شتابی که تندی اسکیت باز را از $v_\circ = ۰$ به $v$ تغییر می‌دهد ثابت است. (یعنی فرض می‌کنیم کـه $\vec{F}$ دارای بزرگی $F$ و زاویهٔ $\phi$ ثابتی اسـت). پـس از هـل دادن دیواره، اسکیت باز را مثل یک ذره در نظر می‌گیریم و بـا چشـم پوشیدن از این واقعیت که نیروی وارد بر عضله‌ها انرژی گرمایی عضله‌ها را افـزایش مـی‌دهـد و باعـث تغییـرات فیزیولـوژیکی می‌شود، مسئله را ساده‌سازی می‌کنیم. آنگاه می‌توانیم با بـه کـار بردن معادلهٔ ۷-۵ $(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_\circ^2 = F_x d)$ بنویسیم

$$K - K_\circ = (F\cos\phi)\,d$$

یا

$$\Delta K = Fd\cos\phi$$

اگر این وضعیت شامل تغییری در ارتفاع جسـم نیـز بشـود، می توانیم تغییر $\Delta U$ انرژی پتانسیل گرانشی را نیز در معادلـهٔ ۸-۳۸ منظور کنیم

$$\Delta U + \Delta K = Fd\cos\phi \qquad (۸\text{-}۳۹)$$

نیرو در سمت راست این معادله هیچ کـاری روی جسـم انجـام نمی‌دهد، ولی باز هم مسئول تغییرات انرژی نشان داده شـده در سمت چپ معادله است.

*توان*

حال که دیدیم چگونه می‌تـوان انـرژی را از شـکلی بـه شـکلی دیگر تبدیل کرد، می‌توانیم تعریف تـوان ارائـه شـده در بخـش ۷-۹ را بسط دهیم. در آنجا توان را به عنوان آهنگ کـار انجـام شده توسط یک نیرو تعریف کردیم. در مفهوم کلی‌تـر، تـوان $P$ آهنگی است که انرژی توسط یک نیرو از نوعی بـه نـوع دیگـر تبدیل شده است. اگر مقـدار انـرژی $\Delta E$ در مقـدار زمـان $\Delta t$ تبدیل شده باشد، **توان میانگین** ناشی از نیرو برابر است با

$$P_{avg} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \qquad (۸\text{-}۴۰)$$

به همین ترتیب، **توان لحظه‌ای** ناشی از نیرو برابر است با

$$P = \frac{dE}{dt} \qquad (۸\text{-}۴۱)$$

**مسئلهٔ نمونهٔ ۸-۷**

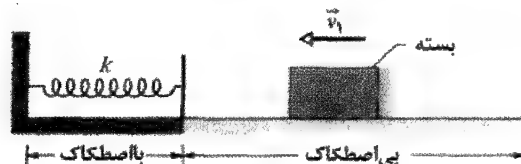
در شکل ۸-۱۸، بسته‌ای به جـرم ۲/۰kg روی کفی بـا تنـدی $v_1 = ۴/۰\,m/s$ می‌لغزد و به فنری برخورد می‌کند. فنر تـا لحظـهٔ توقف لحظه‌ای بسته، فشـرده مـی‌شـود. مسیر بسـته تـا محـل برخورد با فنر واهلیده بی اصطکاک است، ولی وقتی بسته فنر را فشرده کند، یک نیروی اصطکاک جنبشـی بـه بزرگـی ۱۵N از طـرف کـف بـر بسـته وارد مـی‌شـود. اگـر ثابـت فنـر $k = ۱۰۰۰۰\,N/m$ باشد، در لحظهٔ توقف لحظه‌ای بسـته، مقـدار متراکم شدن فنر، $d$، چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** لازم اسـت همـهٔ نیروهـای وارد بـر بسـته را بررسی کنیم و سپس معین کنیم که آیا دستگاه منزوی اسـت یـا دستگاهی است کـه یـک نیـروی خـارجی روی آن کـار انجـام می‌دهد.

*نیروها:* نیروی عمودی وارد بر بسته از طرف کف، بـه دلیـل آنکه راستای آن همواره عمود بر راستای جابه‌جایی بسته اسـت،

هیچ کاری روی بسته انجام نمی‌دهد. به همین دلیل، نیروی گرانشی وارد بر بسته کاری انجام نمی‌دهد. ولی وقتی فنر فشرده است، نیروی فنر با تبدیل انرژی به انرژی پتانسیل کشسانی فنر روی بسته کار انجام می‌دهد. نیروی فنر همچنین بر دیوارهٔ صلب نیرو وارد می‌کند. چون میان بسته و کف اصطکاک وجود دارد، لغزش بسته روی کف، انرژیهای گرمایی آنها را افزایش می‌دهد.

*دستگاه:* دستگاه بسته- فنر- کف- دیواره شامل همهٔ این نیروهاست و تبدیل انرژی در یک دستگاه منزوی صورت می‌گیرد. بنابراین، چون دستگاه منزوی است، انرژی کل آن




**شکل ۸-۱۸** بسته‌ای روی کف بدون اصطکاکی با سرعت $v_1$ به سمت فنری با ثابت فنر $k$ می‌لغزد. وقتی بسته به فنر می‌رسد، یک نیروی اصطکاک از طرف کف بر بسته وارد می‌شود.

نمی‌تواند تغییر کند. پس، می‌توانیم از قانون پایستگی انرژی به شکل معادلهٔ ۸-۳۷ برای این دستگاه استفاده کنیم:

$$E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_{th} \qquad (۸-۴۲)$$

***محاسبه‌ها:*** در معادلهٔ ۸-۴۲، شاخص پایین ۱ مربوط به وضعیت اولیهٔ بستهٔ در حال لغزش و شاخص پایین ۲ مربوط به وضعیتی است که فنر به اندازهٔ $d$ فشرده و بسته به طور لحظه‌ای متوقف شده است. برای هر دو وضعیت، انرژی مکانیکی دستگاه مجموع انرژی جنبشی بسته $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ و انرژی پتانسیل فنر $(U=\frac{1}{2}kx^2)$ است. برای وضعیت ۱، $U=0$ است (چرا که فنر فشرده نشده است)، و تندی بسته برابر $v_1$ است. بنابراین، داریم

$$E_{mec,1} = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0$$

برای وضعیت ۲، $K=0$ (چون بسته متوقف شده است)، و میزان تراکم فنر برابر $d$ است. بنابراین، داریم

$$E_{mec,2} = K_2 + U_2 = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

سرانجام، با استفاده از معادلهٔ ۸-۳۱ می‌توانیم به جای تغییر $\Delta E_{th}$ انرژی گرمایی بسته و کف، مقدار $f_k d$ را قرار دهیم. اکنون می‌توانیم معادلهٔ ۸-۴۲ را چنین بازنویسی کنیم

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 - f_x d$$

پس از قرار دادن مقدارهای معلوم و مرتب کردن آنها به دست می‌آوریم

$$5000d^2 + 15d - 16 = 0$$

حل این معادلهٔ درجهٔ دو به دست می‌دهد

$$d = 0.055\,\text{m} = 5.5\,\text{cm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

## مسئلهٔ نمونهٔ ۸-۸

شکل ۸-۱۹ الف شیب کوهی را منتهی به یک دره نشان می‌دهد که بهمنی از سنگها روی آن در حال حرکت است. سنگها دارای جرم کل $m$ هستند و از ارتفاع $y=H$ سقوط می‌کنند. آنها مسافت $d_1$ را روی شیب $\theta=45°$ و سپس مسافت $d_2$ را روی قسمت مسطح دره طی می‌کنند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی مقدار منطقی ۰/۶۰ را داشته باشد نسبت $d_2/H$ فاصلهٔ حرکت سنگها در دره به ارتفاع سقوط چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** (۱) انرژی مکانیکی $E_{mec}$ دستگاه سنگها- زمین برابر با جمع انرژی جنبشی $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ و انرژی پتانسیل گرانشی $(U=mgy)$ است. (۲) انرژی مکانیکی در حین سُر خوردن پایسته نیست چون نیروی اصطکاک (ناپایستار) بر سنگها وارد می‌شود و مقداری از انرژی $\Delta E_{th}$ را به انرژی گرمایی سنگها و زمین منتقل می‌کند. (۳) انرژی منتقل شدهٔ $\Delta E_{th}$ با معادلهٔ ۸-۳۱ $(\Delta E_{th}=f_k d)$ به بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی و مسافت سر خورده شده مربوط است. (۴) انرژی مکانیکی $E_{mec,2}$ در هر نقطه در حین سُر خوردن با معادلهٔ ۸-۳۷ که می‌توان آن را به صورت $E_{mec,2}=E_{mec,1}-\Delta E_{th}$ نوشت، به انرژی مکانیکی اولیهٔ $E_{mec,1}$ و انرژی تبدیل شدهٔ $\Delta E_{th}$ مربوط است.

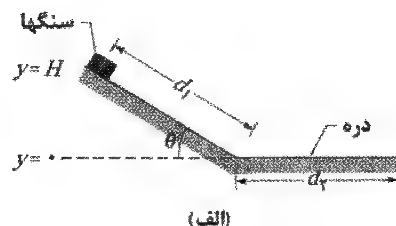
***محاسبه‌ها:*** انرژی مکانیکی نهایی $E_{mec,2}$ برابر است با انرژی مکانیکی اولیه $E_{mec,1}$ منهای انرژی گرمایی تلف شدهٔ $\Delta E_{th}$

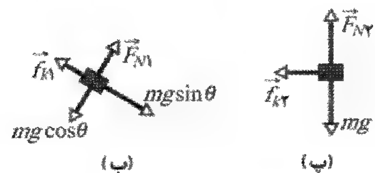
$$E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_{th} \qquad (۸-۴۳)$$

در آغاز سنگها دارای انرژی پتانسیل $U=mgH$ و انرژی جنبشی $K=0$ هستند و در نتیجه انرژی مکانیکی اولیه برابر است با $E_{mec,1}=mgH$ . سرانجام (وقتی سنگها متوقف شوند) سنگها دارای انرژی پتانسیل $U=0$ و انرژی جنبشی $K=0$ هستند و در نتیجه $E_{mec,2}=0$ . مقدار انرژیی که در حین سر خوردن روی شیب به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود برابر $\Delta E_{th,1}=f_{k1}d_1$ و در حین حرکت در دره برابر $\Delta E_{th,2}=f_{k2}d_2$ است. با قرار دادن این عبارتها در معادلهٔ ۸-۴۳، داریم

$$0 = mgH - f_{k1}d_1 - f_{k2}d_2 \qquad (۸-۴۴)$$

از شکل ۸-۱۹ الف، مشاهده می‌کنیم که $d_1 = H/(\sin\theta)$ است. برای به دست آوردن عبارتهایی برای نیروهای اصطکاک جنبشی، از معادلهٔ ۶-۲ $(f_k=\mu_k F_N)$ استفاده می‌کنیم. با یادآوری فصل ۶، روی سطح شیبدار نیروی عمودی برابر مؤلفهٔ $mg\cos\theta$ نیروی گرانشی (شکل ۸-۱۹ ب) است. به همین ترتیب، از فصل ۵ یادآوری می‌کنیم که روی یک سطح افقی نیروی عمودی برابر با بزرگی $mg$ نیروی گرانشی (شکل ۸-۱۹




**شکل ۸-۱۹** (الف) مسیر بهمن سنگها در سقوط از کوه و کف دره. نیروهای وارد بر سنگها در امتداد (ب) شیب کوه و (پ) کف دره.

پ) است. با قرار دادن این عبارتها در معادلهٔ ۸-۴۴ و حل آن برای نسبت $d_۲/H$ ، خواهیم داشت

$$۰ = mgh - \mu_k(mg\cos\theta)\frac{H}{\sin\theta} - \mu_k mgd_۲$$

و

$$\frac{d_۲}{H} = \left(\frac{۱}{\mu_k} - \frac{۱}{\tan_\theta}\right) \qquad (۸\text{-}۴۵)$$

با جایگزینی $\mu_k = ۰/۶۰$ و $\theta = ۴۵°$ ، داریم

$$\frac{d^۲}{H} = ۰/۶۷ \qquad \text{(پاسخ)}$$

***اظهارنظر:*** این نتیجه برای بهمنهای کوچک معمول است. ولی برای بهمنهای عظیم، نسبت $d_۲/H$ ممکن است به بزرگی ۲۰ برسد. اگر این نسبت را در معادلهٔ ۸-۴۵ جایگزین کنیم و آن را برای ضریب اصطکاک جنبشی حل کنیم، خواهیم داشت $\mu_k = ۰/۰۵$ . پژوهشگران درک نمی‌کنند که چرا چنین بهمنهای عظیمی از سنگهای ناهموار غلتان می‌توانند دارای چنین $\mu_k$ ای باشند که به قدر کافی کوچک بوده و با ضریب اصطکاک یخهای لغزنده برابری می‌کند. یکی از امیدوارکننده‌ترین نظریه‌ها این است که مواد به طور پیوسته به وسیلهٔ لایهٔ نازکی از خرده‌ها با نوسانهای کوچک به هوا پرتاب می‌شوند و در نتیجه هرگز با شیب کوه یا کف دره تماس پیدا نمی‌کنند تا وقتی که بهمن متوقف شود.

### مسئلهٔ نمونه ۸-۹

در شکل ۸-۲۰ الف یک قطعهٔ ۲۰kg در حال برخورد به یک فنری است که در حالت واهلیدهٔ خود قرار دارد. وقتی قطعه فنر را می‌فشارد، نیروی اصطکاک جنبشی بین قطعه و کف بر قطعه اثر می‌کند. شکل ۸-۲۰ ب انرژی جنبشی قطعه $K(x)$ و انرژی پتانسیل فنر $U(x)$ را برحسب مقدار مکان $x$ قطعه وقتی فنر فشرده شده است را به دست می‌دهد. ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k$ بین قطعه و فنر چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** (۱) انرژی مکانیکی $E_{mec}(=K+U)$ در حین فشردگی پایستار نیست چون نیروی اصطکاک ناپایستار بر قطعه اثر می‌کند و مقداری انرژی $\Delta E_{th}$ به انرژی گرمایی قطعه و کف انتقال می‌یابد. (۲) انرژی منتقل شده $\Delta E_{th}$ با معادلهٔ ۸-۳۱ به بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی و مسافت سُر خورده $(\Delta E_{th} = f_k d)$ مربوط است. (۳) انرژی مکانیکی $E_{mec,۲}$ در هر نقطه در حین تراکم با معادلهٔ ۸-۳۷ به انرژی مکانیکی اولیهٔ $E_{mec,۱}$ و $\Delta E_{th}$ مربوط است به طوری که می‌توان نوشت $E_{mec,۲} = E_{mec,۱} - \Delta E_{th}$ .

***محاسبهٔ $\Delta E_{th}$ :*** از شکل ۳-۲۰ ب، مشاهده می‌کنیم که وقتی قطعه در $x=۰$ است و در آستانهٔ فشردن فنر قرار دارد، انرژی جنبشی آن $K = ۳۰\,J$ و انرژی پتانسیل فنر $U = ۰$ است. بنابراین، جمع $K$ و $U$ برابر است با

$$E_{mec,۱} = ۳۰\,J$$

وقتی قطعه متوقف می‌شود، یعنی، وقتی انرژی جنبشی آن به صفر کاهش می‌یابد، فنر دارای بیشینهٔ فشردگی است. از شکل مشاهده می‌کنیم که این امر در $x \approx ۰/۲۱۵\,m$ رخ می‌دهد، جایی که $K=۰$ و $U = ۱۴\,J$ است. بنابراین، در نقطهٔ توقف جمع $K$ و $U$ برابر است با

$$E_{mec,۲} = ۱۴\,J$$

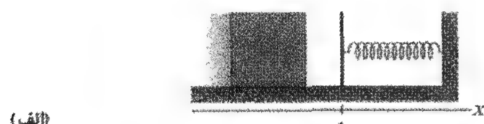
برای به دست آوردن انرژی منتقل شده به انرژی گرمایی، رابطهٔ $E_{mec,۲} = E_{mec,۱} - \Delta E_{th}$ را چنین می‌نویسیم

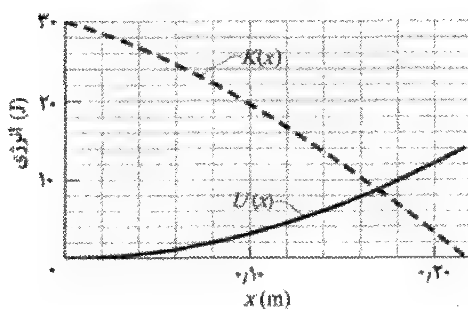
$$۱۴\,J = ۳۰\,J - \Delta E_{th}$$

یا

$$\Delta E_{th} = ۱۶\,J$$

***محاسبهٔ $\mu_k$ :*** از معادلهٔ ۶-۲، می‌دانیم که نیروی اصطکاک جنبشی با رابطهٔ $f_k = \mu_k F_N$ داده شده است، که در آن نیروی




**شکل ۸-۲۰** (الف) قطعه در آستانهٔ برخورد با فنر است. (ب) تغییر انرژی جنبشی $K$ و انرژی پتانسیل $U$ در وقتی که فنر فشرده شده و قطعه برای توقف کند شده است.

عمودی نیز با معادلهٔ ۵-۱۴ $(F_N = mg)$ داده می‌شود. در اینجا، نیروی اصطکاک $f_k$، با رابطهٔ $\Delta E_{th} = f_k d$، در فاصلهٔ $d = ۰/۲۱۵\text{m}$ ، ۱۶J را به انرژی گرمایی تبدیل می‌کند. با در نظر گرفتن این چند عبارت، می‌نویسیم

$$\Delta E_{th} = f_k d = \mu_k F_N d = \mu mgd$$

و سپس با قرار دادن داده‌های $\Delta E_{th} = ۱۶\text{J}$ ، $m = ۲۰\,\text{kg}$ ، $g = ۹/۸\text{m/s}^۲$ و $d = ۰/۲۱۵\text{m}$ ، داریم

$$\mu_k = ۰/۳۸ \qquad \text{(پاسخ)}$$

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**نیروهای پایستار** نیرو در صورتی **نیروی پایستار** است که کار خالص انجام شده توسط آن روی ذره‌ای که در مسیر بسته‌ای از یک نقطهٔ اولیه حرکت می‌کند و سپس به همان نقطه باز می‌گردد، صفر باشد. به بیانی دیگر، نیرو در صورتی پایستار است که کار خالص آن روی ذره‌ای که میان دو نقطه حرکت می‌کند به مسیر طی شدهٔ ذره بستگی نداشته باشد. نیروی گرانشی و نیروی فنر، نیروهایی پایستار هستند؛ نیروی اصطکاک جنبشی، یک **نیروی ناپایستار** است.

**انرژی پتانسیل** **انرژی پتانسیل**، انرژی وابسته به پیکربندی دستگاهی است که در آن نیروی پایستار عمل می‌کند. هرگاه نیروی پایستار روی ذره‌ای در داخل دستگاه کار $W$ انجام دهد، تغییر $\Delta U$ در انرژی پتانسیل دستگاه برابر است با

$$\Delta U = -W \qquad (۸\text{–}۱)$$

اگر ذره از نقطهٔ $x_i$ به نقطهٔ $x_f$ حرکت کند، تغییر انرژی پتانسیل دستگاه برابر است با

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \qquad (۸\text{–}۶)$$

**انرژی پتانسیل گرانشی** انرژی پتانسیل وابسته به دستگاهی شامل کرهٔ زمین و ذره‌ای در نزدیکی آن، **انرژی پتانسیل گرانشی** است. اگر ذره از ارتفاع $y_i$ به ارتفاع $y_f$ حرکت کند، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه ذره- کرهٔ زمین برابر است با

$$\Delta U = mg\,(y_f - y_i) = mg\,\Delta y \qquad (۸\text{–}۷)$$

اگر **نقطهٔ مرجع** ذره در $y_i = ۰$ قرار داشته باشد و انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه در آن نقطه $U_i = ۰$ اختیار شود، آنگاه انرژی پتانسیل گرانشی $U$ هنگامی که ذره در ارتفاع دلخواه $y$ است، برابر است با

$$U(y) = mgy \qquad (۸\text{–}۹)$$

**انرژی پتانسیل کشسانی** **انرژی پتانسیل کشسانی**، انرژی وابسته به حالت فشردگی یا کشیدگی یک جسم کشسان است. برای فنری که به هنگام جابه‌جایی $x$ سر آزاد آن، نیروی $F = -kx$ را وارد می‌کند، انرژی پتانسیل کشسانی برابر است با

$$U(x) = \frac{۱}{۲}kx^۲ \qquad (۸\text{–}۱۱)$$

**پیکربندی مرجع** در جایی است که فنر طول واهلیده‌اش را دارد، و در آنجا $x = ۰$ و $U = ۰$ است.

**انرژی مکانیکی** **انرژی مکانیکی** $E_{mec}$ یک دستگاه برابر مجموع انرژی جنبشی $K$ و انرژی پتانسیل $U$ آن دستگاه است:

$$E_{mec} = K + U \qquad (۸\text{–}۱۲)$$

*دستگاه منزوی*، دستگاهی است که در آن هیچ *نیروی خارجی* انرژی دستگاه را تغییر نمی‌دهد. اگر فقط نیروهای پایستار در داخل یک دستگاه منزوی کار انجام دهند، آنگاه انرژی مکانیکی $E_{mec}$ دستگاه نمی‌تواند تغییر کند. این **اصل پایستگی انرژی مکانیکی** است و چنین نوشته می‌شود

$$K_۲ + U_۲ = K_۱ + U_۱ \qquad (۸\text{–}۱۷)$$

که در آن شاخصهای پایین اشاره به لحظه‌های مختلفی در طی فرایند تبدیل انرژی دارند. اصل پایستگی را همچنین می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = ۰ \qquad (۸\text{–}۱۸)$$

**منحنیهای انرژی پتانسیل** اگر تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ برای دستگاهی که در آن نیروی یک بعدی $F(x)$ بر ذره‌ای وارد می‌شود معلوم باشد، آنگاه نیرو را می‌توانیم از رابطهٔ زیر به دست آوریم

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad (۸\text{–}۲۲)$$

اگر $U(x)$ به صورت یک نمودار داده شود، آنگاه به ازای هر مقداری از $x$ ، نیروی $F(x)$ برابر با شیب منحنی با علامت منفی است و انرژی جنبشی ذره با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$K(x) = E_{mec} - U(x) \qquad (۸\text{–}۲۴)$$

که در آن $E_{mec}$ انرژی مکانیکی دستگاه است. **نقطهٔ برگشت** نقطه‌ای مانند $x$ است که در آنجا حرکت ذره وارونه می‌شود (در آن نقطه $K = ۰$ است). ذره در نقطه‌هایی که شیب منحنی $U(x)$ صفر باشد در حال **تعادل** است (در این نقطه‌ها $F(x) = ۰$ است).

**کار انجام شده توسط نیرویی خارجی روی یک دستگاه**

کار $W$ ، انرژیی است که توسط نیروی خارجی وارد بر دستگاه، به دستگاه داده یا از آن گرفته می‌شود. هرگاه بیش از یک نیرو بر یک دستگاه وارد شود، *کار خالص* آنها برابر با انرژی انتقال یافته است. وقتی اصطکاک وجود ندارد، کار انجام شده روی دستگاه و تغییر انرژی مکانیکی $\Delta E_{mec}$ دستگاه با هم برابرند:

$$W = \Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U \qquad (۸\text{–}۲۵ \text{ و } ۸\text{–}۲۶)$$

هرگاه نیروی اصطکاک جنبشی به دستگاه اثر کند، آنگاه انرژی گرمایی $E_{th}$ دستگاه تغییر می‌کند. (این انرژی به حرکت تصادفی اتمها و مولکولها در دستگاه وابسته است.) پس، کار انجام شده روی دستگاه برابر است با

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th} \qquad (۸\text{–}۳۳)$$

تغییر $\Delta E_{th}$ به بزرگی $f_k$ نیروی اصطکاک و بزرگی $d$ جابه‌جایی بر اثر نیروی خارجی، با رابطهٔ زیر مربوط می‌شود

$$\Delta E_{th} = f_k d \qquad (۸-۳۱)$$

**پایستگی انرژی** **انرژی کل** $E$ یک دستگاه (مجموع انرژی مکانیکی، انرژیهای داخلی از جملهٔ انرژی گرمایی) فقط به اندازهٔ انرژی داده شده به دستگاه یا گرفته شده از آن می‌تواند تغییر کند. این واقعیت تجربی **قانون پایستگی انرژی** نامیده می‌شود. اگر روی دستگاه کار $W$ انجام شده باشد، داریم

$$W = \Delta E = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th} + \Delta E_{int} \qquad (۸-۳۵)$$

اگر دستگاه منزوی باشد $(W = ۰)$، این رابطه چنین به دست می‌دهد

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_{th} + \Delta E_{int} = ۰ \qquad (۸-۳۶)$$

و از آنجا

$$E_{mec,۲} = E_{mec,۱} - \Delta E_{th} - \Delta E_{int} \qquad (۸-۳۷)$$

که شاخصهای پایین ۱ و ۲ اشاره به دو لحظهٔ مختلف دارند.

**توان** **توان** ناشی از نیرو آهنگی است که انرژی با آن منتقل می‌شود. اگر مقدار انرژی $\Delta E$ در مقدار زمان $\Delta t$ منتقل شده باشد، **توان میانگین** نیرو برابر است با

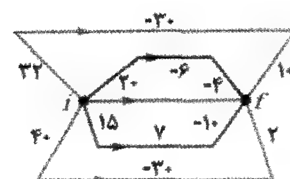
$$P_{avg} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \qquad (۸-۴۰)$$

**توان لحظه‌ای** ناشی از نیرو برابر است با

$$P = \frac{dE}{dt} \qquad (۸-۴۱)$$

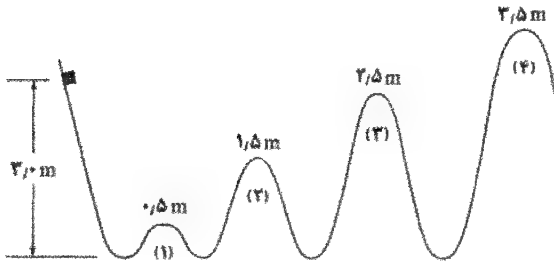
## پرسشها

۱- شکل ۸-۲۱ یک مسیر مستقیم و چهار مسیر غیر مستقیم از نقطهٔ $i$ به نقطهٔ $f$ را نشان می‌دهد. در طول مسیر مستقیم و سه تا از مسیرهای غیر مستقیم، فقط نیروی پایستار $F_c$ بر جسم معینی وارد می‌شود. در طول مسیر غیر مستقیم چهارم، هم $F_c$ و هم نیروی ناپایستار $F_{nc}$ بر جسم وارد می‌شود. $\Delta E_{mec}$، تغییر انرژی مکانیکی جسم (بر حسب ژول) وقتی از $i$ به $f$ می‌رود در امتداد هر پاره خط مستقیم از چهار مسیر غیر مستقیم، در شکل مشخص شده است. $\Delta E_{mec}$ (الف) در طول مسیر مستقیم از $i$ به $f$ و (ب) در طول مسیری که نیروی $F_{nc}$ اثر می‌کند، چقدر است؟



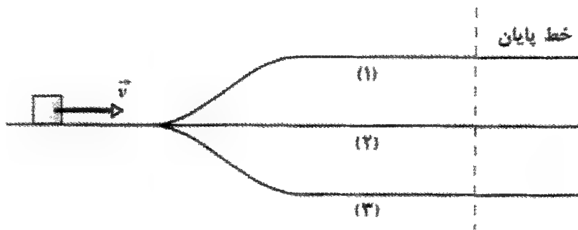

**شکل ۸-۲۱** پرسش ۱

۲- در شکل ۸-۲۲، قطعهٔ کوچکی که در ابتدا ساکن است روی شیب بدون اصطکاکی از ارتفاع ۳/۰m رها شده است. ارتفاع تپه‌ها در مسیر شیب نشان داده شده است. تپه‌ها قله‌های دایره‌ای شکل یکسانی دارند و قطعه از هیچ تپه‌ای جدا نمی‌شود. (الف) کدام تپه اولین تپه‌ای است که قطعه نمی‌تواند از آن عبور کند؟ (ب) پس از آنکه قطعه نتوانست از آن تپه عبور کند، چه می‌کند؟ در بالای کدام تپه (پ) شتاب مرکزگرای قطعه بیشترین و (ت) نیروی عمودی وارد بر قطعه کمترین مقدار را دارد؟



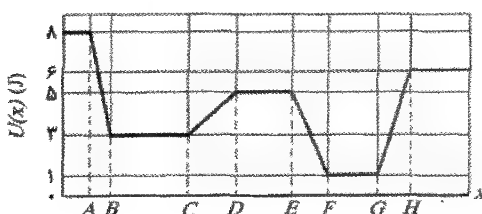

**شکل ۸-۲۲** پرسش ۲

۳- در شکل ۸-۲۳، قطعه‌ای که به طور افقی حرکت می‌کند می‌تواند برای رسیدن به خط پایان که با خط‌چین مشخص شده است، از یکی از سه مسیر بدون اصطکاکی که فقط در ارتفاع با هم متفاوت‌اند، عبور کند. مسیرها را با توجه به (الف) تندی قطعه در خط پایان و (ب) زمان رسیدن به خط پایان، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.



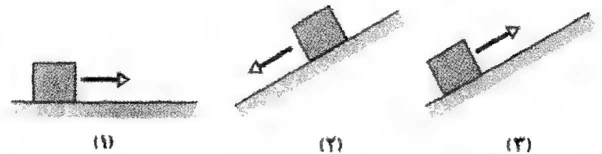

**شکل ۸-۲۳** پرسش ۳

۴- شکل ۸-۲۴ نمودار تابع انرژی پتانسیل یک ذره را نشان می‌دهد. (الف) ناحیه‌های $AB$، $BC$، $CD$ و $DE$ را با توجه به بزرگی نیروی وارد بر ذره، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید. انرژی $E_{mec}$ ذره از چه مقداری نباید تجاوز کند تا ذره (ب) در چاه پتانسیل سمت چپ به دام بیفتد، (پ) در چاه پتانسیل سمت راست به دام بیفتد و (ت) بتواند میان دو چاه پتانسیل حرکت کند ولی نتواند به سمت راست نقطهٔ $H$ برود؟ برای وضعیت (ت) در کدامیک از ناحیه‌های $BC$، $DE$ و $FG$ ذره (ث) بیشترین انرژی جنبشی و (ج) کمترین تندی را خواهد داشت؟



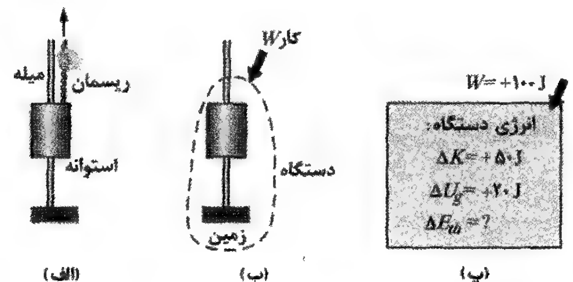

**شکل ۸-۲۴** پرسش ۴

۵- شکل ۸-۲۵ سه وضعیت را نشان می‌دهد که شامل یک سطح با اصطکاک و قطعه‌ای است که روی آن می‌لغزد. در هر سه وضعیت، قطعه با تندی یکسانی شروع می‌کند و تا وقتی که نیروی اصطکاک جنبشی آن را متوقف نکرده است به لغزیدن ادامه می‌دهد. این سه وضعیت را با توجه به افزایش انرژی گرمایی ناشی از لغزیدن، از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.



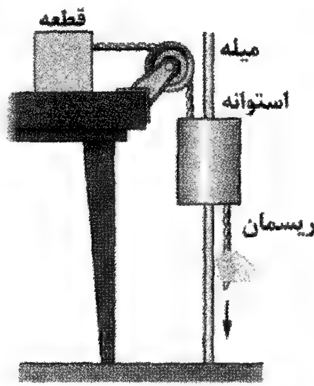
**شکل ۸-۲۵** پرسش ۵

۶- در شکل ۸-۲۶ الف ریسمانی را که به استوانه‌ای واقع بر یک میلهٔ قائم متصل شده است، به طرف بالا می‌کشیم. چون استوانه محکم میله را دربرگرفته است، با اصطکاک قابل ملاحظه‌ای روی میله می‌لغزد. نیروی ما روی دستگاه استوانه- میله- زمین به مقدار $W = +100\,J$ کار انجام می‌دهد (شکل ۸-۲۱ ب). «گزارشی از انرژی» برای دستگاه در شکل ۸-۲۶ پ نشان داده شده است: انرژی جنبشی $K$ به اندازهٔ $50\,J$، و انرژی پتانسیل گرانشی $U_g$ به اندازهٔ $20\,J$ افزایش می‌یابد. تنها تغییر دیگر در انرژی داخل دستگاه مربوط به انرژی گرمایی $E_{th}$ است. تغییر $\Delta E_{th}$ چقدر است؟



**شکل ۸-۲۶** پرسش ۶

۷- آرایش نشان داده شده در شکل ۸-۲۷ مشابه آرایش شکل پرسش ۶ است. در اینجا ریسمانی که میله‌ای را محکم در برگرفته به پایین کشیده می‌شود. همچنین با پایین آمدن استوانه، قطعه‌ای که توسط ریسمان دیگری به استوانه وصل شده، کشیده می‌شود و روی میزی می‌لغزد. بار دیگر، مشابه آنچه که در شکل ۸-۲۶ ب نشان داده شده است، دستگاه استوانه- میله- زمین را در نظر بگیرید. کار انجام گرفته روی دستگاه $200\,J$ است و دستگاه روی قطعه $60\,J$ کار انجام می‌دهد. در داخل دستگاه، انرژی جنبشی به اندازهٔ $130\,J$ افزایش و انرژی پتانسیل گرانشی به اندازهٔ $20\,J$ کاهش می‌یابد. (الف) یک «گزارش انرژی» برای دستگاه، مشابه شکل ۸-۲۶ پ رسم کنید. (ب) تغییر انرژی گرمایی داخل دستگاه چقدر است؟



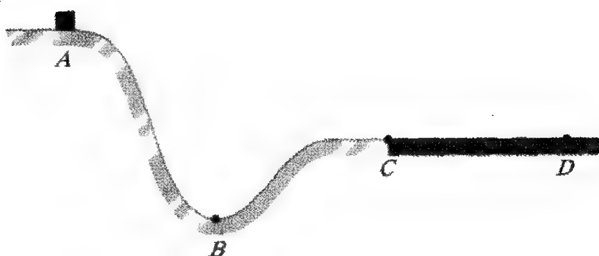
**شکل ۸-۲۷** پرسش ۷

۸- در شکل ۸-۲۸، قطعه‌ای از ارتفاع $h$ روی مسیری رو به پایین می‌لغزد. مسیر حرکت به جز در قسمت مسطح پایینی بدون اصطکاک است. در بخشی که اصطکاک دارد، قطعه تحت تأثیر اصطکاک پس از طی مسافت معین $D$ متوقف می‌شود. (الف) اگر بلندی $h$ را کاهش دهیم، آیا قطعه در مسافتی بیشتر، کمتر یا برابر با $D$ متوقف می‌شود؟ (ب) اگر به جای این، جرم قطعه را افزایش دهیم، آیا در این حالت قطعه در مسافتی بیشتر، کمتر یا برابر با $D$ متوقف می‌شود؟



**شکل ۸-۲۸** پرسش ۸

۹- در شکل ۸-۲۹، قطعه‌ای از $A$ تا $C$ روی شیب بدون اصطکاکی می‌لغزد، و سپس از ناحیهٔ افقی $CD$ که در آنجا بر آن نیروی اصطکاک وارد می‌شود، عبور می‌کند. آیا انرژی جنبشی قطعه در (الف) ناحیهٔ $AB$، (ب) ناحیهٔ $BC$، و (پ) ناحیهٔ $CD$، افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟ (ت) آیا انرژی مکانیکی قطعه در آن ناحیه‌ها افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟



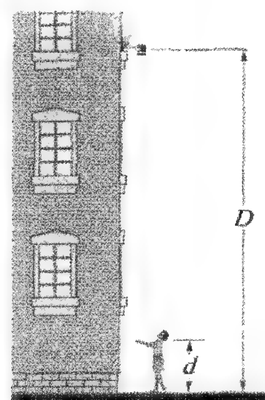
**شکل ۸-۲۹** پرسش ۹

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاســـخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
●●●- تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

### بخش ۸-۴ تعیین مقدارهای انرژی پتانسیل

●۱- شما کتابی به جرم $۲/۰۰\text{kg}$ را به طرف دوستی که روی زمین ایستاده است از فاصلهٔ $D=۱۰/۰\text{m}$ بالای سطح زمین رها می‌کنید. اگر دوست شما دستهایش را تا ارتفاع $d=۱/۵۰\text{m}$ بالای سطح زمین کشیده باشد (شکل ۸-۳۰)، (الف) در فاصلهٔ رها شدن کتاب تا رسیدن آن به دستهای دوست شما چقدر کار $W_g$ توسط نیروی گرانشی روی کتاب انجام می‌شود؟ (ب) تغییر $\Delta U$ انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه کتاب- زمین در حین سقوط کتاب چقدر است؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی $U$ این دستگاه در سطح زمین برابر صفر در نظر گرفته شود، (پ) هنگامی که کتاب رها شده است و (ت) هنگامی که به دستهای دوستتان می‌رسد، $U$ چقدر است؟ حال $U$ را در سطح زمین برابر $۱۰۰\text{J}$ در نظر بگیرید و دوباره مقدارهای زیر را بیابید: (ث) $W_g$، (ج) $\Delta U$، (چ) $U$ در نقطهٔ رها شدن، و (ح) $U$ در محل دستهای دوستتان.



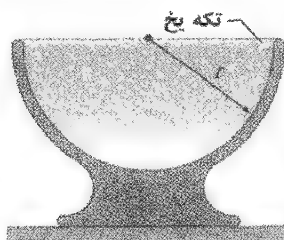

**شکل ۸-۳۰** مسئله‌های ۱ و ۱۰

●۲- شکل ۸-۳۱ گلوله‌ای به جرم $m=۰/۳۴۱\text{kg}$ را نشان می‌دهد که به انتهای میلهٔ نازکی به طول $L=۰/۴۵۲\text{m}$ وجرم ناچیز متصل شده است. انتهای دیگر میله طوری لولا شده است که گلوله می‌تواند در یک دایرهٔ عمودی حرکت کند. میله مطابق شکل به طور افقی نگهداشته می‌شود و آنگاه توسط نیروی رو به پایینی طوری هل داده می‌شود که گلوله به پایین تاب بخورد و پس از گردش دقیقاً به موضع قائمی برسد که در آنجا تندی‌اش صفر است. چقدر کار توسط نیروی گرانشی روی گلوله از نقطهٔ ابتدایی تا (الف) پایینترین نقطه، (ب) بالاترین نقطه، و (پ) نقطه‌ای در طرف راست که هم‌سطح نقطهٔ ابتدایی است، انجام شده است؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله- زمین در نقطهٔ ابتدایی برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن وقتی که گلوله به (ت) پایینترین نقطه، (ث) بالاترین نقطه، و (ج) نقطه‌ای در طرف راست که هم‌سطح نقطهٔ ابتدایی است برسد، چقدر است؟ (چ) فرض کنید میله با نیروی بیشتری هل داده شود، به گونه‌ای که گلوله از بالاترین نقطه با تندی غیر صفر عبور کند. آیا در این صورت $\Delta U_g$ از پایینترین نقطه تا بالاترین نقطه بیشتر می‌شود یا کمتر یا برابر همان مقداری می‌شود که در حالت توقف در بالاترین نقطه داشت؟




**شکل ۸-۳۱** مسئله‌های ۲ و ۱۲

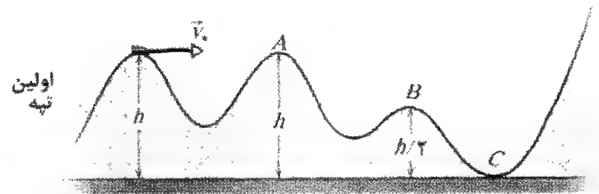
●۳- در شکل ۸-۳۲، قطعه یخ کوچکی به جرم $۲/۰۰\text{g}$ از لبهٔ ظرف نیمکره شکلی با شعاع $r$ برابر $۲۲/۰\text{cm}$ رها شده است. (الف) در حین پایین آمدن یخ تا ته ظرف چقدر کار روی قطعه یخ توسط نیروی گرانشی انجام شده است؟ (ب) در حین پایین آمدن، انرژی پتانسیل دستگاه قطعه یخ- زمین چقدر تغییر می‌کند؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل در ته ظرف برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن در هنگام رها شدن قطعه یخ چقدر است؟ (ت) اگر، به جای آن، انرژی پتانسیل در نقطهٔ رها شدن برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن هنگامی که قطعه یخ به ته ظرف می‌رسد چقدر است؟ (ث) اگر جرم قطعه یخ دو برابر شود، مقدارهای پاسخهای (الف) تا (ت) افزایش می‌یابند یا کاهش یا تغییر نمی‌کنند؟ SSM




**شکل ۸-۳۲** مسئله‌های ۳ و ۱۱

●۴- در شکل ۸-۳۳، یک قطار تفریحی به جرم $m=۸۲۵\text{kg}$ که بر مسیری بدون اصطکاک حرکت می‌کند با تندی $v_0=۱۷/۰\text{m/s}$ به بالای اولین بلندی به ارتفاع $h=۴۲/۰\text{m}$ می‌رسد. نیروی گرانشی از این نقطه تا (الف) نقطهٔ $A$، (ب) نقطهٔ $B$، و (پ) نقطهٔ $C$ چقدر کار روی قطار انجام می‌دهد؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قطار- زمین در نقطهٔ $C$ برابر

صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن هنگامی که قطار در (ت) نقطهٔ $B$ و (ث) نقطهٔ $A$ قرار دارد، چقدر است؟ (ج) اگر جرم $m$ دو برابر شود، آیا تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه میان نقطه‌های $A$ و $B$ افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟

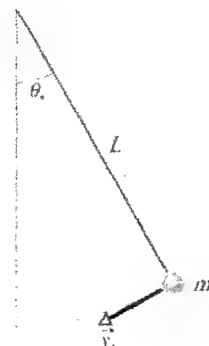



**شکل ۸-۳۳** مسئله‌های ۴ و ۱۳

●۵- هرگاه فنری ۷/۵cm نسبت به طول واهلیده‌اش فشرده شود، ۲۵J انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره می‌کند. ثابت فنر چقدر است؟ **SSM**

●۶- گلولهٔ برفی به جرم ۱/۵۰kg از بالای صخره‌ای به ارتفاع ۱۲/۵m پرتاب شده است. سرعت اولیهٔ گلوله ۱۴/۰m/s در راستای °۴۱/۰ بالای افق است. (الف) تا رسیدن گلولهٔ برف تا زمین تخت پایین صخره، نیروی گرانشی چقدر کار روی گلولهٔ برف انجام داده است؟ (ب) در حین این حرکت، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلولهٔ برف- زمین چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل گرانشی در بالای صخره برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن به هنگام رسیدن گلولهٔ برف به سطح زمین چقدر است؟

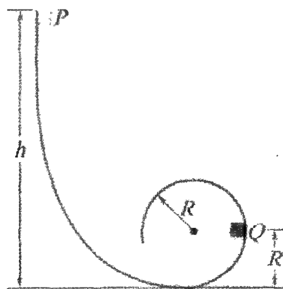
●●۷- شکل ۸-۳۴ میلهٔ باریکی به طول $L=$ ۲/۰۰m و جرم ناچیز را نشان می‌دهد که می‌تواند در یک انتها حول محوری روی دایرهٔ قائمی بچرخد. گلوله‌ای به جرم $m=$ ۵/۰۰kg به انتهای دیگر میله متصل شده است. میله را تا زاویهٔ $\theta_0=$ °۳۰/۰ به یک طرف می‌کشیم و سپس با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_0=$ ۰ رها می‌کنیم. وقتی گلوله به پایینترین نقطهٔ مسیرش می‌رسد، (الف) نیروی گرانشی چقدر کار روی گلوله انجام




**شکل ۸-۳۴** مسئله‌های ۷، ۱۶ و ۱۷

می‌دهد؟ و (ب) تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله- زمین چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل گرانشی در پایینترین نقطه برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن درست در لحظهٔ رها شدن گلوله چقدر است؟ (ت) اگر زاویهٔ $\theta$ افزایش یابد، آیا بزرگی پاسخهای (الف) تا (پ) افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟

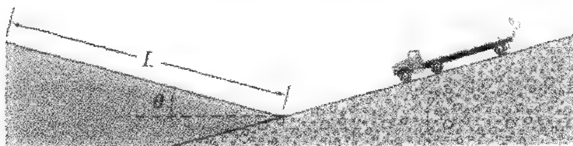
●●۸- در شکل ۸-۳۵ قطعهٔ کوچکی به جرم $m=$ ۰/۰۳۲kg می‌تواند بر مسیر خمیدهٔ بدون اصطکاکی که شعاع حلقهٔ آن $R=$ ۱۲cm است بلغزد. قطعه از حالت سکون در نقطهٔ $P$ به ارتفاع $h=$ ۵/۰$R$ بالاتر از کف حلقه رها می‌شود. به هنگام حرکت از نقطهٔ $P$ تا (الف) نقطهٔ $Q$ و (ب) بالای حلقه، نیروی گرانشی چقدر کار روی قطعه انجام می‌دهد؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قطعه- زمین در پایین حلقه صفر در نظر گرفته شود، انرژی پتانسیل آن در (پ) نقطهٔ $P$، (ت) نقطهٔ $Q$، و (ث) بالای حلقه چقدر است؟ (ج) اگر قطعه را به جای رها کردن با تندی اولیهٔ رو به پایین در امتداد مسیر بلغزانیم، آیا پاسخهای (الف) تا (ث) افزایش می‌یابند یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌مانند؟




**شکل ۸-۳۵** مسئله‌های ۸ و ۱۹

## بخش ۸-۵ پایستگی انرژی مکانیکی

●۹- در شکل ۸-۳۶ کامیونی که ترمز آن بریده است درست پیش از آنکه راننده آن را به شیب فرار اضطراری بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب رو به بالای $\theta=$ °۱۵ هدایت کند، با تندی ۱۳۰km/h در امتداد یک سراشیبی به طور غیر قابل کنترلی حرکت می‌کند. جرم کامیون $1/2\times10^4$ kg است. (الف) کمترین طول $L$ شیب اضطراری باید چقدر باشد تا کامیون (به طور لحظه‌ای) متوقف شود؟ (فرض کنید کامیون یک ذره است و این فرض را توجیه کنید.) (ب) اگر جرم کامیون کاهش یابد و (پ) اگر تندی آن کاهش یابد، آیا طول کمینهٔ $L$ افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟ **SSM**




**شکل ۸-۳۶** مسئلهٔ ۹

●۱۰- (الف) در مسئله ۱، تندی کتاب وقتی به دستهای دوستتان می‌رسد چقدر است؟ (ب) اگر کتاب دیگری را که جرمش دو برابر است جایگزین کنیم، تندی آن چقدر است؟ (پ) اگر، به جای این، کتاب را رو به پایین پرتاب کنیم آیا پاسخ (الف) افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟

●۱۱- (الف) در مسئلهٔ ۳، تندی قطعه یخ وقتی به ته ظرف می‌رسد چقدر است؟ (ب) اگر قطعه یخ دیگری را که جرمش دو برابر است جایگزین کنیم، تندی آن چقدر می‌شود؟ (پ) اگر، به جای این، به قطعه یخ تندی اولیهٔ رو به پایینی در امتداد سطح ظرف بدهیم، آیا پاسخ (الف) افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟ **SSM WWW**

●۱۲- (الف) در مسئله ۲، تندی اولیه‌ای که باید به گلوله داده شود تا با تندی صفر به مکان قائم در بالا برسد چقدر است؟ در این صورت تندی آن در (ب) پایینترین نقطه و (پ) نقطه‌ای در طرف راست که هم‌سطح نقطهٔ ابتدایی است، چقدر است؟ (ت) اگر جرم گلوله را دو برابر کنیم آیا پاسخهای (الف) تا (پ) افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟

●۱۳- در مسئله ۴، تندی قطار تفریحی در (الف) نقطهٔ $A$، (ب)نقطهٔ $B$، و (پ) نقطهٔ $C$ چقدر است؟ (ت) قطار تفریحی تا چه ارتفاعی بر بلندی آخر که ارتفاع آن به حدی زیاد است که نمی‌تواند از آن عبور کند، بالا می‌رود؟ (ث) اگر قطار هوایی دیگری را که جرمش دو برابر است جایگزین کنیم، آنگاه پاسخهای (الف) تا (ت) چه می‌شوند؟

●۱۴- (الف) در مسئله ۶، با استفاده از روشهای انرژی به جای روشهایی که در فصل ۴ مورد بحث قرار گرفتند، تندی گلولهٔ برف را به هنگام رسیدن به زمین پایین صخره به دست آورید. (ب) اگر زاویهٔ پرتاب به ۴۱° *زیر* افق تغییر کند و (پ) اگر جرم گلولهٔ برف ۲/۵۰kg شود، تندی گلولهٔ برف چقدر می‌شود؟

●۱۵- گلوله‌ای به جرم ۵/۰g با استفاده از یک تفنگ فنری به طور قائم رو به بالا شلیک می‌شود. فنر باید به اندازهٔ ۸/۰cm فشرده شود تا گلوله دقیقاً به هدفی برسد که ۲۰m بالای مکان گلوله روی فنر فشرده شده قرار دارد. (الف) در حین این صعود ۲۰ متری، تغییر $\Delta U_g$ انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله-زمین چقدر است؟ (ب) در حین پرتاب گلوله، تغییر $\Delta U_s$ انرژی پتانسیل کشسانی فنر چقدر است؟ (پ) ثابت فنر چقدر است؟ **SSM**

●●۱۶- (الف) در مسئلهٔ ۷، تندی گلوله در پایینترین نقطه چقدر است؟ (ب) اگر جرم گلوله افزایش یابد آیا تندی آن افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟

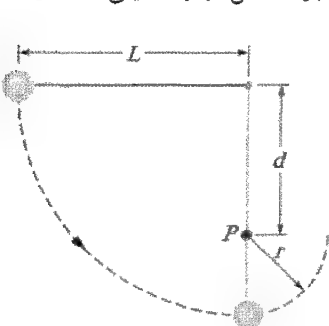
●●۱۷- شکل ۸-۳۴ آونگی به طول $L=$۱/۲۵m را نشان می‌دهد. تندی وزنهٔ آونگ (که به طور مؤثری جرم کل آونگ را دارد) در لحظه‌ای که ریسمان با خط قائم زاویهٔ $\theta_0=$۴۰/۰° را می‌سازد، برابر با $v_0$ است. (الف) اگر $v_0=$۸/۰۰m/s باشد، تندی وزنهٔ آونگ در لحظه‌ای که در پایینترین مکانش قرار دارد چقدر است؟ اگر آونگ رو به پایین تاب بخورد و سپس تا (ب) وضعیت افقی و (پ) وضعیت قائم به گونه‌ای بالا برود که ریسمان به وضعیت مستقیم برسد، کمترین مقداری که $v_0$ می‌تواند داشته باشد چقدر است؟ (ت) اگر $\theta_0$ به اندازهٔ چند درجه افزایش یابد آیا پاسخهای (ب) و (پ) افزایش می‌یابند یا کاهش، یا بدون تغییر باقی می‌مانند؟

●●۱۸- قطعه‌ای به جرم ۷۰۰g از حالت سکون و از ارتفاع $h_0$ بالای یک فنر قائم با ثابت فنر $k=$۴۰۰N/m و جرم ناچیز رها شده است. قطعه به فنر می‌چسبد و پس از فشردن آن به اندازهٔ ۱۹/۰cm به توقف لحظه‌ای می‌رسد. چه مقدار کار توسط (الف) قطعه روی فنر و (ب) فنر روی قطعه، انجام شده است؟ (پ) مقدار $h_0$ چقدر است؟ (ت) اگر قطعه از ارتفاع ۲/۰۰$h_0$ بالای فنر رها شود، فشردگی بیشینهٔ فنر چقدر است؟

●●۱۹- در مسئله ۸، بزرگیهای (الف) مؤلفهٔ افقی و (ب) مؤلفهٔ قائم نیروی *برایند* وارد بر قطعه در نقطهٔ $Q$ چقدر است؟ (پ) قطعه را از حالت سکون از چه ارتفاع $h$ باید رها کرد تا در بالاترین نقطهٔ حلقه در آستانهٔ قطع تماس با مسیر قرار گیرد؟ (*در آستانهٔ قطع تماس* به این معناست که نیروی عمودی وارد بر قطعه از طرف مسیر، از آن پس مقدارش صفر است.) (ت) بزرگی نیروی عمودی وارد بر قطعه در بالای حلقه را برحسب ارتفاع اولیهٔ $h$، برای گسترهٔ $h=$۰ تا $h=$۶$R$ رسم کنید.

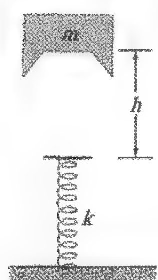
●●۲۰- تک نیروی پایستار $\vec{F}=($۶/۰$x-$۱۲$)\hat{\mathrm{i}}$ N، که در آن $x$ برحسب متر است، بر ذره‌ای که در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند وارد می‌شود. انرژی پتانسیل $U$ وابسته به این نیرو در $x=$۰ برابر ۲۷ J است. (الف) رابطه‌ای برای $U$ به صورت تابعی از $x$ بنویسید که در آن $U$ برحسب ژول و $x$ برحسب متر باشد. (ب) بیشینهٔ انرژی پتانسیل مثبت چقدر است؟ در چه مقدار (پ) منفی و (ت) مثبتی از $x$، انرژی پتانسیل برابر با صفر است؟

●●۲۱- به یک سر ریسمان شکل ۸-۳۷ که طول آن $L=$۱۲۰cm است گلوله‌ای متصل شده، و سر دیگر آن در جایی ثابت شده است. فاصلهٔ $d$ از انتهای ثابت شده تا نقطهٔ $P$ که در آنجا میخی کوبیده شده، ۷۵/۰cm است. وقتی گلوله‌ای که در ابتدا ساکن است مطابق شکل از وضعیتی که در آن ریسمان افقی است رها شود، گلوله در امتداد کمان خط چین تاب می‌خورد. هنگامی که گلوله (الف) به پایینترین نقطه‌اش و (ب) بالاترین نقطه‌اش پس از گیر کردن ریسمان در میخ می‌رسد، تندی گلوله چقدر است؟ **ILW**




شکل ۸-۳۷ مسئله‌های ۲۱ و ۶۸

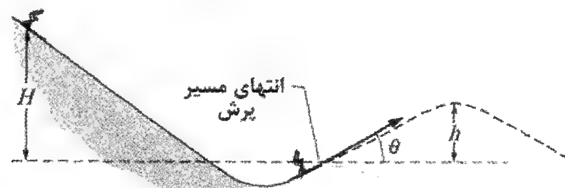
●●۲۲- قطعه‌ای به جرم $m=$۲/۰kg از ارتفاع $h=$۴۰cm روی فنری با ثابت فنر $k=$۱۹۶۰N/m رها می‌شود (شکل ۸-۳۸). فاصلهٔ بیشینه‌ای را که فنر فشرده می‌شود پیدا کنید.




شکل ۸-۳۸ مسئلهٔ ۲۲

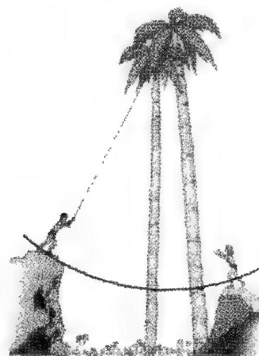
●●۲۳- در لحظهٔ $t=0$، گلوله‌ای به جرم $1/0\text{kg}$ از بالای برج بلندی با سرعت اولیهٔ $\vec{v}=(18\text{m/s})\hat{i}+(24\text{m/s})\hat{j}$ پرتاب شده است. تغییر انرژی پتانسیل گرانشی $\Delta U$ دستگاه گلوله- زمین بین دو لحظهٔ $t=0$ و $t=6/0\text{s}$ (که هنوز در سقوط آزاد است) چقدر است؟

●●۲۴- اسکی بازی به جرم $60\text{kg}$ از ارتفاع $H=20\text{m}$ بالای سطح شیبدار پرش از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. (شکل ۸-۳۹). وقتی اسکی باز مسیر پرش را ترک می‌کند، بردار سرعت او با افق زاویهٔ $\theta=28°$ می‌سازد. از مقاومت هوا چشمپوشی و فرض کنید که مسیر پرش بدون اصطکاک است. (الف) ارتفاع بیشینهٔ $h$ که اسکی باز پس از انتهای مسیر پرش به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) اگر او وزن خود را با گذاشتن یک کوله پشتی افزایش دهد، آیا ارتفاع $h$ بزرگتر می‌شود یا کوچکتر، یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟



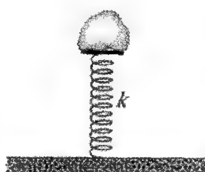
شکل ۸-۳۹ مسئلهٔ ۲۴

●●۲۵- تارزان به وزن $688\text{ N}$ در حالی که انتهای شاخهٔ نرم درختی به طول $18\text{m}$ را در دست دارد از بالای صخره‌ای تاب می‌خورد (شکل ۸-۴۰). او از بالای صخره تا پایینترین نقطهٔ مسیر تاب، به اندازهٔ $3/2\text{ m}$ پایین می‌آید. اگر نیروی وارد بر شاخهٔ درخت از $950\text{N}$ بیشتر شود، شاخهٔ درخت می‌شکند. (الف) آیا شاخهٔ درخت می‌شکند؟ (ب) اگر نمی‌شکند، بیشترین نیروی وارد بر آن در حین تاب خوردن چقدر است؟ اگر می‌شکند، در چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم می‌شکند؟


شکل ۸-۴۰ مسئلهٔ ۲۵

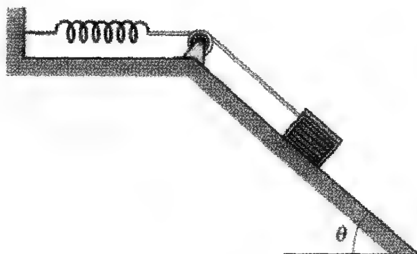
●●۲۶- آونگی شامل یک سنگ $2/0$ کیلوگرمی است که با ریسمانی به طول $4/0\text{m}$ و جرم ناچیز تاب می‌خورد. هنگامی که سنگ از پایینترین نقطهٔ مسیرش می‌گذرد، دارای تندی $8/0\text{m/s}$ است. (الف) وقتی ریسمان با خط قائم زاویهٔ $60°$ می‌سازد، تندی سنگ چقدر است؟ (ب) بزرگترین زاویه‌ای که ریسمان در حین حرکت سنگ با خط قائم می‌سازد چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل دستگاه آونگ- زمین در پایینترین نقطهٔ سنگ برابر صفر در نظر گرفته شود، انرژی مکانیکی کل دستگاه چقدر است؟

●●۲۷- شکل ۸-۴۱ سنگی به جرم $8/00\text{kg}$ را نشان می‌دهد که به حالت سکون روی فنری قرار دارد. فنر توسط سنگ به اندازهٔ $10/0\text{cm}$ فشرده شده است؟ (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) سنگ به اندازهٔ $30/0\text{cm}$ دیگر رو به پایین فشرده و سپس رها می‌شود. انرژی پتانسیل کشسانی فنر درست پیش از رها شدن چقدر است؟ (پ) هنگامی که سنگ از نقطهٔ رها شدن تا ارتفاع بیشینه‌اش حرکت می‌کند، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه سنگ- زمین چقدر است؟ (ت) این ارتفاع بیشینهٔ نسبت به نقطهٔ رها شدن چقدر است؟



شکل ۸-۴۱ مسئلهٔ ۲۷

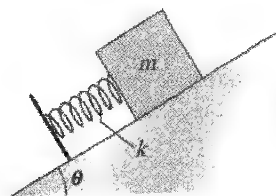
●●۲۸- همان‌گونه که در شکل ۸-۴۲ نشان داده شده است، جعبه‌ای به جرم $2/0\text{kg}$ که روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta=40°$ قرار دارد توسط ریسمانی که به دور یک قرقره پیچیده شده به فنر سبکی با ثابت فنر $k=120\text{N/m}$ متصل شده است. وقتی فنر کشیده نشده است جعبه از حالت سکون رها می‌شود. فرض کنید قرقره بدون جرم و بدون اصطکاک است. (الف) وقتی جعبه $10\text{cm}$ رو به پایین سطح شیبدار حرکت کند، تندی آن چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ نقطه‌ای که جعبه از آنجا رها شده تا نقطه‌ای که پس از لغزش روی سطح شیبدار در آنجا به توقف لحظه‌ای می‌رسد، چقدر است؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت (رو به بالا یا رو به پایین شیب) شتاب جعبه در لحظه‌ای که جعبه به توقف لحظه‌ای می‌رسد چیست؟



شکل ۸-۴۲ مسئلهٔ ۲۸

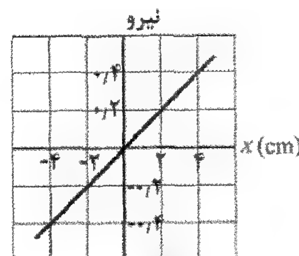
●●۲۹- قطعه‌ای به جرم $m=2/00\text{kg}$ در برابر فنری روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta=30/0°$ قرار دارد (شکل ۸-۴۳). (قطعه به فنر متصل نشده است.) فنر با ثابت فنر $k=19/6\text{N/cm}$ به اندازهٔ $20/0\text{cm}$ فشرده شده و سپس رها می‌شود. (الف) انرژی پتانسیل کشسانی فنر فشرده

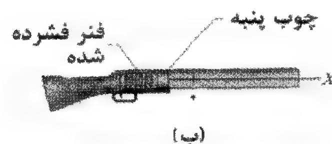
شده چقدر است؟ (ب) تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قطعه- زمین وقتی که قطعه از نقطهٔ رها شدن به بالاترین نقطه‌اش روی سطح شیبدار می‌رسد چقدر است؟ (پ) فاصلهٔ بالاترین نقطه از نقطهٔ رها شدن روی سطح شیبدار چقدر است؟ **ILW**



**شکل ۸-۴۳** مسئلهٔ ۲۹

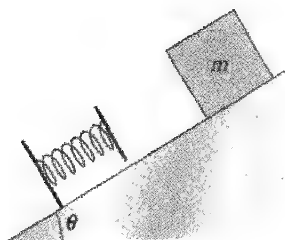
**●●۳۰**- شکل ۸-۴۴ الف مربوط به فنر یک تفنگ چوب پنبه‌ای (شکل ۸-۴۴ ب) است؛ این شکل، نیروی فنر را بر حسب تابعی از کشیدگی یا فشردگی فنر نشان می‌دهد. فنر به اندازهٔ ۵/۵cm فشرده می‌شود و برای به جلو راندن چوب پنبه‌ای به جرم ۳/۸g در تفنگ مورد استفاده قرار می‌گیرد. (الف) اگر چوب‌پنبه در لحظه‌ای که فنر از موضع واهلیده‌اش عبور می‌کند رها شده باشد، تندی آن چقدر است؟ (ب) فرض کنید، این‌بار چوب پنبه به فنر بچسبد و پیش از آنکه از فنر جدا شود آن را به اندازهٔ ۱/۵cm بکشد. اکنون تندی چوب پنبه در لحظهٔ رها شدن چقدر است؟



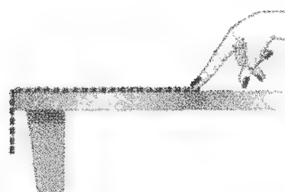

**شکل ۸-۴۴** مسئله ۳۰

**●●۳۱**- در شکل ۸-۴۵، قطعه‌ای به جرم $m = ۱۲\,\text{kg}$ روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta = ۳۰°$ رها می‌شود. در پایین قطعه، فنری قرار دارد که می‌تواند با نیروی ۲۷۰N به اندازهٔ ۲/۰cm فشرده شود. وقتی فنر به اندازهٔ ۵/۵cm فشرده شود، قطعه به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود. (الف) قطعه روی سطح شیبدار چه فاصله‌ای را از حالت سکون تا نقطهٔ توقف لحظه‌ای طی می‌کند؟ (ب) تندی قطعه درست در لحظهٔ تماس با فنر چقدر است؟ **SSM WWW**



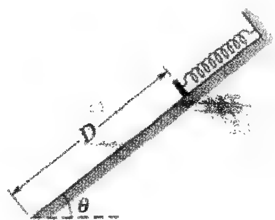
**شکل ۸-۴۵** مسئله‌های ۳۱ و ۳۷

**●●۳۲**- در شکل ۸-۴۶، زنجیری روی میز بدون اصطکاکی طوری نگهداشته شده است که یک چهارم طول آن از لبهٔ میز آویزان باشد. اگر طول زنجیر $L = ۲۸\,\text{cm}$ و جرم آن $m = ۰/۰۱۲\,\text{kg}$ باشد، چقدر کار برای بالا کشیدن بخش آویخته به روی میز لازم است؟



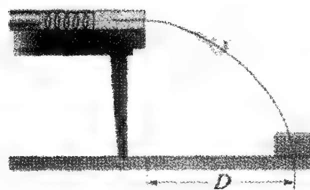
**شکل ۸-۴۶** مسئلهٔ ۳۲

**●●۳۳**- در شکل ۸-۴۷، فنری با ثابت فنر $k = ۱۷۰\,\text{N/m}$ در بالای سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta = ۳۷/۰°$ قرار دارد. انتهای پایینی سطح شیبدار از سر آزاد فنر که در طول واهلیده‌اش است، $D = ۱/۰۰\,\text{m}$ فاصله دارد. فنر با یک قوطی به جرم ۲/۰۰kg به اندازهٔ ۰/۲۰۰m فشرده شده و سپس از حالت سکون رها می‌شود. (الف) تندی قوطی در لحظه‌ای که فنر دوباره به طول واهلیده‌اش می‌رسد (که این، همان زمانی است که تماس قوطی با فنر قطع می‌شود) چقدر است؟ (ب) تندی قوطی در لحظهٔ رسیدن به پایین سطح شیبدار چقدر است؟




**شکل ۸-۴۷** مسئله ۳۳

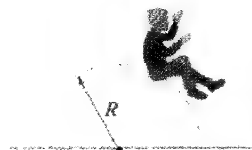
**●●●۳۴**- دو بچه در حال بازی‌اند و می‌خواهند با تیله‌هایی که از یک تفنگ فنری پر شده واقع بر یک میز شلیک می‌شوند، جعبهٔ کوچکی را در کف اتاق هدف قرار دهند. جعبهٔ هدف در فاصلهٔ افقی $D = ۲/۲۰\,\text{m}$ از لبهٔ میز قرار دارد؛ شکل ۸-۴۸ را ببینید. یکی از آنها فنر را به اندازهٔ ۱/۱۰cm فشرده می‌کند، ولی تیله ۲۷/۰cm در فاصلهٔ کوتاهتری نسبت به مرکز جعبه به زمین می‌افتد. نفر بعدی چقدر باید فنر را فشرده کند تا تیله درست به هدف بخورد؟ فرض کنید نه بر فنر و نه بر تیله هیچ اصطکاکی از طرف تفنگ وارد نمی‌شود.




**شکل ۸-۴۸** مسئلهٔ ۳۴

••••۳۵- ریسمان یکنواختی به طول ۲۵ cm و جرم ۱۵ g در ابتدا به سقف چسبیده است. سپس در حالی که فقط یک سر آن به سقف چسبیده است، به طور قائم از سقف آویزان می‌شود. تغییر انرژی پتانسیل گرانشی ریسمان بر اثر این تغییر سمتگیری چقدر است؟ (*راهنمایی:* یک عنصر دیفرانسیلی از ریسمان را در نظر بگیرید و سپس از حسابان استفاده کنید.)

••••۳۶- پسر بچه‌ای در ابتدا بالای یک تپهٔ یخی به شکل نیمکره به شعاع $R$ = ۱۳/۸m نشسته است. او با تندی اولیهٔ ناچیزی شروع به لغزیدن می‌کند (شکل ۸-۴۹). یخ را بدون اصطکاک فرض کنید. پسر بچه در چه ارتفاعی از یخ جدا می‌شود؟




**شکل ۸-۴۹** مسئلهٔ ۳۶

•••۳۷ در شکل ۸-۴۵، قطعه‌ای به جرم $m$ = ۳/۲۰ kg روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta$ = ۳۰/۰° از حالت سکون شروع به لغزیدن می‌کند و پس از طی مسافت d به فنری با ثابت فنر ۴۳۱N/m برخورد می‌کند. وقتی قطعه به توقف لحظه‌ای می‌رسد، فنر را به اندازهٔ ۲۱/۰cm فشرده می‌کند. (الف) مسافت $d$ و (ب) فاصلهٔ میان اولین نقطهٔ تماس قطعه- فنر و نقطه‌ای که در آنجا قطعه بیشترین تندی را دارد چقدر است؟

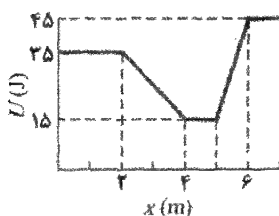
## بخش ۸-۶ استفاده از منحنی انرژی پتانسیل

••۳۸- انرژی پتانسیل یک مولکول دو اتمی (یک دستگاه دو اتمی مثل $H_2$ یا $O_2$) با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^{6}}$$

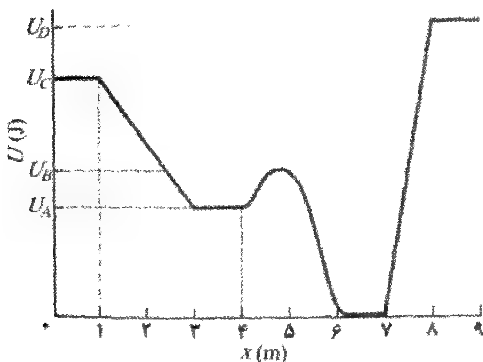
که در آن $r$ فاصلهٔ میان دو اتم در مولکول، و $A$ و $B$ مقدارهایی ثابت و مثبت‌اند. این انرژی پتانسیل با نیرویی که دو اتم را به یکدیگر پیوند می‌دهد، وابسته است. (الف) *فاصلهٔ جدایی تعادل*- یعنی، فاصله‌ای میان دو اتم را که در آن نیروی وارد بر هر اتم صفر است- بیابید. اگر فاصلهٔ میان آنها (ب) کمتر و (پ) بیشتر از فاصلهٔ جدایی تعادل باشد، آیا نیرو رانشی است (اتمها از هم دور می‌شوند) یا ربایشی (اتمها به هم نزدیک می‌شوند)؟

••۳۹- شکل ۸-۵۰ نمودار انرژی پتانسیل $U$ را برحسب مکان $x$ ذره‌ای به جرم ۰/۹۰kg نشان می‌دهد که می‌تواند فقط در امتداد محور $x$ حرکت کند (نیروهای ناپایستار وارد نشده‌اند). سه مقدار عبارت‌اند از $U_A$ = ۱۵/۰J ، $U_B$ = ۳۵/۰J و $U_C$ = ۴۵/۰J . ذره در $x$ = ۴/۵m با تندی اولیهٔ ۷/۰m/s در جهت منفی $x$ رها می‌شود. (الف) اگر ذره بتواند به $x$ = ۱/۰m برسد، تندی در آنجا چقدر است؟ و اگر نتواند برسد، نقطهٔ برگشت آن چیست؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت نیروی وارد بر ذره در لحظه‌ای که شروع به حرکت به طرف چپ $x$ = ۴/۰m می‌کند چیست؟ فرض کنید، به جای این، ذره در $x$ = ۴/۵m با تندی ۷/۰m/s در جهت مثبت $x$ رها شود. (ت) اگر ذره بتواند به $x$ = ۷/۰m برسد، تندی در آنجا چقدر است؟ و اگر نتواند برسد، نقطهٔ برگشت آن چیست؟ (ث) بزرگی و (ج) جهت نیروی وارد بر ذره در لحظه‌ای که شروع به حرکت به طرف راست $x$ = ۵/۰m می‌کند، چیست؟




**شکل ۸-۵۰** مسئلهٔ ۳۹

••۴۰- شکل ۸-۵۱ نمودار انرژی پتانسیل $U$ را برحسب $x$ برای ذره‌ای به جرم ۰/۲۰۰ kg نشان می‌دهد که بر اثر یک نیروی پایستار فقط می‌تواند در راستای محور $x$ حرکت کند. نمودار دارای مقدارهای $U_A$ = ۹/۰۰J ، $U_C$ = ۲۰/۰۰J و $U_D$ = ۲۴/۰۰J است. ذره از نقطه‌ای رها می‌شود که در آنجا $U$ «قلهٔ پتانسیل» با «بلندی» $U_B$ = ۱۲/۰۰J با انرژی جنبشی ۴/۰۰J را تشکیل می‌دهد. تندی ذره در (الف) $x$ = ۳/۵m و (ب) $x$ = ۶/۵m چقدر است؟ مکان نقطهٔ برگشت در (پ) سمت راست و (ت) در سمت چپ در کجا واقع است؟




**شکل ۸-۵۱** مسئلهٔ ۴۰

•••۴۱- نیروی پایستار $F(x)$ روی ذره‌ای به جرم ۱/۰kg که در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند، وارد می‌شود. انرژی پتانسیل $U(x)$ وابسته به $F(x)$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$U(x) = -4xe^{-x/4}\text{J}$$

که در آن $x$ برحسب متر است. در $x = 5.0\text{m}$ ، انرژی جنبشی ذره $2.0\text{J}$ است. (الف) انرژی مکانیکی دستگاه چقدر است؟ (ب) نمودار $U(x)$ را به صورت تابعی از $x$ در بازهٔ $0 \le x \le 10\text{m}$ رسم کنید و روی آن خطی را که نمایانگر انرژی مکانیکی دستگاه است بکشید. با استفاده از قسمت (ب) مقدار(پ) کمینهٔ $x$ و (ت) بیشینهٔ $x$ را که ذره بین آن دو می‌تواند حرکت کند به دست آورید. (ث) با استفاده از قسمت (ب) انرژی جنبشی بیشینهٔ ذره را به دست آورید و (ج) در آن لحظه مقدار $x$ را تعیین کنید. (چ) معادلهٔ مربوط به تابع $F(x)$ برحسب $x$ را بنویسید. (ح) به ازای چه مقداری (متناهی) از $x$، $F(x) = 0$ است؟

## بخش ۸-۷ کار انجام شده روی یک دستگاه توسط نیرویی خارجی

●۴۲- کارگری قطعه‌ای به جرم $27\text{kg}$ را با نیرویی که در راستای $32°$ زیر افق قرار دارد با تندی ثابت به اندازهٔ $9.2\text{m}$ روی سطحی هل می‌دهد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و سطح $0.20$ باشد، (الف) کار انجام شده توسط نیروی کارگر و (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه قطعه- سطح چقدر است؟

●۴۳- یک سگ گله لانه‌اش را با وارد آوردن نیروی افقی $8.0\text{N}$ روی کفی می‌کشد. بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر لانه برابر $5.0\text{N}$ است. وقتی لانه به اندازهٔ $0.70\text{m}$ روی زمین کشیده شود (الف) کار انجام شده توسط نیروی وارد شده از طرف سگ و (ب) افزایش انرژی گرمایی لانه و سطح زمین چقدر است؟

●●۴۴- یک نیروی افقی به بزرگی $35.0\text{N}$، قطعه‌ای به جرم $4.00\text{kg}$ را روی کفی هل می‌دهد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و کف $0.600$ باشد، (الف) وقتی قطعه روی کف به اندازهٔ $3.00\text{m}$ جابه‌جا می‌شود، نیروی وارد شده چقدر کار روی دستگاه قطعه- کف انجام داده است؟ (ب) در طی این جابه‌جایی، انرژی گرمایی قطعه به اندازهٔ $40.0\text{J}$ افزایش می‌یابد. انرژی گرمایی کف چقدر افزایش یافته است؟ (پ) افزایش انرژی جنبشی قطعه چقدر است؟

●●۴۵- از طناب برای کشیدن قطعه‌ای به جرم $3.57\text{kg}$ روی یک کف افقی استفاده شده است. طناب نیرویی به بزرگی $7.68\text{N}$ را در جهت $15.0°$ بالای افق به قطعه وارد می‌آورد و آن را با تندی ثابت به اندازهٔ $4.06\text{m}$ جابه‌جا می‌کند. مطلوب است (الف) کار انجام شده توسط نیروی طناب، (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه قطعه- کف، (پ) ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و کف. SSM

## بخش ۸-۸ پایستگی انرژی

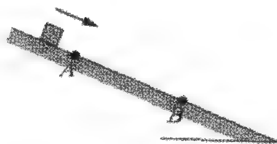
●۴۶- اسکی‌بازی به جرم $60\text{kg}$ انتهای مسیر پرش را با سرعت $24\text{ m/s}$ در جهت $25°$ بالای افق ترک می‌کند. فرض کنید تحت تأثیر کشش هوا، اسکی باز با تندی $22\text{ m/s}$ به سطح زمین که به طور قائم $14\text{m}$ زیر انتهای مسیر پرش قرار دارد، باز گردد. از لحظهٔ جدا شدن از انتهای مسیر پرش تا بازگشت به سطح زمین، انرژی مکانیکی دستگاه اسکی باز- زمین تحت تأثیر کشش هوا به چه میزانی کاهش یافته است؟

●۴۷- خرسی به جرم $25\text{kg}$ از حالت سکون به اندازهٔ $12\text{m}$ بر درخت کاجی رو به پایین سر می‌خورد و تندی آن درست پیش از برخورد با سطح زمین، $5.6\text{m/s}$ است. (الف) در حین سُر خوردن خرس، تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه خرس- زمین چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی خرس درست پیش از برخورد با سطح زمین چقدر است؟ (پ) نیروی اصطکاک متوسطی که در حین سُر خوردن بر خرس وارد می‌شود چقدر است؟ SSM ILW

●۴۸- یک بازیکن بیسبال، توپ را با تندی اولیهٔ $81.8\text{mi/h}$ پرتاب می‌کند. درست پیش از آنکه بازیکن گیرنده توپ را در همان ارتفاع بگیرد، تندی توپ $110\text{ft/s}$ است. انرژی مکانیکی دستگاه توپ- زمین برحسب فوت- پاوند، بر اثر کشش هوا چقدر کاهش یافته است؟ (وزن یک توپ بیسبال $9.0\text{oz}$ است.)

●۴۹- یک بشقاب پلاستیکی (فریزبی)[1] به جرم $75\text{g}$ از نقطه‌ای که $1.1\text{m}$ بالای سطح زمین است با تندی $12\text{m/s}$ پرتاب می‌شود. وقتی بشقاب به ارتفاع $2.1\text{m}$ می‌رسد، تندی آن برابر $10.5\text{m/s}$ است. کاهش $E_{\text{mec}}$ دستگاه بشقاب- زمین بر اثر کشش هوا چقدر است؟

●۵۰- در شکل ۸-۵۲، قطعه‌ای روی سطح شیبداری رو به پایین می‌لغزد. هنگامی که قطعه از نقطهٔ $A$ به نقطهٔ $B$ که به فاصلهٔ $5.0\text{m}$ از آن قرار دارد حرکت کند، نیروی $\vec{F}$ به بزرگی $2.0\text{N}$ که جهت آن رو به پایین شیب است بر قطعه وارد می‌شود. بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر قطعه $10\text{N}$ است. اگر انرژی جنبشی قطعه در فاصلهٔ میان $A$ تا $B$ به اندازهٔ $35\text{J}$ افزایش یابد، در حین حرکت قطعه از $A$ به $B$ نیروی گرانشی چقدر کار روی قطعه انجام می‌دهد؟




**شکل ۸-۵۲** مسئله‌های ۵۰ و ۶۹

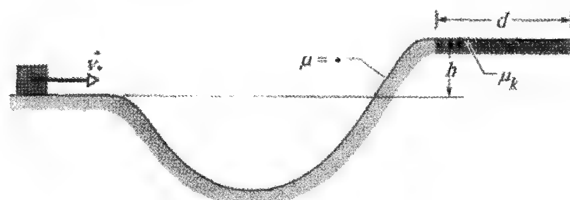
●۵۱- بر اثر ریزش کوه، تخته سنگی به جرم $520\text{kg}$ از دامنهٔ کوهی به طول $500\text{m}$ و ارتفاع $300\text{m}$ ، از حالت سکون به پایین می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی میان تخته سنگ و سطح کوه برابر $0.25$ است. (الف) اگر انرژی پتانسیل گرانشی $U$ دستگاه تخته سنگ- زمین در پایین کوه برابر صفر باشد، مقدار $U$ درست پیش از لغزیدن تخته سنگ چقدر است؟ (ب)

1. Frisbee

در حین لغزیدن تخته سنگ، چقدر انرژی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ (پ) انرژی جنبشی تخته سنگ در لحظهٔ رسیدن به پایین کوه چقدر است؟ (ت) در آن موقع تندی تخته سنگ چقدر است؟

●●۵۲- قطعه‌ای به جرم ۲/۰kg را به یک فنر افقی مقابل آن فشار می‌دهیم و فنر به اندازهٔ ۱۵cm فشرده می‌شود. پس از آنکه قطعه رها شود، فنر آن را روی میز می‌لغزاند. قطعه پس از طی مسافت ۷۵cm از جایی که رها شده است، متوقف می‌شود. ثابت فنر برابر ۲۰۰N/m است. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و میز چقدر است؟

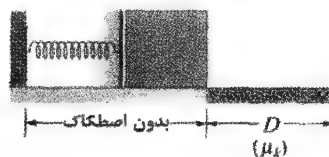
●●۵۳- در شکل ۸-۵۳، قطعه‌ای با عبور از یک درهٔ میانی، از یک سطح به سطحی بالاتر می‌لغزد. مسیر تا رسیدن قطعه به سطح بالاتر بدون اصطکاک است. در آنجا نیروی اصطکاک قطعه را پس از طی مسافت $d$ متوقف می‌کند. تندی اولیهٔ $v_0$ قطعه برابر ۶/۰ m/s، اختلاف بلندی $h$ دو سطح برابر ۱/۱ m و $\mu_k$ برابر ۰/۶۰ است. $d$ را به دست آورید.




شکل ۸-۵۳ مسئلهٔ ۵۳

●●۵۴- یک کلوچهٔ بزرگ که روی سطحی افقی می‌لغزد، به یک سر فنری افقی با ثابت فنر $k = ۴۰۰$N/m متصل شده است؛ سر دیگر فنر در جایی ثابت شده است. هنگامی که کلوچه از مکان تعادل فنر می‌گذرد، دارای انرژی جنبشی ۲۰/۰J است. با لغزیدن کلوچه، نیروی اصطکاکی به بزرگی ۱۰/۰N بر آن وارد می‌شود. (الف) کلوچه از مکان تعادل تا پیش از رسیدن به سکون لحظه‌ای چقدر می‌لغزد؟ (ب) انرژی جنبشی کلوچه هنگامی که رو به عقب از مکان تعادل فنر می‌گذرد چقدر است؟

●●۵۵- شکل ۸-۵۴، قطعه‌ای به جرم ۳/۵kg را نشان می‌دهد که توسط فنری فشرده شده با ثابت فنر ۶۴۰N/m از حالت سکون شتاب گرفته است. قطعه هنگامی که فنر به طول واهلیده‌اش می‌رسد از فنر جدا می‌شود و سپس روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = ۰/۲۵$ حرکت می‌کند. نیروی اصطکاک، قطعه را پس از طی مسافت $D = ۷/۸$m متوقف می‌کند. (الف) افزایش انرژی گرمایی دستگاه قطعه- سطح، (ب) انرژی جنبشی بیشینهٔ قطعه، و (پ) طول فشردگی اولیهٔ فنر چقدر است؟



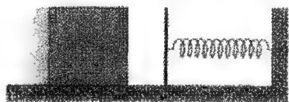

شکل ۸-۵۴ مسئلهٔ ۵۵

●●۵۶- بسته‌ای به جرم ۴/۰kg با انرژی جنبشی ۱۲۸ J شروع به بالا رفتن از شیبی با زاویهٔ °۳۰ می‌کند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین بسته و سطح شیبدار برابر ۰/۳۰ باشد، بسته چقدر روی شیب بالا خواهد رفت؟

●●۵۷- وقتی نوعی سوسک به نام سوسک *صدادار*[1] به پشت وارونه شود، قوسی به کمر خود می‌دهد و ناگهان رو به بالا می‌جهد و به این ترتیب انرژی ذخیره شده در عضله را به انرژی مکانیکی تبدیل می‌کند. این ساز و کار پرتابی صدای تیز قابل شنیدنی را ایجاد می‌کند که نام این سوسک از همان گرفته شده است. نوار ویدئویی از پرش یک سوسک مشخص نشان می‌دهد که سوسکی به جرم $m = ۴/۰ \times ۱۰^{-۶}$ kg در حین پرتاب، نخست به اندازهٔ ۰/۷۷mm مستقیماً رو بالا می‌رود و سپس تا ارتفاع بیشینهٔ $h = ۰/۳۰$m رو به بالا می‌جهد. در حین پرتاب، بزرگی متوسط (الف) نیروی خارجی وارد به پشت سوسک از طرف کف و (ب) شتاب سوسک برحسب $g$ چقدر است؟

●●۵۸- بچه‌ای که وزن او ۲۶۷N است از سرسره‌ای به طول ۶/۱ m که با افق زاویهٔ °۲۰ می‌سازد، رو به پایین سر می‌خورد. ضریب اصطکاک جنبشی بین سرسره و بچه ۰/۱۰ است. (الف) چقدر انرژی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ (ب) اگر او از بالای سرسره با تندی ۰/۴۵۷m/s شروع به لغزیدن کند، تندی او در پایین سرسره چقدر است؟

●●۵۹- در شکل ۸-۵۵، قطعه‌ای به جرم $m = ۲/۵$kg به طرف فنری با ثابت فنر $k = ۳۲۰$ N/m می‌لغزد. وقتی قطعه متوقف شود، فنر را به اندازهٔ ۷/۵cm فشرده می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و سطح ۰/۲۵ است. در حین تماس قطعه با فنر تا هنگام توقف (الف) کار انجام توسط نیروی فنر و (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه قطعه- سطح چقدر است؟ (پ) تندی قطعه درست در لحظه‌ای که به فنر می‌رسد چقدر است؟ ILW



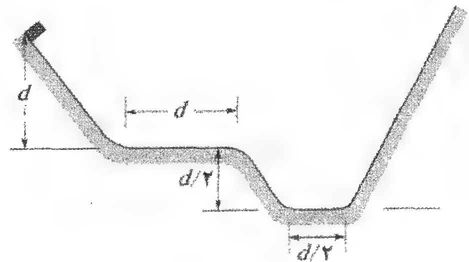
شکل ۸-۵۵ مسئلهٔ ۵۹

●●۶۰- یک ظرف کیک روی شیبی با زاویهٔ °۴۰ رو به بالا حرکت داده می‌شود. در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۵۵cm از پایین سطح شیبدار (که در امتداد شیب اندازه‌گیری شده است)، تندی ظرف برابر ۱/۴m/s است. ضریب اصطکاک جنبشی بین ظرف و سطح شیبدار ۰/۱۵ است. (الف) ظرف تا چه مسافت بیشتری روی سطح شیبدار رو به بالا حرکت می‌کند؟ (ب) ظرف موقع برگشتن به پایین با چه سرعتی به پایین سطح می‌رسد؟ (پ) اگر ضریب اصطکاک جنبشی را کاهش دهیم (ولی تندی و مکان داده شده را تغییر ندهیم) آیا پاسخهای (الف) و (ب) افزایش می‌یابند یا کاهش یا بدون تغییر می‌مانند؟

---
1. click beetle

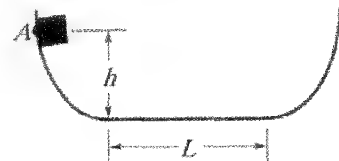
••۶۱- سنگی به وزن $5/29N$ به طور قائم با تندی اولیهٔ $20/0m/s$ از سطح زمین پرتاب شده است. نیروی کششی هوای وارد بر سنگ در حین پرواز برابر $0/265N$ است. (الف) ارتفاع بیشینه‌ای که سنگ به آن می‌رسد و (ب) تندی آن درست پیش برخورد با زمین چقدر است؟

•••۶۲- در شکل ۸-۵۶، قطعه‌ای که در ارتفاع $d = 40cm$ از حالت سکون رها شده است، پس از آنکه بر شیب بدون اصطکاکی رو به پایین می‌لغزد، وارد اولین بخش مسطح می‌شود که طول آن $d$ و ضریب اصطکاک جنبشی آن $0/50$ است. اگر قطعه باز هم به حرکت خود ادامه دهد، آنگاه بر شیب بدون اصطکاک دومی به بلندی $d/2$ رو به پایین می‌لغزد و سپس وارد ناحیهٔ مسطح دومی می‌شود که طول آن $d/2$ و ضریب اصطکاک جنبشی آن دوباره $0/50$ است. اگر باز قطعه به حرکت خود ادامه دهد، از شیب بدون اصطکاک دیگری آنقدر بالا می‌رود تا به توقف (لحظه‌ای) برسد. قطعه در کجا متوقف می‌شود؟ اگر محل توقف نهایی آن روی یکی از بخشهای مسطح باشد، آن بخش را تعیین کنید و فاصلهٔ $L$ از لبهٔ چپ آن را به دست آورید. اگر قطعه به شیب آخری می‌رسد، ارتفاع H محل توقف لحظه‌ای را از بالای پایینترین بخش مسطح به دست آورید.



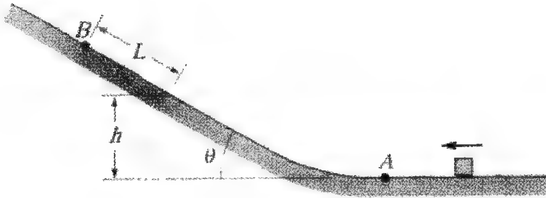
**شکل ۸-۵۶** مسئلهٔ ۶۲

•••۶۳- قطعهٔ کوچکی می‌تواند در امتداد مسیری که بخش میانی آن مسطح و دو انتهای آن بالا آمده است، مطابق شکل ۸-۵۷ بلغزد. طول قسمت مسطح برابر با $L = 40cm$ است. بخشهای خمیدهٔ مسیر بدون اصطکاک‌اند، ولی ضریب اصطکاک جنبشی بخش مسطح برابر $\mu_k = 0/20$ است. قطعه در نقطهٔ $A$ به ارتفاع $h = L/2$، از حالت سکون رها شده است. قطعه سرانجام در چه فاصله‌ای از لبهٔ سمت چپ قسمت مسطح، متوقف می‌شود؟



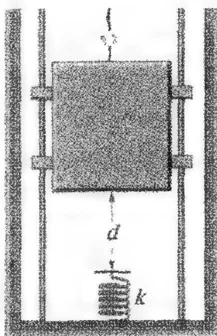
**شکل ۸-۵۷** مسئلهٔ ۶۳

•••۶۴- در شکل ۸-۵۸، قطعه‌ای بر مسیر بدون اصطکاکی [رو به بالا] می‌لغزد تا اینکه به بخشی به طول $L = 0/75m$ می‌رسد که در ارتفاع $h = 2/0m$ روی شیبی با زاویهٔ $\theta = 30°$ آغاز می‌شود. در این بخش، ضریب اصطکاک جنبشی $0/40$ است. قطعه با تندی $8/0m/s$ از نقطهٔ $A$ عبور می‌کند. اگر قطعه بتواند به نقطهٔ $B$ برسد (جایی که اصطکاک به پایان می‌رسد)، تندی قطعه در آن نقطه چقدر است؟ و اگر نتواند به آن نقطه برسد، بیشترین ارتفاعی که در بالای نقطهٔ $A$ می‌تواند به آن برسد چقدر است؟



**شکل ۸-۵۸** مسئلهٔ ۶۴

•••۶۵- کابل اتاقک بالابری به جرم $1800kg$ هنگامی که اتاقک در طبقهٔ اول ساکن است و کف آن به فاصلهٔ $d = 3/7m$ بالای فنری با ثابت فنر $k = 0/15MN/m$ قرار دارد، مطابق شکل ۸-۵۹ پاره می‌شود. یک وسیلهٔ ایمنی، اتاقک را به میله‌های هدایت‌کنندهٔ مقابل آن محکم کرده است، طوری که نیروی اصطکاک ثابت $4/4kN$ با حرکت اتاقک مخالفت می‌کند. (الف) تندی اتاقک را درست پیش از برخورد با فنر به دست آورید. (ب) مسافت بیشینهٔ $x$ را که فنر فشرده می‌شود به دست آورید (نیروی اصطکاک در حین این فشردگی کماکان وارد می‌شود). (پ) مسافتی را که اتاقک رو به بالا وامی‌جهد به دست آورید. (ت) با استفاده از پایستگی انرژی، مسافت کل تقریبی را که اتاقک پیش از متوقف شدن طی می‌کند بیابید. (فرض کنید نیروی اصطکاک وارد بر اتاقک در لحظه‌ای که اتاقک ساکن است، ناچیز باشد.)

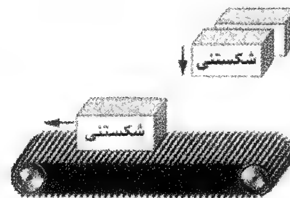


**شکل ۸-۵۹** مسئلهٔ ۶۵

### مسئله‌های اضافی

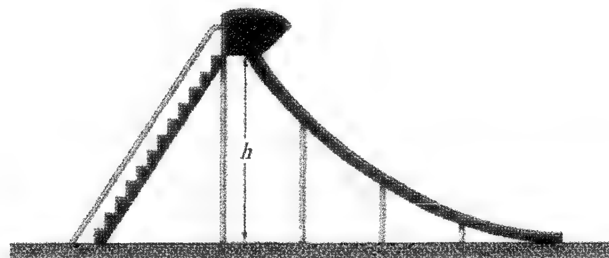
۶۶- در کارخانه‌ای، صندوقهایی به جرم $300kg$ به طور قائم از دستگاه بسته‌بندی روی تسمه‌نقاله‌ای که با تندی $1/20m/s$ حرکت می‌کند، رها می‌شوند (شکل ۸-۶۰). (موتوری تندی تسمه‌نقاله را ثابت نگه می‌دارد.) ضریب اصطکاک جنبشی بین تسمه‌نقاله و هر صندوق $0/400$ است. پس از زمان کوتاهی، لغزش صندوق بر تسمه نقاله متوقف می‌شود و سپس صندوق با

تسمه‌نقاله حرکت می‌کند. برای یک دورهٔ زمانی که در طی آن صندوق نسبت به تسمه نقاله به سکون می‌رسد، برای دستگاه مختصاتی که در کارخانه ساکن است (الف) انرژی جنبشی داده شده به صندوق، (ب) بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر صندوق، و (پ) انرژی تأمین شده توسط موتور را محاسبه کنید. (ت) توضیح دهید که چرا پاسخهای (الف) و (پ) متفاوت‌اند.




**شکل ۸-۶۰** مسئلهٔ ۶۶

۶۷- سرسره‌ای از یک کمان دایره‌ای به شعاع ۱۲ m تشکیل شده است. ارتفاع بیشینهٔ سرسره $h=۴/۰\text{m}$، و سطح زمین مماس بر دایره است (شکل ۸-۶۱). بچه‌ای به جرم ۲۵kg که از حالت سکون در بالای سرسره شروع به سُر خوردن می‌کند، در پایان سرسره تندی او برابر با ۶/۲m/s است. (الف) طول سرسره چقدر است؟ (ب) در این فاصله نیروی اصطکاک متوسطی که بر بچه وارد می‌شود چقدر است؟ اگر، به جای سطح زمین، یک خط قائم از *بالاترین نقطهٔ سرسره* بر دایره مماس باشد، (پ) طول سرسره و (ت) نیروی اصطکاک متوسط وارد بر بچه چقدر است؟




**شکل ۸-۶۱** مسئلهٔ ۶۷

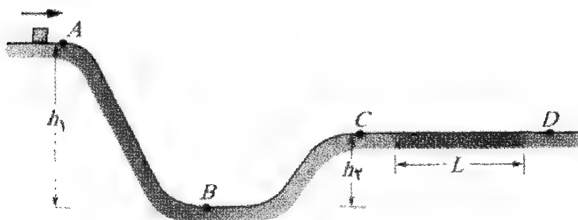
۶۸- در شکل ۸-۳۷، به یک سر ریسمانی به طول $L=۱۲۰\text{cm}$ گلوله‌ای متصل شده و سر دیگر آن در جایی ثابت شده است. میخی در نقطهٔ $P$ کوبیده شده است. گلوله با رها شدن از حالت سکون تا لحظه‌ای که ریسمان به میخ گیر کند رو به پایین تاب می‌خورد و سپس حول میخ رو به بالا می‌چرخد. برای این که گلوله کاملاً به دور میخ بچرخد، مسافت $d$ از چه مقداری باید بیشتر باشد؟ (*راهنمایی:* گلوله باید باز هم در بالاترین نقطهٔ تاب خوردن خود در حال حرکت باشد. آیا می‌دانید چرا؟)

۶۹- در شکل ۸-۵۲، قطعه‌ای رو به پایین بر سطح شیبدار بدون اصطکاکی لغزانده می‌شود. تندی آن در نقطه‌های $A$ و $B$ به ترتیب برابر ۲/۰۰m/s و ۲/۶۰m/s است. سپس، دوباره قطعه رو به پایین بر سطح شیبدار لغزانده می‌شود، ولی این بار تندی آن در نقطهٔ $A$ برابر ۴/۰۰m/s است. در این صورت تندی آن در نقطهٔ $B$ چقدر است؟ SSM

۷۰- معلوم شده است که فنر مشخصی از قانون هوک پیروی *نمی‌کند*. وقتی که این فنر به اندازهٔ $x$ (برحسب متر) کشیده شود، پی برده می‌شود که فنر نیرویی به بزرگی (برحسب نیوتون) $۵۲/۸x+۳۸/۴x^۲$ در خلاف جهت کشیدگی به آن وارد می‌کند. (الف) کار لازم برای کشیدن فنر از $x=۰/۵۰۰\text{m}$ تا $x=۱/۰۰\text{m}$ را محاسبه کنید. (ب) یک سر فنر در جایی ثابت شده و در حالی که به سر دیگر آن قطعهٔ کوچکی به جرم ۲/۱۷kg متصل شده است به اندازهٔ $x=۱/۰۰\text{m}$ کشیده می‌شود. حال اگر قطعه را از حالت سکون رها کنیم، تندی آن در لحظه‌ای که کشیدگی فنر برابر با $x=۰/۵۰۰\text{m}$ است، چقدر خواهد بود؟ (پ) آیا نیروی وارد شده از این فنر پایستار است یا ناپایستار؟ توضیح دهید.

۷۱- جعبه‌ای به جرم ۱۸۰kg که به حالت سکون در بالای شیبی به طول ۳/۷m و زاویهٔ شیب °۳۹ نسبت به افق قرار دارد به طور اتفاقی از دستهای یک کارگر کارخانه رها می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین جعبه و سطح شیبدار، و بین جعبه و کف افقی کارخانه ۰/۲۸ است. (الف) تندی جعبه هنگامی که به پایین سطح شیبدار می‌رسد چقدر است؟ (ب) در پی رسیدن جعبه به پایین سطح شیبدار، جعبه چقدر روی کف کارخانه می‌لغزد؟ (فرض کنید انرژی جنبشی جعبه وقتی که از شیب به کف کارخانه حرکت می‌کند، تغییر نمی‌کند.) (پ) اگر جرم جعبه را نصف کنیم، آیا پاسخهای (الف) و (ب) افزایش می‌یابند یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌مانند؟

۷۲- در شکل ۸-۶۲، قطعهٔ کوچکی از نقطهٔ $A$ با تندی ۷/۰m/s فرستاده می‌شود. مسیر قطعه تا هنگامی که به بخشی به طول $L=۱۲\text{m}$ برسد، که در آنجا ضریب اصطکاک جنبشی برابر ۰/۷۰ است، بی اصطکاک است. بلندیهای مشخص شده در شکل $h_۱=۶/۰\text{m}$ و $h_۲=۲/۰\text{m}$ است. تندی قطعه در (الف) نقطهٔ $B$ و (ب) نقطهٔ $C$ چقدر است؟ (پ) آیا قطعه به نقطهٔ $D$ می‌رسد؟ اگر می‌رسد، تندی آن در آنجا چقدر است؟ و اگر نمی‌رسد، چه مسافتی را در بخش با اصطکاک طی می‌کند؟



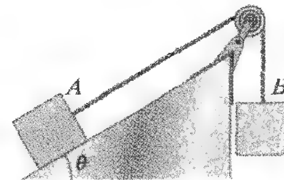

**شکل ۸-۶۲** مسئلهٔ ۷۲

۷۳- ظرف نوشابه‌ای به جرم ۲/۵۰kg مستقیماً رو به پایین از بلندی ۴/۰۰m با تندی اولیهٔ ۳/۰۰m/s پرتاب شده است. می‌توان کشش هوای وارد بر ظرف را نادیده گرفت. انرژی جنبشی ظرف (الف) هنگامی که در انتهای مسیر سقوط خود به سطح زمین می‌رسد و (ب) هنگامی که در نیمه راه مسیر خود تا

رسیدن به سطح زمین است، چقدر است؟ (پ) انرژی جنبشی ظرف و (ت) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه ظرف- زمین، $0/200\,s$ پیش از آنکه ظرف به سطح زمین برسد، چقدر است؟ برای این قسمت، نقطهٔ مرجع $y=0$ را در سطح زمین اختیار کنید.

۷۴- یک بالون آبی به جرم $1/50\,kg$ با تندی اولیهٔ $3/00\,m/s$ مستقیماً رو به بالا پرتاب شده است. (الف) انرژی جنبشی بالون درست در لحظهٔ پرتاب شدن، چقدر است؟ (ب) در طی صعود کامل بالون، نیروی گرانشی چقدر کار روی بالون انجام می‌دهد؟ (پ) در طی صعود کامل، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه بالون- زمین چقدر است؟ (ت) اگر انرژی پتانسیل گرانشی در نقطهٔ پرتاب برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن در لحظه‌ای که بالون به ارتفاع بیشینه‌اش می‌رسد چقدر است؟ (ث) حال اگر، انرژی پتانسیل گرانشی در ارتفاع بیشینه برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن در نقطهٔ پرتاب چقدر است؟ (ج) ارتفاع بیشینه چقدر است؟

۷۵- در شکل ۸-۶۳، جرم قرقره ناچیز است، و قرقره و سطح شیبدار هر دو بدون اصطکاک‌اند. جرم قطعهٔ $A$ برابر $1/0\,kg$، جرم قطعهٔ $B$ برابر $2/0\,kg$، و زاویهٔ $\theta$ برابر $30°$ است. اگر قطعه‌ها که با ریسمان محکمی به هم متصل شده‌اند از حالت سکون رها شوند، هنگامی که قطعهٔ $B$ به اندازهٔ $25\,cm$ سقوط کند، انرژی جنبشی کل آنها چقدر است؟ SSM



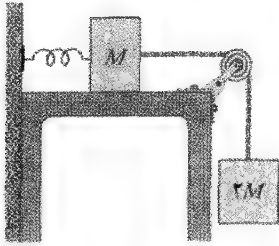
شکل ۸-۶۳ مسئلهٔ ۷۵

۷۶- پرتابه‌ای به جرم $0/550\,kg$ از لبهٔ صخره‌ای، با انرژی جنبشی اولیهٔ $1550\,J$ پرتاب شده است. جابه‌جایی رو به بالای بیشینهٔ پرتابه از نقطهٔ پرتاب برابر با $+140\,m$ است. (الف) مؤلفهٔ افقی و (ب) مؤلفهٔ قائم سرعت پرتابه در لحظهٔ پرتاب، چقدر است؟ (پ) در لحظه‌ای که مؤلفهٔ قائم سرعت برابر $65\,m/s$ است، جابه‌جایی قائم پرتابه از نقطهٔ پرتاب چقدر است؟

۷۷- تنها نیروی وارد بر یک ذره، نیروی پایستار $\vec{F}$ است. وقتی ذره در نقطهٔ $A$ است، انرژی پتانسیل دستگاه وابسته به نیروی $\vec{F}$ برابر با $40\,J$ است. وقتی ذره از نقطهٔ $A$ به نقطهٔ $B$ برود، نیروی $\vec{F}$ کاری برابر $+25\,J$ روی آن انجام می‌دهد. وقتی ذره در نقطهٔ $B$ است، انرژی پتانسیل دستگاه چقدر است؟

۷۸- یک نیروی افقی ثابت، چمدانی به جرم $50\,kg$ را به اندازهٔ $6/0\,m$ روی شیبی $30°$ با تندی ثابت حرکت می‌دهد. ضریب اصطکاک جنبشی بین چمدان و سطح شیبدار برابر $0/20$ است. (الف) کار انجام شده توسط نیروی به کار رفته و (ب) افزایش انرژی گرمایی چمدان و سطح شیبدار چقدر است؟

۷۹- همان‌گونه که در شکل ۸-۶۴ نشان داده شده است، دو قطعه به جرمهای $M=2/0\,kg$ و $2M$ به فنری با ثابت فنر $k=200\,N/m$ متصل شده‌اند که یک سر آن به دیواری ثابت شده است. سطح افقی و قرقره بدون اصطکاک‌اند و می‌توان جرم قرقره را نادیده گرفت. قطعه‌ها از حالت سکون در وضعیتی که فنر واهلیده است، رها می‌شوند. وقتی قطعهٔ آویزان به اندازهٔ $0/090\,m$ سقوط کرد (الف) انرژی جنبشی ترکیب دو قطعه و (ب) انرژی جنبشی قطعهٔ آویزان چقدر است؟ (پ) فاصلهٔ بیشینه‌ای که قطعهٔ آویزان تا پیش از توقف لحظه‌ای سقوط می‌کند چقدر است؟



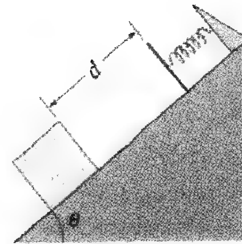
شکل ۸-۶۴ مسئلهٔ ۷۹

۸۰- جریان حاصل از خاکسترهای یک آتشفشان که در حال حرکت روی سطحی افقی است، با یک شیب رو به بالای $10°$ مواجه می‌شود. جبههٔ این جریان پیش از متوقف شدن، $920\,m$ رو به بالای شیب حرکت می‌کند. فرض کنید گازهای به دام افتاده در جریان، آن را از سطح زمین بالا ببرند و بدین ترتیب بتوان نیروی اصطکاک وارد از زمین را نادیده گرفت؛ همچنین فرض کنید انرژی مکانیکی جبههٔ جریان پایسته است. تندی اولیهٔ جبههٔ جریان چقدر بوده است؟

۸۱- موزی به جرم $0/50\,kg$ که با تندی اولیهٔ $4/00\,m/s$ مستقیماً رو به بالا پرتاب شده است به ارتفاع بیشینهٔ $0/80\,m$ می‌رسد. در طی بالا رفتن، نیروی کشش هوا موجب چه تغییری در انرژی مکانیکی دستگاه موز- زمین می‌شود؟

۸۲- اگر بازیکن بیسبال به جرم $70\,kg$ درست در لحظه‌ای که به زمین می‌خورد با تندی اولیهٔ $10\,m/s$ روی زمین سر بخورد (الف) کاهش در انرژی جنبشی بازیکن و (ب) افزایش انرژی گرمایی بدن بازیکن و سطح زمین در امتداد مسیر لغزش، تا لحظهٔ توقف چقدر است؟

۸۳- فنری $(k=200\,N/m)$ در انتهای سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta=40°$ ثابت شده است (شکل ۸-۶۵) قطعه‌ای به جرم $1/0\,kg$ از مکان اولیه‌اش که به فاصلهٔ $d=0/60\,m$ از انتهای فنر واهلیده قرار دارد، با انرژی جنبشی اولیهٔ $16\,J$ رو به بالای شیب پرتاب می‌شود. (الف) در لحظه‌ای که قطعه، فنر را به اندازهٔ $0/20\,m$ فشرده می‌کند، انرژی جنبشی آن چقدر است؟ (ب) برای آنکه قطعه در هنگامی که فنر به اندازهٔ $0/40\,m$ فشرده شده است به طور لحظه‌ای متوقف شود، انرژی جنبشی قطعه موقع پرتاب باید چقدر باشد؟ SSM




**شکل ۸-۶۵ مسئلهٔ ۸۳**

**۸۴-** میمونی به جرم ۳/۲kg در ارتفاع ۳/۰m بالای سطح زمین آویزان است. (الف) اگر نقطهٔ مرجع $y=0$ را بر سطح زمین در نظر بگیریم، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه میمون- زمین چقدر است؟ اگر میمون به زمین بپرد و با فرض آنکه کشش هوای وارد بر آن ناچیز باشد، (ب) انرژی جنبشی و (پ) تندی میمون درست پیش از رسیدن به زمین چقدر است؟

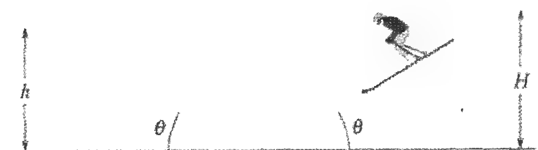
**۸۵-** ماشینی چمدانی به جرم ۴۰kg را به اندازهٔ ۲/۰m روی شیبی با زاویهٔ شیب °۴۰ با سرعت ثابت رو به بالا می‌کشد. نیروی وارد از ماشین به چمدان به موازات شیب و ضریب اصطکاک جنبشی بین چمدان و سطح شیبدار ۰/۴۰ است. (الف) کار انجام شده توسط نیروی ماشین روی چمدان و (ب) افزایش انرژی گرمایی چمدان و سطح شیبدار چقدر است؟

**۸۶-** کشتی مجلل *ملکه الیزابت* دوم دارای نیروگاه دیزلی- الکتریکی با توان بیشینهٔ ۹۲ MW در تندی ۳۲/۵ گرهٔ دریایی است. در این تندی، چه نیروی رو به جلویی بر کشتی وارد می‌شود؟ (۱ knot (گره) = ۱/۸۵۲ km/h)

**۸۷-** دمای یک مکعب پلاستیکی هنگامی که مکعب توسط نیروی افقی ۱۵N به اندازهٔ ۳/۰m روی کفی با تندی ثابت هل داده شده، اندازه گرفته شده است. اندازه‌گیری نشان می‌دهد که انرژی گرمایی مکعب به اندازهٔ ۲۰J افزایش یافته است. افزایش انرژی گرمایی کف در امتدادی که مکعب لغزیده چقدر است؟

**SSM**

**۸۸-** دو قلهٔ برفی دارای بلندیهای $H=850\text{m}$ و $h=750\text{m}$ هستند که یک دره میان آنها قرار دارد. یک مسیر اسکی به طول کلی ۳/۲ km و شیب میانگین $\theta=30°$ میان دو قله امتداد یافته است (شکل ۸-۶۶). (الف) اسکی بازی از حالت سکون از قلهٔ بلندتر شروع به حرکت می‌کند. اگر او از چوبهای اسکی استفاده نکند و اصطکاک ناچیز باشد، با چه تندیی به نوک قلهٔ کوتاهتر می‌رسد؟ (ب) به طور تقریبی، ضریب اصطکاک جنبشی بین برف و اسکیها باید چقدر باشد تا او درست در نوک قلهٔ کوتاهتر متوقف شود؟




**شکل ۸-۶۶ مسئلهٔ ۸۸**

**۸۹-** شناگری در آب با تندی متوسط ۰/۲۲m/s حرکت می‌کند. نیروی کششی متوسط ۱۱۰N است. شناگر به چه توان متوسطی برای شناکردن نیاز دارد؟

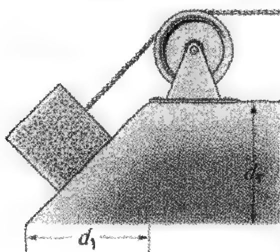
**۹۰-** وزن اتومبیلی با مسافرانش ۱۶۴۰۰N است و هنگامی که راننده ترمز می‌کند، اتومبیل با تندی ۱۱۳km/h در حال حرکت است. بزرگی نیروی اصطکاکی که جاده بر چرخها وارد می‌کند برابر ۸۲۳۰N است. پس از ترمز، اتومبیل تا لحظهٔ توقف می‌لغزد. فاصلهٔ توقف را به دست آورید.

**۹۱-** گلوله‌ای به جرم ۰/۶۳kg با تندی اولیهٔ ۱۴ m/s مستقیماً رو به بالا پرتاب می‌شود و به ارتفاع بیشینهٔ ۸/۱m می‌رسد. در حین بالا رفتن گلوله تا ارتفاع بیشینه، انرژی مکانیکی دستگاه گلوله- زمین چقدر تغییر می‌کند؟

**۹۲-** نوک قلهٔ اورست ۸۸۵۰m بالاتر از سطح دریاست. (الف) یک کوه‌نورد به جرم ۹۰kg برای رسیدن به نوک قله از سطح دریا چه مقدار انرژی باید در مقابل نیروی گرانشی وارد بر او صرف کند؟ (ب) اگر هر شکلات مقداری انرژی برابر ۱/۲۵MJ داشته باشد، چند عدد شکلات این انرژی را تأمین خواهند کرد؟ پاسخ شما باید این نکته را روشن کند که کار انجام شده در مقابل نیروی گرانشی، بخش بسیار کوچکی از انرژی صرف شده در صعود از یک کوه است.

**۹۳-** دونده دو سرعتی به وزن ۶۷۰N با شروع از حالت سکون و با شتابی یکنواخت، ۷/۰m ابتدای مسابقه را در مدت ۱/۶s می‌دود. (الف) تندی و (ب) انرژی جنبشی دونده در انتهای ۱/۶s چقدر است؟ (پ) دونده چه توان متوسطی در طی این بازهٔ ۱/۶ ثانیه‌ای تولید کرده است؟

**۹۴-** در شکل ۸-۶۷ قطعه‌ای از سنگ گرانیت به جرم ۱۴۰۰kg توسط کابل و قرقره‌ای با تندی ثابت ۱/۳۴m/s روی شیبی بالا کشیده می‌شود. فاصله‌های مشخص شده عبارت‌اند از $d_1=40\text{m}$ و $d_2=30\text{m}$. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و سطح شیبدار ۰/۴۰ است. توان ناشی از نیرویی که کابل بر قطعه وارد می‌کند چقدر است؟




**شکل ۸-۶۷ مسئلهٔ ۹۴**

**۹۵-** گلولهٔ برفی به جرم ۱/۵۰kg با زاویهٔ °۳۴/۰ نسبت به افق با تندی اولیهٔ ۲۰/۰m/s، رو به بالا پرتاب شده است. (الف) انرژی جنبشی اولیهٔ آن چقدر است؟ (ب) هنگامی که گلولهٔ برف از نقطهٔ پرتاب به نقطه‌ای که در آنجا ارتفاعش بیشینه است می‌رسد، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلولهٔ برف- زمین چقدر تغییر می‌کند؟ (پ) این ارتفاع بیشینه چقدر است؟

۹۶- برجسمی به جرم ۲۰kg نیروی پایستار $F = -۳/۰x - ۵/۰x^۲$ وارد شده که در آن $F$ برحسب نیوتون و $x$ برحسب متر است. انرژی پتانسیل وابسته به این نیرو را وقتی که جسم در $x = ۰$ قرار دارد برابر صفر در نظر بگیرید. (الف) وقتی که جسم در $x = ۲/۰\text{m}$ است، انرژی پتانسیل دستگاه وابسته به این نیرو چقدر است؟ (ب) اگر هنگامی که جسم در $x = ۵/۰\text{m}$ است، دارای سرعت ۴/۰m/s در جهت منفی محور $x$ باشد، تندی آن هنگامی که از مبدأ عبور می‌کند چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل دستگاه وقتی که جسم در $x = ۰$ است برابر ۸/۰J- در نظر گرفته شود، پاسخهای (الف) و (ب) چه می‌شوند؟

۹۷- پرتابه‌ای به جرم ۹/۴kg به طور قائم رو به بالا شلیک شده است. در طی بالا رفتن پرتابه، نیروی کشش هوا انرژی مکانیکی دستگاه پرتابه- زمین را به اندازهٔ ۶۸/۰kJ کاهش می‌دهد. اگر نیروی کششی هوا قابل چشمپوشی باشد، پرتابه چقدر بالاتر می‌رود؟

۹۸- یک وسیلهٔ فلزی توسط یک نیروی ۱۸۰ نیوتونی در مقابل لبهٔ چرخ یک ماشین سنباده برای تیز شدن نگهداشته شده است. بین لبهٔ چرخ و آن بخش از وسیله که تیز می‌شود اصطکاک وجود دارد. چرخ دارای شعاع ۲۰/۰cm است و با آهنگ ۲/۵۰rev/s می‌چرخد. ضریب اصطکاک جنبشی بین چرخ و وسیلهٔ فلزی برابر ۰/۳۲۰ است. انرژی با چه آهنگی از موتوری که چرخ را می‌چرخاند به انرژی گرمایی چرخ و وسیلهٔ فلزی، و انرژی جنبشی خرده فلزهایی که از وسیلهٔ فلزی پرتاب شده‌اند، تبدیل شده است؟

۹۹- فنری با ثابت فنر ۳۲۰۰N/m در ابتدا چنان کشیده شده که انرژی پتانسیل کشسانی آن ۱/۴۴ J است. (برای فنر واهلیده $U = ۰$ است.) اگر کشیدگی اولیه تغییر کند و به (الف) کشیدگی ۲/۰cm، (ب) فشردگی ۲/۰cm و (پ) فشردگی ۴/۰cm برسد، تغییر انرژی پتانسیل کشسانی $\Delta U$ چقدر می‌شود؟

۱۰۰- فنر یک تفنگ فنری اسباب بازی دارای ثابت فنر ۷۰۰N/m است. برای شلیک گلوله، نخست فنر فشرده و سپس گلوله‌ای روی آن جاسازی می‌شود. آنگاه ماشهٔ تفنگ، فنر را آزاد می‌کند تا به گلولهٔ داخل لولهٔ تفنگ نیرو وارد آورد. وقتی تفنگ رو به بالا به اندازهٔ °۳۰ نسبت به افق کج شده باشد، گلوله‌ای به جرم ۵۷ g تا ارتفاع بیشینهٔ ۱/۸۳ m بالاتر از دهانهٔ تفنگ شلیک می‌شود. فرض کنید کشش هوای وارد بر گلوله ناچیز است. (الف) فنر با چه تندی گلوله را پرتاب کرده است؟ (ب) با فرض اینکه اصطکاک وارد بر گلوله از طرف لولهٔ تفنگ ناچیز باشد، فاصلهٔ فشردگی اولیهٔ فنر را به دست آورید.

۱۰۱- بازیگر سیرکی به جرم ۶۰/۰ kg از بالای تیری به بلندی ۴/۰۰m، از حالت سکون رو به پایین تا کف صفحهٔ نمایش سُر می‌خورد. انرژی جنبشی بازیگر وقتی که به کف می‌رسد، در صورتی که نیروی اصطکاکی که میله بر بازیگر وارد می‌کند (الف) ناچیز باشد (که در آن صورت صدمه خواهد دید) و (ب) دارای بزرگی ۵۰۰N باشد، چقدر خواهد بود؟

۱۰۲- در سال ۱۹۸۱/۱۳۶۰ *دانیل گودوین*[1] با استفاده از چند مکنده و گیره‌های فلزی از دیوارهٔ *خارجی* ساختمانی به بلندی ۴۴۳m در شیکاگو بالا رفت. (الف) جرم او را عددی تقریبی بگیرید و آنگاه محاسبه کنید که او مجبور بود چه مقدار انرژی بیومکانیکی (داخلی) را به انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه زمین- گودوین تبدیل کند تا خود را تا آن ارتفاع بالا ببرد؟ (ب) اگر او، به جای این کار، از پله‌های داخل ساختمان همین ارتفاع را بالا می‌رفت، چقدر انرژی باید مصرف می‌کرد؟

۱۰۳- گلوله‌ای به جرم ۳۰ g با سرعت افقی ۵۰۰m/s پس از طی مسافت ۱۲cm در داخل دیواری صلب، متوقف می‌شود. (الف) تغییر انرژی مکانیکی گلوله چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی متوسط وارد از دیوار که گلوله را متوقف می کند چقدر است؟

۱۰۴- مقاومت در مقابل حرکت یک اتومبیل عبارت است از اصطکاک جاده، که تقریباً مستقل از تندی است، و کشش هوا، که متناسب با توان دوم تندی است. برای اتومبیل مشخصی به وزن ۱۲۰۰۰N، نیروی مقاومت کل $F$ با رابطهٔ $F = ۳۰۰ + ۱/۸v^۲$ داده می‌شود که در آن $F$ برحسب نیوتون و $v$ برحسب متر بر ثانیه است. توان (برحسب اسب بخار) مورد نیاز را برای این که وقتی تندی اتومبیل ۸۰km/h است شتاب آن $۰/۹۲\text{m/s}^۲$ باشد، محاسبه کنید.

۱۰۵- لوکوموتیوی با قابلیت توان ۱/۵MW می‌تواند به قطاری شتاب دهد و تندی آن را در مدت ۶/۰min از ۱۰m/s به ۲۵m/s برساند. (الف) جرم قطار را محاسبه کنید. (ب) تندی قطار و (پ) نیرویی را که به قطار در مدت ۶/۰min شتاب می‌دهد، برحسب تابعی از زمان (برحسب ثانیه) به دست آورید. (ت) مسافتی را که قطار در این بازهٔ زمانی طی کرده است، بیابید.

۱۰۶- قطعه‌ای به جرم ۵/۰kg با سرعت ۵/۰m/s به بالای سطح شیبداری که با افق زاویهٔ °۳۰ می‌سازد، پرتاب شده است. قطعه تا چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود، اگر (الف) این سطح بدون اصطکاک باشد و اگر (ب) ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و سطح ۰/۴۰ باشد؟ (پ) در قسمت (ب) افزایش انرژی گرمایی قطعه و سطح در حین بالا رفتن قطعه چقدر است؟ (ت) اگر قطعه سپس بر شیب با اصطکاک، رو به پایین بلغزد، تندی قطعه هنگامی که به نقطهٔ پرتاب آغازین می‌رسد چقدر است؟

۱۰۷- قطعه‌ای به جرم ۲۰kg واقع بر سطحی افقی به یک فنر افقی با ثابت فنر $k = ۴/۰\ \text{kN/m}$ متصل شده است. قطعه به سمت راست کشیده می‌شود، طوری که فنر به اندازهٔ ۱۰cm فراتر از طول واهلیده‌اش کش می‌آید و سپس قطعه از حالت سکون رها می‌شود. بزرگی نیروی اصطکاک بین قطعهٔ لغزان و سطح برابر ۸۰N است. (الف) انرژی جنبشی قطعه هنگامی که به اندازهٔ ۲/۰cm از نقطهٔ رها شدن حرکت کرده است، چقدر

---

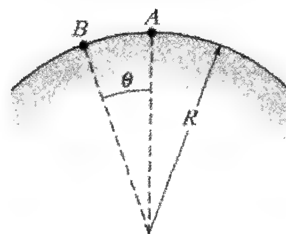
1. Daniel Goodwin

است؟ (ب) انرژی جنبشی قطعه هنگامی که برای نخستین بار از نقطهٔ واهلیدگی فنر می‌گذرد چقدر است؟ (پ) انرژی جنبشی بیشینه‌ای که قطعه در طی فاصلهٔ نقطهٔ رها شدن تا نقطهٔ واهلیدگی فنر به دست می‌آورد، چقدر است؟

۱۰۸- مردی به جرم ۷۰/۰ kg از پنجره‌ای بیرون می‌پرد و روی یک تور نجات از آتش که ۱۱/۰m پایینتر از پنجره است، فرود می‌آید. وقتی تور نجات به اندازهٔ ۱/۵۰m کش بیاید، مرد به توقف لحظه‌ای می‌رسد. با فرض این که انرژی مکانیکی در طی این فرایند پایسته و رفتار تور نجات مشابه یک فنر آرمانی باشد، انرژی پتانسیل کشسانی را هنگامی که تور به اندازهٔ ۱/۵۰m کشیده شده است، پیدا کنید.

۱۰۹- برای ساختن یک آونگ، به یک سر میله‌ای به طول ۰/۶۲m و جرم ناچیز، گلوله‌ای به جرم ۰/۰۹۲kg متصل شده و سر دیگر میله در نقطه‌ای لولا شده است. میله تا وضعیتی که به طور قائم رو به بالا قرار گیرد چرخانده و سپس از حالت سکون رها می‌شود تا حول محل لولا رو به پایین تاب بخورد. وقتی که گلوله به پایینترین نقطه می‌رسد (الف) تندی آن و (ب) کشش میله چقدر است؟ سپس میله تا وضعیت افقی چرخانده و دوباره از حالت سکون رها می‌شود. (پ) در چه زاویه‌ای نسبت به قائم کشش میله برابر با وزن گلوله است؟ (ت) اگر جرم گلوله افزایش داده شود، آیا پاسخ بخش (پ) افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟ **SSM**

۱۱۰- اسکی بازی به وزن ۶۰۰N از روی تپهٔ دایره‌ای شکل بدون اصطکاکی به شعاع $R=۲۰\text{m}$ عبور می‌کند (شکل ۸-۶۸). فرض کنید اثرهای مقاومت هوا روی اسکی باز ناچیز باشد. وقتی که او به نقطهٔ $B$ در زاویهٔ $\theta=۲۰°$ می‌رسد، تندی او برابر با ۸/۰m/s است. (الف) اگر او بدون استفاده از چوبهای اسکی حرکت کند، تندیش در نوک تپه (نقطهٔ $A$) چقدر است؟ (ب) تندی کمینه‌ای که او باید در نقطهٔ $B$ داشته باشد تا باز به نوک تپه برسد چقدر است؟ (پ) اگر وزن اسکی باز ۷۰۰N باشد، آیا پاسخهای دو پرسش بالا، افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟




**شکل ۸-۶۸** مسئلهٔ ۱۱۰

۱۱۱- گلوله‌ای به جرم ۵۰g با سرعت اولیهٔ ۸/۰m/s با زاویهٔ ۳۰° بالای افق از پنجره‌ای پرتاب شده است. با استفاده از روشهای انرژی موارد زیر را تعیین کنید: (الف) انرژی جنبشی گلوله در اوج پرواز و (ب) تندی گلوله هنگامی که ۳/۰m پایینتر از پنجره است. آیا پاسخ (ب) بستگی به (پ) جرم گلوله یا (ت) زاویهٔ پرتاب دارد؟ **SSM**

۱۱۲- یک شیرجه روندهٔ هوایی به جرم ۶۸kg با تندی حد ثابت ۵۹ m/s سقوط می‌کند. (الف) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه شیرجه رونده- زمین با چه آهنگی کاهش پیدا می‌کند؟ (ب) انرژی مکانیکی دستگاه با چه آهنگی کاهش می‌یابد؟

۱۱۳- رودخانه‌ای ۱۵m در یک شیب تند پایین می‌آید. تندی آب در لحظهٔ ورود به شیب برابر ۳/۲m/s و در لحظهٔ خروج از آن ۱۳m/s است. در حین پایین آمدن، چه درصدی از انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه آب- زمین به انرژی جنبشی تبدیل شده است؟ (*راهنمایی*: پایین آمدن، مثلاً، ۱۰kg آب را در نظر بگیرید.)

۱۱۴- بزرگی نیروی گرانشی میان دو ذره، یکی به جرم $m_۱$ و دیگری به جرم $m_۲$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

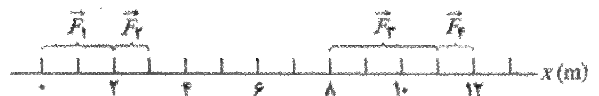
$$F(x)=G\frac{m_۱ m_۲}{x^۲}$$

که در آن $G$ مقداری ثابت و $x$ فاصلهٔ میان دو ذره است. (الف) تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ وابسته به نیرو را به دست آورید. فرض کنید برای $x$ مثبت، وقتی $x\to\infty$ آنگاه $U(x)\to ۰$. (ب) برای افزایش فاصلهٔ جدایی دو ذره از $x=x_۱$ به $x=x_۱+d$، چقدر کار باید انجام گیرد؟

۱۱۵- به طور تقریبی در هر ثانیه $۵/۵\times۱۰^۶$ kg آب از بالای آبشار نیاگارا به بلندی ۵۰m به پایین می‌ریزد. (الف) کاهش انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه آب- زمین در هر ثانیه چقدر است؟ (ب) اگر تمام این انرژی بتواند به انرژی الکتریکی تبدیل شود (که البته غیر ممکن است)، انرژی الکتریکی با چه آهنگی تولید می‌شود؟ (جرم $۱\text{m}^۳$ آب برابر ۱۰۰۰kg است.) (پ) اگر این انرژی الکتریکی به قیمت ۱ سنت (cent) به ازای هر کیلو وات- ساعت (kW.h) فروخته شود، در آمد سالیانه حاصل از فروش آن چقدر است؟

۱۱۶- اتومبیلی به جرم ۱۵۰۰kg روی یک جادهٔ افقی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و در مدت ۳۰s به تندی ۷۲km/h می‌رسد. (الف) انرژی جنبشی اتومبیل در پایان ۳۰s چقدر است؟ (ب) توان متوسط مورد نیاز اتومبیل در حین این بازهٔ زمانی ۳۰ ثانیه‌ای چقدر است؟ (پ) توان لحظه‌ای اتومبیل در پایان این بازهٔ زمانی ۳۰ ثانیه‌ای، با فرض آنکه شتاب ثابت باشد، چقدر است؟

۱۱۷- ذره‌ای می‌تواند فقط در امتداد محور $x$ حرکت کند، که در آنجا نیروهای پایستاری بر آن وارد می‌شوند (شکل ۸-۶۹ و جدول زیر). ذره در $x=۵/۰۰\text{m}$ با انرژی جنبشی $K=۱۴/۰\text{J}$ و انرژی پتانسیل $U=۰$ رها شده است. اگر حرکت ذره در جهت منفی محور $x$ باشد، (الف) $U$ و (ب) $K$ در $x=۲/۰۰\text{m}$، و (پ) $U$ و (ت) $K$ در $x=۰$ چقدر است؟ اگر حرکت ذره در جهت مثبت محور $x$ باشد، (ث) $U$ و (ج) $K$ در $x=۱۱/۰\text{m}$، و (چ) $U$ و (ح) $K$ در $x=۱۲/۰\text{m}$، و (خ) $U$ و (د) $K$ در $x=۱۳/۰\text{m}$ چقدر است؟ (ذ) نمودار $U(x)$ برحسب $x$ را برای گسترهٔ $x=۰$ تا $x=۱۳/۰\text{m}$ رسم کنید.




**شکل ۸-۶۹** مسئلهٔ ۱۱۷

دفعهٔ بعد، ذره از حالت سکون و در $x=0$ رها می‌شود. (ر) انرژی جنبشی آن در $x=5/0\text{m}$ و (ز) مکان مثبت بیشینهٔ $x_{max}$ که به آن می‌رسد، چقدر است؟ (ژ) پس از آنکه ذره به $x_{max}$ برسد، چه می‌کند؟

| گستره | نیرو |
|---|---|
| ۰ تا ۲/۰۰m | $\vec{F}_1=+(3/00\text{N})\hat{i}$ |
| ۲/۰۰m تا ۳/۰۰m | $\vec{F}_2=+(5/00\text{N})\hat{i}$ |
| ۳/۰۰m تا ۸/۰۰m | $F=0$ |
| ۸/۰۰m تا ۱۱/۰m | $\vec{F}_3=-(4/00\text{N})\hat{i}$ |
| ۱۱/۰m تا ۱۲/۰m | $\vec{F}_4=-(1/00\text{N})\hat{i}$ |
| ۱۲/۰m تا ۱۵/۰m | $F=0$ |

**۱۱۸-** در آرایش نیروهای مسئله ۱۱۷، جسمی به جرم ۲/۰۰kg با سرعت اولیهٔ ۳/۴۵m/s در جهت منفی محور $x$ از $x=5/00\text{m}$ رها شده است. (الف) اگر جسم بتواند به $x=0\text{m}$ برسد، تندی جسم در آنجا چقدر است؟ و اگر نتواند برسد، نقطهٔ برگشت چیست؟ حال فرض کنید، جسم هنگامی که در $x=5/00\text{m}$ است در جهت مثبت محور $x$ با تندی ۳/۴۵m/s رها شود. (ب) اگر جسم بتواند به $x=13/0\text{m}$ برسد، تندی جسم در آنجا چقدر است؟ و اگر نتواند برسد، نقطهٔ برگشت چیست؟

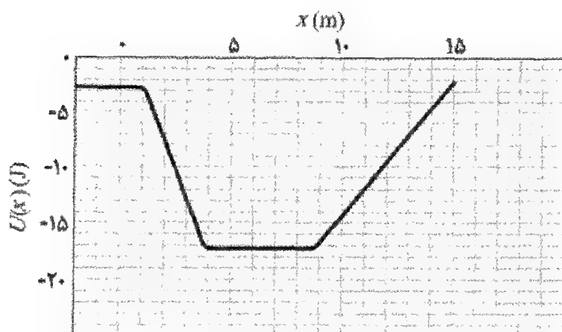
**۱۱۹-** در نوعی بازی، قرص بازی دارای جرم ۰/۴۲kg و در ابتدا ساکن است. بازیکنی توسط یک چوب، تندی آن را با شتاب ثابتی تا ۴/۲m/s افزایش می‌دهد. این شتاب در طی مسافت ۲/۰m به وجود می‌آید و در انتهای آن، تماس چوب با قرص قطع می‌شود. سپس قرص پیش از متوقف شدن، ۱۲m دیگر می‌لغزد. فرض کنید صفحهٔ بازی مسطح باشد و نیروی اصطکاک ثابتی بر قرص وارد شود. افزایش انرژی گرمایی دستگاه قرص- صفحهٔ بازی (الف) برای آن ۱۲m اضافی و (ب) کل مسافت ۱۴m چقدر است؟ (پ) چوب چقدر کار روی قرص انجام می‌دهد؟ **SSM**

**۱۲۰-** در حالی که یک نیروی خارجی بر ذره‌ای وارد می‌شود، ذره را در امتداد محور $x$ نخست رو به بیرون، از $x=1/0\text{m}$ به $x=4/0\text{m}$ می‌بریم و سپس رو به داخل به $x=1/0\text{m}$ باز می‌گردانیم. جهت نیرو در امتداد محور $x$ است و مؤلفهٔ $x$ آن می‌تواند مقدارهای مختلفی برای حرکت در مسیر رفت و حرکت در مسیر برگشت داشته باشد. در اینجا، این مقدارها (برحسب نیوتون) برای چهار وضعیت که در آنجا $x$ برحسب متر است، داده شده است:

| | رو به خارج | رو به داخل |
|---|---|---|
| (الف) | $+3/0$ | $-3/0$ |
| (ب) | $+5/0$ | $+5/0$ |
| (پ) | $+2/0x$ | $-2/0x$ |
| (ت) | $+3/0x^2$ | $+3/0x^2$ |

برای هر چهار وضعیت، کار خالص انجام شده توسط نیروی خارجی بر ذره‌ای که مسیری *رفت و برگشت* را طی کرده است، پیدا کنید. (ث) برای کدام وضعیت، در صورت وجود، نیروی خارجی پایستار است؟

**۱۲۱-** نیروی پایستار $F(x)$ بر ذره‌ای به جرم ۲/۰kg که در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند، وارد می‌شود. انرژی پتانسیل $U(x)$ وابسته به $F(x)$ در شکل ۸-۷۰ رسم شده است. وقتی ذره در $x=2/0\text{m}$ قرار دارد، سرعت آن $-1/5\text{m/s}$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت $F(x)$ در این مکان چیست؟ ذره میان چه مکانهایی در (پ) طرف چپ و (ت) طرف راست حرکت می‌کند؟ (ث) تندی ذره در $x=7/0\text{m}$ چقدر است؟ **SSM**




**شکل ۸-۷۰** مسئلهٔ ۱۲۱

**۱۲۲-** برای ساختن یک آونگ، گلوله‌ای به جرم ۳۰۰g به یک انتهای ریسمانی به طول ۱/۴m که جرم آن قابل چشمپوشی است، متصل شده است (سر دیگر ریسمان در جایی ثابت شده است). گلوله به اندازهٔ °۳۰ نسبت به خط قائم به یک سو کشیده و سپس (بی آنکه ریسمان خم شود) از حالت سکون رها می‌شود. مطلوب است (الف) تندی گلوله هنگامی که ریسمان با امتداد قائم زاویه °۲۰/۰ می‌سازد و (ب) تندی بیشینهٔ گلوله. (پ) هنگامی که تندی گلوله $\frac{1}{3}$ مقدار بیشینهٔ خود است، طناب چه زاویه‌ای با امتداد قائم می‌سازد؟

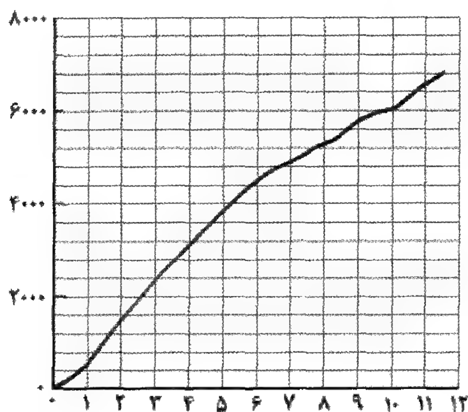
**۱۲۳-** اتومبیلی به جرم ۱۵۰۰kg با تندی ۳۰km/h در جاده‌ای با شیب °۵/۰ رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. موتور اتومبیل خاموش می‌شود و تنها نیروهای وارد بر اتومبیل، نیروی اصطکاک خالص وارد از جاده و نیروی گرانشی است. پس از آنکه اتومبیل ۵۰m در امتداد جاده حرکت کند، تندی آن ۴۰km/h است. (الف) انرژی مکانیکی اتومبیل بر اثر نیروی

اصطکاک خالص وارد بر آن چقدر کاهش یافته است؟ (ب) بزرگی این نیروی اصطکاک خالص چقدر است؟ SSM

**۱۲۴-** در یک نمایش سیرک، دلقکی به جرم 60kg از لولهٔ توپی با سرعت اولیهٔ 16m/s با زاویهٔ نامشخصی نسبت به افق شلیک می‌شود. اندکی بعد، دلقک روی یک توری به فاصلهٔ قائم 3/9m بالای مکان اولیه‌اش فرود می‌آید. هنگامی که دلقک بر روی تور فرود می‌آید، انرژی جنبشی آن چقدر است؟ کشش هوا را نادیده بگیرید.

**۱۲۵-** بیشینهٔ نیرویی که شما با آن می‌توانید یک شیء را با یکی از دندانهای آسیای خود بفشارید در حدود 750N است. فرض کنید وقتی شما نوعی سقّز[1] را با دندانهایتان فشار می‌دهید، سقّز مثل فنری با ثابت $2/5\times10^5$ N/m مقاومت کند. مطلوب است (الف) فاصله‌ای که سقّز توسط دندانهای شما فشرده می‌شود و (ب) کاری که توسط دندانهای شما در حین فشردن صورت می‌پذیرد. (پ) بزرگی نیروی وارد بر سقّز را برحسب فاصلهٔ فشردگی رسم کنید. (ت) اگر یک انرژی پتانسیل وابسته به این فشردگی وجود داشته باشد، آن را برحسب فاصلهٔ فشردگی رسم کنید.

در سال ۱۹۹۰/۱۳۷۰، اسکلت لگن نوعی دایناسور موسوم به *سه شاخ*[2] کشف شد که روی آن علائم گاز گرفتگی موجود بود. شکل گاز گرفتگی به گونه‌ای بود که حدس زده شد توسط نوعی دایناسور موسوم به *دایناسور گوشت خوار رکس*[3] ایجاد شده است. برای بررسی این موضوع، پژوهشگران نمونه‌ای از دندانهای دایناسور *گوشت خوار* را از برنز و آلومینیوم ساختند و سپس با استفاده از یک دستگاه فشار هیدرولیکی این دندانهای مصنوعی را برای ایجاد حفره‌ای به همان اندازه‌ای که روی لگن *دایناسور سه شاخ* دیده شده بود، به‌تدریج روی استخوان گاوی فشردند. نموداری از نیروی لازم برای نفوذ دندان برحسب عمق نفوذ در شکل ۸-۷۱ برای یک آزمایش رسم شده است؛ نیروی مورد نیاز با افزایش عمق حفره افزایش یافته است، چون وقتی دندانهای مخروطی استخوان را سوراخ کنند، تماس دندانها با استخوان بیشتر می‌شود. (ث) در چنین مقدار نفوذی، چه مقدار کار توسط دستگاه فشار هیدرولیکی - و احتمالاً توسط *دایناسور گوشت‌خوار* - انجام شده است؟ (ج) آیا انرژی پتانسیلی وابسته به این نفوذ وجود دارد؟ (بزرگ بودن نیروی گاز و مقدار انرژی صرف شده توسط *دایناسور گوشت‌خوار* بنابر استدلال برخی پژوهشگران نشان دهندهٔ این است که *دایناسور گوشت خوار* حیوانی درنده بوده است نه لاشخور)



**شکل ۸-۷۱** مسئلهٔ ۱۲۵

**۱۲۶-** یک آتش‌نشان به جرم 70kg از بالای تیر قائمی به بلندی 4/3m رو به پایین سُر می‌خورد. (الف) اگر آتش‌نشان تیر را به طور سستی بغل کند، به گونه‌ای که نیروی اصطکاکی که تیر بر او وارد می‌کند ناچیز باشد، تندی او درست پیش از رسیدن به کف زمین چقدر است؟ (ب) اگر آتش‌نشان تیر را به طور محکمتری بغل کند، به گونه‌ای که نیروی اصطکاک متوسطی که تیر رو به بالا بر او وارد می‌کند برابر 500N باشد، تندی او درست پیش از رسیدن به سطح زمین چقدر است؟

**۱۲۷-** قطعه‌ای به جرم 15kg در امتداد یک سطح افقی بدون اصطکاک، $2/0 m/s^2$ شتاب گرفته و تندی آن از 10m/s به 30m/s افزایش یافته است. (الف) تغییر در انرژی مکانیکی قطعه و (ب) آهنگ متوسطی که با آن انرژی به قطعه منتقل شده چقدر است؟ آهنگ لحظه‌ای انتقال انرژی وقتی که تندی قطعه (پ) 10m/s و (ت) 30m/s است، چقدر است؟ SSM

**۱۲۸-** مسئله ۱۲۷ را تکرار کنید، ولی این بار فرض کنید که قطعه روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $5/0°$ نسبت به افق، رو به بالا شتاب گرفته است.

**۱۲۹-** مساحت کشور امریکا در حدود $8\times10^6 km^2$ و ارتفاع متوسط آن 500m (بالاتر از سطح دریا) است. متوسط بارش سالیانه 75cm است. $\frac{2}{3}$ این باران بر اثر تبخیر به جو باز می‌گردد و بقیهٔ آن سرانجام به اقیانوس می‌ریزد. اگر کاهش انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه آب- زمین وابسته به این ریزش بتواند به طور کامل به انرژی الکتریکی تبدیل شود، توان متوسط این تبدیل چقدر خواهد بود؟ (جرم $1m^3$ آب برابر با 1000kg است.)

**۱۳۰-** فنری با ثابت فنر $k=200$N/m از سقف به طور قائم آویزان شده است، به گونه‌ای که انتهای پایینی آن در مکان $y=0$ قرار دارد. قطعه‌ای به وزن 20N به انتهای پایینی فنر متصل می‌شود و پس از این که برای لحظه‌ای ثابت نگهداشته می‌شود، از حالت سکون رها می‌گردد. وقتی قطعه در $y=-5/0$cm است (الف) انرژی جنبشی $K$، (ب) تغییر (از مقدار اولیه) انرژی پتانسیل گرانشی $\Delta U_g$، و (پ) تغییر انرژی پتانسیل کشسانی $\Delta U_e$ دستگاه فنر- قطعه چقدر است؟ وقتی قطعه در $y=-10$cm است (ت) $K$، (ث) $\Delta U_g$، و (ج)

---
1. Licorice
2. Triceratops
3 Trynnosaurus rex

$\Delta U_e$ چقدر است؟ وقتی قطعه در $y=-15cm$ است (چ) $K$، (ح) $\Delta U_g$، و (خ) $\Delta U_e$ چقدر است؟ وقتی قطعه در $y=-20cm$ (د) $K$، (ذ) $\Delta U_g$، و (ر) $\Delta U_e$ چقدر است؟

۱۳۱- در هر ثانیه، $1200m^3$ آب از بالای آبشاری به بلندی $100m$ پایین می‌ریزد. $\frac{3}{4}$ انرژی جنبشی به دست آمده از سقوط آب، توسط یک مولد هیدرولیکی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. مولد با چه آهنگی انرژی الکتریکی تولید می‌کند؟ (جرم $1m^3$ آب برابر $1000kg$ است.) SSM

۱۳۲- شکل ۸-۷۲ الف مولکولی شامل دو اتم به جرمهای $m$ و $M$ (که $m \ll M$ است) و فاصلهٔ جدایی $r$ را نشان می‌دهد. شکل ۸-۷۲ ب انرژی پتانسیل $U(r)$ مولکول را برحسب تابعی از $r$ نشان می‌دهد. (الف) اگر انرژی مکانیکی کل $E$ دستگاه دو اتمی بزرگتر از صفر (مانند $E_1$)، و (ب) اگر $E$ کوچکتر از صفر (مانند $E_2$) باشد، حرکت اتمها را توصیف کنید. به ازای $E_1 = 1\times10^{-19}$ J و $r=0/3$ nm، مطلوب است (پ) انرژی پتانسیل دستگاه، (ت) انرژی جنبشی کلّ اتمها، و (ث) نیروی (بزرگی و جهت) وارد بر هم اتم. به ازای چه مقدارهایی از $r$، نیرو (ج) رانشی، (چ) ربایشی، و (ح) صفر است؟



**شکل ۸-۷۲** الف و ب مسئلهٔ ۱۳۲

۱۳۳- گلوله‌ای به جرم $m$ به یک سر میلهٔ صلب بدون جرمی به طول $L$ متصل شده است (شکل ۸-۷۳). سر دیگر میله به گونه‌ای لولا شده است که گلوله روی دایره‌ای قائم حرکت کند. نخست فرض کنید هیچ اصطکاکی در محل لولا وجود ندارد. میله و گلوله از وضعیت افقی $A$ با تندی اولیهٔ $v_0$ رو به پایین پرتاب می‌شوند. وقتی گلوله درست به نقطهٔ $D$ برسد، متوقف می‌شود. (الف) رابطه‌ای برحسب $L$، $m$، و $g$ برای $v_0$ به دست آورید. (ب) وقتی گلوله از نقطهٔ $B$ می‌گذرد، کشش در میله چقدر است؟ (پ) شن کوچکی در محل لولا گذاشته می‌شود تا اصطکاک را در آنجا افزایش دهد. حال اگر گلوله با همان تندی پیشین از نقطهٔ $A$ پرتاب شود، دقیقاً به نقطهٔ $C$ می‌رسد. در طی این حرکت، کاهش انرژی مکانیکی چقدر است؟ (ت) پس از این که گلوله بعد از چندین نوسان سرانجام در نقطهٔ $B$ متوقف شود، کاهش انرژی مکانیکی چقدر است؟ SSM



**شکل ۸-۷۳** مسئلهٔ ۱۳۳

۱۳۴- نیروی پایستار $F(x)$ روی ذره‌ای که در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند وارد می‌شود. شکل ۸-۷۴ نشان می‌دهد که انرژی پتانسیل $U(x)$ وابسته به نیروی $F(x)$ چگونه با مکان ذره تغییر می‌کند. (الف) $F(x)$ را برای گسترهٔ $0 < x < 6m$ رسم کنید. (ب) انرژی مکانیکی $E$ دستگاه برابر $4/0$ J است. انرژی جنبشی $K(x)$ ذره را مستقیماً روی شکل ۸-۷۴ رسم کنید.



**شکل ۸-۷۴** مسئلهٔ ۱۳۴

۱۳۵- یک سر فنر قائمی به سقف بسته شده است و به سر دیگر آن یک کلم متصل است که به آهستگی پایین آورده می‌شود تا این که نیروی رو به بالایی که فنر بر کلم وارد می‌آورد با نیروی گرانشی وارد بر آن برابر شود. نشان دهید انرژی پتانسیل گرانشی که دستگاه کلم- زمین از دست می‌دهد دو برابر انرژی پتانسیلی است که فنر به دست می‌آورد. چرا این دو مقدار با هم برابر نیستند؟

# ۹
# مرکز جرم و اندازه حرکت خطی



**چگونه بزها می‌توانند در مقابل چنین برخوردهای شدیدی مقاومت کنند؟**

بزهای کوهی نر با شاخهای بزرگ برای جلب توجه بزهای ماده با یکدیگر می‌جنگند. دو بز کوهی به طور مکرر و با حداکثر سرعت خود در حالی که سر خود را پایین نگهداشته‌اند به سمت یکدیگر می‌دوند و شاخ به شاخ به هم ضربه می‌زنند تا اینکه بالاخره یکی از آنها دست از مبارزه بر دارد. چنین برخوردهایی می‌تواند زیانبار باشد چون اگر شاخ بشکند بز به شدت مجروح شده و امکان دارد در ضربهٔ بعدی کشته شود. اما حتی بدون شکستن شاخ ممکن است هر دو بز بیهوش به زمین بیافتند.

پاسخ در همین فصل.

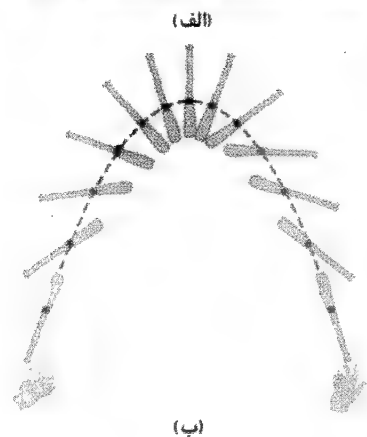
## ۹-۱ فیزیک چیست؟

هر مهندس مکانیک که به عنوان یک شاهد متخصص استخدام می‌شود تا صحنهٔ تصادف را بازسازی کند، از فیزیک استفاده می‌کند. هر مربی که به بالرین یاد می‌دهد که چگونه پرش کند، از فیزیک استفاده می‌کند. در واقع، تحلیل هر حرکت پیچیده‌ای از هر نوع نیاز به ساده سازی از طریق درک از فیزیک دارد. در این فصل بحث از این است که چگونه می‌توان حرکت پیچیدهٔ دستگاهی از جسمها، مانند اتومبیل یا بالرین را ساده کرد در صورتی که نقطهٔ معینی از جسم، مرکز جرم آن دستگاه، را معین کرده باشیم.

در اینجا یک مثال ساده وجود دارد. اگر شما توپی را بدون آنکه چرخش زیادی به آن بدهید، به هوا پرتاب کنید، (شکل ۹-۱ الف) توپ یک مسیر سهموی را که در فصل ۴ بحث کردیم، طی می‌کند و با آن می‌توان نظیر یک ذره رفتار کرد. اگر، در عوض، یک چوب بیسبال را به هوا پرتاب کنید (شکل ۹-۱ب)،



(الف)



(ب)

**شکل ۹-۱** (الف) توپی که به هوا پرتاب شود یک مسیر سهموی را طی می‌کند (ب) مرکز جرم (نقطهٔ سیاه) یک چوب بیسبال که به هوا پرتاب شده است، یک مسیر سهموی را طی می‌کند، اما سایر نقطه‌های آن مسیر پیچیده‌ای را طی می‌کنند.

حرکت آن خیلی پیچیده‌تر است، چون هر قسمت چوب در امتداد مسیرهایی با شکلهای متفاوت حرکت می‌کند و نمی‌توان چوب را به عنوان یک ذره در نظر گرفت. بلکه چوب بیسبال دستگاهی از ذره‌هاست که هر کدام در هوا مسیر خودش را دارد. با این وجود، چوب دارای یک نقطه معین- مرکز جرم- است که در یک مسیر سهموی حرکت می‌کند. سایر قسمتهای چوب دور مرکز جرم حرکت می‌کنند. (برای مشخص کردن مرکز جرم، چوب را روی انگشت خود به حالت تعادل درآورید، مرکز جرم بالای انگشت شما، روی محور مرکزی چوب قرار دارد.)

شما ممکن است نتوانید چگونگی حرکت یک چوب بیسبال را در هوا تشخیص دهید ولی می‌توانید در مورد چگونگی مناسب پریدن موقع اجرای جست بزرگ با حرکت دادن دستها و پاها یا چرخاندن بدن توصیه‌هایی داشته باشید. نقطهٔ شروع شما مرکز جرم شخص به دلیل حرکت سادهٔ آن است.

## ۹-۲ مرکز جرم

ما **مرکز جرم** (com)[1] دستگاهی از ذره‌ها (مانند یک شخص) را تعریف می‌کنیم برای اینکه بتوانیم حرکت ممکن دستگاه را پیش‌بینی کنیم.

> مرکز جرم یک دستگاه ذره‌ها نقطه‌ای است که وقتی حرکت می‌کند گویی (۱) تمام جرم دستگاه در آن نقطه متمرکز است و (۲) تمام نیروهای خارجی به آن نقطه وارد می‌شوند.

در این بخش بحث می‌کنیم که چطور می‌توانیم محل مرکز جرم دستگاهی از ذره‌ها را معین کنیم. با دستگاهی شروع می‌کنیم که فقط چند ذره داشته باشد و سپس دستگاهی را در نظر می‌گیریم که شامل تعداد زیادی ذره باشد (جسم صلب، مانند چوب بیسبال). سپس در این فصل، بحث می‌کنیم که وقتی دستگاه تحت تأثیر نیروی خارجی قرار گیرد مرکز جرم چگونه حرکت خواهد کرد.

### *دستگاه ذره‌ها*

شکل ۹-۲ الف دو ذره با جرمهای $m_1$ و $m_2$ را نشان می‌دهد که به فاصلهٔ $d$ از هم قرار دارند. به طور اختیاری مبدأ را روی محور $x$ انتخاب می‌کنیم به گونه‌ای که روی ذره $m_1$ قرار گیرد. مکان مرکز جرم (com) این دستگاه دو- ذره را به این شکل تعریف می‌کنیم

$$x_{\text{com}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \qquad (۹-۱)$$

1. center of mass

به عنوان مثال، فرض کنید که $m_2 = 0$ باشد. آنگاه فقط یک ذره وجود دارد به جرم $m_1$ و مرکز جرم باید در مکان آن ذره واقع باشد؛ معادلهٔ ۹-۱ به $x_{com} = 0$ تبدیل می‌شود. اگر $m_1 = 0$ باشد، باز یک ذره وجود دارد (به جرم $m_2$) و همان‌طور که انتظار داریم $x_{com} = d$ . اگر $m_1 = m_2$ باشد مرکز جرم باید در وسط دو ذره قرار گیرد و معادلهٔ ۹-۱ همان‌طور که انتظار داریم به $x_{com} = \frac{1}{2}d$ تبدیل می‌شود. سرانجام، معادلهٔ ۹-۱ حاکی از آن است که اگر $m_1$ و $m_2$ هیچ کدام صفر نباشند، $x_{com}$ می‌تواند فقط مقدارهایی بین صفر و $d$ را داشته باشد یعنی مرکز جرم باید جایی بین دو ذره واقع باشد.

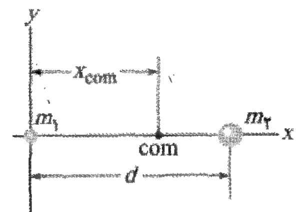
شکل ۹-۲ ب وضعیت کلیتری را نشان می‌دهد که در آن دستگاه مختصات کمی به چپ جا به جا شده است. حالا مکان مرکز جرم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (۹-۲)$$

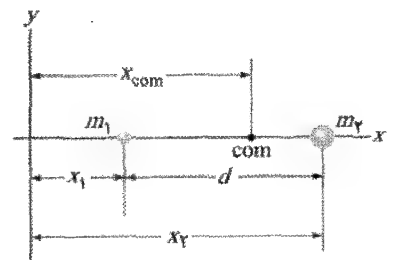
توجه کنید که اگر قرار دهیم $x_1 = 0$ ، آنگاه $x_2$ همان $d$ است و معادلهٔ ۹-۲ همان‌گونه که باید به معادلهٔ ۹-۱ تبدیل می‌شود. همچنین توجه کنید که به رغم جابه‌جایی دستگاه مختصات، مرکز جرم هنوز به فاصلهٔ یکسانی از هر ذره قرار دارد.

می‌توانیم معادلهٔ ۹-۲ را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \qquad (۹-۳)$$




(الف)




(ب)

**شکل ۹-۲** (الف) دو ذره با جرمهای $m_1$ و $m_2$ به فاصلهٔ $d$ از هم قرار دارند. نقطه محل مرکز جرم را نشان می‌دهد که از معادلهٔ ۹-۱ ب محاسبه شده است. (ب) همانند (الف) اما مبدأ کمی دورتر از ذره‌هاست. مکان مرکز جرم از معادلهٔ ۹-۲ محاسبه می‌شود. محل مرکز جرم نسبت به ذره‌ها در دو حالت یکسان است.

که در آن $M$ جرم کل دستگاه است، (اینجا $M = m_1 + m_2$). می‌توانیم این معادله را برای حالت کلیتری بسط دهیم به گونه‌ای که $n$ ذره در امتداد محور $x$ قرار داشته باشند. آنگاه جرم کل دستگاه برابر است با $M = m_1 + m_2 + ... + m_n$ و مکان مرکز جرم عبارت است از

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad (۹-۴)$$

زیرنویس $i$ عددی است، که تمام مقدارهای صحیح بین ۱ تا $n$ را شامل می‌شود.

اگر ذره‌ها در سه بعد توزیع شده باشند، مرکز جرم باید با سه مختصه مشخص شود. با بسط معادلهٔ ۹-۴ داریم

$$x_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad y_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad z_m = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \qquad (۹-۵)$$

همچنین می‌توانیم مرکز جرم را با زبان بردار بیان کنیم. ابتدا یادآوری می‌کنیم که مکان ذره در مختصات $x_i$ ، $y_i$ و $z_i$ با یک بردار مکان داده می‌شود

$$\vec{r}_i = x_i\,\hat{i} + y_i\,\hat{j} + z_i\,\hat{k} \qquad (۹-۶)$$

اینجا زیرنویس ذره را معین می‌کند و $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ بردارهای یکه هستند که به ترتیب در جهت مثبت محور $x$، $y$ و $z$ قرار دارند. به همین ترتیب، مکان مرکز جرم ذره‌ها با یک بردار مکان داده می‌شود

$$\vec{r}_{com} = x_{com}\hat{i} + y_{com}\hat{j} + z_{com}\hat{k} \qquad (۹-۷)$$

سه معادلهٔ نرده‌ای معادلهٔ ۹-۵ را می‌توان با تنها یک معادلهٔ برداری جایگزین کرد

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad (۹-۸)$$

که در آن $M$ جرم کل دستگاه است. می‌توانید با جایگزین کردن معادله‌های ۹-۶ و ۹-۷ در این معادله و سپس جدا کردن مؤلفه‌های $x$، $y$ و $z$ آن را امتحان کنید. رابطهٔ نرده‌ای معادلهٔ ۹-۵ حاصل می‌شود.

## جسم‌های صلب

یک جسم معمولی مانند چوب بیسبال، شامل تعداد بسیار زیادی ذره (اتم) است و بهترین کار این است که آن را توزیع پیوسته‌ای از ماده در نظر بگیریم. در این صورت «ذره‌ها» به صورت عنصر جرم دیفرانسیلی $dm$ هستند و مجموع در معادله ۹-۵ به انتگرال تبدیل و مختصات مرکز جرم به این صورت تعریف می‌شوند

$$x_{com} = \frac{1}{M}\int x\,dm \quad y_{com} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad z_{com} = \int z\,dm \qquad (۹-۹)$$

که در آنها $M$ جرم جسم است.

محاسبهٔ این انتگرالها برای اغلب جسمهای معمولی (نظیر تلویزیون یا یک گوزن) مشکل خواهد بود، لذا در اینجا فقط جسمهای *یکنواخت* را در نظر می‌گیریم. چنین جسمی دارای *چگالی* یا جرم بر یکای حجم یکنواخت است، یعنی چگالی $\rho$ (حرف یونانی رو) برای هر عنصر از جسم داده شده و همچنین برای تمام جسم یکسان است

$$\rho=\frac{dm}{dV}=\frac{M}{V} \qquad (۹-۱۰)$$

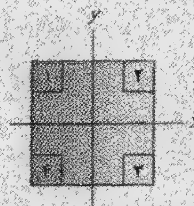
که در آن $dV$ حجم اشغال شده توسط عنصر جرمی $dm$ و $V$ حجم کل جسم است. با قرار دادن $dm=(M/V)dV$ از معادلهٔ ۹-۱۰ در معادلهٔ ۹-۹ نتیجهٔ زیر به دست می‌آید

$$x_{com}=\frac{1}{V}\int x\,dV \quad y_{com}=\frac{1}{V}\int y\,dV \quad z_{com}=\frac{1}{V}\int z\,dV \qquad (۹-۱۱)$$

اگر جسم نسبت به یک نقطه، یک خط یا یک صفحه تقارن داشته باشد یک یا دو تا از این انتگرالها را می‌توان حذف کرد. در این صورت مرکز جرم جسم روی آن نقطه، روی آن خط یا در آن صفحه قرار دارد. برای مثال، مرکز جرم یک کرهٔ یکنواخت (که یک نقطهٔ تقارن دارد) در مرکز کره (که همان نقطهٔ تقارن است) قرار دارد. مرکز جرم یک مخروط یکنواخت (که محور آن خط تقارن است) روی محور مخروط و مرکز جرم یک موز (که دارای صفحه تقارن است که آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند) در جایی از این صفحه قرار دارد.

مرکز جرم یک جسم لازم نیست که در داخل جسم واقع باشد. در مرکز جرم نان شیرینی حلقه‌ای مادهٔ شیرینی و در مرکز جرم یک نعل اسب مادهٔ آهن وجود ندارد.

✓ **نکتهٔ وارسی ۱** شکل یک صفحهٔ مربع شکل یکنواخت را نشان می‌دهد که چهار مربع یکسان از گوشه‌های آن برداشته شده است. (الف) مرکز جرم صفحهٔ مربع اصلی در کجا واقع است؟ مرکز جرم پس از برداشتن (ب) مربع ۱؛ (ب) مربع ۱ و ۲؛ (پ) مربع ۱ و ۳؛ (ت) مربع ۱ و ۲ و ۳؛ (ث) هر چهار مربع، در کجا واقع است؟ پاسخ را بر حسب ربعهای دستگاه مختصات، محورها یا نقطه‌ها (البته بدون محاسبه) بیان کنید.




## مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۱

سه ذره با جرمهای $m_1=۱/۲\text{kg}$ ، $m_2=۲/۵\text{kg}$ و $m_3=۳/۴\text{kg}$ یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $a=۱۴۰\text{cm}$ را تشکیل می‌دهند. مرکز جرم این دستگاه در کجا واقع است؟

**نکتهٔ کلیدی** ما به جای یک جسم صلب گسترده با چند ذره سروکار داریم. بنابراین، می‌توانیم معادلهٔ ۹-۵ را برای معین کردن مرکز جرم آنها به کار بریم. چون ذره‌ها در صفحهٔ مثلث متساوی الاضلاع قرار دارند در نتیجه فقط به دو معادلهٔ اول نیاز داریم.

***محاسبه‌ها:*** می‌توانیم برای ساده سازی مسئله دو محور $x$ و $y$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که مبدأ روی یکی از ذره‌ها و محور $x$ در راستای یکی از ضلعهای مثلث باشد (شکل ۹-۳). آنگاه سه ذره دارای مختصات زیرند

| ذره | جرم(kg) | x(cm) | y(cm) |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۱/۲ | ۰ | ۰ |
| ۲ | ۲/۵ | ۱۴۰ | ۰ |
| ۳ | ۳/۴ | ۷۰ | ۱۲۰ |

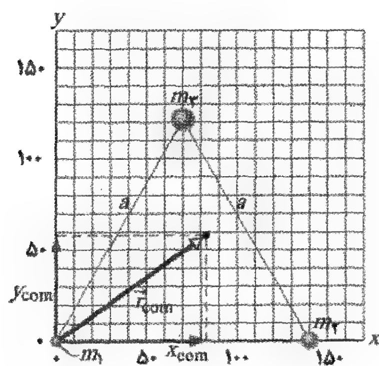
جرم کل $M$ دستگاه $۷/۱\text{ kg}$ است.

از معادلهٔ ۹-۵، مختصات مرکز جرم عبارت‌اند از

$$x_{com}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{۳}m_ix_i=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{M}$$

$$=\frac{(۱/۲\text{kg})(۰)+(۲/۵\text{kg})(۱۴۰\text{ cm})+(۳/۴\text{ kg})(۷۰\text{ cm})}{۷/۱\text{kg}}$$

$$=۸۳\text{cm} \qquad \text{(پاسخ)}$$




**شکل ۹-۳** سه ذره یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $a$ تشکیل می‌دهند. مرکز جرم با بردار مکان $\vec{r}_{com}$ مشخص شده است.

و

$$y_{com}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{۳}m_iy_i=\frac{m_1y_1-m_2y_2+m_3y_3}{M}$$

$$=\frac{(۱/۲\text{kg})(۰)+(۲/۵\text{kg})(۰)+(۳/۴\text{kg})(۱۲۰\text{ cm})}{۷/۱\text{kg}}$$

$$=۵۸\text{ cm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

در شکل ۹-۳ مرکز جرم به وسیلهٔ بردار مکان $\vec{r}_{com}$ مشخص شده، که دارای مؤلفه‌های $x_{com}$ و $y_{com}$ است.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۲ مهارت خود را تقویت کنید

شکل ۹-۴ الف صفحهٔ فلزی یکنواخت $P$ به شعاع $2R$ را نشان می‌دهد که قرصی به شعاع $R$ از آن کنده شده (برداشته شده) است. با به کار بردن دستگاه مختصات $xy$ نشان داده شده مکان مرکز جرم $\text{com}_P$ صفحه را به دست آورید.

**نکته‌های کلیدی** (۱) به طور تقریبی مرکز جرم صفحهٔ $P$ را با استفاده از تقارن معین می‌کنیم. می‌دانیم که صفحه نسبت به محور $x$ تقارن دارد (قسمت پایین محور را می‌توان با چرخش قسمت بالا حول محور $x$ به دست آورد.) بنابراین، $\text{com}_P$ باید روی محور $x$ باشد. این صفحه (با قرص برداشته شده) نسبت به محور $y$ متقارن نیست. با وجود این، چون در سمت راست محور $y$ جرم بیشتری وجود دارد، $\text{com}_P$ مرکز جرم باید قدری به سمت راست آن محور جابه‌جا شده باشد. بنابراین، مکان $\text{com}_P$ باید تقریباً همان جایی باشد که در شکل ۹-۴ الف مشخص شده است. (۲) صفحهٔ $P$ یک جسم صلب گسترده است، لذا می‌توانیم معادلهٔ ۹-۱۱ را برای پیداکردن مختصات واقعی $\text{com}_P$ به کار بریم. اما، این شیوه مشکل است. در اینجا راه خیلی ساده‌تر این است که: هنگام کار کردن با مرکز جرم می‌توانیم فرض کنیم که جرم یک جسم یکنواخت در ذره‌ای در مرکز جرم آن جسم متمرکز شده است.

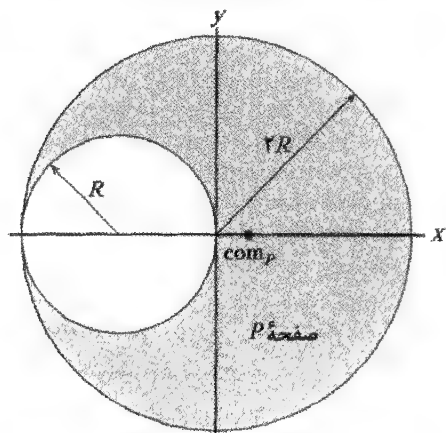
***محاسبه‌ها:*** ابتدا قرص جدا شده را (که $S$ می‌نامیم) سر جای خود برمی‌گردانیم (شکل ۹-۴ ب) تا صفحهٔ مرکب اصلی (که آن را $C$ می‌نامیم) به دست آید. با توجه به تقارن دایره‌ای این صفحه، مرکز جرم $\text{com}_S$ برای قرص $S$ در مرکز $S$، یعنی در $x=-R$ (همان‌گونه که نشان داده شده) واقع است. به همین ترتیب، مرکز جرم $\text{com}_C$ برای صفحهٔ مرکب $C$ در مرکز $C$ یعنی در مبداء مختصات (همانگونه که نشان داده شده) واقع است. پس داریم:

| صفحه | مرکز جرم | مکان com | جرم |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\text{com}_P$ | $x_P=?$ | $m_P$ |
| $S$ | $\text{com}_S$ | $x_S=-R$ | $m_S$ |
| $C$ | $\text{com}_C$ | $x_C=0$ | $m_C=m_S+m_P$ |

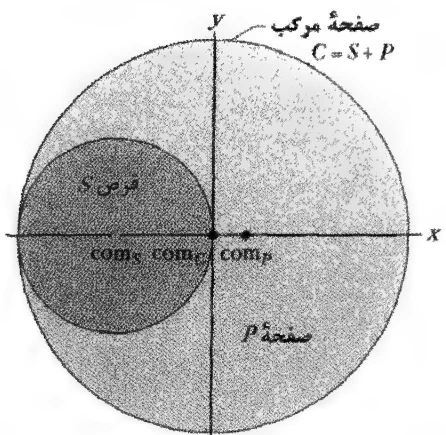
فرض می‌کنیم که جرم $m_S$ قرص $S$، در یک ذره واقع در $x=-R$ و جرم $m_P$ در یک ذره واقع در $x_P$ (شکل ۹-۴ پ) متمرکز شده است. سپس این دو ذره را به عنوان دستگاه دو ذره‌ای در نظر می‌گیریم، معادلهٔ ۹-۲ را برای پیدا کردن مرکز جرم آنها $m_{S+P}$ به‌کار می‌بریم. داریم

$$x_{S+P}=\frac{m_S x_S+m_P x_P}{m_S+m_P} \qquad (۹\text{-}۱۲)$$

حال توجه داریم که ترکیب قرص $S$ و صفحهٔ $P$ صفحهٔ مرکب $C$ را به دست می‌دهد. بنابراین، مکان $x_{S+P}$ مربوط به $\text{com}_{S+P}$ باید بر مکان $x_C$ مربوط به $\text{com}_C$ منطبق باشد که در



(الف)



(ب)



(پ)

**شکل ۹-۴ (الف)** صفحهٔ $P$ یک صفحهٔ فلزی به شعاع $2R$ است، که در آن یک سوراخ دایره‌ای به شعاع $R$ ایجاد شده است. مرکز جرم $P$ در نقطهٔ $\text{com}_P$ قرار دارد. (ب) قرص $S$ در جای خود قرار داده شده تا صفحهٔ مرکب $C$ تشکیل شود. مرکز جرم $\text{com}_S$ قرص $S$ و مرکز جرم صفحهٔ $C$ $\text{com}_C$ نشان داده شده‌اند. (پ) مرکز جرم $\text{com}_{S+P}$ ترکیب $S$ و $P$ بر $\text{com}_C$ منطبق است و در $x=0$ قرار دارد.

مبدأ قرار دارد. بنابراین، $x_{S+P}=x_C=0$ . با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ ۹-۱۲ و حل آن برای $x_P$ ، داریم

$$x_P=-x_S\frac{m_S}{m_P} \qquad (۹\text{-}۱۳)$$

می‌توانیم جرمها را از طریق این رابطه به مساحتهای $S$ و $P$ مربوط کنیم، داریم

حجم × چگالی = جرم

مساحت × ضخامت × چگالی =

پس

$$\frac{m_S}{m_P}=\frac{S\ \text{چگالی}}{P\ \text{چگالی}}\times\frac{S\ \text{ضخامت}}{P\ \text{ضخامت}}\times\frac{S\ \text{مساحت}}{P\ \text{مساحت}}$$

چون صفحه یکنواخت است چگالیها و ضخامتها مساوی‌اند و در نتیجه داریم

$$\frac{m_s}{m_p} = \frac{S \text{ مساحت}}{P \text{ مساحت}} = \frac{S \text{ مساحت}}{C \text{ مساحت} - S \text{ مساحت}}$$

$$= \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}$$

با قراردادن این مقدار و $x_s = -R$ در معادلهٔ ۹-۱۳ داریم

$$x_p = \frac{1}{3}R \qquad \text{(پاسخ)}$$

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱: مسئله‌های مربوط به مرکز جرم*

مسئله‌های نمونهٔ ۹-۱ و ۹-۲ سه راهبرد برای ساده کردن مسئله‌های مرکز جرم را ارائه می‌کنند. (۱) از تقارن جسم نسبت به یک نقطه، یک خط یا یک صفحه کاملاً استفاده کنید. (۲) اگر جسم قابل تقسیم شدن به چند قسمت است هر قسمت را ذره‌ای واقع در مرکز جرم آن قسمت در نظر بگیرید. (۳) محورهای خود را مدبرانه انتخاب کنید: اگر دستگاه شامل گروهی از ذره‌هاست، یکی از آنها را به عنوان مبدأ انتخاب کنید. اگر دستگاه جسمی با تقارن خطی است همان خط را محور $x$ یا $y$ انتخاب کنید. انتخاب مبدأ کاملاً اختیاری است؛ محل مرکز جرم یکسان است و بستگی به انتخاب مبدأ ندارد.

## ۹-۳ قانون دوم نیوتون برای دستگاه ذره‌ها

اکنون که می‌دانیم چگونه مرکز جرم دستگاهی از ذره‌ها را تعیین کنیم، در مورد اینکه نیروی خارجی مرکز جرم را چگونه به حرکت درمی‌آورد بحث می‌کنیم. با دستگاه سادهٔ دو گوی بیلیارد شروع می‌کنیم.

اگر چوب بیلیارد گوی بیلیاردی را بغلتاند و گوی به سمت گوی دیگری که ساکن است برود، انتظار دارید دستگاه دو گوی پس از برخورد حرکت به سمت جلو داشته باشند. اما اگر هر دو گوی به سمت شما برگردند یا هر دو به سمت راست یا چپ حرکت کنند، متعجب خواهید شد.

آنچه حرکت به سمت جلو را ادامه می‌دهد و حرکت پایای آن به سمت جلو بر اثر ضربه تغییر نمی‌کند، مرکز جرم دستگاه دو گوی است. اگر به همین نقطه توجه کنید که همیشه به دلیل مشابه بودن جرم گویها در وسط فاصلهٔ این دو گوی است، به سادگی می‌توانید با آزمایش روی میز بیلیارد قانع شوید که این چنین است. بدون توجه به اینکه برخورد مماسی، رودررو یا، چیزی بین آن دو باشد، مرکز جرم به حرکت رو به جلو ادامه می‌دهد، مثل آنکه هرگز برخوردی رخ نداده است. حال حرکت مرکز جرم را با دقت بیشتری بررسی می‌کنیم.

برای انجام این امر، به جای دو گوی بیلیارد مجموعهٔ $n$ ذره با جرمهای متفاوت (احتمالاً) را در نظر می‌گیریم. در اینجا حرکت تک‌تک ذره‌ها مورد توجه نیست، بلکه فقط به حرکت مرکز جرم آنها توجه داریم. هر چند که مرکز جرم فقط یک نقطه است ولی مثل ذره‌ای حرکت می‌کند که جرمش برابر جرم کل دستگاه است؛ و به این ذره می‌توان مکان، سرعت و شتاب نسبت داد. یک معادلهٔ برداری (که بعداً اثبات خواهیم کرد) در نظر می‌گیریم که بر حرکت مرکز جرم دستگاه حاکم است، این معادله به شکل زیر است

$$\vec{F}_{\text{net}} = M\vec{a}_{\text{com}} \qquad \text{(دستگاه ذره‌ها)} \qquad (۹\text{-}۱۴)$$

این معادله بیان کنندهٔ قانون دوم نیوتون برای حرکت مرکز جرم دستگاه ذره‌هاست. توجه کنید که شکل این معادله به همان شکل معادلهٔ $(\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a})$ برای حرکت یک تک ذره است. اما سه کمیتی را که در معادلهٔ ۹-۱۴ ظاهر می‌شوند باید با دقت مورد توجه قرار دهیم.

۱. $\vec{F}_{\text{net}}$ نیروی خالص مربوط به همهٔ *نیروهای خارجی* است که به دستگاه وارد می‌شوند. نیروهای وارد بر یک قسمت دستگاه از قسمت دیگر دستگاه (*نیروهای داخلی*) در معادلهٔ ۹-۱۴ منظور نشده‌اند.

۲. $M$ جرم *کل* دستگاه است. فرض می‌کنیم در حین حرکت دستگاه هیچ جرمی از دستگاه خارج یا به آن وارد نمی‌شود، لذا $M$ ثابت باقی می‌ماند. گفته می‌شود که دستگاه **بسته** است.

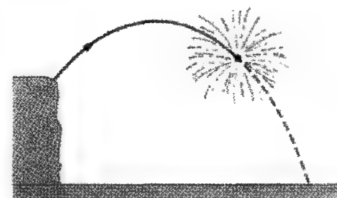
۳. $\vec{a}_{\text{com}}$ شتاب *مرکز جرم* دستگاه است و معادلهٔ ۹-۱۴ هیچ‌گونه اطلاعاتی از شتاب نقطه‌های دیگر دستگاه به دست نمی‌دهد.

معادلهٔ ۹-۱۴ معادل سه معادلهٔ مربوط به مؤلفه‌های $\vec{F}_{\text{net}}$ و $\vec{a}_{\text{com}}$ در راستای سه محور دستگاه مختصات است. این معادله‌ها عبارت‌اند از

$$F_{\text{net},x} = Ma_{\text{com},x} \quad F_{\text{net},y} = Ma_{\text{com},y} \quad F_{\text{net},z} = Ma_{\text{com},z} \qquad (۹\text{-}۱۵)$$

اکنون می‌توانیم به موضوع رفتار گویهای بیلیارد برگردیم. از لحظه‌ای که گوی بیلیارد شروع به حرکت می‌کند، هیچ نیروی خارجی به دستگاه (دو گوی) وارد نمی‌شود. بنابراین، چون $\vec{F}_{\text{net}} = 0$ است، معادلهٔ ۹-۱۴ نشان می‌دهد که همچنین $\vec{a}_{\text{com}} = 0$ است. چون شتاب آهنگ زمانی تغییر سرعت است، نتیجه می‌گیریم که سرعت مرکز جرم دستگاه دو گوی تغییر نمی‌کند. وقتی دو گوی برخورد می‌کنند، نیروهای مؤثر نیروهای *داخلی* هستند که از یک گوی به گوی دیگر وارد می‌شوند. این نیروها در نیروی خالص $\vec{F}_{\text{net}}$ دخالتی ندارند و نیروی خالص صفر باقی می‌ماند. بنابراین، مرکز جرم دستگاه که پیش از برخورد به سمت جلو حرکت می‌کرد باید پس از برخورد نیز با همان تندی و در همان راستا به سمت جلو حرکت کند.

معادلهٔ ۹-۱۴ نه تنها برای دستگاه ذره‌ها بلکه برای جسم صلب نظیر چوب بیسبال شکل ۹-۱ ب نیز به کار می‌رود. در این حالت، $M$ در معادلهٔ ۹-۱۴ جرم چوب بیسبال و $\vec{F}_{\text{net}}$ نیروی گرانشی وارد بر چوب است. پس معادلهٔ ۹-۱۴ نشان می‌دهد که $\vec{a}_{\text{com}} = -\vec{g}$ . به عبارت دیگر، مرکز جرم چوب بیسبال به گونه‌ای حرکت می‌کند که گویی چوب یک ذرهٔ تنهاست و بر اثر نیروی $\vec{F}_g$ حرکت می‌کند.



**شکل ۹-۵** یک ترقهٔ آتشبازی در حین پرواز منفجر می‌شود. در نبود مقاومت هوا، مرکز جرم پاره‌های حاصل از انفجار در همان مسیر سهموی اول حرکت می‌کنند تا سرانجام پاره‌ها به زمین برخورد کنند.

شکل ۹-۵ حالت جالب دیگری را نشان می‌دهد. فرض کنید در یک نمایش آتشبازی، موشکی در یک مسیر سهموی حرکت می‌کند. در نقطهٔ معینی موشک منفجر و به پاره‌هایی تقسیم می‌شود. اگر انفجار رخ نمی‌داد، موشک در مسیر نشان داده شده در شکل به حرکت خود ادامه می‌داد. نیروهای مربوط به انفجار نسبت به دستگاه داخلی هستند (در ابتدا دستگاه فقط یک موشک و سپس دستگاه شامل پاره‌های آن است)؛ یعنی، نیروهایی هستند که از طرف قسمتهایی از دستگاه به قسمتهای دیگر دستگاه وارد می‌شوند. اگر از مقاومت هوا چشمپوشی کنیم، نیروی *خارجی* خالص $F_{\text{net}}$ وارد بر دستگاه همان نیروی گرانشی است، بدون توجه به اینکه موشک منفجر شود یا نشود. بنابراین، از معادلهٔ ۹-۱۴ شتاب مرکز جرم $\vec{a}_{\text{com}}$ پاره‌ها (در حین پرواز) برابر با $\vec{g}$ باقی می‌ماند. این بدان معناست که مرکز جرم پاره‌ها همان مسیر سهموی را طی می‌کند که اگر موشک منفجر نمی‌شد طی می‌کرد.

وقتی یک بالرین پرش مخصوص بالرینها را انجام می‌دهد به محض اینکه پاهایش از صحنه جدا شود دستهایش را بالا می‌برد و پاهایش در طرفین به حالت افقی درمی‌آید (شکل ۹-۶). این حرکتها مرکز جرم او را داخل بدنش به سمت بالا جابه‌جا می‌کند. اگر چه جابه‌جایی مرکز جرم در واقع یک مسیر سهموی را طی می‌کند، حرکت آن نسبت به بدن ارتفاعی را که سر و بدن در یک پرش معمولی پیدا می‌کردند کاهش می‌دهد. نتیجه این است که سر و تنهٔ او تقریباً یک مسیر افقی را طی می‌کنند و به نظر می‌رسد که او در هوا شناور است.

### اثبات معادلهٔ ۹-۱۴

اکنون این معادلهٔ مهم را اثبات می‌کنیم. از معادلهٔ ۹-۸ برای دستگاه $n$ ذره داریم

$$M\vec{r}_{\text{com}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots + m_n\vec{r}_n \qquad (۹-۱۶)$$

که در آن $M$ جرم کل دستگاه و $\vec{r}_{\text{com}}$ برداری است که مکان مرکز جرم دستگاه را مشخص می‌کند.

مشتق گرفتن از معادلهٔ ۹-۱۶ نسبت به زمان به دست می‌دهد

$$M\vec{v}_{\text{com}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots + m_n\vec{v}_n \qquad (۹-۱۷)$$

در این معادله $\vec{v}_i(=d\vec{r}_i/dt)$ سرعت ذرهٔ $i$ام و $v_{\text{com}}(=d\vec{r}_{\text{com}}/dt)$ سرعت مرکز جرم است.

با مشتق گرفتن از معادلهٔ ۹-۱۷ نسبت به زمان داریم

$$M\vec{a}_{\text{com}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \ldots + m_n\vec{a}_n \qquad (۹-۱۸)$$

در اینجا $\vec{a}_i(=d\vec{v}_i/dt)$ شتاب ذرهٔ $i$ام و $\vec{a}_{\text{com}}(=d\vec{v}_{\text{com}}/dt)$ شتاب مرکز جرم است. اگرچه مرکز جرم فقط یک نقطهٔ هندسی است، اما مانند یک ذره دارای مکان، سرعت و شتاب است

از قانون دوم نیوتون $m_i a_i$ برابر است با نیروی برایند $\vec{F}_i$ که بر ذرهٔ $i$ام وارد می‌شود. بنابراین، می‌توانیم معادلهٔ ۹-۱۸ را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$Ma_{\text{com}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n \qquad (۹-۱۹)$$

در میان نیروهای طرف راست معادلهٔ ۹-۱۹ نیروهایی که ذره‌های مختلف دستگاه به هم وارد می‌کنند (نیروهای داخلی) و نیروهایی که از خارج دستگاه به ذره‌ها وارد می‌شوند (نیروهای خارجی) وجود دارند. بنابر قانون سوم نیوتون، نیروهای داخلی تشکیل زوج نیروی قانون سوم را می‌دهند و حاصل آنها در مجموع طرف راست معادلهٔ ۹-۱۹ یکدیگر را خنثی می‌کنند. چیزی که باقی می‌ماند جمع برداری تمام *نیروهای خارجی* است که به دستگاه وارد می‌شوند. پس معادلهٔ ۹-۱۹ به صورت معادلهٔ ۹-۱۴ که سعی داشتیم ثابت کنیم درمی‌آید.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۲*** دو اسکیت باز روی یخ بدون اصطکاک دو سر میله‌ای را که جرمش قابل چشمپوشی است گرفته‌اند. محور در امتداد میله است و مبداء محور را در مرکز جرم دستگاه دو اسکیت باز در نظر می‌گیریم. یک اسکیت باز وزنش دو برابر اسکیت باز دیگر است. اسکیت بازها در کجا به هم می‌رسند اگر (الف) اولی میله را با دست به سمت خود بکشد تا به سوی دومی حرکت کند. (ب) دومی میله را با دست بکشد تا به سوی اولی حرکت کند و (پ) هر دو اسکیت باز میله را با دست بکشند.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۳**

سه ذرهٔ در شکل ۹-۷ الف در ابتدا ساکن هستند. هر یک از سه ذره از طرف جسمهای خارج دستگاه تحت تأثیر یک نیروی خارجی قرار می‌گیرند که جهت نیروها در شکل نشان داده شده است. بزرگی این نیروها عبارت‌اند از $F_1 = ۶/۰\,\text{N}$ ، $F_2 = ۱۲\text{N}$ و $F_3 = ۱۴\,\text{N}$ . شتاب مرکز جرم دستگاه چقدر است و دستگاه در چه جهتی حرکت می‌کند؟




**شکل ۹-۶** پرش مخصوص بالرینها برگرفته از
(The Physics of Dance, By Kenneth Lawa, Schirmer Books, 1984)

**نکته‌های کلیدی** مکان مرکز جرم که با روش مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۱ حساب شده با یک نقطه نشان داده شده است. می‌توانیم با مرکز جرم اینگونه برخورد کنیم که گویی یک ذرهٔ واقعی است و جرمی برابر با جرم کل دستگاه $M = ۱۶\text{kg}$ دارد. همچنین می‌توانیم با سه نیروی خارجی طوری رفتار کنیم که گویی بر مرکز جرم دستگاه وارد می‌شوند (شکل ۹-۷ب).

***محاسبه‌ها:*** اکنون می‌توانیم قانون دوم نیوتون ($\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$) را برای مرکز جرم به کار ببریم، می‌نویسیم

$$\vec{F}_{\text{net}} = M\,\vec{a}_{\text{com}} \qquad (۹-۲۰)$$

یا

$$\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ + \vec{F}_۳ = M\,\vec{a}_{\text{com}}$$

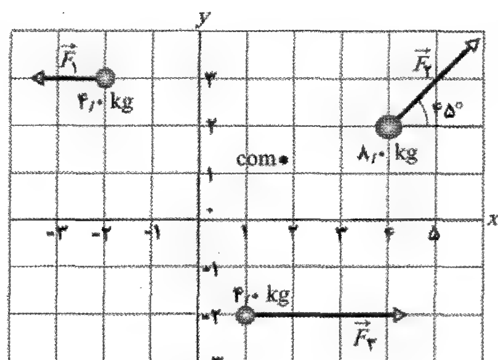
و داریم

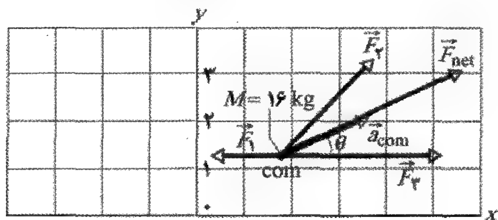
$$\vec{a}_{\text{com}} = \frac{\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ + F_۳}{M} \qquad (۹-۲۱)$$

معادلهٔ ۹-۲۰ حاکی از آن است که شتاب $\vec{a}_{\text{com}}$ مرکز جرم هم جهت با نیروی خارجی خالص $\vec{F}_{\text{net}}$ وارد بر دستگاه است (شکل ۹-۷ ب). چون ذره‌ها در آغاز ساکن هستند مرکز جرم هم باید ساکن باشد. وقتی مرکز جرم شروع به شتاب گرفتن کند جابه‌جایی آن باید در جهت مشترک $\vec{a}_{\text{com}}$ و $\vec{F}_{\text{net}}$ باشد.

می‌توانیم سمت راست معادلهٔ ۹-۲۱ را مستقیماً با ماشین حسابی که قابلیت برداری دارد محاسبه کنیم یا می‌توانیم معادلهٔ ۹-۲۱ را به صورت مؤلفه‌ای باز نویسی کنیم و مؤلفه‌های $\vec{a}_{\text{com}}$ و سپس $\vec{a}_{\text{com}}$ را به دست آوریم. در امتداد محور $x$ داریم

$$a_{\text{com},x} = \frac{F_{۱x} + F_{۲x} + F_۳}{M} = \frac{-۶/۰\,\text{N} + (۱۲\,\text{N})\cos ۴۵° + ۱۴\,\text{N}}{۱۶\,\text{kg}} = ۱/۰۳\,\text{m/s}^۲$$




**شکل ۹-۷ (الف)** سه ذره، که در آغاز در مکانهای نشان داده شده ساکن هستند تحت تأثیر نیروهای خارجی نشان داده شده قرار دارند. مرکز جرم (com) دستگاه مشخص شده است. (ب) حالا نیروها به مرکز جرم دستگاه منتقل شده‌اند و مرکز جرم مشابه ذره‌ای رفتار می‌کند که جرمش $M$ و برابر با جرم کل دستگاه است. نیروی خارجی خالص $\vec{F}_{\text{net}}$ و شتاب $\vec{a}_{\text{com}}$ مرکز جرم نشان داده شده‌اند.

در امتداد محور $y$ داریم

$$a_{\text{com},y} = \frac{F_{۱y} + F_{۲y} + F_{۳y}}{M} = \frac{۰ + (۱۲\,\text{N})\sin ۴۵° + ۰}{۱۶\,\text{kg}} = ۰/۵۳۰\,\text{m/s}^۲$$

از این مؤلفه‌ها، بزرگی $\vec{a}_{com}$ چنین به دست می‌آید

$$a_{com} = \sqrt{(a_{com,x})^2 + (a_{com,y})^2}$$

$$= 1/16 m/s^2 \approx 1/2 m/s^2 \quad \text{(پاسخ)}$$

و زاویه (با جهت مثبت محور $x$) برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_{com,y}}{a_{com,x}} = 27° \quad \text{(پاسخ)}$$

## ۹-۴ اندازه حرکت (تکانهٔ) خطی

در این بخش، به جای دستگاه ذره‌ها فقط یک ذرهٔ تنها را مورد بحث قرار می‌دهیم تا دو کمیت مهم را تعریف کنیم. سپس در بخش ۹-۵ این تعریفها را برای دستگاهی شامل ذره‌های زیاد تعمیم می‌دهیم.

اولین تعریف مربوط به واژهٔ آشنای *اندازه حرکت* یا *تکانه* است که در محاورهٔ روزانه دارای معنی‌های مختلفی است اما در فیزیک و مهندسی فقط دارای یک معنی دقیق است. ***اندازه حرکت خطی*** یک کمیت برداری $\vec{p}$ است که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{(اندازه حرکت خطی یک ذره)} \quad (۹-۲۲)$$

که در آن $m$ جرم ذره و $\vec{v}$ سرعت آن است. (صفت خطی اغلب حذف می‌شود ولی وجود آن باعث تمایز $\vec{p}$ از اندازه حرکت زاویه‌ای می‌شود، که در فصل ۱۰ معرفی خواهد شد و به چرخش مربوط است). چون $m$ همیشه یک کمیت نرده‌ای مثبت است، معادلهٔ ۹-۲۲ نشان می‌دهد که $\vec{p}$ و $\vec{v}$ هم‌جهت‌اند. از معادلهٔ ۹-۲۲، یکای SI برای اندازه حرکت کیلوگرم- متر بر ثانیه (kg-m/s) است.

نیوتون قانون دوم حرکت را بر حسب اندازه حرکت چنین بیان کرده است

> ☜ آهنگ تغییرات اندازه حرکت نسبت به زمان برابر با نیروی خالص اعمال شده به ذره و در جهت آن نیرو است.

در شکل معادله‌ای این به صورت زیر است

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (۹-۲۳)$$

در بیان، معادلهٔ ۹-۲۳ حاکی از آن است که نیروی خارجی خالص $\vec{F}_{net}$ وارد بر ذره موجب تغییر در اندازه حرکت خطی $\vec{p}$ ذره می‌شود. بر عکس، اندازه حرکت خطی فقط به وسیلهٔ نیروی خارجی خالص می‌تواند تغییر کند. اگر نیروی خارجی خالص وجود نداشته باشد $\vec{p}$ *نمی‌تواند* تغییر کند. همان‌گونه که در بخش ۹-۷ خواهیم دید، این واقعیت آخر می‌تواند یک ابزار سادهٔ پرقدرت در حل مسئله‌ها باشد.

دستکاری معادلهٔ ۹-۲۳ با جایگزینی $\vec{p}$ از معادلهٔ ۹-۱۲ برای جرم $m$ ثابت به دست می‌دهد

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

بنابراین، رابطه‌های $\vec{F}_{net} = d\vec{p}/dt$ و $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ عبارتهای معادلی از قانون دوم نیوتون برای حرکت یک ذره‌اند.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۳*** شکل بزرگی $p$ اندازه حرکت خطی در زمانهای متفاوت $t$ برای ذره متحرک در امتداد محور $x$ را به دست می‌دهد. نیرویی که در جهت محور است روی ذره اثر می‌کند. (الف) چهار ناحیهٔ نشان داده شده را با توجه به بزرگی نیرو از بیشترین تا کمترین مرتب کنید. (ب) حرکت ذره در چه ناحیه‌ای کند می‌شود؟
>
> 
> 

## ۹-۵ اندازه حرکت خطی دستگاه ذره‌ها

حال که اندازه حرکت خطی را برای یک ذره تعریف کردیم، این تعریف را برای دستگاه ذره‌ها تعمیم می‌دهیم. دستگاهی با $n$ ذره را در نظر می‌گیریم که هر یک جرم، سرعت و اندازه حرکت خطی خودش را دارد. ذره‌ها ممکن است با هم برهم‌کنش داشته باشند و ممکن است همچنین نیروهای خارجی نیز بر آنها وارد شود. دستگاه به صورت کل دارای اندازه حرکت خطی $\vec{P}$ است که جمع برداری- اندازه حرکت خطی تک‌تک ذره‌هاست. بنابراین

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_n$$
$$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots + m_n\vec{v}_n \quad (۹-۲۴)$$

اگر این معادله را با معادلهٔ ۹-۱۷ مقایسه کنیم، می‌بینیم

$$\vec{P} = M\vec{v}_{com} \quad \text{(اندازه حرکت خطی دستگاه ذره‌ها)} \quad (۹-۲۵)$$

که راه دیگری برای تعریف اندازه حرکت خطی دستگاه ذره‌هاست.

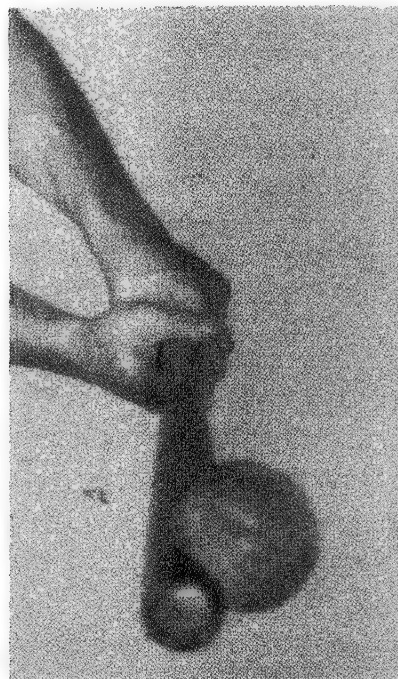
> ☜ اندازه حرکت خطی دستگاه ذره‌ها برابر است با حاصلضرب جرم کل $M$ دستگاه در سرعت مرکز جرم آن.

اگر از معادلهٔ ۹-۲۵ نسبت به زمان مشتق بگیریم، داریم

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{com}}{dt} = M\vec{a}_{com} \quad (۹-۲۶)$$

مقایسهٔ معادله‌های ۹-۱۴ و ۹-۲۶ به ما امکان می‌دهد که قانون دوم نیوتون را برای دستگاه ذره‌ها در شکل معادل زیر بنویسیم

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{(دستگاه ذره‌ها)} \quad (۹-۲۷)$$



برخورد توپ با چوب بیسبال، قسمتی از توپ فرو رفته است.

که در آن $\vec{F}_{net}$ نیروی خارجی خالص وارد بـر دسـتگاه اسـت. این معادلـه تعمیمـی از معادلـهٔ تـک ذرهٔ $\vec{F}_{net} = d\vec{P}/dt$ بـرای دستگاه چند ذره‌ای است و حاکی از آن است که نیروی خارجی خالص $\vec{F}_{net}$ وارد بر دسـتگاه ذره‌هـا انـدازه حرکـت خطـی $\vec{P}$ دستگاه را تغییر می‌دهد. بر عکس، انـدازه حرکـت خطـی فقـط می‌تواند به وسیلهٔ نیروی خارجی خالص تغییر کند. اگر نیـروی خارجی خالص وجود نداشته باشد، $\vec{P}$ *نمی‌تواند* تغییر کند.

## ۹-۶ برخورد و ضربه

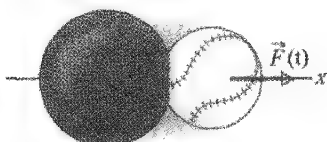
اندازه حرکت $\vec{p}$ جسم شبه- ذره‌ای نمی‌تواند تغییـر کنـد مگـر آنکه یک نیروی خارجی خالص بـر آن وارد شـود. بـرای مثـال می‌توانیم جسمی را هل دهیم تا اندازه حرکت آن تغییر کند. بـه طور نمایشی‌تر، فرض می‌کنیم کـه جسـمی بـا چـوب بیسـبال برخورد کند. در چنین *برخوردی* (یا *اصابت*، در محاورهٔ روزانه) اثر نیروی خارجی بر جسم کوتاه مدت و دارای بزرگـی زیـادی است و به طور ناگهانی اندازه حرکت جسم را تغییـر مـی‌دهـد. برخوردهایی که در دنیای ما معمولاً رخ می‌دهنـد، اغلـب وقتـی پای اتومبیل در کار باشد، پر هزینـه اسـت. بـه زودی در مـورد برخورد اتومبیلها بحث خواهیم کـرد، امـا نیـاز داریـم برخـورد ساده‌تری را مورد بحث قرار دهیم که در آن یـک جسـم شـبه- ذره‌ای (پرتابه) با جسم دیگری (*هدف*) برخورد می‌کند.

### تک برخورد

فرض کنیم پرتابه توپ و هدف چـوب بیسـبال باشـد. برخـورد کوتاه مدت است و توپ نیرویی به حد کافی بـزرگ را تحمـل می‌کند که می‌تواند حرکت آن را کند، متوقف و حتـی معکـوس کند. شکل ۹-۸ برخورد را برای یک لحظه نشـان مـی‌دهـد. بـه توپ نیروی $\vec{F}(t)$ وارد مـی‌شـود کـه در حـین برخـورد تغییـر می‌کند و اندازه حرکت خطی $\vec{p}$ توپ را تغییـر مـی‌دهـد. ایـن تغییر بنابر قانون دوم نیوتون، به نیـرو ارتبـاط دارد و بـه شـکل رابطهٔ $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ نوشته می‌شود. بنابراین، در بازه زمـانی $dt$، تغییر در اندازه حرکت توپ برابر است با

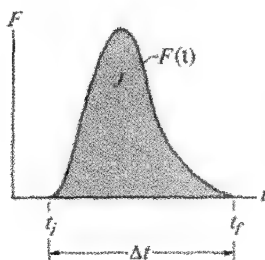
$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt \qquad (۹-۲۸)$$

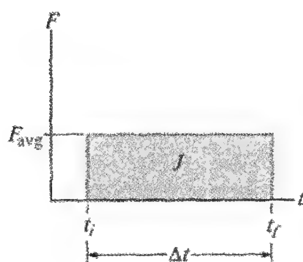
اگر از معادلهٔ ۹-۲۸ از زمان $t_i$ درست پیش از برخورد تا زمـان $t_f$ درست پس از برخورد انتگرال بگیریم، تغییر خالص انـدازه حرکت توپ بر اثر برخورد را می‌توانیم به دست آوریم. داریم




**شکل ۹-۸** وقتی توپ و چوب بیسبال برخورد کننـد نیـروی $F(t)$ اثـر می‌کند.

$$\int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} F(t)\,dt \qquad (۹-۲۹)$$




**شکل ۹-۹** (الف) منحنی بزرگی نیروی متغیر نسبت به زمـان $F(t)$ را نشان می‌دهد که روی توپ در شکل ۹-۸ وارد می‌شود. مساحت زیـر منحنی برابر با بزرگـی ضـربهٔ $\vec{J}$ روی تـوپ در برخـورد اسـت. (ب) ارتفاع مستطیل بیانگر نیروی $F_{avg}$ اسـت کـه در بـازهٔ زمـانی $\Delta t$ روی توپ اثر می‌کند. مساحت مستطیل برابر است با مساحـت زیـر منحنـی (الف) و در نتیجه همچنین برابر است با بزرگی ضربهٔ $\vec{J}$ در برخورد.

سمت چپ رابطه تغییر در اندازه حرکت را به دسـت مـی‌دهـد: $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$. سمت راست، که معیاری از بزرگـی و مـدت

زمان تأثیر نیروی برخورد است، **ضربهٔ** $\vec{J}$ برخورد نامیده می‌شود

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \quad \text{(تعریف ضربه)} \qquad (۹-۳۰)$$

بنابراین، تغییر در اندازه حرکت یک جسم برابر است با ضربهٔ روی آن جسم

$$\Delta\vec{p} = \vec{J} \quad \text{(قضیهٔ اندازه حرکت خطی- ضربه)} \qquad (۹-۳۱)$$

این عبارت را می‌توان به شکل برداری زیر نوشت

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J} \qquad (۹-۳۲)$$

و هر مؤلفه به شکل زیر است

$$\Delta p_x = J_x \qquad (۹-۳۳)$$

و

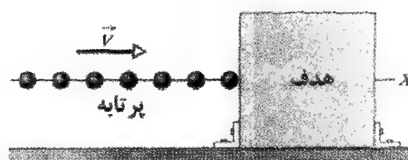
$$p_{fx} - p_{ix} = \int_{t_i}^{t_f} F_x(t)\,dt \qquad (۹-۳۴)$$

اگر تابعی برای $\vec{F}(t)$ داشته باشیم، می‌توانیم $\vec{J}$ (و بنابراین، تغییر در اندازه حرکت) را با انتگرالگیری تابع به دست آوریم. اگر نمودار $\vec{F}$ را برحسب زمان $t$ داشته باشیم، مطابق شکل ۹-۹ الف می‌توانیم $\vec{J}$ را با پیداکردن مساحت بین منحنی و محور زمان، به دست آوریم. در خیلی از موارد نمی‌دانیم نیرو چگونه نسبت به زمان تغییر می‌کند ولی بزرگی متوسط $F_{\text{ave}}$ نیرو و مدت $\Delta t (= t_f - t_i)$ برخورد را می‌دانیم. پس می‌توانیم بزرگی ضربه را به صورت زیر بنویسیم

$$J = F_{\text{ave}}\,\Delta t \qquad (۹-۳۵)$$

نیروی میانگین برحسب زمان در شکل ۹-۹ ب رسم شده است. مساحت زیر این منحنی برابر است با مساحت زیر منحنی نیروی واقعی $F(t)$ در شکل ۹-۹ الف، چون هر دو مساحت با بزرگی ضربهٔ $J$ برابرند.

به جای توپ، می‌توانستیم توجه خود را به چوب بیسبال در شکل ۹-۸ معطوف کنیم. در هر لحظه، قانون سوم نیوتون حاکی از آن است که نیروی وارد بر چوب بیسبال دارای بزرگی یکسان اما در مخالف جهت نیروی وارد بر توپ است. از معادلهٔ ۹-۳۰، این بدان معناست که ضربهٔ وارد به چوب بیسبال دارای بزرگی یکسان اما در خلاف جهت ضربهٔ وارد روی توپ است.




**شکل ۹-۱۰** جریان پیوسته‌ای از پرتابه‌ها با اندازه حرکتهای خطی یکسان با هدفی که در جایش ثابت است برخورد می‌کنند. نیروی میانگین $F_{\text{ave}}$ وارد بر هدف به سمت راست است و بزرگی آن به آهنگ برخورد پرتابه‌ها به هدف یا آهنگ برخورد جرم به آن بستگی دارد.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۴*** چتربازی که چتر او باز نشده است روی برف فرود می‌آید؛ او کمی صدمه می‌بیند. اگر روی زمین فرود آمده بود زمان توقف ۱۰ مرتبه کوتاه‌تر و برخورد کشنده می‌بود. آیا وجود برف سبب افزایش یافتن، کاهش یافتن یا بدون تغییر ماندن مقدارهای (الف) تغییر اندازه حرکت چترباز، (ب) ضربهٔ متوقف‌کنندهٔ چترباز و (پ) نیروی متوقف کنندهٔ چترباز می‌شود؟

## برخوردهای متوالی

حال نیروی وارد بر جسمی را در نظر می‌گیریم که تحت تأثیر تعدادی برخوردهای متوالی و مشابه قرار می‌گیرد. به عنوان بازی، یک ماشین توپ پرتاب کن را در نظر می‌گیریم که توپهای تنیس را با آهنگی سریع به طور مستقیم به طرف دیواری پرتاب کند. هر برخورد نیرویی به دیوار وارد می‌کند، اما این نیرویی نیست که ما در پی آن هستیم. ما می‌خواهیم نیروی میانگین $F_{\text{ave}}$ روی دیوار را در حین گلوله‌باران، یعنی نیروی میانگین وارد به دیوار را در حین تعداد زیادی برخورد بدانیم.

در شکل ۹-۱۰ جریانی پیوسته از پرتابه‌هایی با جرم یکسان $m$ و اندازه حرکت خطی یکسان $m\vec{v}$ در امتداد محور $x$ حرکت و با هدفی محکم شده در سر جای خود برخورد می‌کند. فرض کنید $n$ تعداد پرتابه‌هایی باشد که در بازهٔ زمانی $\Delta t$ به هدف برخورد می‌کنند. چون حرکت فقط در امتداد محور $x$ است می‌توانیم مؤلفهٔ اندازه حرکت را در امتداد آن محور به‌کار بریم. بنابراین، هر پرتابه دارای اندازه حرکت خطی اولیهٔ $mv$ است و بر اثر برخورد اندازه حرکت خطی به اندازهٔ $\Delta p$ تغییر می‌کند. تغییر کلی در اندازه حرکت خطی برای $n$ پرتابه در بازهٔ $\Delta t$ برابر است با $n\Delta p$. ضربهٔ $\vec{J}$ حاصل روی هدف در طی $\Delta t$ در امتداد محور $x$ است و دارای بزرگی یکسان $n\Delta p$ ولی در جهت مخالف است. می‌توانیم این رابطه را به شکل مؤلفه‌ای بنویسیم

$$J = -n\Delta p \qquad (۹-۳۶)$$

که علامت منها مشخص می‌کند که $J$ و $\Delta p$ دارای جهتهای مخالف‌اند.

با دوباره مرتب کردن معادلهٔ ۹-۳۵ و قراردادن در معادلهٔ ۹-۳۶ نیروی میانگین $F_{\text{ave}}$ وارد بر هدف در طی برخورد به دست می‌آید

$$F_{\text{avg}} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = \frac{n}{\Delta t} m\Delta v \qquad (۹-۳۷)$$

این معادله $F_{\text{ave}}$ را بر حسب $n/\Delta t$ به دست می‌دهد که آهنگی است که پرتابه‌ها با هدف برخورد می‌کنند و $\Delta v$ تغییر در سرعت این پرتابه‌هاست.

اگر پرتابه‌ها براثر برخورد متوقف شوند، آنگاه در معادلهٔ ۹-۳۷ می‌توانیم به جای $\Delta v$ مقدار زیر را قرار دهیم

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v \tag{۹-۳۸}$$

که در آن $v_i(=v)$ و $v_f(=0)$ به ترتیب سرعتها پیش و پس از برخوردند. اما اگر، پرتابه‌ها از هدف بدون تغییر در تندی مستقیماً به عقب برگردند، آنگاه داریم $v_f = -v$ و می‌توان چنین نوشت

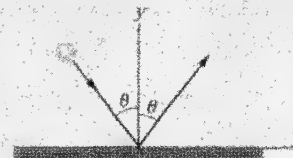
$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v \tag{۹-۳۹}$$

در بازهٔ زمانی $\Delta t$ مقدار جرم برخورد کننده به هدف برابر است با $\Delta m = nm$ . بنابراین، می‌توانیم معادلهٔ ۹-۳۷ را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$F_{avg} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v \tag{۹-۴۰}$$

این معادله نیروی میانگین $F_{ave}$ را بر حسب $\Delta m/\Delta t$ به دست می‌دهد که آهنگ برخورد جرم به هدف است. در اینجا دوباره می‌توانیم مقدار $\Delta v$ را از معادلهٔ ۹-۳۸ یا ۹-۳۹ جایگزین کنیم که این بستگی به چگونگی رفتار پرتابه‌ها دارد.

**✔ نکتهٔ وارسی ۵** شکل دید از بالای توپی را نشان می‌دهد که از دیوار قائمی بدون تغییر در تندی وا می‌جهد. تغییر در اندازه حرکت خطی توپ را $\Delta \vec{p}$ می‌گیریم. (الف) آیا $\Delta p_x$ مثبت، منفی یا صفر است؟ (ب) آیا $\Delta p_y$ مثبت یا منفی یا صفر است؟ (پ) جهت $\Delta \vec{p}$ کدام است؟

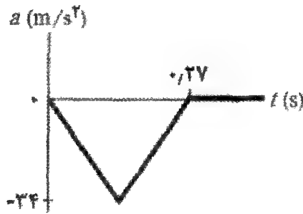



## مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۴

وقتی یک بز کوهی با شاخ بلند با سر به بز دیگری ضربه می‌زند، آهنگی که با آن تندی‌اش به صفر فرو می‌افتد بهت‌آور است. شکل ۹-۱۱ نموداری نوعی از شتاب $a$ را برحسب $t$ برای چنین برخوردی به دست می‌دهد، شتاب منفی اختیار شده به سرعت مثبت اولیه مربوط است. بزرگی قلّهٔ شتاب دارای بزرگی $۳۴\,\text{m/s}^2$ و مدت زمان برخورد برابر $۰/۲۷\,\text{s}$ است. فرض کنید جرم بز کوهی برابر $۹۰/۰\,\text{kg}$ است. بزرگی ضربه و نیروی میانگین حاصل از برخورد چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) بنابر معادلهٔ ۹-۳۰ $(\vec{J} = \int \vec{F}(t)dt)$ ضربه به صورت انتگرال نیرو نسبت به زمان تعریف شده است. (۲) نیروی میانگین با معادلهٔ ۹-۳۵ $(J = F_{avg}\Delta t)$ به ضربه و زمان طی شده مربوط است.

***محاسبه‌ها:*** تابعی برای نیرو نداریم تا بتوانیم از آن انتگرال بگیریم. ولی نمودار $a$ برحسب $t$ را داریم که می‌توانیم مقیاس محور $x$ شتاب را در جرم $۹۰/۰\,\text{kg}$ ضرب کرده و نمودار را به نمودار $F$ برحسب زمان تبدیل کنیم. سپس می‌توانیم با به دست آوردن مساحت بین منحنی و محور زمان به طور نموداری انتگرال بگیریم. چون منحنی به شکل یک مثلث است، برای بزرگی ضربه داریم




**شکل ۹-۱۱** شتاب بز کوهی در حین برخورد با بز کوهی دیگر برحسب زمان.

$$J = \text{مساحت} = \frac{۱}{۲}(۰/۲۷\,\text{s})(۹۰/۰\,\text{kg})(۳۴/۰\,\text{m/s}^2)$$

$$= ۴/۱۳\times۱۰^2\ \text{N}\cdot\text{s} \approx ۴/۱\times۱۰^2\ \text{N}\cdot\text{s} \quad \text{(پاسخ)}$$

برای بزرگی نیروی میانگین، می‌توان نوشت

$$F_{avg} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{۴/۱۳\times۱۰^2\ \text{N}\cdot\text{s}}{۰/۲۷\,\text{s}}$$

$$= ۱/۵\times۱۰^3\ \text{N} \quad \text{(پاسخ)}$$

***اظهارنظر:*** ضربه برابر است با تغییر اندازه حرکت بز کوهی در حین برخورد. از اینرو، اندازهٔ برخورد به جرم بز کوهی و تندی او درست قبل از برخورد بستگی دارد. برای برنده شدن در نبرد، بز کوهی باید بزرگی اندازه حرکت زیادی داشته باشد. با این وجود، اگر بز کوهی برخورد جمجمه به جمجمه یا جمجمه به شاخ انجام دهد زمان برخورد $\frac{۱}{۱۰}$ مقداری خواهد بود که ما به کار بردیم و در نتیجه نیروی میانگین ۱۰ برابر مقدار محاسبه شده خواهد بود. چنین نیروی بزرگی منجر به بیهوشی یا حتی مرگ می‌شود، و هیچ‌کدام از این نتایج مطلوب بز کوهی ماده نخواهد بود. بز کوهی با استفاده از قابلیت انعطاف شاخها از چنین نتایجی در حین برخورد جلوگیری می‌کند. چنین انعطافی موجب طولانی شدن برخورد و کاهش نیرو به حدود $۱۵۰۰\,\text{N}$ می‌شود، که جمجمه، مغز و عضله‌های بز کوهی قادر به تحمل آن هستند. بنابراین، اگر در حین برخورد، شاخ بشکنند، برخورد بعدی می‌تواند مهلک باشد.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۵

*برخورد اتومبیل مسابقه با دیوار.* شکل ۹-۱۲ الف دید از بالای مسیر طی شده توسط یک رانندهٔ مسابقه را نشان می‌دهد که با دیوارهٔ مسیر مسابقه برخورد کرده است. درست پیش از برخورد، او با تندی $v_i = ۷۰\,\text{m/s}$ در امتداد یک خط مستقیم با زاویهٔ $۳۰°$ نسبت به دیوار حرکت می‌کند. درست پس از برخورد او با تندی $v_f = ۵۰\,\text{m/s}$ در امتداد یک خط مستقیم با زاویهٔ $۱۰°$ از دیوار حرکت می‌کند. جرم $m$ او $۸۰\,\text{kg}$ است.

(الف) بر اثر برخورد ضربهٔ $\vec{J}$ وارد بر راننده چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** می‌توانیم راننده را یک جسم شبه- ذره در نظر بگیریم و به این ترتیب فیزیک مربوط به این بخش را به‌کار ببریم. البته نمی‌توانیم $\vec{J}$ را مستقیماً از معادلهٔ ۹-۳۰ محاسبه کنیم چون هیچ اطلاعی از نیروی $F(t)$ وارد بر راننده در طی برخورد نداریم. یعنی، تابع $F(t)$ یا نمودار مربوط به آنرا نداریم و در نتیجه با انتگرالگیری نمی‌توانیم $\vec{J}$ را به دست آوریم. با این وجود، *می‌توانیم* $\vec{J}$ را از تغییر اندازه حرکت خطی راننده از طریق معادلهٔ ۹-۳ ($\vec{J}=\vec{p}_f-\vec{p}_i$) محاسبه کنیم.

***محاسبه‌ها:*** شکل ۹-۱۲ ب اندازه حرکت $\vec{p}_i$ راننده را پیش از برخورد (با زاویهٔ $30^\circ$ نسبت به محور $x$) و اندازه حرکت $\vec{p}_f$ او را پس از برخورد (با زاویهٔ $-10^\circ$) نشان می‌دهد. از معادله‌های ۹-۳۲ و ۹-۲۲ ($\vec{p}=m\vec{v}$)، می‌توان نوشت

$$\vec{J}=\vec{p}_f-\vec{p}_i=m\vec{v}_f-m\vec{v}_i=m(\vec{v}_f-\vec{v}_i) \qquad (۹-۴۱)$$

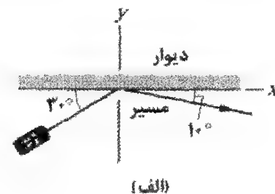
سمت راست معادله را می‌توانیم مستقیماً با ماشین حسابی که بتواند محاسبه‌های برداری انجام دهد به دست آوریم چون می‌دانیم که $m$ برابر $80\,\mathrm{kg}$، مقدار $\vec{v}_f$ برابر $50\,\mathrm{m/s}$ با زاویهٔ $-10^\circ$ و مقدار $\vec{v}_i$ برابر با $70\,\mathrm{m/s}$ با زاویهٔ $30^\circ$ است. در اینجا، معادلهٔ ۹-۴۱ را به شکل مؤلفه‌ای محاسبه می‌کنیم.

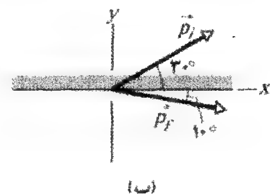
**مؤلفهٔ x:** در امتداد محور $x$ داریم

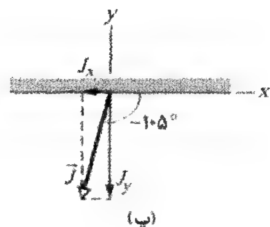
$$\begin{aligned}J_x&=m(v_{fx}-v_{ix})\\&=(80\,\mathrm{kg})[(50\,\mathrm{m/s})\cos(-10^\circ)-(70\,\mathrm{m/s})\cos30^\circ]\\&=-910\,\mathrm{kg\cdot m/s}\end{aligned}$$

**مؤلفهٔ y:** در امتداد محور $y$ داریم

$$\begin{aligned}J_y&=m(v_{fy}-v_{iy})\\&=(80\,\mathrm{kg})[(50\,\mathrm{m/s})\sin(-10^\circ)-(70\,\mathrm{m/s})\sin30^\circ]\\&=-3495\,\mathrm{kg\cdot m/s}\approx-3500\,\mathrm{kg\cdot m/s}\end{aligned}$$




**شکل ۹-۱۲** (الف) دید از بالای مسیر طی شده توسط ماشین مسابقه و راننده وقتی که با دیوارهٔ مسیر تصادف کرده است. (ب) اندازه حرکت اولیهٔ $\vec{v}_i$ و اندازه حرکت نهایی $v_f$ راننده (پ) ضربهٔ $\vec{J}$ وارد بر راننده در حین برخورد.

***ضربه:*** پس ضربه برابر است با

$$\vec{J}=(910\hat{i}-3500\hat{j})\,\mathrm{kg\cdot m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

بزرگی ضربه برابر است با

$$J=\sqrt{J_x^2+J_y^2}=3616\approx3600\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

زاویهٔ $\vec{J}$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\theta=\tan^{-1}\frac{J_y}{J_x} \qquad \text{(پاسخ)}$$

که با استفاده از ماشین حساب مقدار آن $75/4^\circ$ به دست می‌آید. یادآوری می‌کنیم که نتیجهٔ صحیح فیزیکی معکوس تانژانت ممکن است پاسخ را به اضافهٔ $180^\circ$ نشان دهد. می‌توانیم با رسم مؤلفه‌های $\vec{J}$ (شکل ۹-۱۲ پ) بگوییم کدام یک صحیح است. درمی‌یابیم که $\theta$ برابر است با $75/4^\circ+180^\circ=255/4^\circ$ که می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\theta=-105^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) برخورد $14\,\mathrm{ms}$ طول می‌کشد. بزرگی نیروی میانگین وارد بر راننده در طول برخورد چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** از معادلهٔ ۹-۳۵ ($J=F_{\mathrm{avg}}\Delta t$) بزرگی $F_{\mathrm{avg}}$ نیروی میانگین عبارت است از نسبت بزرگی $J$ به مدت زمان برخورد $\Delta t$

***محاسبه‌ها:*** داریم

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{avg}}&=\frac{J}{\Delta t}=\frac{3616\,\mathrm{kg.m/s}}{0/014\,\mathrm{s}}\\&=2/583\times10^5\,\mathrm{N}\approx2/6\times10^5\,\mathrm{N}\end{aligned} \qquad \text{(پاسخ)}$$

با به‌کار بردن $F=ma$ با $m=80\,\mathrm{kg}$، می‌توانید نشان دهید که بزرگی شتاب متوسط راننده در طول برخورد تقریباً برابر $3/22\times10^3\,\mathrm{m/s^2}=329\,g$ است. می‌توان حدس زد که برخورد احتمالاً کشنده است.

***زنده ماندن:*** تلاش مهندسان مکانیک بر این است که با ضربه‌پذیر کردن دیوارهٔ مسیر مسابقه و طولانیتر کردن زمان برخورد احتمال خطر را کاهش دهند. برای مثال، اگر این برخورد ۱۰ مرتبه بیشتر طول بکشد ولی بقیهٔ عوامل ثابت بمانند، بزرگی نیروی میانگین و شتاب میانگین ۱۰ مرتبه کمتر و احتمال زنده ماندن بیشتر می‌شود.

## ۹-۷ پایستگی اندازه حرکت

فرض کنید که نیروی خارجی خالص $\vec{F}_{\mathrm{net}}$ (و بنابراین ضربهٔ خالص $\vec{J}$) وارد بر دستگاه ذره‌ها صفر باشد (دستگاه منزوی است) و هیچ ذره‌ای وارد دستگاه یا از آن خارج نمی‌شود (دستگاه بسته است). با قراردادن $\vec{F}_{\mathrm{net}}=0$ در معادلهٔ ۹-۲۷ داریم $d\vec{P}/dt=0$ و نتیجه می‌گیریم که

$$\vec{P}=\text{ثابت} \qquad \text{(دستگاه بستهٔ منزوی)} \qquad (۹-۴۲)$$

به عبارت دیگر،

> اگر هیچ نیروی خارجی خالصی روی دستگاه ذره‌ها وارد نشود، اندازه حرکت خطی کل $\vec{P}$ دستگاه نمی‌تواند تغییر کند.

این نتیجه **قانون پایستگی اندازه حرکت خطی** نامیده می‌شود. آن را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad \text{(دستگاه بستهٔ منزوی)} \qquad (۹-۴۳)$$

به عبارت دیگر، این معادله حاکی از آن است که برای دستگاه بستهٔ منزوی داریم

(اندازه حرکت کل در لحظهٔ بعدی $t_f$) = (اندازه حرکت کل در لحظهٔ اولیهٔ $t_i$)

**توجه:** اندازه حرکت را نباید با انرژی اشتباه گرفت. در مسئله‌های نمونهٔ این بخش اندازه حرکت پایسته است ولی انرژی قطعاً پایسته نیست.

معادله‌های ۹-۴۲ و ۹-۴۳ معادله‌هایی برداری‌اند و در این صورت، هر یک معادل سه معادلهٔ مربوط به پایستگی اندازه حرکت خطی در سه جهت دو به دو عمود بر هم‌اند، مثلاً در دستگاه مختصات $xyz$ بسته به نیروهایی که به دستگاه وارد می‌شوند، اندازه حرکت خطی ممکن است در یک یا دو جهت پایسته باشد ولی در همهٔ جهتها پایسته نباشد. یعنی،

> اگر مؤلفه‌های نیروی *خارجی* خالص وارد بر یک دستگاه بسته در امتداد محوری صفر باشد، آنگاه، مؤلفهٔ اندازه حرکت خطی دستگاه در امتداد آن محور نمی‌تواند تغییر کند.

برای مثال، فرض کنید که گریپ فروتی را در طول اتاق بغلتانید. در طی حرکت تنها نیروی وارد بر گریپ فروت (که آن را به عنوان دستگاه در نظر می‌گیریم) نیروی گرانش $\vec{F}_g$ است که درجهت قائم و رو به پایین قرار دارد. بنابراین، مؤلفهٔ قائم اندازه حرکت خطی گریپ فروت تغییر می‌کند ولی چون هیچ نیروی افقی بر آن وارد نمی‌شود، مؤلفهٔ افقی اندازه حرکت خطی نمی‌تواند تغییر کند.

توجه کنید که روی نیروهای خارجی وارد بر دستگاه بسته تمرکز می‌کنیم. اگرچه نیروهای داخلی می‌توانند اندازه حرکت خطی قسمتهایی از دستگاه را تغییر دهند ولی نمی‌توانند اندازه حرکت خطی کل همهٔ دستگاه را تغییر دهند.

مسئله‌های نمونهٔ این بخش شامل انفجارهایی هستند که یا یک بعدی‌اند (یعنی حرکت پیش و پس از انفجار در امتداد یک محور است) یا دو بعدی (یعنی اینکه آنها در یک صفحه شامل دو محور قرار دارند). در بخشهای بعدی برخوردهای یک بعدی و دو بعدی را بررسی می‌کنیم.

> ✔ **نکتهٔ وارسی ۶** وسیله‌ای که روی کف اتاق بدون اصطکاکی در آغاز ساکن است به دو قسمت منفجر می‌شود و سپس این دو قسمت روی کف اتاق سُر می‌خورند. یک قسمت در جهت مثبت محور $x$ سُر می‌خورد. (الف) مجموع اندازه حرکتهای دو قسمت پس از انفجار چقدر است؟ (ب) آیا قسمت دوم می‌تواند با زاویه‌ای نسبت به محور $x$ حرکت کند؟ (پ) اندازه حرکت خطی قسمت دوم در چه جهتی است؟

## مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۶

*انفجار یک بعدی:* جعبه‌ای با جرم $m = ۶/۰\ \text{kg}$ با تندی $v = ۴/۰\ \text{m/s}$ در کف اتاق بدون اصطکاکی در جهت مثبت محور $x$ سُر می‌خورد. جعبه منفجر و دو قسمت می‌شود. یک قسمت با جرم $m_۱ = ۲/۰\ \text{kg}$ با $v_۱ = ۸/۰\ \text{m/s}$ در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کند. سرعت قسمت دوم با جرم $m_۲$، چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) اگر اندازه حرکت قسمت دوم را می‌دانستیم می‌توانستیم سرعت آن را محاسبه کنیم. زیرا جرم آن را $m_۲ = m - m_۱ = ۴/۰\ \text{kg}$ می‌دانیم. (۲) اگر اندازه حرکت پایسته باشد می‌توانیم بین اندازه حرکت دو قسمت و اندازه حرکت اولیه رابطه‌ای برقرار کنیم. این مطلب را بررسی می‌کنیم.

***محاسبه‌ها:*** چارچوب مرجع ما چارچوب کف اتاق است. دستگاه ما که در آغاز یک جعبه و سپس دو قسمت شده است یک دستگاه بسته است اما منزوی نیست چون جعبه و هر یک از قسمتها تحت تأثیر نیروی عمودی از طرف کف اتاق و نیروی گرانشی قرار دارند. البته، این نیروها هر دو قائم‌اند و در نتیجه نمی‌توانند مؤلفهٔ افقی اندازه حرکت دستگاه را تغییر دهند. نیروهایی که به دلیل انفجار ایجاد شده‌اند نیز نمی‌توانند تغییر ایجاد کنند چون نیروهای داخلی دستگاه هستند. بنابراین، مؤلفهٔ افقی اندازه حرکت دستگاه پایسته است و می‌توانیم معادلهٔ ۹-۴۳ را در امتداد محور $x$ به کار بریم.

اندازه حرکت اولیهٔ دستگاه مربوط به جعبه است

$$\vec{P}_i = m\vec{v}$$

به همین ترتیب، می‌توانیم اندازه حرکت نهایی را برای دو قسمت بنویسیم

$$\vec{P}_{f۱} = m_۱\vec{v}_۱ \quad \text{و} \quad \vec{P}_{f۲} = m_۲\vec{v}_۲$$

اندازه حرکت کل نهایی $\vec{P}_f$ جمع برداری اندازه حرکتهای دو قسمت است

$$\vec{P}_f = \vec{P}_{f۱} + \vec{P}_{f۲} = m_۱\vec{v}_۱ + m_۲\vec{v}_۲$$

چون همهٔ سرعتها و اندازه حرکتها در این مسئله در امتداد محور $x$ هستند، می‌توانیم آنها را برحسب مؤلفهٔ $x$ بنویسیم. با انجام آن و به کار بردن معادلهٔ ۹-۴۳ داریم

$$P_i = P_f$$

یا

$$mv = m_۱v_۱ + m_۲v_۲$$

با قراردادن داده‌های معلوم، داریم

$$(۶/۰\ \mathrm{kg})(۴/۰\ \mathrm{m/s}) = (۲/۰\ \mathrm{kg})(۸/۰\ \mathrm{m/s}) + (۴/۰\ \mathrm{kg})v_۲$$

و در نتیجه

$$v_۲ = ۲/۰\ \mathrm{m/s}$$ (پاسخ)

چون نتیجه مثبت است، قسمت دوم در امتداد مثبت محور $x$ حرکت می‌کند.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۷

*انفجار یک بعدی:* شکل ۹-۱۳ الف فضاپیمایی را به همراه اتاقک بار نشان می‌دهد که جرم کل آن $M$ است و در امتداد محور $x$ در عمق فضا حرکت می‌کند. آنها دارای سرعت اولیهٔ $\vec{v}_i$ نسبت به خورشید هستند که بزرگی آن ۲۱۰۰km/h است. با انفجار کوچکی در فضاپیما اتاقک که جرم آن ۰/۲۰M است جدا می‌شود (شکل ۹-۱۳ ب). سپس فضاپیما ۵۰۰km/h سریعتر از اتاقک حرکت می‌کند، یعنی تندی نسبی $v_{rel}$ بین اتاقک و فضاپیما ۵۰۰km/h است. در این صورت سرعت $\vec{v}_{HS}$ فضاپیما نسبت به خورشید چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** چون دستگاه فضاپیما–اتاقک بسته و منزوی است، اندازه حرکت خطی کل پایسته است، یعنی

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad (۹-۴۴)$$

که در آن زیرنویسهای $i$ و $f$ به ترتیب بیانگر مقدارهای پیش و پس از جدا شدن هستند.

***محاسبه‌ها:*** چون حرکت در امتداد یک محور است، می‌توانیم اندازه حرکتها و سرعتها را بر حسب مؤلفهٔ $x$ آنها بنویسیم. پیش از جداشدن اتاقک، داریم

$$P_i = Mv_i \qquad (۹-۴۵)$$

فرض می‌کنیم $v_{MS}$ سرعت اتاقک پس از جداشدن نسبت به خورشید باشد. در این صورت اندازه حرکت خطی کل دستگاه پس از جداشدن عبارت است از

$$P_f = (۰/۲۰\,M)v_{MS} + (۰/۸۰\,M)v_{HS} \qquad (۹-۴۶)$$

که در آن اولین جمله در سمت راست اندازه حرکت اتاقک و جملهٔ دوم اندازه حرکت فضاپیما است.

سرعت $v_{MS}$ اتاقک را نسبت به خورشید نمی‌دانیم، ولی می‌توانیم با بیان زیر آن را نسبت به سرعتهایی که می‌دانیم بنویسیم

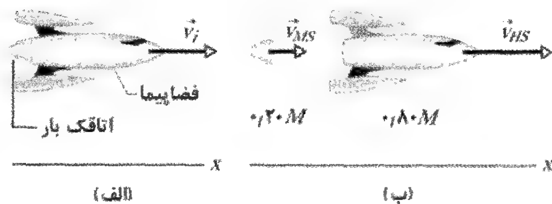
(سرعت اتاقک نسبت به خورشید) + (سرعت فضا پیما نسبت به اتاقک) = (سرعت فضاپیما نسبت به خورشید)

این بیان، رابطهٔ نمادی زیر را به دست می‌دهد

$$v_{HS} = v_{rel} + v_{MS} \qquad (۹-۴۷).$$

یا

$$v_{MS} = v_{HS} - v_{rel}$$




**شکل ۹-۱۳** (الف) فضاپیمایی با یک اتاقک محموله با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_i$ حرکت می‌کند. (ب) اتاقک از فضاپیما جدا شده است. حالا سرعت اتاقک نسبت به خورشید $\vec{v}_{MS}$ و سرعت فضاپیما $\vec{v}_{HS}$ است.

با قراردادن این رابطه به جای $v_{MS}$ در معادلهٔ ۹-۴۶ و سپس با قراردادن معادله‌های ۹-۴۵ و ۹-۴۶ در معادلهٔ ۹-۴۴، داریم

$$Mv_i = ۰/۲M(v_{HS} - v_{rel}) + ۰/۸۰\,M\,v_{HS}$$

که به دست می‌دهد

$$v_{HS} = v_i + ۰/۲۰\,v_{rel}$$

یا

$$v_{HS} = ۲۱۰۰\ \mathrm{kgm/h} + (۰/۲۰)(۵۰۰\ \mathrm{km/h})$$
$$= ۲۲۰۰\ \mathrm{km/h}$$ (پاسخ)

## مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۸

*انفجار دو بعدی:* ترقه‌ای داخل یک نارگیل به جرم $M$ قرار دارد. ترقه منفجر می‌شود و نارگیل را که در ابتدا روی سطح بدون اصطکاکی ساکن است به سه تکه تقسیم می‌کند و تکه‌ها روی سطح می‌لغزند. دید از بالا در شکل ۹-۱۴ الف نشان داده شده است. تکهٔ $C$ با جرم ۰/۳۰M دارای تندی نهایی $v_{fc} = ۵/۰\ \mathrm{m/s}$ است. (الف) تندی تکهٔ $B$ با جرم ۰/۲۰M چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** ابتدا لازم است که ببینیم آیا اندازه حرکت خطی پایسته است یا خیر؟ توجه داریم که (۱) نارگیل و تکه‌های آن یک دستگاه بسته را تشکیل می‌دهند، (۲) نیروهای حاصل از انفجار نیروهای داخلی به حساب می‌آیند و (۳) هیچ نیروی خارجی خالصی به دستگاه اثر نمی‌کند. بنابراین، اندازه حرکت خطی دستگاه پایسته است.

***محاسبه‌ها:*** برای شروع، دستگاه مختصات $xy$ نشان داده شده در شکل ۹-۱۴ ب را در نظر می‌گیریم که جهت منفی محور $x$ در جهت $\vec{v}_{fA}$ است. محور $x$ با راستای $\vec{v}_{fC}$ زاویهٔ °۸۰ و با راستای $\vec{v}_{fB}$ زاویهٔ °۵۰ می‌سازد.

اندازه حرکت خطی در راستای هر کدام از محورها پایسته است. با استفاده از محور $y$ می‌نویسیم

$$P_{iy} = P_{fy} \qquad (۹-۴۸)$$

که در آن زیرنویس $i$ مربوط به مقدار اولیه (پیش از انفجار) و زیرنویس $y$ مربوط به مؤلفهٔ $y$ اندازه حرکتهای $P_i$ یا $P_f$ است.

مؤلفهٔ $P_{iy}$ اندازه حرکت خطی اولیه صفر است، چون نارگیل در آغاز ساکن بوده است. برای به دست آوردن رابطه‌ای

برای $P_{fy}$ ، مؤلفهٔ $y$ اندازه حرکت خطی نهایی هر تکه را با استفاده از مؤلفهٔ $y$ معادلهٔ ۹-۲۲ ($P_y = mv_y$) به دست می‌آوریم

$$P_{fA,y} = ۰$$
$$P_{fB,y} = -۰/۲۰ M v_{fB,y} = -۰/۲۰ M v_{fB} \sin ۵۰°$$
$$P_{fC,y} = ۰/۳ M v_{fC,y} = ۰/۳۰ M v_{fC} \sin ۸۰°$$

(توجه کنید که به خاطر انتخاب محورها، $P_{fA,y} = ۰$ است.) حال می‌توان معادلهٔ ۹-۴۸ را به صورت زیر نوشت

$$P_{iy} = P_{fy} = P_{fA,y} + P_{fB,y} + P_{fC,y}$$

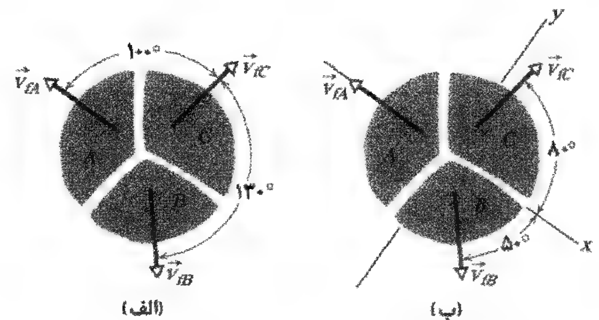
سپس، به ازای $v_{fC} = ۵/۰ \text{ m/s}$ ، داریم

$$۰ = ۰ - ۰/۲۰ M v_{fB} \sin ۵۰° + (۰/۳۰ M)(۵/۰ \text{ m/s}) \sin ۸۰°$$

که از این رابطه داریم

(پاسخ) $$v_{fB} = ۹/۶۴ \text{m/s} \approx ۹/۶ \text{m/s}$$

(ب) تندی تکهٔ $A$ چقدر است؟




**شکل ۹-۱۴** سه تکهٔ یک نارگیل منفجر شده در سه جهت روی کف اتاق بدون اصطکاکی از هم دور می‌شوند. (الف) دید از بالای این رویداد. (ب) همان دید با دستگاه محورهای دو بعدی روی آن.

***محاسبه‌ها:*** چون اندازه حرکت خطی در امتداد محور $x$ نیز پایسته است، داریم

$$P_{ix} = P_{fx} \qquad (۹-۴۹)$$

که در آن $P_{ix} = ۰$ است، چون نارگیل در آغاز در حال سکون بوده است. برای به‌دست آوردن $P_{fx}$ ، مؤلفه‌های $x$ اندازه حرکتهای خطی نهایی را با توجه به این واقعیت که تکهٔ $A$ باید دارای جرم $۰/۵۰ M (= M - ۰/۲۰ M - ۰/۳۰ M)$ باشد، به دست می‌آوریم

$$P_{fA,x} = -۰/۵۰ M v_{fA}$$
$$P_{fB,x} = ۰/۲۰ M v_{f,x} = ۰/۲۰ M v_{fB} \cos ۵۰°$$
$$P_{fC,x} = ۰/۳۰ M v_{fC,x} = ۰/۳۰ M v_{fB} \cos ۸۰°$$

حال می‌توان معادلهٔ ۹-۴۹ را به صورت زیر نوشت

$$P_{ix} = P_{fx} = P_{fA,x} + P_{fB,x} + P_{fC,x}$$

سپس به ازای $v_{fC} = ۵/۰۰ \text{m/s}$ و $v_{fB} = ۹/۶۴ \text{m/s}$ داریم

$$۰ = -۰/۵۰ M v_{fA} + ۰/۲۰ M (۹/۶۴ \text{m/s}) \cos ۵۰° + ۰/۳۰ M (۵/۰ \text{ m/s}) \cos ۸۰°$$

که از این رابطه داریم

(پاسخ) $$v_{fA} = ۳/۰ \text{ m/s}$$

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۲: پایستگی اندازه حرکت خطی*

در مسئله‌های مربوط به پایستگی اندازه حرکت خطی، ابتدا باید مطمئن شویم که یک دستگاه بسته و منزوی را انتخاب کرده‌ایم. دستگاه *بسته* به این معناست که هیچ ماده‌ای (یا ذره‌ای) از مرز دستگاه در هیچ جهتی عبور نمی‌کند. دستگاه *منزوی* به این معناست که نیروی خارجی خالص وارد بر دستگاه صفر است. اگر دستگاه منزوی نباشد، بیادآورید که هر مؤلفهٔ اندازه حرکت خطی به طور جداگانه وقتی پایسته است که مؤلفهٔ نیروی خارجی خالص مربوطه صفر باشد. بنابراین، ممکن است یک مؤلفه پایسته باشد در حالی که مؤلفهٔ دیگر نباشد.

سپس، دو حالت مناسب دستگاه را (که می‌توان آنها را حالتهای اولیه و نهایی نامید) انتخاب می‌کنیم و رابطه‌های مربوط به اندازه حرکت خطی دستگاه را در هر یک از این حالتها می‌نویسیم. در موقع نوشتن این رابطه‌ها باید مطمئن شویم که چارچوب مرجع لخت اولیه را می‌شناسیم و نیز دقت کنیم که تمام قسمتهای دستگاه را در نظر گرفته‌ایم و قسمتی از آن را فراموش نکرده‌ایم و اجسامی را که شامل دستگاه نیستند به حساب نیاورده‌ایم.

سرانجام، رابطه‌های مربوط به $\vec{P}_i$ و $\vec{P}_f$ را مساوی هم قرار می‌دهیم و آن را برای مجهولی که خواسته شده، حل می‌کنیم.

## ۹-۸ اندازه حرکت و انرژی جنبشی در برخوردها

در بخش ۹-۶ برخورد دو جسم شبه- ذره را در نظر گرفتیم ولی در یک لحظه فقط یکی از دو جسم را مورد توجه قرار دادیم. برای چند بخش بعدی نظر خود را به خود دستگاه معطوف می‌کنیم با این فرض که دستگاه بسته و منزوی است. در بخش ۹-۷ از قاعده برای چنین دستگاهی صحبت کردیم: اندازه حرکت خطی کل $\vec{P}$ دستگاه نمی‌تواند تغییر کند زیرا هیچ نیروی خارجی خالصی برای تغییر آن وجود ندارد. این قاعدهٔ قدرتمندی است زیرا به ما امکان می‌دهد تا بدون اطلاع از جزئیات برخورد (مثل مقدار خسارت وارده) نتایج حاصل از برخورد را مشخص کنیم.

ما همچنین به انرژی جنبشی کل دستگاه دو جسم برخورد کننده نیز علاقه‌مندیم. اگر این مقدار کل در برخورد تغییر نکند،

آنگاه انرژی جنبشی دستگاه *پایسته* است (یعنی پیش و پس از برخورد یکسان است). چنین برخوردی **برخورد کشسان** نامیده می‌شود. در برخوردهای روزمرهٔ جسمهای معمول مثل دو اتومبیل یا چوب بیسبال و توپ، همیشه مقداری از انرژی جنبشی به شکل انرژیهای دیگر مثل انرژی گرمایی یا انرژی صوتی تبدیل می‌شود. بنابراین، انرژی جنبشی دستگاه پایسته نیست. چنین برخوردی **برخورد ناکشسان** نامیده می‌شود.

با این وجود، در برخی وضعیتها می‌توانیم *با تقریب* برخورد معمول جسمها را کشسان در نظر بگیریم. فرض کنید که توپی را رها می‌کنیم تا با کف سختی برخورد کند. اگر برخورد بین توپ و کف (یا زمین) کشسان باشد، توپ به خاطر برخورد انرژی جنبشی از دست نمی‌دهد و به ارتفاع اولیه‌اش به بالا می‌جهد. در حالی که، ارتفاع برگشت واقعی قدری کوتاهتر است و این نشان می‌دهد که دست کم مقداری از انرژی جنبشی در برخورد از دست رفته است و بنابراین برخورد به گونه‌ای ناکشسان است. با این حال، می‌توانیم از این مقدار ناچیز انرژی جنبشی از دست رفته چشمپوشی و برخورد را کشسان فرض کنیم.

برخورد ناکشسان دو جسم همیشه شامل از دست رفتن مقداری انرژی جنبشی دستگاه است. بیشترین از دست رفتگی انرژی جنبشی وقتی رخ می‌دهد که دو جسم به هم بچسبند، در چنین حالتی برخورد را **برخورد ناکشسان کامل** می‌نامند. برخورد چوب بیسبال با توپ ناکشسان است. البته، برخورد توپ بتونه‌ای خیس با چوب بیسبال یک برخورد ناکشسان کامل است زیرا بتونه به چوب بیسبال می‌چسبد.

## ۹-۹ برخورد ناکشسان در یک بعد

### *برخورد ناکشسان یک بعدی*

شکل ۹-۱۵ دو جسم را درست پیش و پس از برخورد یک بعدی نشان می‌دهد. سرعتهای پیش از برخورد (زیرنویس $i$) و پس از برخورد (زیرنویس $f$) مشخص شده‌اند. دو جسم دستگاه ما را که بسته و منزوی است تشکیل می‌دهند. قانون پایستگی اندازه حرکت خطی را برای دو جسم به این صورت می‌نویسیم

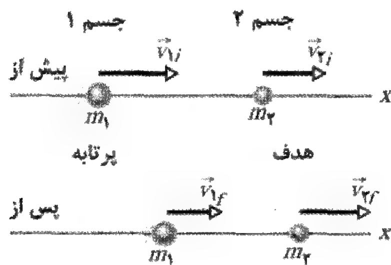
$$\begin{pmatrix}\text{اندازه حرکت } \vec P_f\\ \text{کل پس از برخورد}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{اندازه حرکت } \vec P_i\\ \text{کل پیش از برخورد}\end{pmatrix}$$

که می‌توان آن را به صورت نمادی زیر نوشت

$$\vec p_{1i} + \vec p_{2i} = \vec p_{1f} + \vec p_{2f} \quad \text{(پایستگی اندازه حرکت خطی)} \quad (۹-۵۰)$$

چون حرکت یک بعدی است، می‌توانیم علامت برداری را برای بردارها حذف کنیم و فقط مؤلفه در امتداد محور را به‌کار ببریم. بنابراین، از $p = mv$، می‌توانیم معادلهٔ ۹-۵۰ را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (۹-۵۱)$$

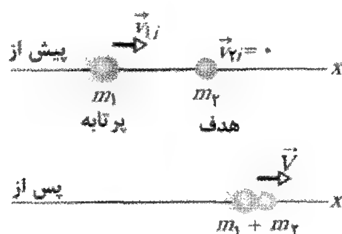



**شکل ۹-۱۵** جسمهای ۱ و ۲ پیش و پس از برخورد در امتداد محور $x$ حرکت می‌کنند، آنها برخورد ناکشسان دارند.

اگر مقدارها را مثلاً برای جرمها و یکی از سرعتهای نهایی بدانیم، می‌توانیم سرعت نهایی دیگر را از معادلهٔ ۹-۵۱ به دست آوریم.

### *برخورد کاملاً ناکشسان یک بعدی*

شکل ۹-۱۶ دو جسم را پیش و پس از برخورد نشان می‌دهد، آنها دارای برخورد کاملاً ناکشسان هستند (یعنی آنها به هم می‌چسبند). جسم با جرم $m_2$ در آغاز ساکن است، $(v_{2i} = 0)$. این جسم را به عنوان *هدف* و جسم دیگر را که به سمت آن




**شکل ۹-۱۶** یک برخورد کاملاً ناکشسان بین دو جسم. پیش از برخورد جسم با جرم $m_2$ ساکن است و جسم با جرم $m_1$ به طور مستقیم به سمت آن حرکت می‌کند. پس از برخورد جسمها به هم می‌چسبند و با سرعت یکسان $\vec V$ حرکت می‌کنند.

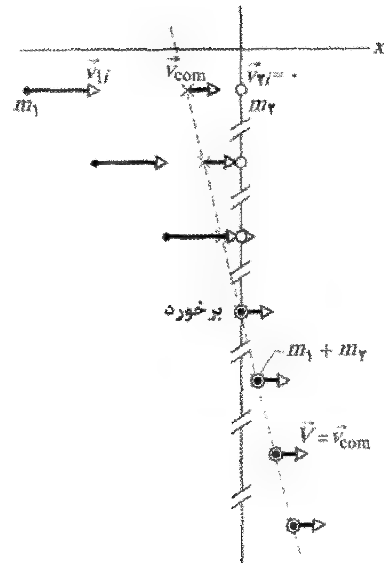
می‌آید *پرتابه* در نظر می‌گیریم. پس از برخورد، دو جسم به هم می‌چسبند و با سرعت یکسان $V$ حرکت می‌کنند. برای چنین وضعیتی می‌توانیم معادلهٔ ۹-۵۱ را به این صورت بازنویسی کنیم

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) V \quad (۹-۵۲)$$

یا

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (۹-۵۳)$$

اگر مقدارها را برای مثال، برای جرمها و سرعت اولیهٔ $v_{1i}$ پرتابه، داشته باشیم سرعت نهایی را می‌توانیم از معادلهٔ ۹-۵۳ به دست آوریم. توجه کنید که $V$ باید کوچکتر از $v_{1i}$ باشد چون نسبت جرم $m_1/(m_1+m_2)$ کوچکتر از یک است.




**شکل ۹-۱۷** نمای ثابت شده‌ای از دستگاه دو جسم که تحت تأثیر برخورد کاملاً ناکشسان قرار دارند در شکل ۹-۱۶ نشان داده شده است. مرکز جرم دستگاه در هر نمای ثابت شده نشان داده شده است. سرعت $\vec{v}_{com}$ مرکز جرم از برخورد تأثیر نمی‌پذیرد. چون جسمها پس از برخورد به هم می‌چسبند، سرعت مشترک $\vec{V}$ آنها باید برابر با $\vec{v}_{com}$ باشد.

## سرعت مرکز جرم

در دستگاه بسته و منزوی سرعت $\vec{v}_{com}$ مرکز جرم دستگاه نمی‌تواند بر اثر برخورد تغییر کند، زیرا در دستگاه منزوی نیروی خارجی خالص برای تغییردادن آن وجود ندارد. برای به دست آوردن رابطه‌ای برای $\vec{v}_{com}$، به دستگاه دو جسم و برخورد یک بعدی شکل ۹-۱۴ رجوع می‌کنیم. از معادلهٔ ۹-۲۵ $(\vec{P}=M\vec{v}_{com})$ می‌توانیم $\vec{v}_{com}$ را به اندازه حرکت خطی کل $\vec{P}$ دستگاه دو ذره با رابطهٔ زیر ربط دهیم

$$\vec{P}=M\vec{v}_{com}=(m_1+m_2)\vec{v}_{com} \qquad (۹-۵۴)$$

اندازه حرکت خطی کل $\vec{P}$ در حین برخورد پایسته است: بنابراین، هر طرف معادله ۹-۵۴ آن را به دست می‌دهد. حال از سمت چپ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\vec{P}=\vec{p}_{1i}+\vec{p}_{2i} \qquad (۹-۵۵)$$

با قراردادن $\vec{P}$ از این رابطه در معادلهٔ ۹-۵۴ و حل آن برای $v_{com}$ داریم

$$\vec{v}_{com}=\frac{\vec{P}}{m_1+m_2}=\frac{\vec{p}_{1i}+p_{2i}}{m_1+m_2} \qquad (۹-۵۶)$$

سمت راست این معادله ثابت است و $\vec{v}_{com}$ پیش و پس از برخورد همین مقدار ثابت را دارد.

برای مثال، شکل ۹-۱۷ یک ردیف نماهای ثابت شدهٔ حرکت مرکز جرم را برای یک برخورد ناکشسان کامل شکل ۹-۱۶، نشان می‌دهد. جسم ۲ هدف است، و اندازه حرکت خطی اولیهٔ آن در معادلهٔ ۹-۵۶ عبارت است از $\vec{p}_{2i}=m_2\vec{v}_{2i}$. جسم ۱ پرتابه است و اندازه حرکت خطی اولیهٔ آن در معادلهٔ ۹-۵۶ عبارت است از $\vec{p}_{1i}=m_1\vec{v}_{1i}$. توجه کنید همان‌طور که نماهای ثابت شده به سمت راست حرکت می‌کنند و پس از برخورد ادامه می‌یابند، مرکز جرم با سرعت ثابتی به سمت راست حرکت می‌کند. پس از برخورد تندی نهایی مشترک جسمها $V$ برابر است با $\vec{v}_{com}$ زیرا پس از آن مرکز جرم با جسمهای به هم چسبیده حرکت می‌کند.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۷*** جسم ۱ و جسم ۲ در یک برخورد کاملاً کشسان یک بعدی هستند. اگر اندازه حرکت خطی اولیهٔ آنها به ترتیب (الف) $10\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ و ۰ (ب) $10\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ و $4\,\mathrm{kg\cdot m/s}$، (پ) $10\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ و $-4\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ باشد، اندازه حرکت نهایی آنها چقدر است؟

### مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۹ مهارت خود را تقویت کنید

از *آونگ بالیستیک* برای اندازه‌گیری تندی گلوله قبل از ساخت وسایل الکتریکی پیشرفته، استفاده می‌شد. آونگ نشان داده شده در شکل ۹-۱۸ شامل یک قطعه چوب بزرگ به جرم $M=5/4\mathrm{kg}$ است که از دو نخ بلند آویزان شده است. گلوله‌ای به جرم $m=9/5\mathrm{g}$ به سمت چوب شلیک و سریعاً در آن متوقف می‌شود. سپس دستگاه *قطعه + گلوله* به سمت بالا تاب می‌خورد. مرکز جرم پیش از اینکه به طور لحظه‌ای در انتهای قوس متوقف شود، تا ارتفاع قائم $h=6/3\mathrm{cm}$ بالا می‌رود. تندی گلوله درست پیش از برخورد چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** می‌توانیم ببینیم که تندی گلوله $v$ ارتفاع $h$ را تعیین می‌کند. اما برای ارتباط این دو کمیت نمی‌توانیم پایستگی انرژی مکانیکی را به کار ببریم زیرا وقتی گلوله به داخل چوب نفوذ می‌کند به طور قطع انرژی از صورت مکانیکی آن به شکلهای دیگر (مانند انرژی گرمایی و انرژی لازم برای شکستن چوب) تبدیل می‌شود. با این حال، می‌توانیم این حرکت پیچیده را به دو مرحله تقسیم کنیم تا بتوانیم هر یک را به طور مجزا تحلیل کنیم: (۱) برخورد گلوله به قطعه و (۲) بالا رفتن گلوله- قطعه که در طی آن انرژی مکانیکی پایسته است.

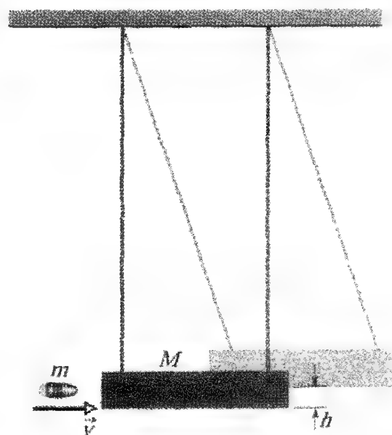
**مرحلهٔ ۱:** چون زمان برخورد دو دستگاه گلوله- قطعه بسیار کوتاه است، می‌توانیم دو فرض مهم را در نظر بگیریم: (۱) در حین برخورد نیروی گرانشی وارد بر قطعه و نیروی وارد بر قطعه از طرف نخها یکدیگر را خنثی می‌کنند. پس، در حین برخورد، ضربهٔ خارجی خالص روی دستگاه گلوله- قطعه صفر است. بنابراین، دستگاه منزوی و اندازه حرکت خطی آن پایسته است. (۲) برخورد یک بعدی است به این معنا که راستای حرکت گلوله و قطعه *درست پس از برخورد* همان راستای حرکت اولیهٔ گلوله است.

چون برخورد یک بعدی و قطعه در ابتدا ساکن است و گلوله به قطعه می‌چسبد معادلهٔ ۹-۵۳ را برای بیان پایستگی اندازه حرکت خطی به کار می‌بریم. نمادهای آن را با نمادهای اینجا جایگزین می‌کنیم، داریم

$$V=\frac{m}{m+M}v \qquad (۹\text{-}۵۷)$$

**مرحلهٔ ۲:** وقتی که گلوله و قطعه با هم به سمت بالا می‌روند، انرژی مکانیکی دستگاه گلوله- قطعه - زمین پایسته است. (این انرژی مکانیکی به وسیلهٔ نیروی نخها روی قطعه تغییر نمی‌کند چون نیرو همیشه عمود بر راستای حرکت قطعه است.) مکان اولیهٔ قطعه را به عنوان سطح مرجع انرژی پتانسیل گرانشی صفر در نظر می‌گیریم. پایستگی انرژی مکانیکی به این معناست که انرژی جنبشی در آغاز حرکت باید با انرژی پتانسیل در بالاترین نقطه برابر باشد. چون تندی گلوله و قطعه در آغاز حرکت برابر تندی $V$ درست پس از برخورد است، می‌توانیم این پایستگی را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{۱}{۲}(m+M)V^{۲}=(m+M)gh$$




**شکل ۹-۱۸** آونگ بالیستیک، برای اندازه‌گیری تندی گلوله به کار می‌رود.

**ترکیب دو مرحله:** با قراردادن $V$ از معادلهٔ ۹-۵۷ داریم

$$v=\frac{m+M}{m}\sqrt{۲gh}$$
$$=\left(\frac{۰/۰۰۹۵\,\text{kg}+۵/۴\,\text{kg}}{۰/۰۰۹۵\,\text{kg}}\right)\sqrt{(۲)(۹/۸\,\text{m/s}^{۲})(۰/۰۶۳\,\text{m})}$$
$$=۶۳۰\,\text{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

آونگ بالستیک یک نوع «مبدل» است که تندی بالای یک جسم سبک (گلوله) را به تندی پایین یک جسم سنگین (قطعه) که اندازه‌گیری آن راحت‌تر است تبدیل می‌کند.

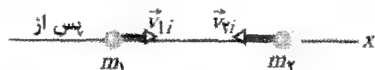
### مسئلهٔ نمونه ... مهارت خود را تقویت کنید

خطرناکترین نوع برخورد دو اتومبیل برخورد رودررو است. در کمال تعجب، داده‌ها نشان می‌دهد که اگر سرنشین در اتومبیل باشد احتمال خطر مهلک برای راننده کمتر است. حال ببینیم که چرا؟

شکل ۹-۱۹ دو اتومبیل مشابه را نشان می‌دهد که در حال برخورد رودرروی کاملاً ناکشسان یک بعدی در امتداد محور $x$ هستند. دو اتومبیل در حین برخورد تشکیل یک دستگاه بسته را می‌دهند. فرض قابل قبولی را در نظر می‌گیریم که ضربه در حین برخورد آنقدر بزرگ است که می‌توان از ضربه‌های نسبتاً ناچیز حاصل از نیروی اصطکاک بین جاده و چرخها چشمپوشی کرد. پس، می‌توانیم فرض کنیم که هیچ نیروی خارجی خالصی روی دو اتومبیل اثر نمی‌کند.

مؤلفهٔ $x$ سرعت اولیهٔ اتومبیل ۱ در امتداد محور $x$ برابر است با $v_{۱i}=+۲۵\,\text{m/s}$ و سرعت مربوط به اتومبیل ۲ برابر است با $v_{۲i}=-۲۵\,\text{m/s}$ . در حین برخورد نیروی (و در نتیجه ضربهٔ) وارد بر هر اتومبیل باعث تغییر $\Delta v$ در سرعت اتومبیلها می‌شود. احتمال مرگ راننده بستگی به بزرگی $\Delta v$ برای رانندهٔ اتومبیل دارد. می‌خواهیم تغییرات $\Delta v_۱$ و $\Delta v_۲$ در سرعت دو اتومبیل را محاسبه کنیم.

(الف) ابتدا فرض می‌کنیم که در هر اتومبیل فقط راننده قرار داشته باشد. جرم کل اتومبیل ۱ (شامل رانندهٔ ۱) برابر $m_۱=۱۴۰۰\,\text{kg}$ و جرم کل اتومبیل ۲ (شامل رانندهٔ ۲) برابر ۱۴۰۰kg است. تغییرات $\Delta v_۱$ و $\Delta v_۲$ اتومبیلها چقدر است؟




**شکل ۹-۱۹** دو اتومبیل در حال برخورد رودررو هستند.

**نکتهٔ کلیدی** چون دستگاه بسته و منزوی است، اندازه حرکت خطی کل آن پایسته است.

***محاسبه‌ها:*** از معادلهٔ ۹-۵۱، این واقعیت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$m_۱v_{۱i}+m_۲v_{۲i}=m_۱v_{۱f}+m_۲v_{۲f} \qquad (۹\text{-}۵۸)$$

چون برخورد کاملاً ناکشسان است، دو اتومبیل به هم می‌چسبند و بنابراین، پس از برخورد دارای سرعت یکسان $V$ هستند. با قراردادن $V$ در معادلهٔ ۹-۵۸ برای $v_{۱f}$ و $v_{۲f}$ و حل آن برای $V$، خواهیم داشت

$$V=\frac{m_۱v_{۱i}+m_۲v_{۲i}}{m_۱+m_۲} \qquad (۹\text{-}۵۹)$$

مقدارهای داده شده را قرار می‌دهیم، داریم

$$V=\frac{(۱۴۰۰\,\text{kg})(+۲۵\,\text{m/s})+(۱۴۰۰\,\text{kg})(-۲۵\,\text{m/s})}{۱۴۰۰\,\text{kg}+۱۴۰۰\,\text{kg}}=۰$$

بنابراین، تغییر در سرعت اتومبیل ۱ برابر است با

$$\Delta v_۱=v_{۱f}-v_{۱i}=V-v_{۱i}$$
$$=۰-(+۲۵\,\text{m/s})=-۲۵\,\text{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

و تغییر در سرعت اتومبیل دوم برابر است با

$$\Delta v_2 = v_{2f} - v_{2i} = V - v_{2i}$$

(پاسخ) $= 0 - (-25\ \text{m/s}) = +25\ \text{m/s}$

(ب) حال، برخورد را بازنگری می‌کنیم، اما این دفعه با یک سرنشین با جرم $80\text{kg}$ در داخل اتومبیل ۱. اکنون $\Delta v_1$ و $\Delta v_2$ چقدرند؟

***محاسبه‌ها:*** همان مرحله‌ها را تکرار می‌کنیم، اما اکنون $m_1 = 1480\text{kg}$ را قرار می‌دهیم، درمی‌یابیم که

$$V = 0/694$$

که به دست می‌دهد

$$\Delta v_1 = -24/3\text{m/s}$$

و

(پاسخ) $$\Delta v_2 = +25/7\text{m/s}$$

(پ) حضور سرنشین در اتومبیل بزرگی $\Delta v_1$ را کاهش می‌دهد. چون احتمال مرگ راننده به $\Delta v_1$ بستگی دارد، می‌توان آن را دلیلی برای کاهش احتمال مرگ رانندهٔ ۱ دانست.

داده‌ها در برخورد رودررو شامل مقدارهای $\Delta v$ نمی‌شوند اما آنها شامل جرم اتومبیلها و اینکه آیا برخورد کشنده است یا خیر می‌شوند. پژوهشگران تابعی را که داده‌های جمع‌آوری شده در آن صدق کنند به دست آوردند و احتمال حادثهٔ ناگوار برای رانندهٔ ۱ را به این شکل یافتند

$$r_1 = c\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/79} \qquad (۹-۶۰)$$

که در آن $c$ ثابت است. ثابت کنید که چرا نسبت $m_2/m_1$ در این معادله ظاهر می‌شود و سپس معادله را به کار برده احتمال حادثهٔ ناگوار برای رانندهٔ ۱ را در حالت حضور سرنشین و عدم حضور او مقایسه کنید.

***محاسبه‌ها:*** ابتدا معادلهٔ ۹-۵۸ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$m_1(v_{1f} - v_{1i}) = -m_2(v_{2f} - v_{2i})$$

با قراردادن $\Delta v_1 = v_{1f} - v_{1i}$ و $\Delta v_2 = v_{2f} - v_{2i}$ و دوباره مرتب کردن رابطه به دست می‌آوریم

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} \qquad (۹-۶۱)$$

احتمال حادثهٔ ناگوار برای راننده به تغییر $\Delta v$ آن راننده بستگی دارد. در معادلهٔ ۹-۶۱ می‌بینیم که نسبت مقدارهای $\Delta v$ وارون نسبت جرمهاست و این دلیلی است که پژوهشگران می‌توانند احتمال حادثهٔ ناگوار را به نسبت جرمها در معادلهٔ ۹-۶۰ ربط دهند.

از قسمت الف و معادلهٔ ۹-۶۰، بدون سرنشین، رانندهٔ ۱ دارای احتمال حادثهٔ ناگوار زیر است

$$r_1 = c\left(\frac{1400\text{kg}}{1400\text{kg}}\right)^{1/79} = c \qquad (۹-۶۲)$$

از قسمت ب و معادلهٔ ۹-۶۰، با سرنشین، رانندهٔ ۱ دارای احتمال حادثهٔ ناگوار زیر است

$$r_1' = c\left(\frac{1400\text{kg}}{1400\text{kg} + 80\text{kg}}\right)^{1/79} = 0/9053c \qquad (۹-۶۲)$$

با قراردادن مقدار $c$ از معادلهٔ ۹-۶۲ در رابطه بالا درمی‌یابیم که

(پاسخ) $$r_1' = 0/9053c \approx 0/91r_1$$

در بیان، احتمال حادثهٔ ناگوار برای رانندهٔ ۱ وقتی سرنشین داخل اتومبیل است ۹٪ کمتر است.

## ۹-۱۰ برخورد کشسان در یک بُعد

همان‌طور که در بخش ۹-۸ بحث کردیم برخوردهای روزمره ناکشسان هستند اما می‌توانیم با تقریب بعضی از آنها را کشسان در نظر بگیریم: یعنی، می‌توانیم با تقریب بگوییم که انرژی جنبشی کل جسمهای برخورد کننده پایسته است و به شکلهای دیگر انرژی تبدیل نمی‌شود

(انرژی جنبشی کل پیش از برخورد) = (انرژی جنبشی کل پس از برخورد)

این بدان معنی نیست که انرژی جنبشی هیچ یک از جسمهای برخورد کننده نمی‌تواند تغییر کند، بلکه بدان معناست که

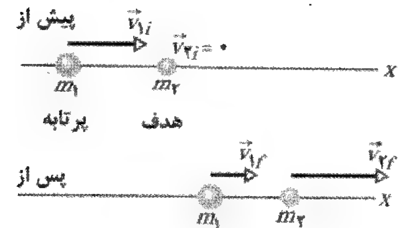
> در برخورد کشسان، انرژی جنبشی هر یک از جسمها ممکن است تغییر کند، اما انرژی جنبشی کل دستگاه تغییر نمی‌کند.

برای مثال، برخورد چوب بیلیارد با گوی را می‌توان با تقریب یک برخورد کشسان در نظر گرفت. اگر برخورد رودررو باشد (چوب بیلیارد مستقیماً به گوی برخورد کند)، انرژی جنبشی چوب تقریباً به طور کامل به گوی منتقل می‌شود. (البته هنوز این واقعیت وجود دارد که برخورد تولید صدا می‌کند و دست کم مقداری از انرژی جنبشی به انرژی صوتی تبدیل شود).

### *هدف ثابت*

شکل ۹-۲۰ دو جسم را پیش و پس از یک برخورد یک بعدی شبه رودررو بین دو توپ بیلیارد نشان می‌دهد. جرم جسم پرتابه $m_1$ است و با سرعت اولیهٔ $v_{1i}$ به سمت جسم هدف با جرم $m_2$ که در آغاز ساکن است $(v_{2i} = 0)$ حرکت می‌کند. فرض می‌کنیم که این دو جسم یک دستگاه بسته و منزوی تشکیل می‌دهند. آنگاه اندازه حرکت خطی خالص دستگاه پایسته است و از معادلهٔ ۹-۵۱ می‌توانیم این پایستگی را به صورت زیر بنویسیم

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad \text{(اندازه حرکت خطی)} \quad (۹-۶۳)$$




**شکل ۹-۲۰** جسم ۱ که پیش از برخورد کشسان با جسم ۲ در آغاز ساکن است در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند. هر دو جسم پس از برخورد در امتداد این محور حرکت می‌کنند.

اگر برخورد کشسان نیز باشد، آنگاه انرژی جنبشی کل پایسته است و می‌توانیم این پایستگی را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2=\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \qquad \text{(انرژی جنبشی)} \qquad (۹\text{-}۶۴)$$

در هر یک از این معادله‌ها زیرنویس $i$ بیانگر سرعت اولیه و زیرنویس $f$ بیانگر سرعت نهایی دو جسم است. اگر جرم جسمها و همچنین $v_{1i}$ سرعت اولیهٔ جسم ۱ را بدانیم، فقط دو کمیت مجهول $v_{1f}$ و $v_{2f}$، سرعت نهایی دو جسم، وجود دارند. با دو معادله‌ای که در دست داریم باید بتوانیم این دو مجهول را به دست آوریم.

برای انجام این امر معادلهٔ ۹-۶۳ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$m_1(v_{1i}-v_{1f})=m_2v_{2f} \qquad (۹\text{-}۶۵)$$

و همین طور برای معادله ۹-۶۴*

$$m_1(v_{1i}-v_{1f})(v_{1i}-v_{1f})=m_2v_{2f}^2 \qquad (۹\text{-}۶۶)$$

پس از تقسیم معادلهٔ ۹-۶۶ بر معادلهٔ ۹-۶۵ و انجام کمی عملیات جبری خواهیم داشت

$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i} \qquad (۹\text{-}۶۷)$$

و

$$v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i} \qquad (۹\text{-}۶۸)$$

از معادلهٔ ۹-۶۸ به این نکته توجه داریم که $v_{2f}$ همیشه مثبت است (هدف در آغاز ساکن است و با جرم $m_2$ همیشه به سمت جلو حرکت می‌کند). از معادلهٔ ۹-۶۷ می‌بینیم که $v_{1f}$ ممکن است هر علامتی را داشته باشد (پرتابه با جرم $m_1$ به سمت جلو حرکت می‌کند اگر $m_1>m_2$ باشد اما اگر $m_1<m_2$ باشد به سمت عقب برمی‌گردد).

حال چند حالت ویژه را در نظر می‌گیریم.

۱. ***جرمهای یکسان*** اگر $m_1=m_2$ باشد، معادله‌های ۹-۶۷ و ۹-۶۸ به رابطه‌های زیر منتهی می‌شوند

$$v_{1f}=0 \qquad \text{و} \qquad v_{2f}=v_{1i}$$

که ممکن است نتیجهٔ بازیکن بیلیارد باشد. این نتیجه پیش‌بینی می‌کند که در یک برخورد رودرروی دو جسم با جرمهای یکسان، جسم ۱ (در آغاز متحرک) در مسیرش متوقف می‌شود و جسم ۲ (در آغاز ساکن) با تندی اولیهٔ جسم ۱ شروع به حرکت می‌کند. در برخورد رودرروی دو جسم با جرمهای یکسان سرعتها به سادگی جابه‌جا می‌شوند. اگر جسم ۲ در آغاز ساکن نباشد نیز این واقعیت برقرار است.

۲. ***هدف سنگین*** در شکل ۹-۲۰، هدف سنگین یعنی $m_2\gg m_1$ است. برای مثال، یک توپ گلف را به سمت یک گلولهٔ توپ شلیک کنیم. آنگاه معادله‌های ۹-۶۷ و ۹-۶۸ به رابطه‌های زیر منتهی می‌شوند

$$v_{1f}\approx -v_{1i} \qquad \text{و} \qquad v_{2f}\approx\left(\frac{2m_1}{m_2}\right)v_{1i}$$

این حاکی از آن است که جسم ۱ (توپ گلف) در امتداد مسیری که می‌آمده به سادگی پس زده می‌شود و تندی آن در اساس تغییر نمی‌کند. جسمی که در آغاز ساکن است (گلولهٔ توپ) با سرعت کم به سمت جلو حرکت می‌کند، چون کمیت داخل پرانتز در معادلهٔ ۹-۶۹ خیلی کوچکتر از یک است. این تمام چیزی است که انتظار داریم.

۳. ***پرتابهٔ سنگین*** این حالت عکس است: یعنی $m_1\gg m_2$ است. این بار، گلولهٔ توپ را به سمت توپ گلف ساکن شلیک می‌کنیم. معادله‌های ۹-۶۷ و ۹-۶۸ به رابطه‌های زیر منجر می‌شوند

$$v_{1f}\approx v_{1i} \qquad \text{و} \qquad v_{2f}\approx 2v_{1i} \qquad (۹\text{-}۷۰)$$

معادلهٔ ۹-۷۰ بر آن دلالت دارد که جسم ۱ (گلولهٔ توپ) بر اثر برخورد به مقدار ناچیزی کند می‌شود و به سادگی به حرکت خود ادامه می‌دهد. جسم ۲ (توپ گلف) با دو برابر تندی گلولهٔ توپ به سمت جلو رانده می‌شود.

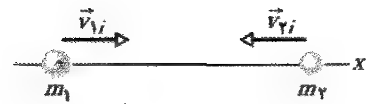
ممکن است تعجب کنید: چرا دو برابر تندی؟ به عنوان نقطهٔ شروعی برای فکر کردن در این مورد، برخورد شرح داده شده به وسیلهٔ معادلهٔ ۹-۶۹ را بیاد آورید که سرعت فرودی جسم سبک از $+v$ به $-v$ تغییر می‌کند و تغییر سرعت $2v$ است. در این مثال تغییر سرعت یکسانی (اما از صفر تا $2v$) به وجود می‌آید.

### هدف متحرک

حال که برخورد کشسان پرتابه و هدف ساکن را بررسی کردیم، وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن هر دو جسم پیش از برخورد کشسان در حال حرکت باشند.

---

* در این مرحله از اتحاد $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ استفاده می‌کنیم. این کار باعث کاهش محاسبه‌های جبری در حل همزمان معادله‌های ۹-۶۵ و ۹-۶۶ می‌شود.




**شکل ۹-۲۱** دو جسم برای برخورد یک بعدی به سمت هم می‌آیند.

برای وضعیت شکل ۹-۲۱ پایستگی اندازه حرکت خطی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=m_1v_{1f}+m_2v_{2f} \quad (۹-۷۱)$$

و برای پایستگی انرژی جنبشی داریم

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2i}^2=\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \quad (۹-۷۲)$$

برای حل همزمان این معادله‌ها برای $v_{1f}$ و $v_{2f}$، ابتدا معادلهٔ ۹-۷۱ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$m_1(v_{1i}-v_{1f})=-m_2(v_{2i}-v_{2f}) \quad (۹-۷۳)$$

همچنین برای معادلهٔ ۹-۷۲ داریم

$$m_1(v_{1i}-v_{1f})(v_{1i}+v_{1f})=-m_2(v_{2i}-v_{2f})(v_{2i}+v_{2f}) \quad (۹-۷۴)$$

پس از تقسیم معادلهٔ ۹-۷۴ بر معادلهٔ ۹-۷۳ و انجام عملیات جبری بیشتر، داریم

$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{2i} \quad (۹-۷۵)$$

$$v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_{2i} \quad (۹-۷۶)$$

توجه کنید که نسبت دادن زیرنویس ۱ و ۲ برای جسمها اختیاری است. اگر آنها را در شکل ۹-۲۱ و معادله‌های ۹-۷۵ و ۹-۷۶ جابه‌جا کنیم به یک مجموعه معادله‌های یکسانی می‌رسیم. همچنین، توجه کنید که اگر $v_{2i}=0$ را قرار دهیم، جسم ۲ بنابر شکل ۹-۱۹ یک هدف ساکن می‌شود و معادله‌های ۹-۷۵ و ۹-۷۶ به ترتیب به معادله‌های ۹-۶۷ و ۹-۶۸ تبدیل می‌شوند.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۸*** اگر اندازه حرکت خطی اولیهٔ پرتابه در شکل ۹-۲۰ برابر $6\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$ و اندازه حرکت خطی نهایی پرتابه (الف) $2\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$ و (ب) $-2\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$ باشد، اندازه حرکت خطی نهایی هدف چقدر است؟ (پ) اگر انرژی جنبشی اولیه و نهایی به ترتیب $5\,J$ و $2\,J$ باشند، انرژی جنبشی نهایی هدف چقدر است؟

**مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۱۱**

همان‌طور که در شکل ۹-۲۲ نشان داده شده است دو کرهٔ فلزی که توسط ریسمانهای قائمی آویزان هستند در ابتدا درست با هم در تماس‌اند. کرهٔ ۱ با جرم $m_1=30\,\text{g}$ به سمت چپ و تا ارتفاع $h_1=8/0\,\text{cm}$ بالا کشیده و سپس رها می‌شود. کرهٔ ۱ پس از تاب خوردن به سمت پایین، با کرهٔ ۲ که جرمش $m_2=75\,\text{g}$ است به طور کشسان برخورد می‌کند. سرعت $v_{1f}$ کرهٔ ۱ درست پس از برخورد چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توانیم این حرکت پیچیده را به دو مرحله تقسیم و هر یک را جداگانه تحلیل کنیم: (۱) فرود کرهٔ ۱ (که در آن انرژی مکانیکی پایسته است) و (۲) برخورد دو کره (که در آن اندازه حرکت پایسته است).

**مرحلهٔ ۱:** وقتی کرهٔ ۱ به سمت پایین تاب می‌خورد انرژی مکانیکی دستگاه کره- زمین پایسته است. (انرژی مکانیکی به وسیلهٔ نیروی ریسمان بر کرهٔ ۱ تغییر نمی‌کند، چون نیرو همیشه عمود بر جهت حرکت کره است.)

***محاسبه:*** پایینترین سطح را به عنوان سطح مرجع انرژی پتانسیل گرانشی صفر در نظر می‌گیریم. پس انرژی جنبشی کرهٔ ۱ در پایینترین سطح باید برابر باشد با انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه وقتی که کرهٔ ۱ در ارتفاع $h_1$ است. در نتیجه

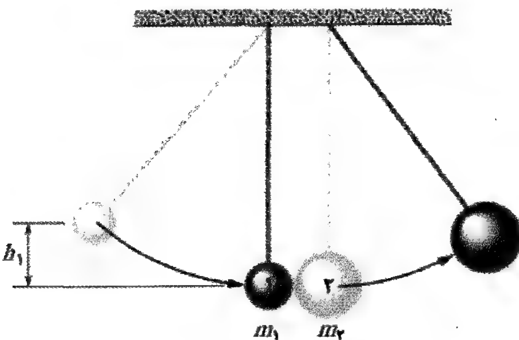
$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2=m_1gh_1$$

که آن را برای $v_{1i}$ تندی کرهٔ ۱ درست پیش از برخورد حل می‌کنیم، داریم

$$v_{1i}=\sqrt{2gh_1}=\sqrt{(2)(9/8\,\text{m/s}^2)(0/080\,\text{m})}$$
$$=1/252\,\text{m/s}$$

**مرحلهٔ ۲:** در اینجا علاوه بر فرض برخورد کشسان، می‌توانیم دو فرض دیگر را در نظر بگیریم. اولین فرض این است که برخورد را یک بعدی در نظر بگیریم چون حرکت کره درست پیش و پس از برخورد تقریباً افقی است. دومین فرض این است که چون برخورد کوتاه مدت است می‌توانیم تصور کنیم که دستگاه دو- کره بسته و منزوی است. این بدان معنی است که اندازه حرکت خطی کل دستگاه پایسته است.

***محاسبه:*** بنابراین، می‌توانیم برای به دست آوردن سرعت کرهٔ ۱ درست پس از برخورد از معادلهٔ ۹-۶۷ استفاده کنیم.



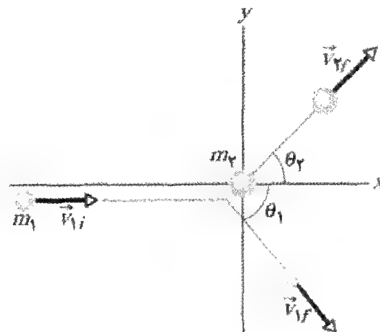

**شکل ۹-۲۲** دو کرهٔ فلزی توسط ریسمانهایی آویزان‌اند و وقتی در حالت سکون هستند درست با هم تماس دارند. کرهٔ ۱ با جرم $m_1$ به سمت چپ کشیده و سپس رها می‌شود.

$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i}$$
$$=\frac{0/030\,\text{kg}-0/075\,\text{kg}}{0/030\,\text{kg}+0/075\,\text{kg}}(1/252\,\text{m/s})$$
$$=-0/537\,\text{m/s}\approx-0/54\,\text{m/s} \quad \text{(پاسخ)}$$

علامت منفی حاکی از آن است که کرهٔ ۱ درست پس از برخورد به سمت چپ می‌رود.

## ۹-۱۱ برخورد در دو بُعد

وقتی دو جسم برخورد می‌کنند، ضربهٔ بین آنها جهتی را که آنها بعداً می‌روند تعیین می‌کند. به خصوص وقتی که برخورد رودررو نیست، جسمها در امتداد محور اولیهٔ خود به حرکت ادامه نمی‌دهند. برای چنین برخوردهای دو بعدی در یک دستگاه بسته و منزوی اندازه حرکت خطی باز هم پایسته است




**شکل ۹-۲۳** یک برخورد کشسان بین دو جسم که برخورد رودررو نیست. جسم با جرم $m_2$ (هدف) در آغاز ساکن است.

$$\vec{P}_{1i}+\vec{P}_{2i}=\vec{P}_{1f}+\vec{P}_{2f} \qquad (۹-۷۷)$$

اگر برخورد کشسان نیز باشد (حالت خاص)، آنگاه انرژی جنبشی کل هم پایسته است

$$K_{1i}+K_{2i}=K_{1f}+K_{2f} \qquad (۹-۷۸)$$

اگر معادلهٔ ۹-۷۷ را برحسب مؤلفه‌های کمیتها در دستگاه مختصات $xy$ بنویسیم اغلب برای تحلیل برخورد دو بعدی بیشتر مفید خواهد بود. برای مثال، شکل ۹-۲۳ یک برخورد *کمانه‌ای* (رودررو نیست) را بین یک جسم پرتابه و یک جسم ساکن نشان می‌دهد. ضربه‌های بین دو جسم باعث می‌شوند که آنها با زاویه‌های $\theta_1$ و $\theta_2$ نسبت به محور $x$، امتدادی که پرتابه در آغاز حرکت می‌کرد، حرکت کنند. در این وضعیت، ما باید معادلهٔ ۹-۷۷ را برای مؤلفه‌های در امتداد محور $x$ به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$m_1v_{1i}=m_1v_{1f}\cos\theta_1+m_2v_{2f}\cos\theta_2 \qquad (۹-۷۹)$$

و در امتداد محور $y$ نیز داریم

$$0=-m_1v_{1f}\sin\theta_1+m_2v_{2f}\sin\theta_2 \qquad (۹-۸۰)$$

همچنین می‌توانیم معادلهٔ ۹-۷۸ (برای حالت خاص برخورد کشسان) را برحسب تندیها بنویسیم

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2=\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \qquad \text{(انرژی جنبشی)} \qquad (۹-۸۱)$$

معادله‌های ۹-۷۹ تا ۹-۸۱ شامل هفت متغیرند: دو جرم $m_1$ و $m_2$؛ سه تندی $v_{1i}$، $v_{1f}$ و $v_{2f}$؛ و دو زاویهٔ $\theta_1$ و $\theta_2$. اگر چهار تا از این کمیتها را بدانیم، می‌توانیم سه معادله را برای سه کمیت دیگر حل کنیم.

✔ ***نکتهٔ وارسی ۹*** در شکل ۹-۲۳ فرض کنید پرتابه دارای اندازه حرکت اولیهٔ $6\,kg\cdot m/s$، مؤلفهٔ $x$ اندازه حرکت نهایی $4\,kg\cdot m/s$ و مؤلفهٔ $y$ اندازه حرکت نهایی $-3\,kg\cdot m/s$ است. در این صورت (الف) مؤلفهٔ $x$ اندازه حرکت نهایی و (ب) مؤلفهٔ $y$ اندازه حرکت نهایی چقدر است؟

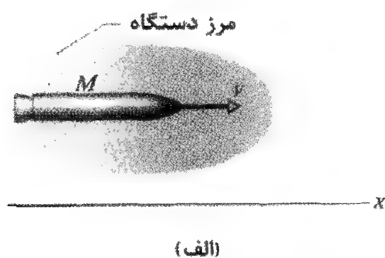
## ۹-۱۲ دستگاههای با جرم متغیر: موشک

در دستگاههایی که تا کنون مورد بحث قرار گرفتند، فرض کردیم که جرم کل دستگاه ثابت باقی می‌ماند. در مواردی مثل موشک چنین نیست. بخش بزرگی از جرم موشک در سکوی پرتاب را جرم سوخت تشکیل می‌دهد که تمام آن به تدریج می‌سوزد و از خروجی موتور موشک بیرون می‌رود.

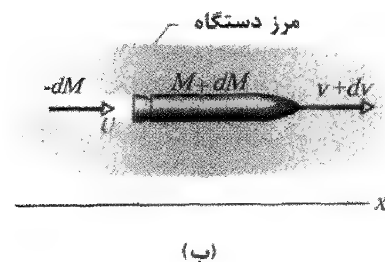
تغییرات جرم موشک را در حین شتاب گرفتن به وسیلهٔ قانون دوم نیوتون، نه فقط برای موشک تنها بلکه برای موشک و محصولهای احتراق با هم، مورد بررسی قرار می‌دهیم. جرم این دستگاه در حین شتاب گرفتن موشک تغییر نمی‌کند.

### *یافتن شتاب*

فرض کنید که در یک چارچوب مرجع لخت ساکن قرار دارید و به موشکی نگاه می‌کنید که در عمق فضا بدون آنکه نیروهای گرانشی یا مقاومت جوی روی آن اثر کند شتاب می‌گیرد. برای این حرکت یک بعدی، فرض کنیم که $M$ جرم موشک و $v$ سرعت آن در یک لحظهٔ اختیاری $t$ باشد (به شکل ۹-۲۴ الف نگاه کنید.)




(الف)




(ب)

**شکل ۹-۲۴** (الف) موشکی در حال شتاب به جرم $M$ در زمان $t$ به گونه‌ای که از چارچوب مرجع لخت دیده می‌شود. (ب) مشابه حالت (الف) اما در زمان $t+dt$، محصولهای خروجی آزاد شده در طی بازهٔ زمانی $dt$ نشان داده شده‌اند

شکل ۹-۲۴ ب نشان می‌دهد که پس از گذشت بازهٔ زمانی $dt$ وضع چگونه است. در این لحظه موشک دارای سرعت $v+dv$ و جرم $M+dM$ است که در آن تغییر جرم $dM$ یک کمیت *منفی* است. محصولهای خارج شده از موشک در بازهٔ زمانی $dt$ دارای جرم $-dM$ و دارای سرعت $U$ نسبت به چارچوب مرجع لخت هستند.

دستگاه ما شامل موشک و محصولهای خروجی آزاد شده در بازهٔ زمانی $dt$ است. دستگاه بسته و منزوی است، بنابراین، اندازه حرکت خطی دستگاه باید در طی زمان $dt$ پایسته باشد، یعنی

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad (۸۲\text{-}۹)$$

که زیرنویسهای $i$ و $f$ بیانگر مقدارها در آغاز و در پایان بازهٔ زمانی $dt$ هستند. می‌توانیم معادلهٔ ۹-۸۲ را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$Mv = -dMU + (M+dM)(v+dv)$$

که در آن اولین جملهٔ سمت راست اندازه حرکت خطی محصولهای خروجی آزاد شده در بازهٔ زمانی $dt$ و دومین جمله، اندازه حرکت خطی موشک در پایان بازهٔ زمانی $dt$ است.

می‌توانیم معادلهٔ ۹-۸۳ را با به کار بردن تندی نسبی $v_{\text{rel}}$ بین موشک و محصولهای خروجی ساده‌تر کنیم که سرعتها را نسبت به چارچوب با عبارت زیر به هم ربط می‌دهد

(سرعت محصولها نسبت به چارچوب) + (سرعت موشک نسبت به محصولها) = (سرعت موشک نسبت به چارچوب)

به صورت نمادی، این معادله به این صورت است

$$(v+dv) = v_{\text{rel}} + U$$

یا

$$U = v + dv - v_{\text{rel}} \qquad (۸۴\text{-}۹)$$

با قراردادن این نتیجه برای $U$ در معادلهٔ ۹-۳۸ و با کمی عملیات جبری داریم

$$-dM\, v_{\text{rel}} = M\, dv \qquad (۸۵\text{-}۹)$$

تقسیم طرفین بر $dt$ به دست می‌دهد

$$-\frac{dM}{dt} v_{\text{rel}} = M\frac{dv}{dt} \qquad (۸۶\text{-}۹)$$

به جای $dM/dt$ (آهنگی که موشک جرمش را از دست می‌دهد) $-R$ را قرار می‌دهیم که $R$ (مثبت) آهنگ مصرف سوخت است و تشخیص می‌دهیم که $dv/dt$ شتاب موشک است. با این تغییرات معادلهٔ ۹-۸۶ به صورت زیر درمی‌آید

$$Rv_{\text{rel}} = Ma \quad \text{(اولین معادلهٔ موشک)} \qquad (۸۷\text{-}۹)$$

معادلهٔ ۹-۸۷ در هر لحظه برقرار است به شرطی که جرم $M$، آهنگ مصرف سوخت $R$ و شتاب $a$ در آن لحظه محاسبه شوند.

سمت چپ معادلهٔ ۹-۸۷ دارای ابعاد نیرو است ($\text{kg.m/s}^2 = \text{N}$) و فقط به مشخصه‌های طراحی موتور موشک بستگی دارد. یعنی، آهنگ $R$ که با آن آهنگ، جرم سوخت مصرف می‌شود و تندی $v_{\text{rel}}$ که آن جرم نسبت به موشک بیرون داده می‌شود. جملهٔ $Rv_{\text{rel}}$ را **نیروی پیشران** موتور موشک می‌نامیم و آن را با $T$ نشان می‌دهیم. اگر معادلهٔ ۹-۸۷ را به صورت $T=Ma$ بنویسیم، که در آن $a$ شتاب موشک در زمانی است که جرم آن $M$ است، قانون دوم نیوتون به روشنی نمایان می‌شود.

### یافتن سرعت

وقتی موشک سوخت خود را مصرف می‌کند، سرعت چگونه تغییر می‌کند؟ از معادلهٔ ۹-۸۵ داریم

$$dv = -v_{\text{rel}}\frac{dM}{M}$$

انتگرالگیری به دست می‌دهد

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{\text{rel}}\int_{M_i}^{M_f}\frac{dM}{M}$$

که در آن $M_i$ جرم اولیهٔ موشک و $M_f$ جرم نهایی آن است. با محاسبهٔ انتگرال خواهیم داشت

$$v_f - v_i = v_{\text{rel}}\ln\frac{M_i}{M_f} \quad \text{(معادلهٔ دوم موشک)} \qquad (۸۸\text{-}۹)$$

این معادله افزایش تندی موشک را در حین تغییر جرم از $M_i$ به $M_f$ به دست می‌دهد. (معنی نماد «ln» در معادلهٔ ۹-۸۸ *لگاریتم طبیعی* است.) در اینجا مزیت موشکهای چند مرحله‌ای را می‌بینیم، که در آنها $M_f$ با خالی شدن و دورانداختن مخزنهای سوخت در چند مرحله کاهش می‌یابد. یک موشک آرمانی آن است که وقتی به مقصد می‌رسد همهٔ سوخت مصرف شده و فقط خود موشک باقی مانده باشد.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۱۲**

موشکی که جرم اولیه‌اش $M_i$ برابر ۸۵۰kg است سوخت را با آهنگ $R = ۲/۳\text{kg/s}$ مصرف می‌کند. تندی $v_{\text{rel}}$ گاز خروجی نسبت به موتور موشک برابر ۲۸۰۰m/s است. نیروی پیشرانی که موتور موشک ایجاد می‌کند چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** نیروی پیشران $T$ برابر است با حاصلضرب آهنگ مصرف سوخت $R$ در تندی نسبی $v_{\text{rel}}$ خروج گاز مصرفی که با معادلهٔ ۹-۸۷ داده شده است.

***محاسبه:*** در اینجا داریم

$$T = Rv_{\text{rel}} = (۲/۳\text{kg/s})(۲۸۰۰\text{m/s})$$
$$= ۶۴۴۰\text{N} \simeq ۶۴۰۰\text{N} \quad \text{(پاسخ)}$$

(ب) شتاب اولیهٔ موشک چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** با رابطهٔ $T = Ma$، که $M$ جرم موشک است می‌توانیم نیروی پیشران $T$ موشک را به بزرگی شتاب حاصل شده مربوط کنیم. البته وقتی سوخت مصرف شود، $M$ کاهش و

$a$ افزایش می‌یابد. چون در اینجا مقدار شتاب اولیهٔ $a$ را می‌خواهیم، پس باید مقدار جرم اولیهٔ $M_i$ را به کار بریم.
*محاسبه:* داریم

$$a = \frac{T}{M_i} = \frac{۶۴۴۰\,\mathrm{N}}{۸۵۰\,\mathrm{kg}} = ۷/۶\,\mathrm{m/s^2} \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای پرتاب از سطح زمین، شتاب اولیهٔ موشک باید بزرگتر از $g = ۹/۸\,\mathrm{m/s^2}$ باشد. به بیان دیگر، نیروی پیشران $T$ موتور موشک باید بر نیروی گرانش اولیهٔ وارد بر موشک، غلبه کند که در اینجا این نیرو دارای بزرگی $M_i g$ است که $(۸۵۰\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^2})$ یا $۸۳۳۰\,\mathrm{N}$ را به دست می‌دهد. چون شتاب یا نیروی پیشران مورد لزوم حاصل نشده است $(T = ۶۴۰۰\,\mathrm{N})$، این موشک نمی‌تواند به تنهایی از سطح زمین پرتاب شود و موشک پر قدرت دیگری مورد نیاز است.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**مرکز جرم** **مرکز جرم** دستگاهی شامل $M$ ذره بنابر تعریف نقطه‌ای است که مختصات آن به وسیلهٔ این رابطه‌ها داده می‌شود

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad , \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad (۹\text{-}۵)$$

$$z_{\text{com}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

یا

$$\vec{r}_{\text{com}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad (۹\text{-}۸)$$

که در آن $M$ جرم کل دستگاه است.

**قانون دوم نیوتون برای دستگاه ذره‌ها** حرکت مرکز جرم یک دستگاه ذره‌ها از **قانون دوم نیوتون برای دستگاه ذره‌ها** پیروی می‌کند که عبارت است از

$$\vec{F}_{\text{net}} = M\vec{a}_{\text{com}} \qquad (۹\text{-}۱۴)$$

در اینجا $\vec{F}_{\text{net}}$ نیروی خالص همهٔ نیروهای خارجی وارد شده به دستگاه، $M$ جرم کل دستگاه و $\vec{a}_{\text{com}}$ شتاب مرکز جرم دستگاه است.

**اندازه حرکت خطی و قانون دوم نیوتون** برای یک ذرهٔ تنها، کمیت برداری $\vec{p}$ که آن را اندازه حرکت خطی می‌نامیم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (۹\text{-}۲۲)$$

قانون دوم نیوتون را برحسب اندازه حرکت خطی می‌توان چنین نوشت

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (۹\text{-}۲۳)$$

برای دستگاهی از ذره‌ها این رابطه‌ها به صورت زیر درمی‌آیند

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{com}} \quad \text{و} \quad \vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (۹\text{-}۲۵،\ ۹\text{-}۲۷)$$

**برخورد و ضربه** به کار بردن قانون دوم نیوتون در شکل اندازه حرکت برای جسم ذره مانند وارد در برخورد، به **قضیهٔ ضربه- اندازه حرکت خطی** می‌انجامد

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \vec{J} \qquad (۹\text{-}۳۱،\ ۹\text{-}۳۲)$$

که در آن $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$ تغییر در اندازه حرکت خطی جسم و $\vec{J}$ **ضربهٔ** ناشی از نیروی $\vec{F}(t)$ است که توسط جسم دیگر وارد در برخورد، بر جسم اثر می‌کند

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \qquad (۹\text{-}۳۰)$$

اگر $F_{\text{avg}}$ مقدار میانگین $\vec{F}(t)$ در حین برخورد و $\Delta t$ مدت برخورد باشد، آن وقت برای حرکت یک بعدی داریم

$$J = F_{\text{avg}}\Delta t \qquad (۹\text{-}۳۵)$$

وقتی جریان پیوسته‌ای از جسمها، هر کدام به جرم $m$ و تندی $v$ به یک جسم که در مکانی ثابت است برخورد کنند، نیروی متوسط وارد شده به جسم ثابت، برابر است با

$$F_{\text{avg}} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m\Delta v \qquad (۹\text{-}۳۷)$$

که در آن $n/\Delta t$ آهنگی است که جسمها با جسم ثابت برخورد می‌کنند و $\Delta v$ تغییر در سرعت هر جسم برخورد کننده است. این نیروی متوسط را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$F_{\text{avg}} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v \qquad (۹\text{-}۴۰)$$

که در آن $\Delta m/\Delta t$ آهنگی است که جسم با جسم ثابت برخورد می‌کند. در معادله‌های ۹-۳۷ و ۹-۴۰، اگر جسمها بر اثر برخورد متوقف شوند $\Delta v = -v$ و اگر آنها مستقیماً به سمت عقب و بدون تغییر در تندی واجهش کنند $\Delta v = -۲v$ است.

**پایستگی اندازه حرکت خطی** اگر دستگاه منزوی باشد یعنی هیچ نیروی خارجی خالصی بر دستگاه اثر نکند، اندازه حرکت خطی $\vec{P}$ دستگاه ثابت باقی می‌ماند

$$\vec{P} = \text{ثابت} \qquad \text{(دستگاه بسته و منزوی)} \qquad (۹\text{-}۴۲)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad \text{(دستگاه بسته و منزوی)} \qquad (۹\text{-}۴۳)$$

که در آن زیرنویسها بیانگر مقدارهای $\vec{P}$ در یک زمان اولیه و در یک زمان پس از آن هستند. معادله‌های ۹-۴۲ و ۹-۴۳ بیانهای معادلی از **قانون پایستگی اندازه حرکت خطی** هستند.

**برخورد ناکشسان یک بعدی** *در برخورد ناکشسان* دو جسم انرژی جنبشی دستگاه دو جسم پایسته نیست. اگر دستگاه بسته و منزوی باشد، اندازه حرکت خطی کل دستگاه *باید* پایسته باشد، که می‌توانیم آن را به صورت رابطهٔ برداری زیر بنویسیم

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \qquad (۹\text{-}۵۰)$$

که در آن زیرنویسهای $i$ و $f$ به ترتیب بیانگر مقدارهای درست پیش از برخورد و درست پس از برخورد هستند.

اگر حرکت جسمها در امتداد یک محور تنها باشد، برخورد یک بعدی است و می‌توانیم معادلهٔ ۹-۵۰ را بر حسب مؤلفه‌های سرعت در امتداد آن محور بنویسیم

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \qquad (۹-۵۱)$$

اگر جسمها به هم بچسبند، برخورد **کاملاً ناکشسان** است و جسمها دارای سرعت نهایی یکسان $v$ هستند (چون آنها به هم چسبیده‌اند).

**حرکت مرکز جرم** مرکز جرم یک دستگاه بسته و منزوی از دو جسم برخوردکننده از برخورد تأثیر نمی‌پذیرد. به خصوص، سرعت $\vec{v}_{com}$ مرکز جرم در برخورد تغییر نمی‌کند.

**برخورد کشسان در یک بعد** برخورد *کشسان* نوع خاصی از برخورد است که در آن انرژی جنبشی دستگاه جسمهایی که برخورد می‌کنند پایسته است. اگر دستگاه بسته و منزوی باشد، اندازه حرکت خطی آن نیز پایسته است. برای برخورد یک بعدی که در آن جسم ۲ هدف و جسم ۱ پرتابهٔ فرودی است، پایستگی انرژی جنبشی و اندازه حرکت خطی این عبارتها را برای سرعتها درست پس از برخورد به دست می‌دهد

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} \qquad (۹-۶۷)$$

و

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} \qquad (۹-۶۸)$$

**برخورد در دو بعد** اگر دو جسم برخورد کنند و حرکت آنها در امتداد یک محور تنها نباشد (برخورد رودررو نیست) برخورد دو بعدی است. اگر دستگاه دو- جسم بسته و منزوی باشد، قانون پایستگی اندازه حرکت خطی برای برخورد برقرار است و می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \qquad (۹-۷۷)$$

در شکل مؤلفه‌ای، قانون دو معادله به دست می‌دهد که برخورد را توصیف می‌کند (برای هر یک از دو بعد یک معادله). اگر برخورد کشسان نیز باشد (حالت خاص) پایستگی انرژی جنبشی در حین برخورد سومین معادله را به دست می‌دهد

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \qquad (۹-۷۸)$$

**دستگاه با جرم متغیر** در نبود نیروهای خارجی، موشک با یک آهنگ لحظه‌ای شتاب می‌گیرد که به وسیلهٔ رابطهٔ زیر داده می‌شود

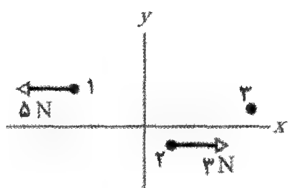
$$Rv_{rel} = Ma \qquad \text{(معادلهٔ اول موشک)} \qquad (۹-۸۷)$$

که در آن $M$ جرم لحظه‌ای موشک (شامل سوخت مصرف نشده)، $R$ آهنگ مصرف سوخت و $v_{rel}$ تندی سوخت نسبت به موشک است. جملهٔ $Rv_{rel}$ نیروی **پیشران** موتور موشک است. برای موشکی با $R$ و $v_{rel}$ ثابت، وقتی که جرم آن از $M_i$ به $M_f$ تغییر می‌کند، تندی آن از $v_i$ به $v_f$ تغییر می‌کند

$$v_f - v_i = v_{rel} \ln\frac{M_i}{M_f} \qquad \text{(معادلهٔ دوم موشک)} \qquad (۹-۸۸)$$

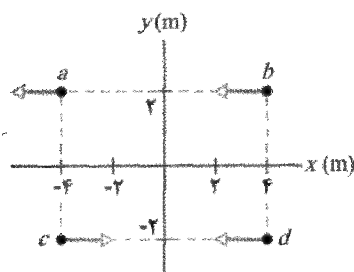
## پرسشها

۱- شکل ۹-۲۵ دید از بالای سه ذره را که نیروهای خارجی به آنها وارد می‌شوند نشان می‌دهد. بزرگی و جهت نیروهایی که به دو تا از ذره‌ها اثر می‌کنند نشان داده شده است. بزرگی و جهت نیروهای وارده به ذرهٔ سوم اگر مرکز جرم دستگاه سه ذره، (الف) ساکن باشد، (ب) با سرعت ثابت به سمت راست حرکت کند و (پ) به سمت راست شتاب بگیرد، چقدر است؟



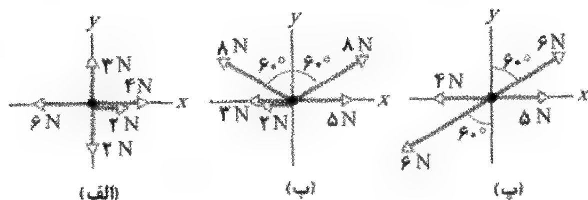

**شکل ۹-۲۵** پرسش ۱

۲- شکل ۹-۲۶ دید از بالای، چهار ذره با جرمهای یکسان را که با سرعتهای ثابت روی یک سطح بدون اصطکاک می‌لغزند نشان می‌دهد. جهت سرعتها مشخص شده‌اند، بزرگی آنها یکسان است. ذره‌ها را دو به دو در نظر بگیرید. کدام جفت از ذره‌ها دستگاهی را تشکیل می‌دهند که مرکز جرم آن (الف) ساکن است، (ب) ساکن است و در مبدأ قرار دارد و (پ) از مبدأ می‌گذرد؟



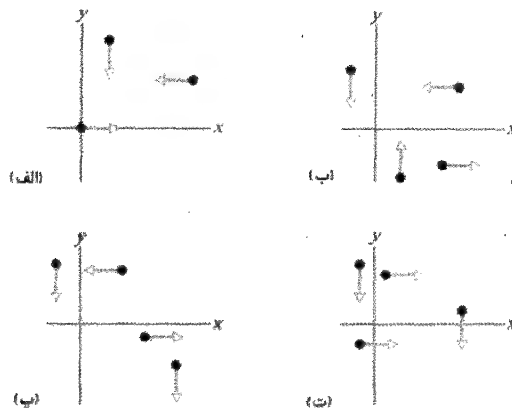

**شکل ۹-۲۶** پرسش ۲

۳- سه نمودار جسم آزاد در شکل ۹-۲۷، با دید از بالا داده شده‌اند. نیروهای افقی روی سه جعبه شکلات وارد می‌شوند و آنها روی یک کف بدون اصطکاک حرکت می‌کنند. آیا برای هر جعبه، اندازه حرکت آن در امتداد محور $x$ و محور $y$ پایسته است؟



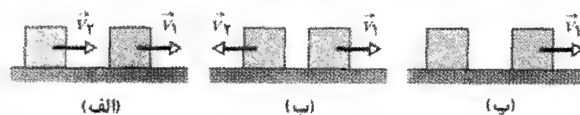

**شکل ۹-۲۷** پرسش ۳

۴- شکل ۹-۲۸ چهار گروه از سه یا چهار ذرهٔ یکسان را نشان می‌دهد که موازی با محور $x$ یا $y$ با تندی یکسان حرکت می‌کنند. گروهها را به ترتیب بزرگی تندی مرکز جرم مرتب کنید.



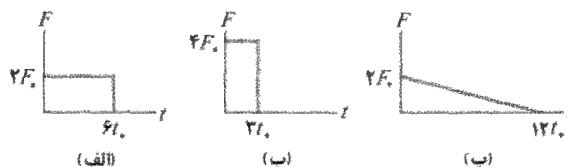

**شکل ۹-۲۸** پرسش ۴

۵- جعبه‌ای مشابه جعبه مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۶ را در نظر بگیرید که در وقتی که با سرعت ثابت مثبتی در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند به دو تکه تقسیم می‌شود. اگر یکی از تکه‌ها به جرم $m_1$ سرعت مثبت $\vec{v}_1$ را به دست آورد، آن وقت تکهٔ دیگر به جرم $m_2$، می‌تواند (الف) سرعت مثبت $\vec{v}_2$ (شکل ۹-۲۹ الف)، (ب) سرعت منفی $\vec{v}_2$ (شکل ۹-۲۹ ب) یا (پ) سرعت صفر (شکل ۹-۲۹ پ) را داشته باشد. این سه نتیجه را برای تکهٔ دوم به ترتیب بزرگی $\vec{v}_1$ مرتب کنید.



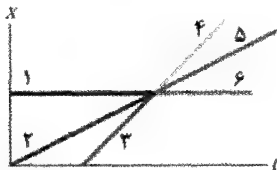

**شکل ۹-۲۹** پرسش ۵

۶- شکل ۹-۳۰ نمودارهای بزرگی نیرو برحسب زمان را برای جسمی که برخورد می‌کند نشان می‌دهد. نمودارها را به ترتیب بزرگی ضربهٔ وارده به جسم مرتب کنید.



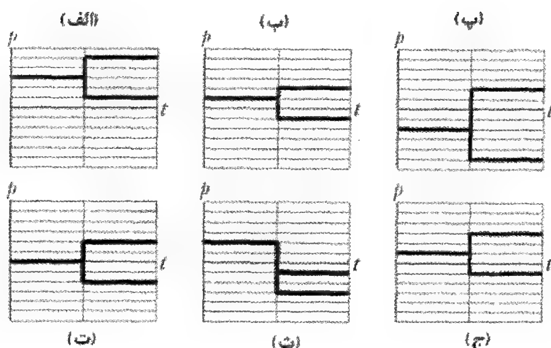

**شکل ۹-۳۰** پرسش ۶

۷- دو جسم به طور یک- بعدی و در امتداد محور $x$ برخورد کشسان می‌کنند. شکل ۹-۳۱ نموداری از تغییرات مکان نسبت به زمان برای آن جسمها و مرکز جرم آنهاست. (الف) آیا در ابتدا هر دو جسم در حرکت بوده‌اند یا یکی از آنها ساکن بوده است؟ کدام قطعه خط به حرکت مرکز جرم، (ب) پیش از برخورد، و (پ) پس از برخورد مربوط است؟ (ت) آیا جرم جسمی که پیش از برخورد سریعتر حرکت می‌کرد، بیشتر است یا کمتر یا مساوی جرم جسم دیگر است؟



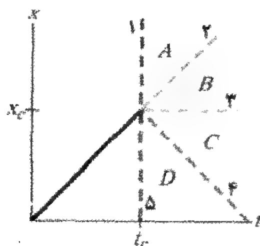

**شکل ۹-۳۱** پرسش ۷

۸- قطعه‌ای روی کف افقی در آغاز یا ساکن است، یا در جهت مثبت محور $x$ یا در جهت منفی آن محور سُر می‌خورد. سپس قطعه منفجر و به دو تکه تقسیم می‌شود که در امتداد محور $x$ سُر می‌خورند. فرض کنید قطعه و دو تکه یک دستگاه بسته و منزوی را تشکیل می‌دهند. شش انتخاب برای نمودار در اندازه حرکتهای قطعه و تکه‌ها در شکل ۹-۳۲ داده شده‌اند که همگی برحسب زمان هستند. معین کنید که کدام انتخابها مربوط به وضعیتهایی هستند که از نظر فیزیکی ناممکن است، شرح دهید چرا؟



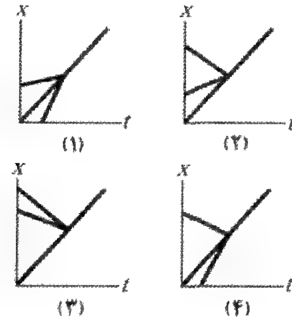

**شکل ۹-۳۲** پرسش ۸

۹- قطعهٔ ۱ با جرم $m_1$ در کف بدون اصطکاکی در امتداد محور $x$ سر می‌خورد و سپس با قطعهٔ ۲ که ساکن است به طور کشسان برخورد می‌کند. شکل ۹-۳۳ نمودار مکان $x$ برحسب زمان $t$ را برای قطعهٔ ۱ تا زمان برخورد در $x_c$ و $t_c$ نشان می‌دهد. در کدام ناحیه که با حرف مشخص شده نمودار امتداد می‌یابد (پس از برخورد) در صورتی که (الف) $m_1 < m_2$ و (ب) $m_1 > m_2$ باشد؟ (پ) اگر $m_1 = m_2$ باشد، نمودار در امتداد کدام خط‌چین شماره‌گذاری شده امتداد می‌یابد؟



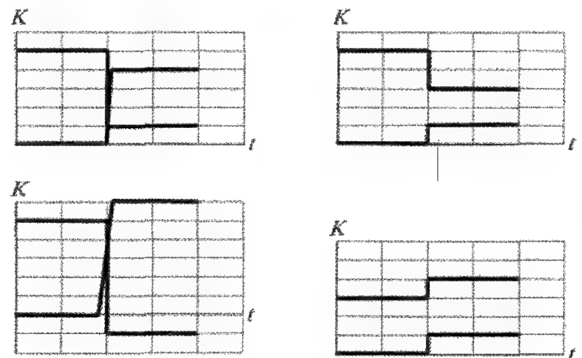

**شکل ۹-۳۳** پرسش ۹

۱۰ـ شکل ۹-۳۴ چهار نمودار از تغییرات مکان نسبت به زمان را برای دو جسم و مرکز جرم آنها نشان می‌دهد. دو جسم که یک دستگاه بسته و منزوی را تشکیل می‌دهند به طور کاملاً ناکشسان در امتداد محور $x$ به طور یک بعدی برخورد می‌کنند. آیا در نمودار ۱ (الف) دو جسم، و (ب) مرکز جرم در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کنند یا منفی آن؟ (پ) کدام نمودارها مربوط به وضعیتی هستند که از نظر فیزیکی ناممکن است؟ شرح دهید.




**شکل ۹-۳۴** پرسش ۱۰

۱۱ـ قطعه‌ای در کف اتاق بدون اصطکاکی به سمت قطعهٔ دیگری با همان جرم که ساکن است سُر می‌خورد. شکل ۹-۳۵ چهار انتخاب را برای نمودار انرژی جنبشی $K$ قطعه‌ها پیش و پس از برخورد نشان می‌دهد. (الف) معین کنید کدام انتخاب از نظر فیزیکی ناممکن است؛ شرح دهید چرا. از انتخابهای ممکن کدامیک (ب) برخورد کشسان و (پ) برخورد ناکشسان را بهتر نشان می‌دهد؟




**شکل ۹-۳۵** پرسش ۱۱

۱۲ـ شکل ۹-۳۶ تصویر لحظه‌ای قطعهٔ ۱ را نشان می‌دهد که قبل از برخورد کشسان با قطعهٔ ساکن ۲ در امتداد محور $x$ روی کف بدون اصطکاکی می‌لغزد. شکل همچنین سه مکان ممکن مرکز جرم (com) دستگاه دو قطعه را در زمان گرفتن تصویر نشان می‌دهد. (نقطهٔ $B$ میان دو مرکز قطعه‌هاست.) آیا قطعهٔ ۱ پس از برخورد ساکن است، یا به سمت جلو یا عقب حرکت می‌کند، در صورتی که com در زمان ضربه در (الف) $A$، (ب) $B$ و (پ) $C$ باشد.




**شکل ۹-۳۶** پرسش ۱۲

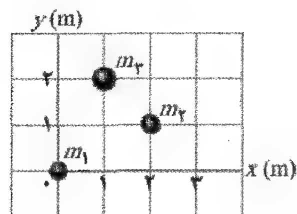
## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
●●● تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

### بخش ۹-۲ مرکز جرم

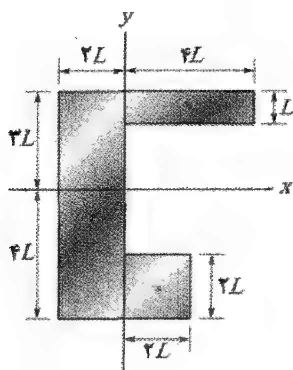
●۱ـ یک ذرهٔ ۲/۰۰kg دارای مختصه‌های $xy$ (۱/۲۰۰m,۰/۵۰۰m−) و یک ذرهٔ ۴/۰۰kg دارای مختصه‌های $xy$ (۰/۶۰۰m,−۰/۷۵۰m) است. هر دو در یک صفحهٔ افقی واقع‌اند. در چه مختصه‌های (الف) $x$ و (ب) $y$ باید یک ذرهٔ ۳/۰۰kg را قرار داد به طوری که مرکز جرم دستگاه سه- ذره دارای مختصه‌های (−۰/۵۰۰m,−۰/۷۰۰m) باشد؟

●۲ـ شکل ۹-۳۷ یک دستگاه سه ذره‌ای با جرمهای $m_1 = ۳/۰\,kg$، $m_2 = ۴/۰\,kg$ و $m_3 = ۸\,kg$ را نشان می‌دهد. مقیاس روی محورها با $x_s = ۲/۰m$ و $y_s = ۲/۰x$ مشخص شده است. (الف) مختصهٔ $x$ و (ب) مختصهٔ $y$ مرکز جرم دستگاه چقدرند؟ (پ) اگر $m_3$ به تدریج افزایش یابد آیا مرکز جرم دستگاه به سمت آن یا به دور از آن ذره جابه‌جا می‌شود یا ساکن باقی می‌ماند؟



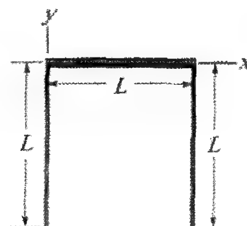

**شکل ۹-۳۷** مسئلهٔ ۲

●●۳ـ (الف) مختصهٔ $x$ و (ب) مختصهٔ $y$ مرکز جرم برای ورق یکنواخت نشان داده شده در شکل ۹-۳۸ اگر $L = ۵/۰$ باشد، چقدر است؟



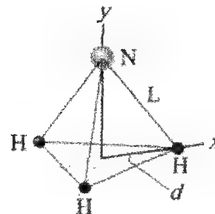

**شکل ۹-۳۸** مسئلهٔ ۳

●●۴ـ در شکل ۹-۳۹ سه میلهٔ یکنواخت باریک هر یک به طول $L = 22\,cm$ تشکیل یک U وارونه را داده‌اند. میله‌های قائم هر یک دارای جرم ۱۴g هستند و میلهٔ افقی ۴۲g جرم دارد. (الف) مختصهٔ $x$ و (ب) مختصهٔ $y$ مرکز جرم دستگاه چقدر است؟



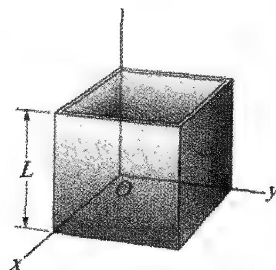

**شکل ۹-۳۹** مسئلهٔ ۴

●●۵ـ در مولکول آمونیاک ($NH_3$) شکل ۹-۴۰، سه اتم هیدروژن (H) مثلث متساوی الاضلاعی را تشکیل می‌دهند که مرکز آن به فاصلهٔ $d = 9/40 \times 10^{-11}\,m$ از هر اتم هیدروژن قرار دارد. اتم نیتروژن (N) در رأس یک هرم است، که سه اتم هیدروژن قاعدهٔ آن را تشکیل می‌دهند. نسبت جرم اتمی نیتروژن به هیدروژن برابر ۱۳/۹ و فاصلهٔ نیتروژن تا هیدروژن $L = 10/14 \times 10^{-11}\,m$ است. مختصهٔ (الف) $x$ و (ب) $y$ مرکز جرم مولکول چقدر است؟ **ILW**



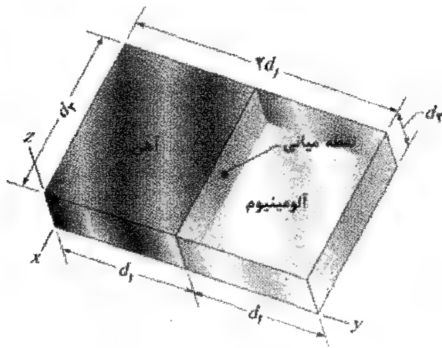

**شکل ۹-۴۰** مسئلهٔ ۵

●●۶ـ شکل ۹-۴۱ جعبهٔ مکعب شکلی را نشان می‌دهد که از ورقه‌ای فلزی با چگالی یکنواخت ساخته شده و ضخامت صفحه قابل چشمپوشی است. وجه بالایی جعبه باز و طول هر یال جعبه $L = 40\,cm$ است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) مختصهٔ $x$، (ب) مختصهٔ $y$ و (پ) مختصهٔ مرکز جرم جعبه.



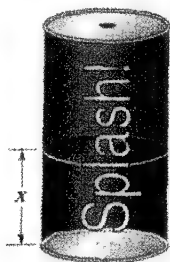

**شکل ۹-۴۱** مسئلهٔ ۶

●●۷ـ شکل ۹-۴۲ اضلاع یک قطعه را با ابعاد $d_1 = 11/0\,cm$، $d_2 = 2/80\,cm$ و $d_3 = 13/0\,cm$ نشان می‌دهد؛ نصف قطعه از آلومینیوم ($2/70\,g/cm^3$ = چگالی) و نصف دیگر آن از آهن ($7/85\,g/cm^3$ = چگالی) ساخته شده است. (الف) مختصهٔ $x$، (ب) مختصهٔ $y$ و (پ) مختصهٔ $z$ مرکز جرم قطعه چقدر است؟




**شکل ۹-۴۲** مسئلهٔ ۷

●●●۸ـ یک قوطی فلزی نوشابه با ترکیب یکنواخت دارای جرم $0/140\,kg$ و ارتفاع $12/0\,cm$ است، (شکل ۹-۴۳). قوطی با ۱/۳۱kg نوشابه پر شده است. سپس در بالا و پایین سوراخهایی ایجاد می‌کنیم (جرم کم شدهٔ فلز قابل چشمپوشی است) تا نوشابه خارج شود. ارتفاع $h$ مرکز جرم قوطی و نوشابهٔ آن (الف) در آغاز و (ب) وقتی همهٔ نوشابه خارج شده باشد چقدر است؟ (پ) در حین خارج شدن نوشابه چه تغییری برای $h$ رخ می‌دهد؟ (ت) اگر $x$ ارتفاع نوشابهٔ باقی مانده در هر لحظهٔ معین باشد، $x$ را هنگامی که مرکز جرم به پایینترین نقطهٔ خود می‌رسد، به دست آورید.




**شکل ۹-۴۳** مسئلهٔ ۸

### بخش ۹-۳ قانون دوم نیوتون برای دستگاه ذره‌ها

●۹ـ جسمی به جرم ($m = 0/50\,kg$) در مبداء دستگاه مختصات $xy$ و جسم دیگری به جرم ($M = 1/5\,kg$) در نقطهٔ $(1/0, 2/0)m$ قرار دارند. در لحظهٔ $t = 0$ نیروی $F_o = (2/0\hat{i} + 3/0\hat{j})N$ به جسم اول و نیروی $F_x = (-3/0\,\hat{i}, -2/0\,\hat{j})N$ به جسم دوم اثر می‌کنند. جابه‌جایی مرکز جرم این دستگاه دو جسم بر حسب بردارهای یکه در $t = 4/0\,s$ نسبت به مکان آن در $t = 0$ چقدر است؟

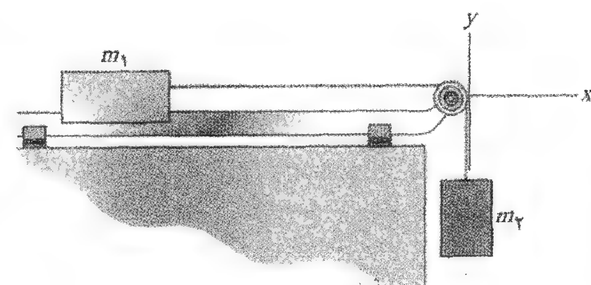
●۱۰ـ دو اسکیت باز، یکی به جرم ۶۵kg و دیگری به جرم ۴۰kg، روی سطح یخ زده ایستاده و دو سر تیری به طول ۱۰m با جرم ناچیز را گرفته‌اند. دو اسکیت باز از دو انتهای تیر شروع به کشیدن خودشان در امتداد تیر می‌کنند تا وقتی که به

هم برسند. اسکیت باز با جرم $40\,kg$ چه فاصله‌ای را پیموده است؟

●۱۱- سنگی در زمان $t=0$ رها می‌شود. سنگ دیگری با جرم دو برابر اولی، از همان نقطه در $t=100\,ms$ رها می‌شود. (الف) مرکز جرم دو سنگ در $t=300\,ms$ در چه فاصله‌ای از نقطهٔ رهاشدن قرار دارد؟ (هیچ کدام از سنگها هنوز به زمین نرسیده‌اند). (ب) در این لحظه مرکز جرم دستگاه دو ذره‌ای با چه تندی حرکت می‌کند؟

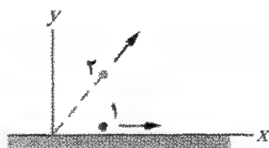
●۱۲- یک اتومبیل $1000\,kg$ پشت چراغ قرمز راهنمایی ایستاده است. در لحظه‌ای که چراغ سبز می‌شود، اتومبیل با شتاب ثابت $4/0\,m/s^2$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه یک کامیون $2000\,kg$ که با تندی ثابت $8/0\,m/s$ در حرکت است از اتومبیل پیش می‌افتد. (الف) در لحظهٔ $t=3/0\,s$ فاصلهٔ مرکز جرم دستگاه اتومبیل-کامیون از چراغ راهنمایی چقدر است؟ (ب) در آن زمان تندی مرکز جرم اتومبیل-کامیون چقدر است؟

●●۱۳- شکل ۹-۴۴ آرایشی با یک ریل هوا را نشان می‌دهد که در آن ارابه‌ای به وسیلهٔ ریسمان به قطعهٔ آویزان متصل شده است. ارابه دارای جرم $m_1=0/600\,kg$ و مرکز جرم آن در آغاز در مختصات $xy$ $(-0/500\,m, 0\,m)$ واقع است؛ قطعه دارای جرم $m_2=0/400\,kg$ و مرکز جرم آن در آغاز در مختصات $xy$ $(0, 0/100\,m)$ قرار دارد. جرم ریسمان و قرقره قابل چشمپوشی است. ارابه را از حالت سکون رها می‌کنیم. ارابه و قطعه حرکت می‌کنند تا وقتی که ارابه به قرقره برخورد کند. اصطکاک بین ارابه و ریل هوا و بین قرقره و محورش قابل چشمپوشی است. (الف) شتاب مرکز جرم دستگاه ارابه-قطعه برحسب بردارهای یکه چیست؟ (ب) سرعت مرکز جرم برحسب تابعی از زمان چگونه است؟ (پ) مسیری را که توسط مرکز جرم طی می‌شود رسم کنید. (پ) اگر مسیر منحنی باشد، آیا برآمدگیها به سمت بالا و به طرف راست است یا به سمت پایین و به طرف چپ و اگر مسیر خط راست باشد، زاویهٔ آن را با محور $x$ به دست آورید.



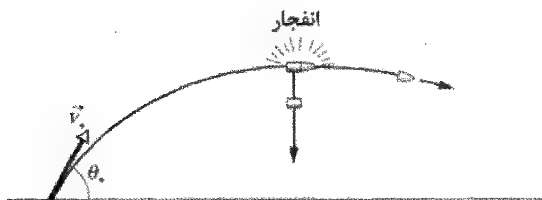
**شکل ۹-۴۴** مسئلهٔ ۱۳

●●۱۴- در شکل ۹-۴۵ دو ذره در زمان $t=0$ از مبداء دستگاه مختصات پرتاب می‌شوند. ذرهٔ ۱ با جرم $m_1=5/00\,g$ مستقیماً در امتداد محور $x$ شلیک می‌شود (روی یک کف بدون اصطکاک)، و با تندی ثابت $10/0\,m/s$ حرکت می‌کند. ذرهٔ ۲ با جرم $m_2=3/00\,g$ با سرعتی به بزرگی $20/0\,m/s$ با زاویه‌ای به سمت بالا شلیک می‌شود به طوری که همیشه در حین پرواز مستقیماً بالای ذرهٔ ۱ قرار دارد. (الف) مرکز جرم دستگاه دو-ذره تا چه ارتفاع بیشینهٔ $H_{max}$ بالا می‌رود؟ وقتی مرکز جرم به $H_{max}$ می‌رسد، بر حسب بردارهای یکه، (ب) سرعت و (پ) شتاب مرکز جرم چیست؟



**شکل ۹-۴۵** مسئلهٔ ۱۴

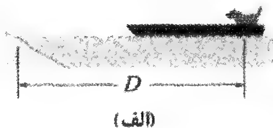
●●۱۵- گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_0$ برابر $20\,m/s$ با زاویهٔ $\theta_0=60°$ نسبت به افق شلیک می‌شود. در بالای مسیر گلوله منفجر و به دو تکه با جرمهای مساوی تقسیم می‌شود (شکل ۹-۴۶). یک تکه که تندی آن درست پس از انفجار صفر است به طور قائم سقوط می‌کند. تکهٔ دیگر در چه فاصله‌ای از توپ به زمین فرود می‌آید، با فرض اینکه زمین با تفنگ هم سطح است و از نیروی کششی هوا می‌توان چشمپوشی کرد. SSM



**شکل ۹-۴۶** مسئلهٔ ۱۵

●●●۱۶- شخصی به جرم $80\,kg$ با شخص دیگری که سبکتر است با یک قایق پارویی به جرم $30\,kg$ در دریاچه‌ای به قایقرانی مشغول‌اند. وقتی قایق در آب آرام ساکن است، آنها صندلیهای خود را که $3/0\,m$ فاصله دارند و نسبت به مرکز قایق تقارن دارند عوض می‌کنند. شخص سنگینتر متوجه می‌شود که در حین عوض کردن جا قایق نسبت به کندهٔ درختی که داخل آب است به اندازهٔ $40\,cm$ به طور افقی حرکت می‌کند و از آنجا جرم شخص دیگر را که به او گفته نشده است محاسبه می‌کند، این جرم چقدر است؟

●●●۱۷- در شکل ۹-۴۷ الف، سگی به جرم $4/5\,kg$ روی قایق $18\,kg$ ایستاده است و در فاصلهٔ $D=6/1\,m$ از ساحل قرار دارد. سگ $2/4\,m$ روی قایق به سمت ساحل راه می‌رود و سپس می‌ایستد. فرض کنید بین آب و قایق اصطکاک وجود ندارد. سگ در این لحظه در چه فاصله‌ای از ساحل قرار دارد؟ (راهنمایی: به شکل ۹-۴۷ ب نگاه کنید. سگ به سمت چپ حرکت می‌کند؛ قایق به سمت راست می‌رود؛ آیا مرکز جرم سگ + قایق حرکت خواهد کرد؟)





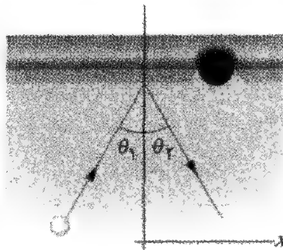

شکل ۹-۴۷ مسئلهٔ ۱۷

## بخش ۹-۵ اندازه حرکت خطی دستگاه ذره‌ها

•۱۸- توپی به جرم $0/70\,kg$ که به طور افقی حرکت می‌کند در هنگام برخورد با یک دیوار عمودی دارای تندی $5/0\,m/s$ است. توپ با تندی $2/0\,m/s$ به عقب برمی‌گردد. بزرگی تغییر اندازه حرکت خطی توپ چقدر است؟

•۱۹- کامیونی به جرم $2100\,kg$ که با تندی $41\,km/h$ به سمت شمال در حال حرکت است، به سمت شرق می‌پیچد و با تندی $51\,km/h$ شتاب می‌گیرد. (الف) تغییر در انرژی جنبشی کامیون چقدر است؟ (ب) بزرگی و جهت تغییر در اندازه حرکت خطی کامیون چقدر است؟ ILW

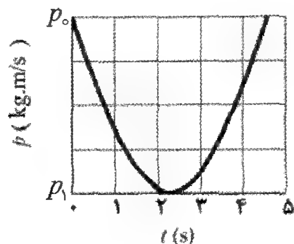
••۲۰- شکل ۹-۴۸ دید از بالای مسیر طی شده به وسیلهٔ یک گوی بیلیارد به جرم $0/165\,kg$ را نشان می‌دهد که پس از برخورد به لبهٔ میز به عقب می‌جهد. تندی اولیهٔ گوی $2/00\,m/s$ و زاویهٔ $\theta_1$ برابر $30°$ است. به عقب جهیدن مؤلفهٔ $y$ را بر عکس می‌کند اما مؤلفهٔ $x$ تغییر نمی‌کند. (الف) زاویهٔ $\theta_2$، (ب) تغییر در اندازه حرکت خطی گوی برحسب نمادگذاری بردار یکه چگونه است؟ (این واقعیت که گوی می‌غلتد در مسئله منظور نشده است.)




شکل ۹-۴۸ مسئلهٔ ۲۰

••۲۱- یک توپ بیسبال به جرم $0/30\,kg$ درست پیش از برخورد با چوب بیسبال، با زاویهٔ $35°$ زیر خط افق دارای سرعت $15\,m/s$ است. بزرگی تغییر اندازه حرکت توپ در حین برخورد چقدر است، در صورتی که توپ، چوب بیسبال را با سرعت (الف) $20\,m/s$، قائم به سمت پایین، و $20\,m/s$، افقی و به سمت عقب به سمت زنندهٔ توپ، ترک کند؟

••۲۲- در زمان $t=0$، توپی به سطح زمین برخورد می‌کند و به سطحی بالای زمین می‌رود. شکل ۹-۴۹ بزرگی $p$ اندازه حرکت توپ را برحسب $t$ در حین پرواز به دست می‌دهد $(p_1 = 4/0\,kg\cdot m/s, p_0 = 6/0\,kg\cdot m/s)$. با چه زاویهٔ اولیه‌ای توپ پرتاب شده است؟




شکل ۹-۴۹ مسئلهٔ ۲۲

## بخش ۹-۶ برخورد و ضربه

•۲۳- نیرویی در جهت منفی محور $x$ در مدت $27\,ms$ به توپی به جرم $0/40\,kg$ که در آغاز با تندی $14\,m/s$ در جهت مثبت محور حرکت می‌کند، وارد می‌شود. بزرگی نیرو تغییر می‌کند، و ضربه دارای بزرگی $32/4\,N\cdot s$ است. (الف) تندی و (ب) جهت حرکت توپ درست پس از واردشدن نیرو، چیست؟ (پ) بزرگی متوسط نیرو و (ت) جهت ضربه روی توپ را معین کنید. SSM

•۲۴- یک شوخی خطرناک این است که وقتی شخصی می‌خواهد روی صندلی بنشیند صندلی را از زیر او بکشند و او محکم به روی کف فرود آید. فرض کنید شخصی با جرم $70\,kg$ به فاصلهٔ $0/50\,m$ سقوط کند و برخورد او با کف به مدت $0/082\,s$ طول بکشد. بزرگی (الف) ضربه و (ب) نیروی میانگینی که در طی برخورد از طرف کف به شخص وارد می‌شود چقدر است؟

•۲۵- هنری لاموته تا هفتاد سالگی تماشاچیان را با پرش از ارتفاع $12\,m$ به داخل آب با عمق $30\,cm$ که با شکم به آب برمی‌خورد هیجان زده می‌کرد، (شکل ۹-۵۰). فرض کنید او درست وقتی که به ته آب می‌رسد متوقف می‌شود. جرم او را حساب کنید و بزرگی ضربه‌ای را که از طرف آب به او وارد می‌شود به دست آورید.



شکل ۹-۵۰ مسئلهٔ ۲۵ پرش با شکم به داخل $30\,cm$ از آب.

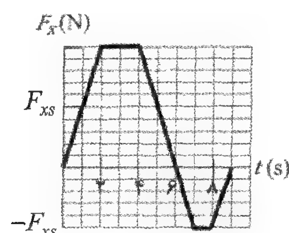
•۲۶- در سال ۱۹۵۵/۱۳۳۴، چتربازی، از ارتفاع ۳۷۰m از هواپیما می‌پرد و بعد چون نمی‌تواند چتر خود را باز کند به زمینی که اتفاقاً پوشیده از برف است برمی‌خورد، و فقط کمی جراحت برمی‌دارد. فرض کنید که تندی او موقع برخورد ۵۶m/s (سرعت حد)، جرمش (با وسایل) ۸۵kg و نیرویی که توسط برف به او وارد شده، در حد زنده ماندن یعنی $۱/۲\times۱۰^{۵}$ بوده است. (الف) کمترین ضخامت برف باید چقدر باشد تا او با ایمنی متوقف شود؟ (ب) بزرگی ضربه‌ای که از برف به او وارد می‌شود چقدر است؟

•۲۷- توپی به جرم ۱/۲kg به طور قائم به روی کف اتاقی رها می‌شود و با تندی ۲۲m/s به آن برخورد می‌کند. توپ با تندی اولیهٔ ۱۰m/s به سمت بالا برمی‌گردد. (الف) در حین این تماس چه ضربه‌ای به توپ وارد شده است؟ (ب) اگر توپ به مدت ۰/۲۰s با کف در تماس باشد، نیروی میانگینی که به کف اتاق وارد می‌کند چقدر است؟

•۲۸- در یک بازی ورزشی دست شما با تندی ۱۳m/s روی هدفی فرود می‌آید و در طی زمان برخورد ۵/۰ms متوقف می‌شود. فرض کنید در طی برخورد، دست مستقل از بازو و دارای جرم ۰/۷۰ kg است. بزرگی (الف) ضربه و (ب) نیروی میانگینی که از طرف هدف به دست وارد می‌شود چقدر است؟

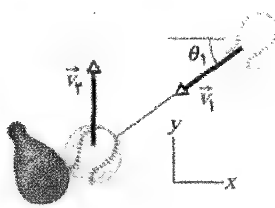
•۲۹- مشهور است که گلوله‌ها و دیگر پرتابه‌ها که به طرف سینهٔ قهرمان افسانه‌ای موسوم به سوپرمن شلیک شوند به سادگی از سینه او وامی‌جهند. فرض کنید که سارقی به سینهٔ این سوپرمن گلوله‌هایی به جرم ۳g با آهنگ min / گلوله ۱۰۰، که تندی هر گلوله ۵۰۰m/s است، شلیک می‌کند. همچنین فرض کنید گلوله‌ها بدون تغییر در تندی آنها مستقیم به عقب برمی‌گردند. نیروی میانگین وارد شده توسط جریان گلوله‌ها به سینهٔ سوپرمن چقدر است؟

••۳۰- یک اتومبیل اسباب بازی به جرم ۵/۰ kg می‌تواند در امتداد محور $x$ حرکت کند. شکل ۹-۵۱، $F_x$ نیروی وارد بر اتومبیل را نشان می‌دهد که از حالت سکون در $t=۰$ شروع می‌شود. مقیاس محور $F_x$ با $F_{xs}=۵/۰\,\text{N}$ مشخص شده است. در نماد بردار- یکه، $\vec{p}$ در (الف) $t=۴/۰\,\text{s}$ و (ب) $t=۷/۰\,\text{s}$ چقدر است؟ (پ) در $t=۹/۰\,\text{s}$ ، $\vec{v}$ چقدر است؟



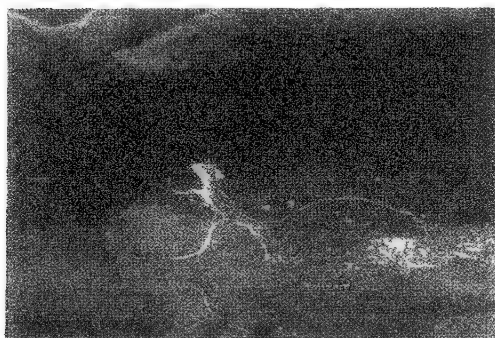
شکل ۹-۵۱ مسئلهٔ ۳۰

••۳۱- شکل ۹-۵۲ یک توپ بیسبال به جرم ۰/۳۰۰kg را درست پیش و پس از برخورد با چوب بیسبال نشان می‌دهد. درست پیش از برخورد توپ دارای سرعت $\vec{v}_1$ به بزرگی ۱۲/۰m/s و زاویهٔ $\theta_1=۳۰°$ است. درست پس از برخورد، توپ مستقیماً به سمت بالا با سرعت $\vec{v}_2$ به بزرگی ۱۰/۰ m/s حرکت می‌کند. مدت برخورد ۲/۰۰ms است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور $x$) ضربهٔ وارد به توپ از طرف چوب بیسبال چقدر است؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت نیروی متوسط وارد به توپ از طرف چوب بیسبال چیست؟



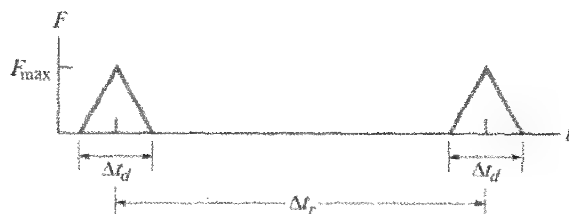
شکل ۹-۵۲ مسئلهٔ ۳۱

••۳۲- نوعی مارمولک می‌تواند روی سطح آب بدود (شکل ۹-۵۳). با هر قدم، مارمولک ابتدا پایش را به آب می‌کوبد و سپس آن را به پایین و داخل آب فشار می‌دهد، این کار را به قدر کافی سریع انجام می‌دهد تا حفره‌ای از هوا در نوک پایش ایجاد شود. مارمولک برای آنکه بتواند در مقابله با نیروی مقاومت آب پایش را بالا بکشد تا گام را کامل کند، آن را پیش از پرشدن آب در حفرهٔ هوا بلند می‌کند. برای آنکه مارمولک فرو نرود باید در حین کوبیدن پا، فشاردادن پا به طرف پایین و بلند کردن آن، ضربهٔ رو به بالای وارد بر مارمولک با ضربهٔ رو به پایین بر اثر نیروی گرانش سازگار باشند. فرض کنید جرم مارمولک ۹۰/۰ g، جرم هر پا ۳/۰g، تندی پا موقع کوبیدن به آب ۱/۵m/s و مدت زمان هر قدم تنها ۰/۶۰۰s باشد. (الف) بزرگی ضربهٔ وارد بر مارمولک موقع کوبیدن پا چقدر است؟ (فرض کنید این ضربه مستقیماً به سمت بالا است.) (ب) در مدت زمان ۰/۶۰۰s برای هر قدم، ضربهٔ رو به پایین وارد بر مارمولک از طرف نیروی گرانشی چقدر است؟ (پ) کدام عمل، کوبیدن پا یا فشار دادن آن، تکیه گاه اصلی مارمولک را ایجاد می‌کند یا آنها تقریباً نقش یکسانی دارند؟


شکل ۹-۵۳ مسئلهٔ ۳۲ مارمولکی که روی سطح آب می‌دود.

**●●۳۳**- *پرش به بالا قبل از برخورد آسان‌بر به ته مسیر.* پس از پاره شدن کابل و کار نکردن دستگاه ایمنی، اتاقک آسان‌بر فاصلهٔ ۳۶m را به صورت سقوط آزاد پایین می‌آید. در طی برخورد در پایین، یک مسافر ۹۰kg در ۵/۰ms متوقف می‌شود (فرض کنید مسافر و اتاقک هیچ‌کدام واجهش ندارند). بزرگی (الف) ضربه و (ب) نیروی میانگینی که در طی برخورد از طرف آسان‌بر بر مسافر وارد می‌شود چقدر است؟ اگر مسافر درست قبل از برخورد آسان‌بر به ته مسیر در اتاقک آسان‌بر با تندی میانگین ۷/۰m/s به سمت بالا پرش کند، بزرگی (پ) ضربه و (ت) نیروی میانگین وارد به مسافر (فرض کنید توقف در همان مدت رخ می‌دهد) چقدر است؟

**●●۳۴**- *دو نیروی میانگین.* جریان پیوسته‌ای از گلوله‌های برف هر یک به جرم ۰/۲۵۰kg با تندی ۴/۰۰m/s به طور عمود به سمت دیوار پرتاب می‌شوند. شکل ۹-۵۴ بزرگی $F$ نیروی وارد بر دیوار را به صورت تابعی از $t$ برای دو تا از گلوله‌های برفی برخورد کننده، به دست می‌دهد. برخوردها در بازهٔ زمانی $\Delta t_r = ۵۰/۰\,m/s$ تکرار می‌شوند و به مدت $\Delta t_d = ۱۰\,ms$ دوام دارند. مثلثهای متساوی الساقین ایجاد شده روی نمودار با هر برخورد به نیروی بیشینهٔ $F_{max} = ۲۰۰N$ می‌رسند. در حین هر برخورد، بزرگی (الف) برخورد و (ب) میانگین نیروی وارد بر دیوار چقدر است؟ (پ) در حین بازهٔ زمانی چندین برخورد بزرگی میانگین نیروی وارد بر دیوار چقدر است؟



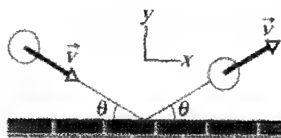

**شکل ۹-۵۴** مسئلهٔ ۳۴

**●●۳۵**- یک بازیکن فوتبال توپ ساکنی به جرم ۰/۴۵kg را شوت می‌کند. پای بازیکن به مدت $۳/۰\times۱۰^{-۳}$ s با توپ در تماس است و نیروی ضربه با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$F(t) = [(۶/۰\times۱۰^{۶})t - (۲/۰\times۱۰^{۹})t^{۳}]N$$

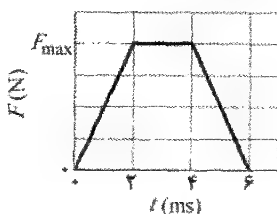
برای $۰ \le t \le ۳/۰\times۱۰^{-۳}$ s، که $t$ برحسب ثانیه است، مطلوب است بزرگی (الف) ضربه روی توپ بر اثر شوت، (ب) میانگین نیروی وارد به توپ از طرف پای بازیکن در مدت زمان تماس، (پ) بیشینهٔ نیرو روی توپ از طرف پای بازیکن در مدت زمان تماس و (ت) سرعت توپ بلافاصله پس از جداشدن آن از پای بازیکن. **SSM**

**●●۳۶**- در دید از بالای شکل ۹-۵۵ گلوله‌ای به جرم ۳۰۰g با تندی $v$ برابر ۶/۰m/s با زاویهٔ $\theta$ برابر °۳۰ به دیواری برخورد می‌کند و سپس با همان تندی و همان زاویه برمی‌گردد. گلوله به مدت ۱۰ms با دیوار در تماس است. به شکل نمادهای بردار- یکه (الف) ضربهٔ وارد به گلوله توسط دیوار و (ب) میانگین نیروی وارد به دیوار توسط گلوله چقدر است؟




**شکل ۹-۵۵** مسئلهٔ ۳۶

**●●۳۷**- شکل ۹-۵۶ نمودار تقریبی تغییرات بزرگی نیرو و برحسب زمان را در حین برخورد یک گلولهٔ ۵۸g به دیوار نشان می‌دهد. سرعت اولیهٔ گلوله ۳۴m/s و عمود بر دیوار است؛ گلوله با تندی یکسان و همچنین عمود بر دیوار به عقب برمی‌گردد. نیروی $F_{max}$، بیشینهٔ نیروی وارد به دیوار در حین برخورد چقدر است؟




**شکل ۹-۵۶** مسئلهٔ ۳۷

**●●۳۸**- قرصی به جرم ۰/۲۵kg در آغاز ساکن است و روی سطح یخی با اصطکاک قابل چشمپوشی قرار دارد. در زمان $t=۰$ یک نیروی افقی شروع به حرکت دادن قرص می‌کند. نیرو با رابطهٔ $\vec{F} = (۱۲/۰ - ۳/۰۰t^{۲})\hat{i}$، که $\vec{F}$ برحسب نیوتون و $t$ برحسب ثانیه است، داده شده و آنقدر اثر می‌کند تا بزرگی آن صفر شود. (الف) بزرگی ضربه روی قرص توسط نیرو بین $t = ۰/۵۰۰s$ و $t = ۱/۲۵s$، چقدر است؟ (ب) تغییر در اندازه حرکت قرص بین $t=۰$ و لحظه‌ای که در آن $F=۰$ می‌شود، چقدر است؟

### بخش ۹-۷ پایستگی اندازه حرکت خطی

**●۳۹**- مردی به جرم ۹۱kg که روی سطح بدون اصطکاکی ایستاده است به سنگی به جرم ۶۸g که جلوی پایش قرار دارد لگد می‌زند و به آن ۰/۴m/s تندی می‌دهد. در نتیجه این عمل، مرد چه سرعتی را کسب می‌کند؟ **SSM**

**●۴۰**- یک سفینهٔ فضایی، وقتی موتور موشک (با جرم $4m$) مصرف شدهٔ آن جدا شده و با تندی ۸۲km/h نسبت به اتاقک فرمان (با جرم $m$) به سمت عقب برود، با تندی ۴۳۰۰km/h نسبت به زمین حرکت می‌کند. تندی اتاقک فرمان پس از جدا شدن از موتور نسبت به زمین چقدر است؟

**●●۴۱**- در المپیک سال ۷۰۸ قبل از میلاد، برخی از ورزشکاران در مسابقهٔ پرش طول در جا از وزنه‌هایی که آنها را *هالتر* می‌نامیدند استفاده می‌کردند (شکل ۹-۵۷). آنها وزنه‌ها را

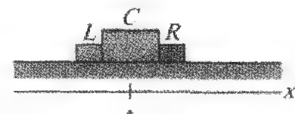
درست قبل از پرش به جلو و بالا آورده و در موقع پرش آنها را به سمت پایین تاب داده و به عقب پرتاب می‌کردند. فرض کنید در زمان حال یک پرش‌کنندهٔ طول به جرم ۷۸kg به همین ترتیب از دو هالتر ۵/۵۰kg استفاده می‌کند و آنها را به طور افقی به سمت عقب در بیشینهٔ ارتفاعش به گونه‌ای پرتاب می‌کند که سرعت افقی آنها نسبت به زمین صفر است. فرض کنید سرعت پرش او با هالترها یا بدون آنها برابر $\vec{v} = (9/5\hat{i} + 4/0\hat{j})$ m/s و در سطح موقع پرش فرود می‌آید. استفاده از هالترها برد او را چقدر افزایش می‌دهد؟



شکل ۹-۵۷ مسئلهٔ ۴۱

••۴۲- یک جعبهٔ آشغال به جرم ۴/۰kg در حالی که روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزد منفجر و به دو قسمت ۲kg تقسیم می‌شود، یکی با تندی ۳/۰m/s به سمت شمال و دیگری با تندی ۵/۰m/s و با زاویهٔ ۳۰° به سمت شمال شرق حرکت می‌کند. تندی اولیهٔ جعبه چقدر است؟

••۴۳- شکل ۹-۵۸ یک موشک دو طرفه را نشان می‌دهد که در آغاز ساکن است و روی کف بدون اصطکاکی قرار دارد و مرکز آن در مبداء محور $x$ واقع است. موشک شامل یک قطعهٔ مرکزی $C$ (با جرم $M = 6/00$kg) و قطعه‌های $L$ و $R$ است (هر یک با جرم $m = 2/00$kg) که در سمت چپ و راست قرار



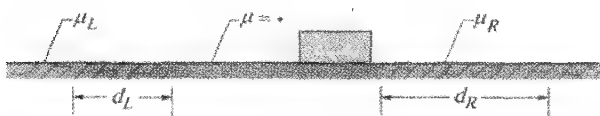

شکل ۹-۵۸ مسئلهٔ ۴۳

دارند. یک انفجار کوچک می‌تواند هر یک از قطعه‌های دو طرف را در امتداد محور $x$ از قطعهٔ $C$ دور سازد. ترتیب به این قرار است: (۱) در زمان $t = 0$ قطعهٔ $L$ با تندی ۳/۰۰m/s نسبت به سرعتی که انفجار به باقی موشک می‌دهد به طرف چپ پرتاب می‌شود. (۲) سپس، در زمان $t = 0/80$s، قطعهٔ $R$ با تندی ۳/۰۰m/s نسبت به سرعتی که قطعهٔ $C$ بعداً کسب می‌کند به سمت راست پرتاب می‌شود. در $t = 2/80$s، مطلوب است (الف) سرعت قطعهٔ $C$ و (ب) مکان مرکز آن.

••۴۴- جسمی با جرم $m$ و تندی $v$ نسبت به ناظر، بر اثر انفجار به دو قطعه تقسیم می‌شود، که یکی سه برابر سنگینتر از دیگری است و انفجار در عمق فضا رخ داده است. قطعهٔ سبکتر نسبت به ناظر متوقف می‌شود. چقدر انرژی جنبشی، وقتی که در چارچوب مرجع ناظر اندازه‌گیری شود، در حین انفجار به دستگاه اضافه می‌شود.

••۴۵- ظرف ساکنی که در مبداء دستگاه مختصات $xy$ واقع است، منفجر و به سه قطعه تقسیم می‌شود. درست پس از انفجار، یک قطعه، با جرم $m$، با سرعت $(-30\,\text{m/s})\hat{i}$ حرکت می‌کند و قطعهٔ دوم، آنهم با جرم $m$، با سرعت $(-30\,\text{m/s})\hat{j}$ حرکت می‌کند. سومین قطعه دارای جرم ۳m است. درست پس از انفجار مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت قطعهٔ سوم.

••۴۶- در شکل ۹-۵۹ قطعهٔ ساکنی منفجر و به دو قطعهٔ $L$ و $R$ تقسیم می‌شود که روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزند و سپس به ناحیه‌های اصطکاک‌دار می‌رسند و در آنجا متوقف می‌شوند. قطعهٔ $L$، با جرم ۲/۰kg با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_L = 0/40$ مواجه می‌شود و قبل از توقف مسافت $d_L = 0/15$m را طی می‌کند. قطعهٔ $R$ با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_R = 0/50$ مواجه می‌شود و قبل از توقف مسافت $d_R = 0/25$m را طی می‌کند. جرم قطعه چقدر بوده است؟




شکل ۹-۵۹ مسئلهٔ ۴۶

••۴۷- جسمی به جرم ۲۰/۰kg در میان فضا با تندی ۲۰۰m/s در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کند. یک انفجار داخلی آن را به سه قسمت تقسیم می‌کند. یک قسمت، با جرم ۱۰/۰kg با تندی ۱۰۰m/s در جهت مثبت محور $y$ از نقطهٔ انفجار دور می‌شود. دومین قسمت، با جرم ۴/۰۰kg با تندی ۵۰۰m/s در جهت منفی محور $x$ حرکت می‌کند. (الف) بر حسب نمادهای بردار- یکه، سرعت قسمت سوم چیست؟ (ب) چه مقدار انرژی در انفجار آزاد می‌شود؟ از اثرهای مربوط به گرانش صرفنظر کنید. SSM WWW

•••۴۸- ذرهٔ $A$ و ذرهٔ $B$ توسط فنر فشرده‌ای که در بین آنهاست به هم نگهداشته شده‌اند. وقتی آنها رها شوند، فنر آنها را از هم جدا می‌کند و سپس آنها رها از فنر در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند. جرم $A$ دو برابر جرم $B$ است و انرژی ذخیره شده در فنر ۶۰J بوده است. فرض کنید جرم فنر ناچیز و تمام انرژی ذخیره شده در آن به ذره‌ها منتقل شده است. وقتی این انتقال کامل شد، انرژی جنبشی (الف) ذرهٔ $A$ و (ب) ذرهٔ $B$ چقدر است؟

## بخش ۹-۹ برخورد ناکشسان در یک بعد

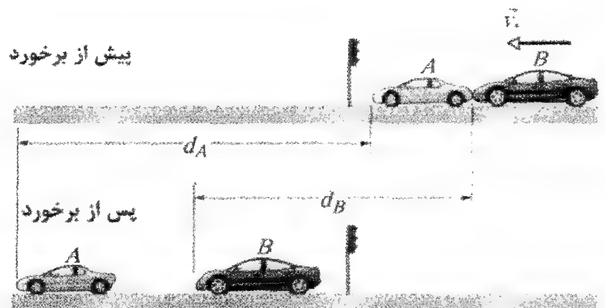
•۴۹- گلوله‌ای به جرم ۱۰g به یک آونگ بالیستیک به جرم ۲/۰kg برخورد می‌کند. مرکز جرم آونگ به اندازهٔ ۱۲cm در

راستای قائم بالا می‌رود. با فرض اینکه گلوله در داخل آونگ باقی بماند، سرعت اولیهٔ گلوله را حساب کنید.

●۵۰- یک گلولهٔ ۵/۲g که با تندی ۶۷۲m/s حرکت می‌کند با یک قطعه چوب ۷۰۰g ساکن، که روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد، برخورد می‌کند. گلوله با تندی کاهش یافتهٔ ۴۲۸m/s از چوب خارج می‌شود. (الف) تندی حاصل در قطعه چقدر است؟ (ب) تندی مرکز جرم گلوله- قطعه چقدر است؟

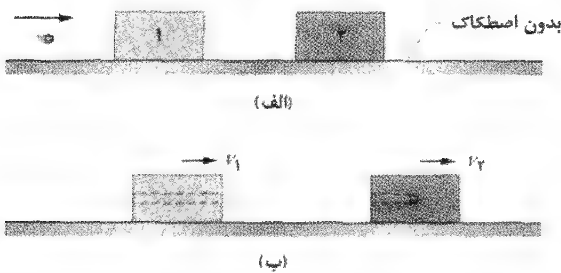
●●۵۱- در یکی از شهرهای آلاسکا برخورد وسیلهٔ نقلیه با گوزنها یک امر معمول است. فرض کنید اتومبیلی به جرم ۱۰۰۰kg در جادهٔ بسیار لغزنده‌ای با گوزن ساکنی به جرم ۵۰۰kg تصادف می‌کند و گوزن به کنار جاده پرت می‌شود. (الف) در این برخورد چند درصد از انرژی جنبشی اولیه به صورت سایر انرژیها تلف می‌شود؟ در عربستان سعودی به خاطر وجود شتر چنین تصادفهای خطرناکی رخ می‌دهد. (ب) اگر همین اتومبیل با شتری به جرم ۳۰۰kg تصادف کند چند درصد از انرژی جنبشی اولیه تلف می‌شود؟ (پ) به طور کلی، اگر جرم حیوان کاهش یابد، آیا درصد اتلاف افزایش می‌یابد یا کاهش؟

●●۵۲- در قسمت «پیش از برخورد» شکل ۹-۶۰، اتومبیل $A$ (جرم ۱۱۰۰kg) پشت چراغ راهنمایی ایستاده است که اتومبیل $B$ (جرم ۱۴۰۰kg) از عقب به آن می‌زند. سپس دو اتومبیل با چرخهای قفل شده می‌لغزند تا وقتی که نیروی اصطکاک جادهٔ لغزنده (با $\mu_k$ کم برابر ۰/۱۳) آنها را در فاصله‌های $d_A = ۸/۲\text{m}$ و $d_B = ۶/۱\text{m}$ متوقف می‌کند. تندی (الف) اتومبیل $A$ و (ب) اتومبیل $B$ در شروع لغزیدن درست پس از برخورد چقدر است؟ (ب) با فرض اینکه اندازه حرکت خطی در حین برخورد پایسته است، تندی اتومبیل $B$ را درست پیش از برخورد به دست آورید. (ت) توضیح دهید که چرا این فرض ممکن است معتبر نباشد.



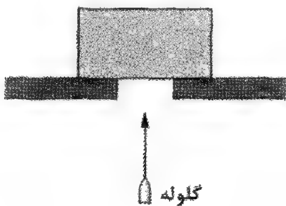
شکل ۹-۶۰ مسئلهٔ ۵۲

●●۵۳- گلوله‌ای به جرم ۳/۵g به طور افقی به دو قطعهٔ ساکن روی یک میز صاف مطابق شکل ۹-۶۱ الف شلیک می‌شود. گلوله از قطعهٔ اول (جرم ۱/۲۰kg) عبور می‌کند و به داخل قطعهٔ دوم (جرم ۱/۸۰kg) فرو می‌رود. تندیهایی که در نتیجهٔ آن به اجسام می‌دهد، $v_1 = ۰/۶۳۰\text{m/s}$ و $v_2 = ۱/۴۰\text{m/s}$ است (شکل ۹-۶۱ ب). با صرفنظر کردن از جرمی که از قطعهٔ اول توسط گلوله جدا می‌شود، تندی گلوله را وقتی (الف) از قطعهٔ ۱ بیرون می‌آید و (ب) وقتی وارد آن می‌شود به دست آورید.



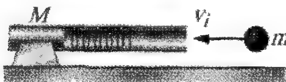
شکل ۹-۶۱ مسئلهٔ ۵۳

●●۵۴- در شکل ۹-۶۲ یک گلولهٔ ۱۰g با تندی ۱۰۰۰m/s مستقیماً به سمت بالا حرکت می‌کند و به قطعهٔ ۵/۰kg که در آغاز ساکن است برخورد و از میان مرکز جرم آن عبور می‌کند. گلوله موقع خروج از قطعه با تندی ۴۰۰m/s مستقیماً به سمت بالا حرکت می‌کند. گلوله تا چه ارتفاع بیشینه‌ای نسبت به مکان اولیه بالا می‌رود؟



شکل ۹-۶۲ مسئلهٔ ۵۴

●●۵۵- در شکل ۹-۶۳ گلوله‌ای به جرم $m = ۶۰\text{g}$ با تندی $v_i = ۲۲\text{m/s}$ به داخل لولهٔ یک تفنگ فنری به جرم $M = ۲۴۰\text{g}$، که در حال سکون روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد، شلیک می‌شود. گلوله در لوله در نقطه‌ای که فنر به بیشینهٔ مقدار فشردگی‌اش می‌رسد، گیر می‌کند. فرض کنید که افزایش انرژی گرمایی بر اثر اصطکاک بین گلوله و لوله قابل چشمپوشی است. (الف) تندی تفنگ فنری پس از آنکه گلوله در لولهٔ تفنگ متوقف شد چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله در فنر ذخیره می‌شود؟

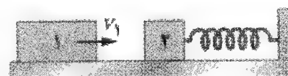


شکل ۹-۶۳ مسئلهٔ ۵۵

●●۵۶- یک برخورد کاملاً ناکشسان بین دو گلولهٔ بتونه‌ای خیس که در امتداد قائم به سمت هم حرکت می‌کنند، رخ می‌دهد. درست پیش از برخورد یکی از گلوله‌ها با جرم ۳/۰kg با تندی ۲۰ m/s به سمت بالا حرکت می‌کند و گلولهٔ دیگر با جرم ۲/۰kg با تندی ۱۲m/s به سمت پایین حرکت می‌کند. دو گلولهٔ بتونه‌ای ترکیب شده تا چه ارتفاعی نسبت به نقطهٔ برخورد بالا می‌رود؟ (از مقاومت هوا چشمپوشی کنید.)

●●۵۷- قطعه‌ای به جرم ۵/۰ kg با تندی ۳/۰ m/s با قطعهٔ دیگری به جرم ۱۰ kg که با تندی ۲/۰ m/s در همان جهت در حرکت است، برخورد می‌کند. پس از برخورد مشاهده می‌شود که جسم ۱۰ kg با تندی ۲/۵m/s در همان جهت اولیه حرکت می‌کند. (الف) تندی جسم ۵kg بی‌درنگ پس از برخورد چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی کل دستگاه دو قطعه بر اثر برخورد چقدر تغییر می‌کند؟ (پ) حال فرض کنید که قطعهٔ ۱۰ kg تندی ۴/۰ m/s را کسب کند. آن وقت، تغییر انرژی جنبشی کل چقدر است؟ (ت) نتیجهٔ به دست آمده در قسمت (پ) را شرح دهید. **ILW**

●●●۵۸- در شکل ۹-۶۴، قطعهٔ ۲ (جرم ۱/۰ kg) ساکن است و روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد و به فنری با ثابت فنر ۲۰۰ N/m که کشیده نشده و انتهای دیگرش ثابت است متصل است. انتهای دیگر فنر به دیوار وصل است. قطعهٔ ۱ (جرم ۲/۰ kg) که با تندی $v_1 = ۴/۰$ m/s حرکت می‌کند با قطعهٔ ۲ برخورد می‌کند و دو قطعه به هم می‌چسبند. در لحظه‌ای که متوقف می‌شوند فنر چقدر فشرده می‌شود؟



**شکل ۹-۶۴** مسئلهٔ ۵۸

●●●۵۹- در شکل ۹-۶۵ قطعهٔ ۱ (جرم ۲/۰ kg) با تندی ۱۰ m/s به سمت راست و قطعهٔ ۲ (جرم ۵/۰ kg) با تندی ۳/۰ m/s به سمت راست حرکت می‌کنند. سطح بدون اصطکاک است و فنری با ثابت فنر ۱۱۲۰ N/m به قطعهٔ ۲ متصل است. وقتی قطعه‌ها برخورد کنند، در لحظه‌ای که دو قطعه سرعت یکسانی داشته باشند فشردگی فنر بیشینه است. بیشینهٔ فشردگی فنر چقدر است؟ **ILW**



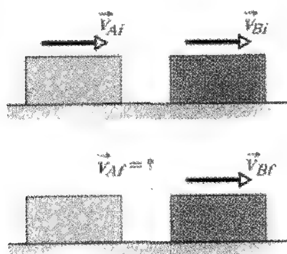
**شکل ۹-۶۵** مسئلهٔ ۵۹ و ۱۲۶

### بخش ۹-۱۰ برخورد کشسان در یک بعد

●۶۰- دو گلوله از تیتانیوم با تندی یکسان به سمت هم می‌آیند و به طور کشسان برخورد رودررو می‌کنند. پس از برخورد، یکی از گلوله‌ها که جرمش ۳۰۰ g است، ساکن می‌ماند. (الف) جرم گلولهٔ دیگر چقدر است؟ (ب) اگر تندی اولیه هر گلوله ۲/۰۰ m/s باشد، تندی مرکز جرم دو- گلوله چقدر است؟

●۶۱- ارابه‌ای با جرم ۳۴۰ g که با تندی اولیهٔ ۱/۲m/s روی تخت هوای مستقیم و بدون اصطکاکی در حرکت است با ارابهٔ دیگری به جرم نامعلوم که در ابتدا ساکن است برخورد کشسان می‌کند. پس از برخورد، ارابهٔ اول با تندی ۰/۶۶ m/s به حرکت در جهت اولیه‌اش ادامه می‌دهد. (الف) جرم ارابهٔ دوم چقدر است؟ (ب) تندی آن پس از برخورد چقدر است؟ (پ) تندی مرکز جرم دو ارابه چقدر است؟ **SSM**

●۶۲- در شکل ۹-۶۶، قطعهٔ $A$ (جرم ۱/۶kg) در امتداد سطح بدون اصطکاکی به سمت قطعهٔ $B$ (جرم ۲/۴kg) می‌لغزد. جهت سه تا از سرعتها پیش از برخورد ($i$) و پس از برخورد ($f$) مشخص شده‌اند؛ تندیهای مربوطه عبارت‌اند از $v_{Ai} = ۵/۵$ m/s، $v_{Bi} = ۲/۵$ m/s و $v_{Bf} = ۴/۹$ m/s . مطلوب است (الف) تندی و (ب) جهت (چپ یا راست) سرعت $\vec{v}_{Af}$ . (پ) آیا برخورد کشسان است؟

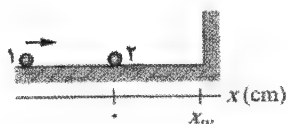


**شکل ۹-۶۶** مسئلهٔ ۶۲

●●۶۳- جسمی به جرم ۲/۰ kg با جسم دیگری که ساکن است برخورد کشسان می‌کند و در همان جهت اولیه و با یک چهارم تندی اولیه‌اش به حرکت ادامه می‌دهد. (الف) جرم جسم دیگر چقدر است؟ (ب) تندی مرکز جرم دو جسم در صورتی که تندی اولیهٔ جسم ۲/۰ kg برابر ۴/۰ m/s[۲] باشد، چقدر است؟ **SSM**

●●۶۴- قطعهٔ ۱ با جرم $m_1$ و تندی ۴/۰ m/s در امتداد محور $x$ روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزد و سپس با قطعهٔ ساکن ۲ با جرم $m_2 = ۰/۴۰ m_1$ برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از آن، دو قطعه به ناحیه‌ای که ضریب اصطکاک جنبشی آن ۰/۵۰ است، می‌لغزند و متوقف می‌شوند. در این ناحیه چه مسافتی را (الف) قطعهٔ ۱ و (ب) قطعهٔ ۲، می‌لغزند؟

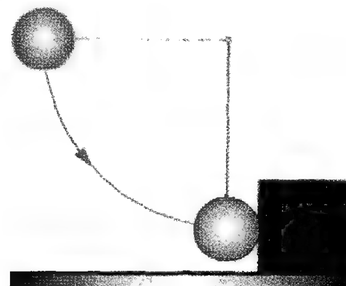
●●۶۵- در شکل ۹-۶۷، ذرهٔ ۱ با جرم $m_1 = ۰/۳۰$ kg با تندی ۲/۰ m/s روی سطح بدون اصطکاکی در امتداد محور $x$ می‌لغزد. وقتی به $x = ۰$ می‌رسد با ذرهٔ ساکن دیگری به جرم ۰/۴۰ kg برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. سپس وقتی ذرهٔ ۲ در $x_w = ۷۰$ cm به دیوار می‌رسد پس از برخورد به آن بدون از دست دادن تندی به عقب برمی‌گردد. در چه مکان روی محور $x$، ذرهٔ ۲ با ذرهٔ ۱ برخورد می‌کند؟



**شکل ۹-۶۷** مسئلهٔ ۶۵

●●۶۶- یک گلولهٔ فولادی به جرم ۰/۵۰۰ kg به انتهای سیمی به طول ۷۰/۰ cm که در انتها ثابت شده بسته شده است. وقتی که سیم در وضعیت افقی است (شکل ۹-۶۸) گلوله رها می‌شود

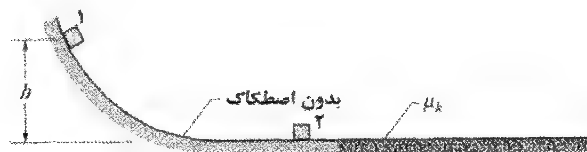
و در پایینترین نقطهٔ مسیرش به یک قطعهٔ فولادی به جرم ۲/۵۰kg که در حال سکون روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد، برخورد می‌کند. برخورد کشسان است. مطلوب است (الف) تندی گلوله و (ب) تندی قطعه درست پس از برخورد.



شکل ۹-۶۸ مسئلهٔ ۶۶

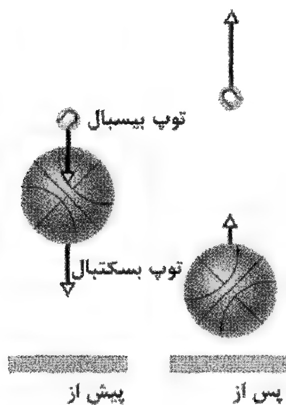
**۶۷●●-** قطعهٔ ۱ به جرم $m_1$ در امتداد سطح بدون اصطکاکی می‌لغزد و با قطعهٔ ۲ به جرم $m_2 = 3m_1$ برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پیش از برخورد، تندی مرکز جرم دستگاه دو-قطعه ۳/۰۰m/s است. پس از آن تندی (الف) مرکز جرم و (ب) تندی قطعهٔ ۲ چقدر است؟

**۶۸●●-** در شکل ۹-۶۹، قطعهٔ ۱ به جرم $m_1$ از حالت سکون از ارتفاع $h = 2/50\ \text{m}$ در امتداد شیب بدون اصطکاکی سُر می‌خورد و سپس با قطعهٔ ساکن ۲ که جرم آن $m_2 = 2/00 m_1$ است برخورد می‌کند. پس از برخورد، قطعهٔ ۲ به ناحیه‌ای که ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k$ آن برابر ۰/۵۰۰ است سُر می‌خورد و پس از طی مسافت $d$ در آن ناحیه، متوقف می‌شود. اگر برخورد (الف) کشسان و (ب) کاملاً ناکشسان باشد، مسافت $d$ چقدر است؟



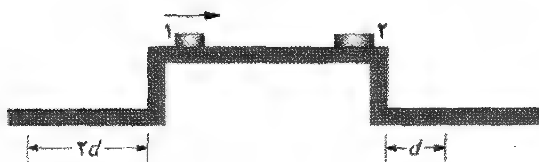

شکل ۹-۶۹ مسئلهٔ ۶۸

**۶۹●●●-** توپ کوچکی به جرم $m$ همردیف و بالای توپ بزرگتر به جرم $M = 0/63\text{kg}$ قرار دارد (با جدایی اندک، مانند توپ بیسبال و توپ بسکتبال شکل ۹-۷۰ الف) و از ارتفاع $h = 1/8\text{m}$ با فرض اینکه شعاع هر توپ نسبت به $h$ ناچیز است به طور همزمان رها می‌شوند. (الف) اگر توپ بزرگتر به طور کشسان از کف به سمت بالا و سپس توپ کوچک پس از برخورد کشسان با توپ بزرگتر به سمت بالا برگردد، چه مقدار $m$ باعث می‌شود تا وقتی که توپ بزرگ با توپ کوچک برخورد کرد متوقف شود؟ (ب) در این موقع توپ کوچک به چه ارتفاعی می رسد (شکل ۹-۷۰ ب).




شکل ۹-۷۰ مسئلهٔ ۶۹

**۷۰●●●-** در شکل ۹-۷۱ قرص ۱ به جرم $m_1 = 0/20\text{kg}$ روی میز بدون اصطکاک آزمایشگاه سر داده می‌شود تا با قرص ساکن ۲ برخورد کشسان یک بعدی کند. سپس قرص ۲ سُر خورده و از میز می‌افتد و در فاصلهٔ $d$ از پایهٔ میز فرود می‌آید. قرص ۱ بر اثر برخورد به عقب برمی‌گردد و در جهت مخالف روی میز سُر می‌خورد و از روی میز پرتاب شده و در فاصلهٔ $2d$ از پایهٔ میز فرود می‌آید. جرم قرص ۲ چقدر است؟ (*راهنمایی:* به علامتها دقت کنید.)




شکل ۹-۷۱ مسئلهٔ ۷۰

## بخش ۹-۱۱ برخورد در دو بعد

**۷۱●●-** یک پروتون پرتابه با تندی ۵۰۰m/s با پروتون ساکن هدف دیگری برخورد کشسان می‌کنند. دو پروتون سپس در مسیرهای عمود بر هم حرکت می‌کنند در حالی که پرتابه $60°$ با جهت اولیه‌اش زاویه دارد. پس از برخورد، تندی (الف) پروتون هدف و (ب) پروتون پرتابه، چقدر است؟

**۷۲●●-** دو جسم $A$ و $B$ هر یک به جرم ۲/۰kg، برخورد می‌کنند. سرعتهای قبل از برخورد عبارت‌اند از $\vec{v}_A = (15\hat{i} + 30\hat{j})\text{m/s}$ و $\vec{v}_B = (-10\hat{i} + 5/0\hat{j})\text{m/s}$. پس از برخورد $\vec{v}_A{}' = (-5/0\hat{i} + 20\hat{j})\text{m/s}$. (الف) سرعت نهایی $B$ و (ب) تغییر در انرژی جنبشی (شامل علامت)، چقدر است؟

**۷۳●●-** در شکل ۹-۲۳ ذرهٔ پرتابهٔ ۱ ذرهٔ آلفا و ذرهٔ هدف ۲ هستهٔ اکسیژن است. ذرهٔ آلفا با زاویهٔ $\theta_1 = 64/0°$ پراکنده و هستهٔ اکسیژن با تندی $1/20 \times 10^5\ \text{m/s}$ و با زاویهٔ $\theta_2 = 51/0°$ پس زده می‌شود. برحسب یکاهای جرم اتمی، جرم ذرهٔ آلفا برابر $4/00u$ و جرم هستهٔ اکسیژن $16/0u$ است. (الف) تندی نهایی و (ب) تندی اولیهٔ ذرهٔ آلفا چقدر است؟ ILW

●●۷۴- توپ $B$ که با تندی $v$ در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کند با توپ ساکن $A$ واقع در مبدأ برخورد می‌کند. $A$ و $B$ جرمهای متفاوتی دارند. پس از برخورد، توپ $B$ با تندی $v/۲$ در جهت منفی محور $y$ حرکت می‌کند. (الف) توپ $A$ در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (ب) نشان دهید که با اطلاعات داده شده نمی‌توان تندی $A$ را به دست آورد.

●●●۷۵- دو جسم با جرمها و تندیهای اولیهٔ یکسان پس از برخورد کاملاً ناکشسان با نصف تندی اولیهٔ خود حرکت می‌کنند. زاویهٔ بین سرعتهای اولیهٔ دو جسم را پیدا کنید.

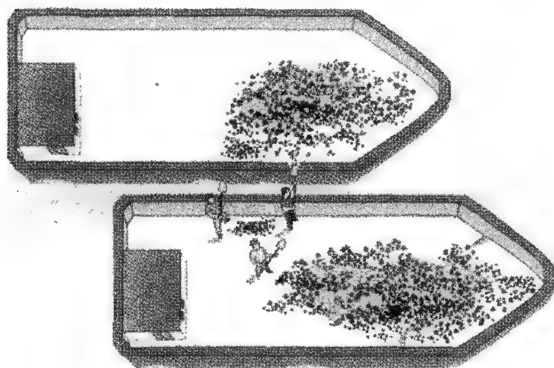
### بخش ۹-۱۲ دستگاههای با جرم متغیر: موشک

●۷۶- موشکی را در نظر بگیرید که در عمق فضا نسبت به چارچوب مرجع لخت ساکن است. موتور موشک برای یک بازهٔ معین روشن می‌شود. اگر تندی اولیهٔ موشک نسبت به چارچوب لخت برابر با (الف) تندی گازهای خروجی (تندی محصولهای خروجی نسبت به موشک) و (ب) دو برابر تندی گازهای خروجی باشد، نسبت جرم موشک (نسبت جرم اولیه به نهایی) در آن بازهٔ زمانی چقدر است؟

●۷۷- موشکی که در عمق فضا و در آغاز نسبت به چارچوب مرجع لخت ساکن است دارای جرم $۲/۵۵\times۱۰^۵\ kg$ است که $۱/۸۱\times۱۰^۵\ kg$ از آن جرم سوخت است. موتور موشک به مدت $۲۵۰\ s$ روشن می‌شود و با آهنگ $۴۸۰\ kg/s$ سوخت مصرف می‌شود. تندی گازهای خروجی نسبت به موشک برابر $۳/۲۷\ km/s$ است. (الف) نیروی پیشران موشک چقدر است؟ $۲۵۰\ s$ پس از روشن شدن موتور، (ب) جرم و (پ) تندی موشک چقدر است؟ **SSM ILW**

●۷۸- یک سفینهٔ کاوشگر فضایی به جرم $۶۰۹۰\ kg$، که با تندی $۱۰۵\ m/s$ نسبت به خورشید به طرف مشتری حرکت می‌کند، موتور موشکش را روشن می‌کند و $۸۰/۰\ kg$ گازهای خروجی را با تندی $۲۵۳\ m/s$ نسبت به سفینهٔ کاوشگر بیرون می‌دهد. سرعت نهایی موشک چقدر است؟

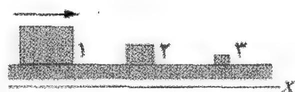
●۷۹- در شکل ۹-۷۲، دو کرجی دراز در آب آرام و در یک جهت یکی با تندی $۱۰\ km/h$ و دیگری با تندی $۲۰\ km/s$ حرکت می‌کنند. وقتی دو کرجی از کنار هم عبور می‌کنند، زغال سنگ با آهنگ $۱۰۰۰\ kg/min$ بابیل از کرجی با تندی آهسته‌تر به کرجی با تندی سریعتر، ریخته می‌شود. چه مقدار نیروی اضافی باید به وسیلهٔ موتور هر کرجی تأمین کنیم تا تندی (الف) کرجی سریعتر و (ب) کرجی آهسته‌تر تغییر نکند؟ فرض کنید ریختن زغال سنگ همواره از پهلو صورت می‌گیرد و نیروهای اصطکاکی بین کرجیها و آب به وزن آنها بستگی ندارد. **SSM**



**شکل ۹-۷۲** مسئلهٔ ۷۹

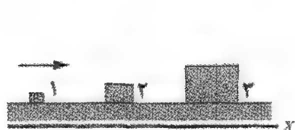
### مسئله‌های اضافی

**۸۰- تقویت کنندهٔ تندی.** در شکل ۹-۷۳، قطعهٔ ۱ به جرم $m_1$ با تندی $v_{1i}=۴/۰۰\ m/s$ روی سطح بدون اصطکاکی در امتداد محور $x$ سر می‌خورد. سپس با قطعهٔ ۲ به جرم $m_2=۰/۵۰۰m_1$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از آن، قطعهٔ ۲ با قطعهٔ ۳ به جرم $m_3=۰/۵۰۰m_2$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. (الف) تندی قطعه ۳ چقدر است؟ آیا (پ) تندی، (ت) انرژی جنبشی و (ث) اندازه حرکت قطعهٔ ۳ بزرگتر از کمتر از یا یکسان با این مقدارها برای قطعهٔ ۱ است؟




**شکل ۹-۷۳** مسئلهٔ ۸۰

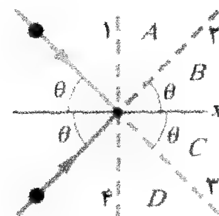
**۸۱- تضعیف کنندهٔ تندی.** در شکل ۹-۷۴، قطعهٔ ۱ به جرم $m_1$ با تندی $۰/۴۰۰\ m/s$ در امتداد محور $x$ روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزد. سپس، با قطعهٔ ۲ به جرم $m_2=۲/۰۰m_1$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از آن، قطعهٔ ۲ با قطعهٔ ۳ به جرم $m_3=۲/۰۰m_2$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. (الف) تندی قطعهٔ ۳ چقدر است؟ آیا، (ب) تندی، (پ) انرژی جنبشی و (ت) اندازه حرکت قطعهٔ ۳، بزرگتر است یا کوچکتر یا با مقدارهای اولیهٔ ۱ یکسان است؟




**شکل ۹-۷۴** مسئلهٔ ۸۱

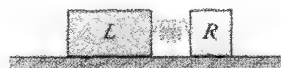
**۸۲-** شکل ۹-۷۵ دید از بالای دو ذره را که با سرعت ثابت روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزند نشان می‌دهد. ذره‌ها دارای جرم یکسان و سرعت یکسان $v=۴/۰۰\ m/s$ هستند و در محل

تقاطع مسیرشان، برخورد می‌کنند. محور $x$ نیمساز زاویهٔ بین مسیرهای وارده است به طوری کـه $\theta =$ ۴۰/۰° است. ناحیهٔ سمت راست برخورد توسط محور $x$ و چهار خط چین شماره دار به چهار ناحیهٔ تقسیم شده که با حرفها مشخص شده‌اند. اگر برخورد (الف) کاملاً ناکشسان، (ب) کشسان و (پ) ناکشسان باشد، ذره‌ها در چه ناحیه‌ای یا امتداد چه خطی حرکت می‌کنند؟ اگر برخورد (ت) کاملاً ناکشسان و (ث) کشسان باشد، تندی نهایی آنها چقدر است؟



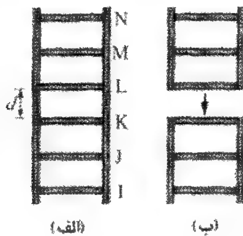

شکل ۹-۷۵ مسئلهٔ ۸۲

۸۳- *«نسبی» واژهٔ مهمی است.* در شکل ۹-۷۶، قطعهٔ $L$ به جرم $m_L =$ ۱/۰۰kg و قطعهٔ $R$ به جرم $m_R =$ ۰/۵۰۰kg در وضعیتی که بین آنها یک فنر فشرده وجود دارد نگهداشته شده‌اند. وقتی قطعه‌ها رها شوند، فنر آنها را وادار به سرخوردن روی یک کف بدون اصطکاک می‌کند. (جرم فنر قابل چشمپوشی است و پس از رها کردن قطعه‌ها روی کف می‌افتد.) (الف) اگر فنر به قطعهٔ $L$ رها شده تندی ۱/۲m/s را *نسبت به کف* بدهد، قطعهٔ $R$ در ۰/۸۰۰s بعدی چه مسافتی را طی می‌کند؟ (ب) اگر بـه جـای آن، فنر به قطعهٔ $L$ تندی ۱/۲m/s را *نسبت به سرعتی که فنر بـه قطعهٔ R می‌دهد* بدهد، قطعهٔ $R$ در ۰/۸۰۰s بعدی چه مسـافتی را طی می‌کند؟




شکل ۹-۷۶ مسئلهٔ ۸۳

۸۴- *فروریزش عمودی یک ساختمان بلنـد.* در بخشـی از یـک ساختمان بلند که در شکل ۹-۷۷ الف نشان داده شده است، زیر بنای هر طبقهٔ معین $K$ باید وزن $W$ طبقـه‌هـای بـالاتر را تحمـل کند. معمولاً این زیر بنا با ضریب ایمنی $s$ ساخته مـی‌شـود بـه طوری که هر طبقه حتی وزن بیش از $sW$ را نیز می‌تواند تحمـل کند. ولی اگر ستونهای نگهدارندهٔ بین $K$ و $L$ بـه طـور ناگهـانی فرو ریزد و طبقه‌های بالاتر بـا سـقوط آزاد روی طبقهٔ $K$ فـرود آیند (شکل ۹-۷۷ ب) نیروی حاصل از این برخورد می‌تواند از $sW$ بیشتر شده و پس از لحظهٔ کوتاهی باعث شـود کـه $K$ روی طبقهٔ $J$ فرود آید که این طبقه نیز روی طبقهٔ $I$ فـرود مـی‌آیـد و همین‌طور تا پایین ساختمان ادامه می‌یابد. فرض کنید که فاصـلهٔ بین طبقه‌ها برابر $d =$ ۴/۰m و دارای جرمهـای یکسـان باشـند. همچنین فرض کنید وقتی که طبقه‌هـای بـالای $K$ بـه طـور آزاد روی $K$ سقوط می‌کنند برخورد به مدت ۱/۵ms طـول بکشـد. در این شرایط ساده شده، ضریب ایمنی $s$ چقـدر بایـد افـزایش یابد تا از فروریزش عمودی ساختمان جلوگیری شود؟



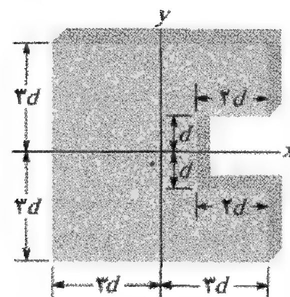

شکل ۹-۷۷ مسئلهٔ ۸۴

۸۵- یـک واگـن راه‌آهـن بـا تنـدی ثابـت ۳/۲۰m/s در حـال حرکت از زیر یک مخزن غله است. غله با آهنگ ۵۴۰ kg/min به داخل آن می‌ریزد. برای اینکه تندی واگن راه آهن ثابت باشد، در نبود اصطکاک چه نیرویی باید به واگن وارد شود؟

۸۶- *نوعی دایناسور گوشت خوار* از روی تجربه فهمیده بود که به خاطر خطر سکندری خوردن، به ویژه نباید تند بدود زیرا در این صورت دستهای کوچکش نمی‌تواننـد جلـوی افتـادن او را بگیرند. فرض کنید که ایـن دایناسـور بـه جـرم $m$ در موقـع راه رفتـن با گامهای بلنـد و سریع سرنگون می‌شود و مرکز جرم او آزادانه به اندازهٔ ۱/۵ m سـقوط مـی‌کنـد. پـس از آن بـه خـاطر فشردگـی بـدنش به زمیـن ۰/۳۰m دیگر پایین می‌آید. (الف) بزرگی تقریبی نیروی قائم متوسـط وارد بـر دایناسـور در حـین برخورد با زمین (در طـی ۰/۳۰m پـایین آمـدن) بـر حسـب مضـربی از وزن دایناسـور، چـقـدر اسـت؟ اکنـون فـرض کنیـد دایناسور که با تندی ۱۹m/s (تند) می‌دود، سر می‌خورد، به زمین می‌افتد و سپس با ضریب اصـطکاک جنبشـی ۰/۶ مـی‌لـغـزد تـا متوقف شود. همچنین فرض کنید کـه نیـروی قـائم متوسـط در حین برخورد به زمین و سر خوردن همان مقدار فـرض (الـف) باشد. به طور تقریب، (ب) بزرگـی میـانگین نیـروی کلـی روی دایناسور از طرف زمین (باز بـه صـورت مضـربی از وزن آن) و (پ) مسافت سر خـوردن، چـقـدر اسـت؟ بزرگیهـای نیروهـای (الف) و (ب) قویاً بیان می‌کنند کـه برخـورد بـدن دایناسـور را مجروح می‌کند. سر که بیشتر سقوط می‌کند حتـی بایـد صـدمهٔ بیشتری ببیند.

۸۷- مردی (به وزن ۹۱۵N) روی واگن مسطح و دراز راه آهـن (به وزن ۲۴۱۵ N) ایستاده است و واگن بـا تنـدی ۱۸/۲m/s در امتداد مثبت محور $x$ حرکـت مـی‌کنـد، اصـطکاک واگـن قابـل چشمپوشی است. سپس مرد با تندی ۴/۰۰m/s نسبت به واگن در امتداد منفی محور $x$ شروع به دویدن می‌کند. افزایش حاصـل در تندی واگن چقدر است؟

۸۸- شکل ۹-۷۸، یک ورقهٔ مربع شکل یکنواخت را به اضـلاع $6d =$ ۶/۰m نشـان می‌دهد کـه یک تکـهٔ مربع شکل به اضلاع $2d$ از آن بریده شده است. (الف) مختصـهٔ $x$ و (ب) مختصـهٔ $y$ مرکز جرم تکهٔ باقیمانده چقدر است؟




**شکل ۹-۷۸** مسئلهٔ ۸۸

**۸۹-** آخرین مرحلهٔ یک موشک که با تندی ۷۶۰۰m/s حرکت می‌کند شامل دو قسمت است که به هم قلاب شده‌اند، یعنی، محفظهٔ موشک با جرم ۲۹۰/۰kg و مخزن بار با جرم ۱۵۰/۰kg. وقتی قلاب باز شود یک فنر فشرده باعث می‌شود که دو قسمت با تندی نسبی ۹۱۰/۰m/s از هم جدا شوند. تندی (الف) محفظهٔ موشک و (ب) مخزن بار، پس از جداشدن چقدر است؟ فرض کنید که همهٔ سرعتها در یک امتداد قرار دارند. انرژی جنبشی کل را (پ) پیش و (ت) پس از جداشدن به دست آورید. (ث) اختلاف را شرح دهید.

**۹۰-** جسمی توسط ایستگاه رادار ردیابی و مشخص می‌شود که دارای بردار مکان، $\vec{r} = (۳۵۰۰ - ۱۶۰t)\hat{i} + ۲۷۰۰\hat{j} + ۳۰۰\hat{k}$ است که در آن $\vec{r}$ بر حسب متر و $t$ بر حسب ثانیه است. محور $x$ ایستگاه رادار به طرف مشرق، $y$ آن به طرف شمال، و $z$ آن قائم و به طرف بالاست. اگر جسم یک موشک هواشناسی به جرم ۲۵۰kg باشد، (الف) اندازه حرکت خطی، (ب) جهت حرکت و (پ) نیروی خالص وارد بر آن چیست؟

**۹۱-** یک تفنگ ساچمه‌ای، ده ساچمهٔ ۲/۰g را در هر ثانیه با تندی ۵۰۰m/s شلیک می‌کند. ساچمه‌ها توسط دیوار محکمی متوقف می‌شوند. (الف) بزرگی اندازه حرکت هر ساچمه چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی هر ساچمه چقدر است؟ (پ) نیروی میانگین وارد شده توسط جریان ساچمه‌ها به دیوار چقدر است؟ (ت) اگر هر ساچمه به مدت ۰/۶ms با دیوار در تماس باشد نیروی میانگین وارد شده توسط هر ساچمه در حین تماس با دیوار چقدر است؟ (ث) چرا این نیروی میانگین با نیروی میانگین محاسبه شده در قسمت (پ) اختلاف زیادی دارد؟ **SSM**

**۹۲-** جسمی که هیچ نیروی خارجی به آن وارد نمی‌شود با تندی ۲/۰ m/s در امتداد مثبت محور $x$ حرکت می‌کند. یک انفجار داخلی جسم را به دو نیمه، هر یک به جرم ۴/۰ kg تقسیم می‌کند و انرژی جنبشی کل را به مقدار ۱۶J افزایش می‌دهد. قسمت جلو در جهت اولیه به حرکت ادامه می‌دهد. تندی (الف) قسمت عقب و (ب) قسمت جلو، چقدر است؟

**۹۳-** اتومبیلی به جرم ۱۴۰۰kg با تندی ۵/۳m/s در ابتدا به سمت شمال در جهت مثبت محور $y$ حرکت می‌کند. اتومبیل بعد از دور زدن °۹۰ به سمت راست در جهت مثبت محور $x$ در مدت ۴/۶ s، بر اثر بی‌احتیاطی راننده به درختی برخورد می‌کند و پس از ۳۵۰ms متوقف می‌شود. بر حسب نمادگذاری بردار- یکه، ضربهٔ وارد شده به اتومبیل، (الف) در حین دور زدن، و (ب) در حین برخورد چقدر است؟ بزرگی نیروی میانگین وارد شده به اتومبیل، (پ) در حین دور زدن، و (ت) در حین برخورد چقدر است؟ (پ) نیروی میانگین در حین دور زدن در چه جهتی است؟ **SSM**

**۹۴-** دو قسمت یک سفینهٔ فضایی بر اثر انفجار در پیچهایی که آنها را به هم متصل کرده‌اند از هم جدا می‌شود. جرم دو قسمت ۱۲۰۰kg و ۱۸۰۰kg و بزرگی ضربه‌ای که به هر قسمت وارد می‌شود ۳۰۰N·s است. تندی نسبی جداشدن این دو قسمت چقدر است؟

**۹۵-** توپی با جرم ۱۵۰g با تندی ۵/۲m/s به دیوار برخورد می‌کند و فقط با ۵۰٪ انرژی جنبشی خود به عقب برمی‌گردد. (الف) تندی توپ بلافاصله پس از برگشت چقدر است؟ (ب) بزرگی ضربه به دیوار از طرف توپ چقدر است؟ (پ) اگر توپ به مدت ۷/۶ms با دیوار در تماس باشد، در این بازهٔ زمانی میانگین نیروی وارد بر دیوار از طرف توپ، چقدر است؟

**۹۶-** یک کرایسلر قدیمی با جرم ۲۴۰۰kg با تندی ۸۰km/s در امتداد جادهٔ مستقیمی حرکت می‌کند. یک اتومبیل فورد با جرم ۱۶۰۰kg و با تندی ۶۰km/s در تعقیب آن است. تندی مرکز جرم دو اتومبیل چقدر است؟

**۹۷-** یک قطار باری به جرم $۳/۱۸ \times ۱۰^{۴}$ kg با واگن خدمهٔ قطار که ساکن است برخورد می‌کند. آنها به هم جفت می‌شوند و ۲۷٪ انرژی جنبشی اولیهٔ آنها به انرژی گرمایی، صوت، ارتعاشها و غیره تبدیل می‌شود. جرم واگن خدمه را پیدا کنید. **SSM**

**۹۸-** دو قطعه با جرمهای ۱/۰kg و ۳/۰kg توسط فنری به هم متصل‌اند و روی سطح بدون اصطکاکی ساکن هستند. آنها به سمت هم سرعت می‌گیرند به طوری که قطعهٔ ۱/۰kg در آغاز با تندی ۱/۷m/s به سمت مرکز جرم که ساکن می‌ماند، حرکت می‌کند. تندی اولیهٔ قطعهٔ دیگر چقدر است؟

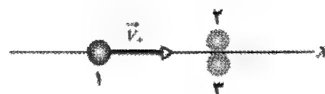
**۹۹-** مردی به جرم ۷۵kg روی یک ارابهٔ ۳۹kg، که با تندی ۲/۳m/s حرکت می‌کند، قرار دارد. او در حالی که مؤلفهٔ افقی تندی‌اش نسبت به زمین صفر است، از روی ارابه می‌پرد. تغییر حاصل در تندی ارابه با در نظر گرفتن علامت چقدر است؟

**۱۰۰-** یک هستهٔ پرتوزا (مادر) به وسیلهٔ گسیل یک الکترون و یک نوترینو به هستهٔ دیگری (دختر) تبدیل می‌شود. هستهٔ مادر در مبداء دستگاه مختصات $xy$ و در حال سکون بوده است. الکترون با اندازه حرکت خطی $(-۱/۲ \times ۱۰^{-۲۲} \text{kg·m/s})\hat{i}$ و نوترینو با اندازه حرکت خطی $(-۶/۴ \times ۱۰^{-۲۳} \text{kg·m/s})\hat{j}$ از مبدأ دور می‌شوند. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت اندازه حرکت هستهٔ دختر. (پ) اگر هستهٔ دختر دارای جرم $۵/۸ \times ۱۰^{-۲۶}$ kg باشد، انرژی جنبشی آن چقدر است؟ **ILW**

۱۰۱- در ترتیب شکل ۹-۲۳، گوی بیلیارد ۱ با تندی ۲/۲m/s با گوی بیلیارد مشابه ۲ که در حال سکون است برخورد کمانه‌ای می‌کند. پس از برخورد، گوی ۲ با تندی ۱/۱m/s و با زاویهٔ $\theta_2 = ۶۰°$ حرکت می‌کند. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت توپ ۱ را تعیین کنید. (پ) مقدارهای داده شده بیانگر برخورد کشسان هستند یا ناکشسان؟ SSM

۱۰۲- موشکی با تندی $۶/۰\times۱۰^{۳}$ m/s از منظومهٔ شمسی دور می‌شود. موشک، موتورش را روشن می‌کند و گازهای خروجی با سرعت $۳/۰\times۱۰^{۳}$ m/s نسبت به موشک خارج می‌شوند. در این زمان جرم موشک $۴/۰\times۱۰^{۴}$ kg و شتاب آن $۲/۰\,m/s^2$ است. (الف) نیروی پیشران موتور چقدر است؟ (ب) با چه آهنگی برحسب کیلوگرم بر ثانیه، در حین روشن بودن موتور گازهای خروجی بیرون داده شده‌اند؟

۱۰۳- سه توپ در دید از بالای شکل ۹-۷۹ مشابه‌اند. توپ ۲ و ۳ با یکدیگر در تماس‌اند و عمود بر مسیر توپ ۱ قرار دارند. سرعت توپ ۱ دارای بزرگی $v_0 = ۱۰$ m/s و به سمت نقطهٔ تماس توپهای ۱ و ۲ است. پس از برخورد، مطلوب است تعیین، (الف) تندی و (ب) جهت سرعت توپ ۲، (پ) تندی و (ت) جهت سرعت توپ ۳، (ث) تندی و (ج) جهت توپ ۱. (راهنمایی: با توجه به نبود اصطکاک، جهت هر ضربه در راستای خطی است که مرکز توپهای برخورد کننده را به هم متصل می‌کند و عمود بر سطحهای برخورد کننده است.)



شکل ۹-۷۹ مسئلهٔ ۱۰۳

۱۰۴- در یک بازی بیلیارد، گوی شروع کنندهٔ بازی با گوی دیگری با جرم یکسان و در حال سکون برخورد می‌کند. پس از برخورد گوی اول با تندی ۳/۵۰m/s و در امتداد زاویهٔ ۲۲/۰° نسبت به مسیر اولش حرکت می‌کند و گوی دوم دارای تندی ۲/۰۰m/s است. مطلوب است تعیین، (الف) زاویهٔ بین جهت حرکت گوی دوم و جهت اولیهٔ حرکت گوی و (ب) تندی اولیهٔ گوی اول. (پ) آیا انرژی جنبشی (چرخش مرکز جرمها را در نظر نگیرید) پایسته است؟

۱۰۵- در شکل ۹-۸۰ دو ظرف مشابه حاوی شکر به وسیلهٔ سیم بدون وزنی که از روی قرقرهٔ بدون اصطکاکی عبور می‌کند به هم متصل‌اند. جرم سیم و قرقره قابل چشمپوشی است و هر ظرف با شکرش دارای جرم یکسان ۵۰۰g است و مرکزهای آنها ۵۰mm از هم فاصله دارند و در ارتفاع یکسانی نگهداشته شده‌اند. مطلوب است فاصلهٔ افقی مرکزجرم ظرف ۱ و مرکز جرم دستگاه دو- ظرف، (الف) در آغاز و (ب) پس از آنکه ۲۰g شکر از ظرف ۱ به ظرف ۲ منتقل شود. پس از انتقال و پس از آنکه ظرفها رها شدند، مرکز جرم (پ) در چه جهتی و (ت) با چه بزرگی شتاب، حرکت می‌کند؟



شکل ۹-۸۰ مسئلهٔ ۱۰۵

۱۰۶- توپی به جرم ۰/۱۵kg باسرعت $(۵/۰۰m/s)\hat{i}+(۶/۵۰m/s)\hat{j}+(۴/۰۰m/s)\hat{k}$ به یک دیوار عمودی برخورد می‌کند. توپ با سرعت $(۲/۰۰m/s)\hat{i}+(۳/۵۰m/s)\hat{j}+(-۳/۲۰m/s)\hat{k}$ به عقب برمی‌گردد. (الف) تغییر در اندازه حرکت توپ، (ب) ضربهٔ روی توپ و (پ) ضربهٔ روی دیوار چقدر است؟

۱۰۷- در زمان $t = ۰$ نیروی $\vec{F}_1 = (-۴/۰۰\hat{i}+۵/۰۰\hat{j})N$ بر ذره‌ای به جرم $۲/۰۰\times۱۰^{-۳}$ kg که در آغاز ساکن است و نیروی $\vec{F}_2 = (۲/۰۰\hat{i}-۴/۰۰\hat{j})N$ بر ذره‌ای به جرم $۴/۰۰\times۱۰^{-۳}$ kg که در آغاز ساکن است وارد می‌شوند. در زمان $t = ۰$ تا $t = ۲/۰۰m/s$ (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به جهت مثبت محور $x$) جابه‌جایی مرکز جرم دستگاه دو- ذره چقدر است؟ (پ) در $t = ۰$، انرژی جنبشی مرکز جرم چقدر است؟ SSM

۱۰۸- توپی به جرم ۰/۵۵۰kg به طور مستقیم به سمت پایین روی آسفالت فرود می‌آید و با تندی ۱۲/۰m/s به آن برخورد می‌کند و با تندی ۳/۰۰m/s به طور مستقیم به سمت بالا می‌رود. محور $y$ را به سمت بالا در نظر بگیرید. بر حسب نماد بردارهای یکه، (الف) تغییر در اندازه حرکت توپ، (ب) ضربهٔ روی توپ و (پ) ضربهٔ روی آسفالت، چقدر است؟

۱۰۹- برخوردی بین ذرهٔ ۲/۰۰kg که با سرعت $\vec{v}_1 = (-۴/۰۰m/s)\hat{i}+(-۵/۰۰m/s)\hat{j}$ حرکت می‌کند و ذرهٔ ۴/۰۰kg که با سرعت $\vec{v}_2 = (۶/۰۰m/s)\hat{i}+-۲/۰۰m/s)\hat{j}$ حرکت می‌کند، رخ می‌دهد. برخورد دو جسم را به هم می‌چسباند. سرعت آنها (الف) بر حسب یکاهای بردار- یکه چیست؟ (ب) بزرگی و (پ) زاویه آنها، چقدر است؟

۱۱۰- یک هستهٔ اتمی ساکن در مبداء دستگاه مختصات $xy$ به سه ذره تبدیل می‌شود. ذرهٔ ۱ به جرم $۱۶۷\times۱۰^{-۲۷}$kg با سرعت $(۶/۰۰\times۱۰^{۶}\,m/s)\hat{i}$ از مبدأ دور می‌شود. ذرهٔ ۲ به جرم $۸/۳۵\times۱۰^{-۲۷}$ kg با سرعت $(-۸/۰۰\times۱۰^{۶}\,m/s)\hat{j}$ از مبدأ دور می‌شود. (الف) بر حسب نمادگذاری بردار- یکه، اندازه حرکت خطی سومین ذره به جرم $۱۱/۷\times۱۰^{-۲۷}$kg چقدر است؟ (ب) در این تبدیل چقدر انرژی جنبشی ظاهر می‌شود؟

۱۱۱- الکترونی با اتم هیدروژن که در ابتدا ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. چه درصدی از انرژی جنبشی اولیهٔ الکترون به انرژی جنبشی اتم هیدروژن انتقال می‌یابد. (جرم اتم هیدروژن ۱۸۴۰ برابر جرم الکترون است.)

۱۱۲- در یک فیلم حادثه‌ای یک اتومبیل مسابقهٔ کوچک (به جرم ۱۵۰۰kg و طول ۳/۰m) روی یک قایق شناور (به جرم ۴۰۰۰kg و طول ۱۴m) از یک طرف به طرف دیگر طوری شتاب می‌گیرد که پس از آن اتومبیل بتواند از روی شکاف بین قایق و اسکله پرش کند. شما مشاور فنی برای فیلم هستید. قایق در آغاز با اسکله تماس دارد، همانند شکل ۹-۸۱؛ قایق بدون مقاومت زیادی در آب حرکت می‌کند؛ می‌توان فرض کرد جرم قایق و همچنین اتومبیل به طور یکنواخت توزیع شده است. حساب کنید که پهنای شکاف درست باید چقدر باشد تا اتومبیل پرش موفقیت آمیزی داشته باشد.



شکل ۹-۸۱ مسئلهٔ ۱۱۲

۱۱۳- یک بارکش به جرم ۲۹۰۰kg روی خط آهن با تندی ۲۵۰m/s حرکت می‌کند. در یک نقطهٔ معین، ظرف مستقر در بارکش از روی آن بلند شده، داخل آبی که بین مسیر قرار دارد می‌شود و آب را به یک مخزن خالی که روی بارکش قرار دارد می‌ریزد. با به کار بردن اصل پایستگی اندازه حرکت خطی، تندی بارکش را وقتی ۹۲۰kg آب وارد مخزن شد محاسبه کنید. از نیروهای باز دارنده روی ظرف صرفنظر کنید. SSM

۱۱۴- توپی به جرم ۱۴۰g با تندی ۷/۸m/s به یک دیوار عمودی برخورد می‌کند و با تندی یکسانی در جهت مخالف به عقب برمی‌گردد. برخورد ۳/۸۰m/s طول می‌کشد. بزرگی (الف) ضربه و (ب) نیروی میانگین وارد به دیوار از طرف توپ، چقدر است؟

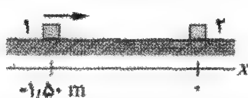
۱۱۵- (الف) مرکز جرم دستگاه زمین- ماه از مرکز زمین چقدر فاصله دارد؟ (پیوست پ، جرم زمین و ماه و فاصلهٔ بین آنها را به دست می‌دهد.) (ب) این فاصله چه درصدی از شعاع زمین است؟ SSM

۱۱۶- اتاقک سوخت به جرم ۵۰۰/۰kg به سفینهٔ فضایی به جرم ۴۰۰/۰kg که با ۱۰۰۰m/s نسبت به ایستگاه فضایی ساکن اصلی حرکت می‌کند، چسبیده است. انفجار کوچکی اتاقک را با تندی ۱۰۰/۰m/s نسبت به تندی جدید سفینهٔ فضایی به سمت عقب می‌فرستد. وقتی اندازه‌گیری توسط شخصی در سفینهٔ فضایی اصلی انجام شود، به دلیل انفجار، انرژی جنبشی اتاقک و سفینهٔ فضایی با چه کسری افزایش می‌یابند؟

۱۱۷- موشکی به جرم ۶۱۰۰kg برای پرتاب قائم از سطح زمین آماده شده است. اگر تندی گازهای خروجی ۱۲۰۰m/s باشد، چه مقدار گاز باید در هر ثانیه بیرون داده شود، تا نیروی پیشران (الف) برابر وزن موشک باشد و (ب) به موشک شتاب اولیه و به سمت بالای ۲۱m/s را بدهد. SSM

۱۱۸- یک واگن مسطح راه آهن به جرم ۲۱۴۰kg، که می‌تواند با اصطکاک قابل اغماضی حرکت کند بی حرکت در کنار ایستگاه قرار دارد. یک کشتی‌گیر سامورایی به جرم ۲۴۲kg با تندی ۵/۳m/s در امتداد ایستگاه (موازی مسیر) می‌دود و سپس روی واگن می‌پرد. اگر پس از آن (الف) کشتی‌گیر روی واگن بایستد، (ب) با تندی ۵/۳m/s نسبت به جهت اصلی خودش، بدود و (پ) برگردد و با تندی ۵/۳m/s نسبت به واگن در جهت مخالف اصلی خودش بدود، تندی واگن چقدر خواهد بود؟

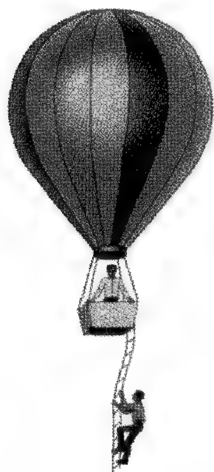
۱۱۹- در شکل ۹-۸۲، قطعهٔ ۱ با تندی ۰/۷۵m/s در امتداد محور $x$ روی کف بدون اصطکاکی سر می‌خورد. وقتی به قطعهٔ ۲ ساکن می‌رسد، دو قطعه برخورد کشسان می‌کنند. جدول جرم و طول (یکنواخت) قطعه‌ها و همچنین مکان مرکز آنها را در $t=0$ به دست می‌دهد. مرکز جرم دستگاه دو- قطعه (الف) در $t=0$، (ب) وقتی دو قطعه در ابتدا تماس پیدا می‌کنند، و (پ) در $t=4/0\,s$، در کجا واقع است؟



شکل ۹-۸۲ مسئلهٔ ۱۱۹

| قطعه | جرم (kg) | طول (cm) | مرکز در $t=0$ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۰/۲۵ | ۵/۰ | $x=-1/50\,m$ |
| ۲ | ۰/۵۰ | ۶/۰ | $x=0$ |

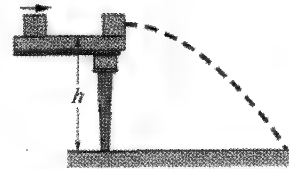
۱۲۰- در شکل ۹-۸۳ مردی با جرم ۸۰kg روی نردبانی که از بالونی با جرم کل ۳۲۰kg (شامل سبد مسافر) آویزان است، قرار دارد. بالن در آغاز نسبت به زمین ساکن است. اگر مرد روی نردبان با تندی ۲/۵m/s نسبت به نردبان شروع به بالا رفتن کند، بالون (الف) با چه تندی و (ب) در چه جهتی حرکت می‌کند. (پ) سپس، اگر مرد بالا رفتن را متوقف کند تندی بالون چقدر است؟


شکل ۹-۸۳ مسئلهٔ ۱۲۰

**۱۲۱-** ذرهٔ ۱ با جرم ۲۰۰g و تندی ۳/۰۰m/s با ذرهٔ ساکن ۲ با جرم ۴۰۰g برخورد یک بعدی می‌کند. اگر برخورد (الف) کشسان و (ب) کاملاً ناکشسان باشد، بزرگی ضربهٔ وارد بر ذرهٔ ۱ چقدر است؟

**۱۲۲-** در حین یک مأموریت به ماه، لازم است که تندی سفینهٔ فضایی در وقتی که با تندی ۴۰۰m/s نسبت به ماه حرکت می‌کند به اندازهٔ ۲/۲m/s افزایش یابد. تندی گازهای خروجی موتور موشک ۱۰۰۰m/s نسبت به سفینه است. چه کسری از جرم اولیهٔ سفینهٔ فضایی باید سوزانده و خارج شود تا این افزایش تندی حاصل شود؟

**۱۲۳-** در شکل ۹-۸۴، یک جعبهٔ کفش به جرم ۳/۲kg روی سطح افقی بدون اصطکاکی سُر می‌خورد و با جعبه کفش دیگری به جرم ۲/۰kg که در آغاز روی لبهٔ میز در ارتفاع $h=0/40\,m$ ساکن است برخورد می‌کند. تندی جعبه ۳/۲kg درست پیش از برخورد ۳/۰m/s است. اگر دو جعبه به خاطر چسبی که روی سطح آنها وجود دارد به هم بچسبند، انرژی جنبشی آنها درست پیش از برخورد به کف اتاق چقدر است؟




**شکل ۹-۸۴** مسئلهٔ ۱۲۳

**۱۲۴-** در ترتیب دو- کرهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۱۱، فرض کنید که کرهٔ ۱ دارای جرم ۵۰g و ارتفاع اولیهٔ $h_1 = 9/0\,cm$ و کرهٔ ۲ دارای جرم ۸۵g است. پس از آنکه کرهٔ ۱ رها شد و با کرهٔ ۲ به طور کشسان برخورد کرد، (الف) کرهٔ ۱ و (ب) کرهٔ ۲ به چه ارتفاعی می‌رسند؟ پس از برخورد (کشسان) بعدی، (پ) کرهٔ ۱ و (ت) کرهٔ ۲ به چه ارتفاعی می‌رسند؟ (*راهنمایی*: مقدارها را گرد نکنید.)

**۱۲۵-** جسمی به جرم ۳۰۰۰kg از ارتفاع ۶/۰m به طور قائم سقوط می‌کند و پس از برخورد با یک تودهٔ ۵۰۰kg آن را ۳/۰cm به سنگ کف فرو می‌برد. با فرض اینکه برخورد قطعه-توده یک برخورد کاملاً ناکشسان است، بزرگی نیروی میانگین وارد به توده را از طرف کف در طی ۳/۰cm پایین رفتن پیدا کنید.

**۱۲۶-** در شکل ۹-۶۵، قطعهٔ ۱ (به جرم ۶/۰kg) با تندی ۸/۰m/s به سمت راست و قطعهٔ ۲ (به جرم ۴/۰kg) با تندی ۲/۰m/s به سمت راست حرکت می‌کند. سطح بدون اصطکاک است و فنر با ثابت فنر ۸۰۰۰N/m به قطعهٔ ۲ متصل است. قطعهٔ ۱ سرانجام به قطعهٔ ۲ می‌رسد و با آن برخورد می‌کند. در لحظه‌ای که قطعهٔ ۱ با تندی ۶/۴m/s به سمت راست حرکت می‌کند، (الف) تندی قطعهٔ ۲ و (ب) انرژی پتانسیل کشسان فنر، چقدر است؟

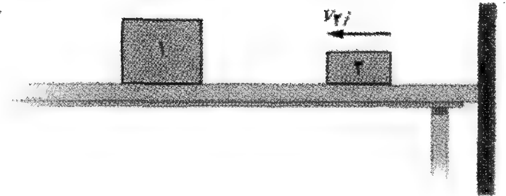
**۱۲۷-** یک الکترون (به جرم $m_1 = 9/11\times10^{-31}$ kg) و یک پروتون (به جرم $m_2 = 1/67\times10^{-27}$kg) از طریق نیروی الکتریکی یکدیگر را جذب می‌کنند. فرض کنید الکترون و پروتون در آغاز به اندازهٔ $d = 3/0\times10^{-6}$ m از هم فاصله دارند و از حال سکون رها شده‌اند. وقتی فاصلهٔ آنها به $1/0\times10^{-6}$ m کاهش یابد، نسبت (الف) بزرگی اندازه حرکت خطی الکترون به بزرگی اندازه حرکت خطی پروتون، (ب) تندی الکترون به تندی پروتون و (پ) انرژی جنبشی الکترون به انرژی جنبشی پروتون، چقدر است؟ وقتی جدایی به کاهش ادامه دهد آیا پاسخهای (الف) تا (پ)، افزایش می‌یابند یا کاهش یا تغییر نمی‌کنند؟

**۱۲۸-** یک واگن باری راه آهن به وزن ۲۸۰ kN که با تندی ۱/۵۲m/s در حرکت است به واگن دیگری به وزن ۲۱۰ kN که با تندی ۰/۹۱۴m/s و هم جهت با آن حرکت می‌کند می‌رسد. اگر واگنها به هم جفت شوند، مطلوب است (الف) تندی واگنها پس از برخورد و (ب) انرژی جنبشی هدر رفته در حین برخورد. حال اگر، برخورد کشسان باشد که احتمال آن خیلی کم است، تندی (پ) واگن سبکتر و (ت) واگن سنگینتر، پس از برخورد چقدر است؟

**۱۲۹-** جسمی به جرم ۳/۰kg که با تندی ۸/۰m/s در جهت مثبت محور $x$ در حرکت است با جرم $M$ ساکن برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از برخورد جسم با جرم $M$ دارای سرعت ۶/۰m/s در جهت مثبت محور $x$ است. جرم $M$ چقدر است؟ **SSM**

**۱۳۰-** دو ذرهٔ $P$ و $Q$ که به فاصلهٔ ۱/۰m از هم قرار دارند از حالت سکون رها می‌شوند. $P$ دارای جرم ۰/۱۵kg و $Q$ دارای جرم ۰/۳۰kg است. $P$ و $Q$ با نیروی ثابت $1/0\times10^{-2}$ N یکدیگر را جذب می‌کنند هیچ نیروی خارجی دیگری به دستگاه وارد نمی‌شود. (الف) تندی مرکز جرم $P$ و $Q$ وقتی که ۰/۵۰m فاصله دارند، چقدر است؟ (ب) در چه فاصله‌ای از محل اولیهٔ ذرهٔ $P$، دو ذره با هم برخورد می‌کنند؟

**۱۳۱-** در شکل ۹-۸۵، قطعه‌ای به جرم $m_1 = 6/6$ kg روی میز بدون اصطکاک درازی که یک طرف آن به دیوار متکی است، در حال سکون است. قطعهٔ ۲ به جرم $m_2$ را بین قطعهٔ ۱ و دیوار قرار می‌دهیم و آن را با تندی ثابت $v_{2i}$ به سمت چپ و به سمت قطعهٔ ۱ به حرکت درمی‌آوریم. مقدار $m_2$ را طوری تعیین کنید که پس از آنکه $m_2$ یک بار با $m_1$ و یک بار با دیوار برخورد کرد دو قطعه با یک سرعت حرکت کنند. فرض کنید که همهٔ برخوردها کشسان هستند (برخورد با دیوار تندی قطعهٔ ۲ را تغییر نمی‌دهد.)



شکل ۹-۸۵ مسئلهٔ ۱۳۱

۱۳۲- موشکی به جرم $M$ در امتداد محور $x$ با تندی ثابت $v_i =$ ۴۰m/s حرکت می‌کند. انفجار کوچکی موشک را به یک بخش عقب (به جرم $m_1$) و یک بخش جلو جدا می‌کند، هر دو بخش در امتداد محور $x$ حرکت می‌کنند. سرعت نسبی بین بخشهای عقب و جلو ۲۰m/s است. (الف) مقدار کمینهٔ ممکن تندی نهایی $v_f$ بخش جلو چقدر است و (ب) به ازای چه مقدار حدی جرم $m_1$ رخ می‌دهد؟ (پ) مقدار بیشینهٔ ممکن $v_f$ چقدر است؟ و (ت) به ازای چه مقدار حدی جرم $v_f$ رخ می‌دهد؟

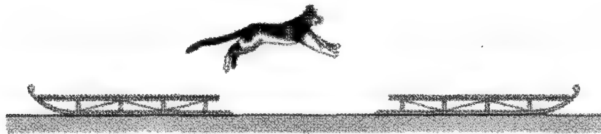
۱۳۳- یک بستهٔ ساکن به جرم ۲/۶۵kg منفجر و به سه قسمت تقسیم می‌شود که پس از آن روی کف بدون اصطکاکی سر می‌خورند. بسته در مبداء دستگاه مختصات بوده است. قسمت ۱ دارای جرم $m_1 =$ ۰/۵۰۰kg و سرعت (۱۰/۰ $\hat{i}$ +۱۲/۰ $\hat{j}$)m/s است. قسمت ۲ دارای جرم $m_2 =$ ۰/۷۵۰kg و تندی ۱۴/۰m/s است و با زاویهٔ °۱۱۰ حرکت می‌کند. (به طور پاد ساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور $x$). (الف) تندی قسمت ۳ چقدر است؟ (ب) در چه جهتی حرکت می‌کند؟

۱۳۴- ذرهٔ ۱ با جرم ۳/۰kg و سرعت (۵/۰m/s)$\hat{i}$ با ذرهٔ ۲ با جرم ۲/۰kg و سرعت (۶/۰m/s-)$\hat{i}$ برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از برخورد، سرعت (الف) ذرهٔ ۱ و (ب) ذرهٔ ۲، چقدر است؟

۱۳۵- در لحظهٔ معینی، چهار ذره دارای مختصات $xy$ و سرعتهای داده شده در جدول زیر هستند. در آن لحظه، مختصات (الف) $x$ و (ب) $y$ مرکز جرم آنها چیست و (پ) سرعت مرکز جرم آنها چقدر است؟

| ذره | جرم (kg) | مکان (m) | سرعت (m/s) |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲/۰ | ۰ , ۰/۳۰ | $-$۹/۰ $\hat{j}$ |
| ۲ | ۴/۰ | ۳/۰ , ۰ | ۶/۰ $\hat{i}$ |
| ۳ | ۳/۰ | ۰ , ۲/۰- | ۶/۰ $\hat{j}$ |
| ۴ | ۱۲ | ۱/۰- , ۰ | $-$۲/۰ $\hat{i}$ |

۱۳۶- شکل ۹-۸۶ دو سورتمهٔ یخی ۲۲/۷kg را نشان می‌دهد که به فاصلهٔ کمی از یکدیگر و پشت سر هم قرار گرفته‌اند. یک گربهٔ ۳/۶۳ کیلوگرمی که در آغاز در یکی از سورتمه‌ها ایستاده است روی سورتمهٔ دیگر می‌پرد و سپس دوباره به سورتمهٔ اول برمی‌گردد. گربه هر دو پرش را با تندی ۳/۰۵m/s نسبت به یخ انجام می‌دهد. تندیهای نهایی سورتمه‌ها را پیدا کنید.



شکل ۹-۸۶ مسئلهٔ ۱۳۶

# ۱۰ چرخش



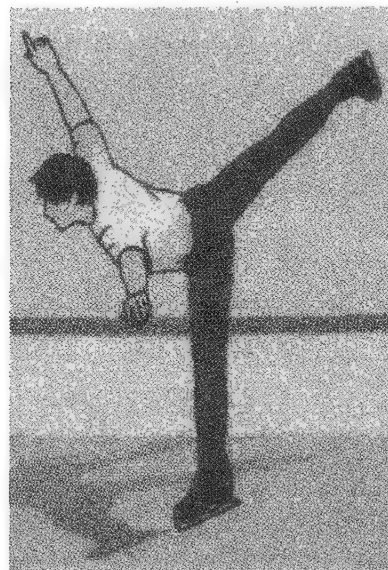
**چنگک میگو چگونه این موج‌های صوتی قوی را ایجاد می‌کند؟**

پاسخ در همین فصل.

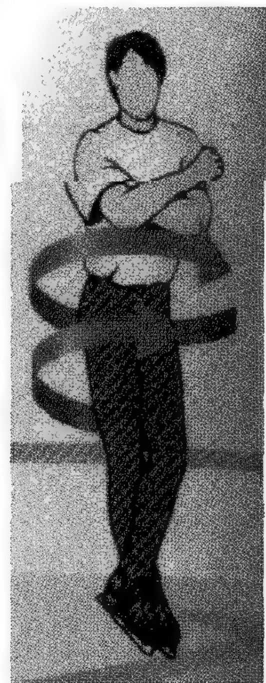
نوعی میگو که می‌تواند ایجاد صدا کند با بستن چنگک بسیار بزرگ خود به دور طعمه (خرچنگهای کوچک) آنها را بیهوش می‌کند. طعمه با موج صوتی قوی ایجاد شده توسط قسمت متحرک چنگک هنگام نزدیک شدن به قسمت ثابت بی‌حس می‌شود. این صوت (صدایی مانند ترکیدن ذرت) می‌تواند توسط غواص شنیده شود و وقتی خرچنگها بقدر کافی باشند می‌تواند به اندازه‌ای بلند باشد که یک زیردریایی را از آشکار کنندهٔ صوتی پنهان کند. موجهای صوتی هم چنین می‌توانند جرقه‌های کم نوری را ایجاد کنند، این چیزی است که عموماً صوت تولیدکنندهٔ نور یا صوت لیانی نامیده می‌شود. در هر صورت برخی پژوهشگران نور ایجاد شده از این نوع میگو را میگو لیانی نامیده‌اند.

## ۱۰-۱ فیزیک چیست؟

به طوری که توضیح دادیم یکی از مرکزهای توجه در فیزیک حرکت است. ولی تاکنون فقط دربارهٔ حرکت **انتقالی** بحث کرده‌ایم که در آن جسمی در طول یک خط مستقیم یا خمیده، مانند شکل ۱۰-۱ الف حرکت می‌کند. اکنون می‌خواهیم به حرکت **چرخشی** بپردازیم که در آن جسم به دور یک محور مانند شکل ۱۰-۱ ب می‌چرخد.



(الف)



(ب)

**شکل ۱۰-۱** حالت بدن یک اسکیت باز در حرکت (الف) انتقال خالص در یک جهت ثابت، و (ب) چرخش خالص حول محور ثابت.

حرکت چرخشی تقریباً در هر ماشینی دیده می‌شود، هر بار که در یک بطری نوشابه را باز می‌کنید چرخشی را می‌بینید یا هر بار که به یک پارک تفریحی می‌روید چرخش را تجربه می‌کنید. چرخش کلید بسیاری از فعالیتهای تفریحی است، مانند ضربهٔ بلندی که در بازی گلف زده می‌شود (زیرا توپ به خاطر وجود هوا باید چرخش کند تا بتواند هر چه بالاتر رود) یا پرتاب یک توپ گرد در بیسبال (در اینجا نیز توپ باید بچرخد تا به سمت چپ یا راست منحرف شود.) چرخش در مواردی آسیب جدی به مواد می‌زند مانند تاب نیاوردن برخی از مواد در هواپیما که در نتیجه باعث کاهش عمر آن می‌شود.

بحث خود را دربارهٔ چرخش درست همانند آنچه در فصل ۲ در مورد انتقال انجام دادیم، با تعریف متغیرهایی برای حرکت آغاز می‌کنیم.

## ۱۰-۲ متغیرهای چرخشی

حال می‌خواهیم چرخش یک جسم صلب را حول یک محور ثابت بررسی کنیم. **جسم صلب** جسمی است که می‌تواند با همهٔ قسمتهایش که به هم چسبیده‌اند بدون هیچ تغییر شکلی چرخش کند. **محور ثابت** بدین معناست که چرخش حول محوری رخ می‌دهد که حرکت نمی‌کند. بنابراین، در اینجا جسمی مانند خورشید بررسی نخواهد شد چون اجزای خورشید (گلوله‌ای از گاز) به همدیگر محکم نشده‌اند. هم چنین، جسمی شبیه توپ بولینگ که در طول مسیر خود در حال غلتیدن است مطالعه نخواهد شد زیرا توپ حول محور متحرکی چرخش می‌کند (حرکت توپ ترکیبی از چرخش و انتقال است).

شکل ۱۰-۲ جسم صلبی به شکل دلخواه را نشان می‌دهد که در حال چرخش حول یک محور ثابت است که به آن **محور چرخش** می‌گویند. در حالت چرخش خالص (*حرکت زاویه‌ای*) هر نقطه از جسم روی یک دایره به مرکز محور چرخش حرکت می‌کند و هر نقطه در طی یک بازهٔ زمانی مشخص زاویهٔ یکسانی را می‌پیماید. در انتقال خالص (*حرکت خطی*) هر نقطه از جسم در خط راستی حرکت می‌کند و هر نقطه در طی بازهٔ زمانی معین *مسافت خطی* یکسانی را طی می‌کند. در اینجا معادلهای زاویه‌ای کمیتهای خطی مکان، جابه‌جایی، سرعت و شتاب را یک به یک مورد بحث قرار می‌دهیم.

### *مکان زاویه‌ای*

شکل ۱۰-۲ یک *خط مرجع* ثابت در جسم و عمود بر محور چرخش را نشان می‌دهد که به همراه جسم می‌چرخد. **مکان زاویه‌ای** این خط برابر زاویهٔ خط نسبت به یک راستای ثابت است که آن را **مکان زاویه‌ای صفر** در نظر می‌گیریم. در شکل ۱۰-۳ مکان زاویه‌ای $\theta$ را نسبت به جهت مثبت محور $x$ اندازه گرفته‌ایم. از هندسه می‌دانیم، $\theta$ برابر است با

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(برحسب رادیان)} \qquad (۱-۱۰)$$

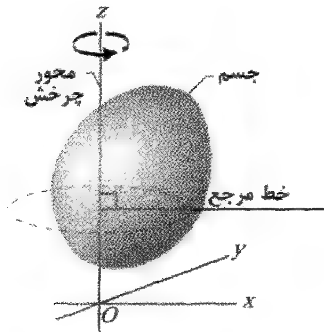
در اینجا $s$ طول کمان دایره‌ای است که از محور $x$ (مکان زاویه‌ای صفر) تا خط مرجع ادامه دارد و $r$ شعاع این دایره است.

زاویه‌ای که به این ترتیب تعریف می‌شود به جای دور (rev) یا درجه، برحسب **رادیان** (rad) اندازه‌گیری می‌شود. رادیان که نسبت دو طول است، یک عدد خالص بدون بعد است. از آنجا که محیط دایره‌ای به شعاع $r$ برابر $۲\pi r$ است، در نتیجه در یک دور کامل $۲\pi$ رادیان وجود دارد

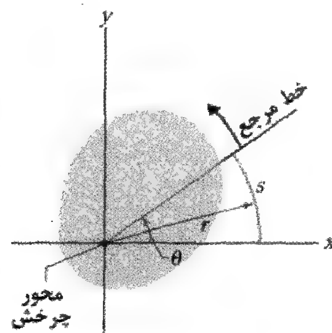
$$۱\ \text{rev} = ۳۶۰^\circ = \frac{۲\pi r}{r} = ۲\pi\ \text{rad} \qquad (۲-۱۰)$$

و بنابراین

$$۱\ \text{red} = ۵۷/۳^\circ = ۰/۱۵۹\ \text{rev} \qquad (۳-۱۰)$$




**شکل ۱۰-۲** جسم صلبی به شکل دلخواه در چرخش خالص حول محور $z$ دستگاه مختصات. مکان خط مرجع نسبت به جسم صلب اختیاری ولی عمود بر محور چرخش است. محور چرخش در جسم ثابت است و به همراه جسم می‌چرخد.




**شکل ۱۰-۳** نمای از بالای سطح مقطع جسم صلب شکل ۱۰-۲ در حال چرخش. صفحهٔ سطح مقطع عمود بر محور چرخش است که در اینجا به سمت خارج صفحه به طرف شماست. در این وضعیت، خط مرجع با محور $x$ زاویهٔ $\theta$ می‌سازد.

پس از هر چرخش کامل خط مرجع حول محور چرخش، زاویهٔ $\theta$ به صفر بر نمی‌گردد. اگر خط مرجع دو چرخش کامل را نسبت به مکان زاویه‌ای صفر انجام دهد، در این صورت مکان زاویه‌ای $\theta$ برای این خط برابر $\theta = ۴\pi\,\text{rad}$ است.

برای انتقال خالص در امتداد محور $x$ با دانستن $x(t)$ می‌توان همه چیز را دربارهٔ جسم متحرک دریافت که $x(t)$ مکان جسم برحسب تابعی از زمان است. به همین ترتیب، برای چرخش خالص با دانستن $\theta(t)$ همهٔ اطلاعات دربارهٔ چرخش جسم در دست است که $\theta(t)$ مکان زاویه‌ای خط مرجع جسم به صورت تابعی از زمان است.

## جابه‌جایی زاویه‌ای

اگر جسم شکل ۱۰-۳ حول محور چرخشی نظیر شکل ۱۰-۴ بچرخد و مکان زاویه‌ای خط مرجع از $\theta_1$ به $\theta_2$ تغییر کند، **جابه‌جایی زاویه‌ای** $\Delta\theta$ جسم برابر است با

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \qquad (۴-۱۰)$$

این تعریف جابه‌جایی زاویه‌ای نه تنها برای یک جسم صلب به طور کلی بلکه برای هر *ذرهٔ داخلی جسم صلب*، نیز برقرار است.

اگر جسمی در راستای محور $x$ حرکت انتقالی داشته باشد، بسته به اینکه جسم در جهت مثبت یا منفی محور $x$ حرکت کند جابه‌جایی $\Delta x$ مثبت یا منفی خواهد بود. به همین ترتیب، جابه‌جایی زاویه‌ای $\Delta\theta$ برای یک جسم چرخان می‌تواند بنابر قاعدهٔ زیر مثبت یا منفی باشد

> هر جابه‌جایی زاویه‌ای در جهت پادساعتگرد مثبت و در جهت ساعتگرد منفی است.

عبارت «*ساعتها منفی‌اند*» می‌تواند کمک کند تا این قاعده را به خاطر داشته باشیم (یقیناً وقتی آنها منفی هستند که زنگ آنها در صبح زود به صدا درآید.)

> ***نکتهٔ وارسی ۱*** قرصی مانند چرخ و فلک می‌تواند حول محور مرکزی خود بچرخد. کدامیک از جفت‌های زیر به ترتیب مکانهای زاویه‌ای اولیه و نهایی یک جابه‌جایی زاویه‌ای منفی است: (الف) $-۳\,\text{rad}, -۷\,\text{rad}$ ، (ب) $-۳\,\text{rad}, +۵\,\text{rad}$ ، (پ) $۷\,\text{rad}, -۳\,\text{rad}$؟

## سرعت زاویه‌ای

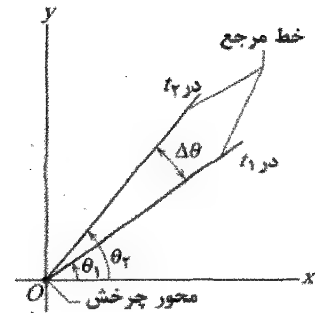
فرض کنید که جسم چرخانی در لحظهٔ $t_1$ در مکان $\theta_1$ و در لحظهٔ $t_2$ در مکان $\theta_2$ مانند شکل ۱۰-۴ باشد. **سرعت زاویه‌ای** میانگین این جسم در بازهٔ زمانی $\Delta t$ از $t_1$ تا $t_2$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\omega_{\text{avg}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (۵-۱۰)$$

که در آن $\Delta\theta$ جابه‌جایی زاویه‌ای است که در طی $\Delta t$ پیموده شده است ($\omega$ حرف کوچک یونانی به نام اُمگا است).

**سرعت زاویه‌ای (لحظه‌ای)** $\omega$ که بسیار با آن سر و کار داریم برابر حد نسبت داده شده در معادلهٔ ۱۰-۵ است، وقتی که $\Delta t$ به سمت صفر میل کند، در نتیجه

$$\omega = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (۶-۱۰)$$




**شکل ۱۰-۴** خط مرجع جسم صلب شکلهای ۱۰-۲ و ۱۰-۳ در لحظهٔ $t_1$ در مکان زاویه‌ای $\theta_1$ و در لحظهٔ بعدتر $t_2$ در مکان زاویه‌ای $\theta_2$ است. کمیت $\Delta\theta$ $(=\theta_2-\theta_1)$ جابه‌جایی زاویه‌ای است که طی بازهٔ زمانی $\Delta t$ $(=t_2-t_1)$ پیموده شده است. خود جسم نشان داده نشده است.

اگر $\theta(t)$ معلوم باشد می‌توان سرعت زاویه‌ای $\omega$ را با مشتق گیری به دست آورد.

معادله‌های ۱۰-۵ و ۱۰-۶ نه تنها برای کل جسم صلب برقرار است بلکه برای هر *ذرهٔ آن* جسم نیز صادق است، زیرا همهٔ ذره‌ها به هم متصل‌اند. یکای سرعت زاویه‌ای معمولاً رادیان بر ثانیه (rad/s) یا دور بر ثانیه (rev/s) است. یکای دیگری برای سرعت زاویه‌ای که دست کم سه دهه به کار می‌رفت این بود که صفحه‌های موسیقی تولید شده از مادهٔ وینیل روی دستگاه گرامافون با سرعتهای زاویه‌ای «$33\frac{1}{3}$ rpm» یا «۴۵ rpm» می‌چرخیدند که به معنای $33\frac{1}{3}$ دور بر دقیقه یا ۴۵ دور بر دقیقه است.

اگر ذره‌ای در امتداد محور $x$ حرکت انتقالی داشته باشد، سرعت خطی $v$ بسته به اینکه ذره در جهت مثبت یا منفی محور حرکت کند می‌تواند مثبت یا منفی باشد. به همین ترتیب، سرعت زاویه‌ای $\omega$ یک جسم صلب چرخان نیز بسته به اینکه چرخش جسم پادساعتگرد (مثبت) یا ساعتگرد (منفی) باشد می‌تواند مثبت یا منفی باشد. («ساعتها منفی‌اند» در اینجا نیز کاربرد دارد.) بزرگی سرعت زاویه‌ای را **تندی زاویه‌ای** می‌نامند که آن را نیز با $\omega$ نشان می‌دهند.

## *شتاب زاویه‌ای*

اگر سرعت زاویه‌ای جسم چرخان ثابت نباشد، آنگاه جسم دارای یک شتاب زاویه‌ای است. فرض می‌کنیم $\omega_2$ و $\omega_1$ به ترتیب سرعتهای زاویه‌ای در زمانهای $t_2$ و $t_1$ باشند. **شتاب زاویه‌ای میانگین** جسم چرخان در بازهٔ زمانی $t_1$ تا $t_2$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\alpha_{avg}=\frac{\omega_2-\omega_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (۱۰-۷)$$

که در آن $\Delta\omega$ تغییر در سرعت زاویه‌ای در بازهٔ زمانی $\Delta t$ است. **شتاب زاویه‌ای (لحظه‌ای)** $\alpha$ که زیاد مورد توجه ماست، برابر حد این مقدار است وقتی که $\Delta t$ به سمت صفر میل کند، یعنی

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt} \qquad (۱۰-۸)$$

معادله‌های ۱۰-۷ و ۱۰-۸ نیز برای *هر ذره از* جسم برقرارند. یکای شتاب زاویه‌ای معمولاً رادیان بر مجذور ثانیه $(\mathrm{rad/s^2})$ یا دور بر مجذور ثانیه $(\mathrm{rev/s^2})$ است.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۱ مهارت خود را تقویت کنید

قرص شکل ۱۰-۵ الف در حال چرخش به دور محور مرکزی خود مانند یک چرخ و فلک است. مکان زاویه‌ای $\theta(t)$ خط مرجع به صورت زیر داده شده است

$$\theta=-1/00-0/600t+0/250t^2 \qquad (۱۰-۹)$$

که در آن $t$ برحسب ثانیه، $\theta$ برحسب رادیان، و مکان زاویه‌ای صفر به صورت نشان داده شده در شکل است.

(الف) نمودار مکان زاویه‌ای قرص را برحسب تابعی از زمان از $t=-3/0\,s$ تا $t=5/4\,s$ رسم کنید. نمودار وضعیت قرص و خط مرجع مکان زاویه‌ی آن را در $t=-2/0\,s$ و $t=0\,s$ و $t=4/0\,s$ و در لحظه‌ای که نمودار محور $t$ را قطع می‌کند، رسم کنید.

**نکتهٔ کلیدی** مکان زاویه‌ای قرص همان مکان زاویه‌ای $\theta(t)$ مربوط به خط مرجع آن است که با معادلهٔ ۱۰-۹ به صورت تابعی از زمان داده می‌شود. بنابراین، معادلهٔ ۱۰-۹ را رسم می‌کنیم؛ نتیجه در شکل ۱۰-۵ ب نشان داده شده است.

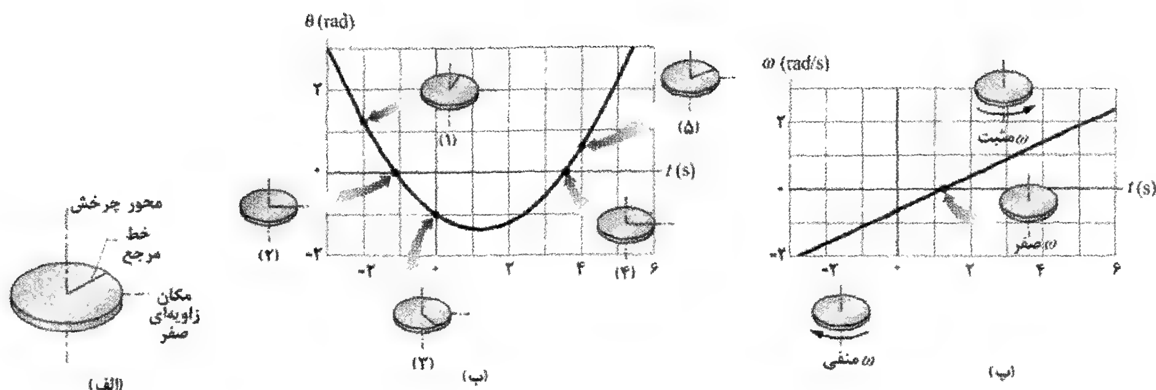
***محاسبه‌ها:*** برای رسم وضعیت قرص و خط مرجع آن در یک لحظهٔ معین باید $\theta$ را در آن لحظه تعیین کنیم. برای انجام این کار زمان را در معادلهٔ ۱۰-۹ قرار می‌دهیم. به ازای $t=-2/0\,s$ داریم

$$\theta=-1/00-(0/600)(-2/0)+(0/250)(-2/0)^2$$
$$=1/2\,\mathrm{rad}=1/2\,\mathrm{rad}\frac{360^\circ}{2\pi\,\mathrm{rad}}=69^\circ$$

این بدان معناست که در $t=-2/0\,s$ خط مرجع روی قرص از مکان صفر به اندازهٔ $1/2\,\mathrm{rad}=69^\circ$ به صورت پادساعتگرد چرخیده است (پاد ساعتگرد چون $\theta$ مثبت است). حالت ۱ در شکل ۱۰-۵ ب نشان دهندهٔ این وضعیت برای خط مرجع است.

به همین ترتیب، به ازای $t=0$ داریم $\theta=-1/00\,\mathrm{rad}=-57^\circ$ و بدان معناست که خط مرجع از مکان زاویه‌ای صفر تا $1/0\,\mathrm{rad}$ یا $57^\circ$ به صورت ساعتگرد همانند حالت ۳، چرخیده است. به‌ازای $t=4/0\,s$ خواهیم داشت $\theta=0/60\,\mathrm{rad}=34^\circ$ (حالت ۵). رسم وضعیت قرص برای وقتی که منحنی محور $t$ را قطع کند ساده است، زیرا در این صورت $\theta=0$ و خط مرجع در یک لحظه با مکان زاویه‌ای صفر منطبق می‌شود (حالتهای ۲ و ۴).

(ب) در چه زمان $t_{min}$ مقدار $\theta(t)$ به کمینهٔ مقدار نشان داده شده در شکل ۱۰-۵ ب می‌رسد؟ مقدار این کمینه چقدر است؟




**شکل ۱۰-۵** (الف) یک قرص چرخان، (ب) نمودار مکان زاویه‌ای $\theta(t)$ قرص. پنج شکل نشان داده شده مکان زاویه‌ای خط مرجع روی قرص را برای پنج نقطه روی منحنی نشان می‌دهند. (پ) نمودار سرعت زاویه‌ای $\omega(t)$ قرص، مقدارهای مثبت $\omega$ مربوط به چرخش پاد ساعتگرد و مقدارهای منفی مربوط به چرخش ساعتگرد هستند.

**نکتهٔ کلیدی** برای یافتن مقدار فرین (در اینجا مقدار کمینه) یک تابع، باید از تابع مشتق بگیریم و جواب را برابر صفر قرار دهیم.

***محاسبه‌ها:*** مشتق اول $\theta(t)$ برابر است با

$$\frac{d\theta}{dt} = -0/600 + 0/500t \qquad (10\text{-}10)$$

با مساوی صفر قرار دادن این مقدار و حل آن بر حسب $t$، زمان مربوط به مقدار کمینهٔ $\theta(t)$ به دست می‌آید

$$t_{min} = 1/2\text{s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

حال برای به دست آوردن مقدار کمینهٔ $\theta$، مقدار $t_{min}$ را در معادلهٔ ۱۰-۹ قرار می‌دهیم که به دست می‌دهد

$$\theta = -1/36\,\text{rad} \cong -77/9° \qquad \text{(پاسخ)}$$

این *مقدار کمینهٔ* $\theta(t)$ (پایینترین نقطهٔ منحنی شکل ۱۰-۵ ب) مربوط به چرخش *ساعتگرد بیشینهٔ* قرص از مکان زاویه‌ای صفر است، چیزی بیش از آنچه که در حالت ۳ نشان داده شده است.

(پ) نمودار سرعت زاویه‌ای $\omega$ قرص را بر حسب زمان از $t = -3/0\text{s}$ تا $t = 6/0\text{s}$ رسم کنید. وضعیت قرص را رسم کنید و جهت چرخش آن و علامت $\omega$ را در لحظه های $4/0\text{s}$، $t = -2/0\text{s}$ و نیز $t_{min}$ نشان دهید.

**نکتهٔ کلیدی** با استفاده از معادلهٔ ۱۰-۶ سرعت زاویه‌ای $\omega$ برابر $d\theta/dt$ است و از رابطهٔ ۱۰-۱۰ به دست می‌آید. بنابراین، داریم

$$\omega = -0/600 + 0/500\,t \qquad (10\text{-}11)$$

نمودار تابع $\omega(t)$ در شکل ۱۰-۵ پ نشان داده شده است.

***محاسبه‌ها:*** برای مشخص کردن وضعیت قرص در لحظهٔ $t = -2/0\text{s}$، این مقدار را در معادلهٔ ۱۰-۱۱ قرار می‌دهیم، در نتیجه داریم

$$\omega = -1/6\,\text{rad/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

علامت منفی بیانگر این است که در $t = -2/0\text{s}$ قرص به صورت ساعتگرد می‌چرخد (پایینترین حالت شکل ۱۰-۵ پ).

با قرار دادن $t = 4/0\text{s}$ در معادلهٔ ۱۰-۱۱، داریم

$$\omega = 1/4\ \text{rad/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

علامت مثبت نشان می‌دهد که در $t = 4/0\text{s}$ قرص پادساعتگرد می‌چرخد (بالاترین حالت در شکل ۱۰-۵ پ).

برای $t_{min}$، می‌دانیم که $d\theta/dt = 0$ است. بنابراین، باید داشته باشیم $\omega = 0$. یعنی قرص در لحظه‌ای می‌ایستد که خط مرجع به کمینهٔ مقدار $\theta$ در شکل ۱۰-۵ ب می‌رسد، به طوری که در حالت مرکزی شکل ۱۰-۵ پ نشان داده شده است.

(ت) با استفاده از نتیجه‌های قسمتهای (الف) تا (پ) حرکت قرص را از $t = -3/0\text{s}$ تا $t = 6/0\text{s}$ تشریح کنید.

***توصیف:*** وقتی ابتدا قرص را در لحظهٔ $t = -3/0\text{s}$ مشاهده کنیم دارای مکان زاویه‌ای مثبت است و به طور ساعتگرد می‌چرخد ولی حرکت آن در حال کند شدن است. قرص در مکان زاویه‌ای $\theta = -1/36\text{rad}$ متوقف می‌شود و سپس به طور پادساعتگرد شروع به چرخش می‌کند و سرانجام مکان زاویه‌ای دوباره مثبت می‌شود.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۲

یک فرفره بازی با شتاب زاویه‌ای زیر می‌چرخد

$$\alpha = 5t^3 - 4t$$

که در آن $t$ برحسب ثانیه و $\alpha$ برحسب رادیان به مربع ثانیه است. در $t = 0$، سرعت زاویه‌ای فرفره $5\text{rad/s}$ و خط مرجع در مکان زاویه‌ای $\theta = 2\text{rad}$ قرار دارد.

(الف) عبارتی برای سرعت زاویه‌ای $\omega(t)$ فرفره به دست آورید.

**نکتهٔ کلیدی** بنابر تعریف، $\alpha(t)$ مشتق $\omega(t)$ نسبت به زمان است. پس می‌توان $\omega(t)$ را با انتگرالگیری از $\alpha(t)$ نسبت به زمان به دست آورد.

***محاسبه‌ها:*** از معادلهٔ ۱۰-۸ داریم

$$d\omega = \alpha\, dt,$$

پس

$$\int d\omega = \int \alpha\, dt$$

از این خواهیم داشت

$$\omega = \int (5t^3 - 4t)\, dt = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + C$$

برای محاسبه ثابت انتگرال $C$، توجه داریم که در $t=0$، $\omega = 5\,\text{rad/s}$. با قرار دادن این مقدارها در عبارت خود، $\omega$ به دست می‌آید

$$5\,\text{rad/s} = 0 - 0 + C$$

پس $C = 5\,\text{rad/s}$، از آنجا

$$\omega = \frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5 \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) عبارتی برای مکان زاویه‌ای $\theta(t)$ فرفره به دست آورید.

**نکتهٔ کلیدی** بنابر تعریف $\omega(t)$، مشتق $\theta(t)$ نسبت به زمان است. پس با انتگرالگیری از $\omega(t)$ نسبت به زمان $\theta(t)$ به دست می‌آید

***محاسبه‌ها:*** چون از معادلهٔ ۱۰-۶ داریم

$$d\theta = \omega\, dt$$

می‌توان نوشت

$$\theta = \int \omega\, dt = \int (\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5)\, dt$$
$$= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^5 + 5t + C'$$
$$= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + 2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

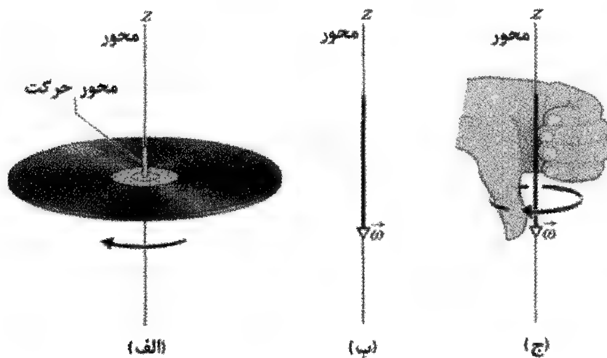
که $C'$ با توجه به اینکه $\theta = 2\,\text{rad}$ در $t=0$ است محاسبه می‌شود.

## ۱۰-۳ آیا کمیتهای زاویه‌ای بردار هستند؟

می‌توان مکان، سرعت و شتاب یک تک ذره را به کمک بردارها توصیف کرد. ولی اگر حرکت ذره را روی خط مستقیمی محدود کنیم، در واقع به نمادگذاری برداری نیاز نداریم. چنین ذره‌ای فقط می‌تواند در دو جهت حرکت کند و می‌توان این جهتها را با علامتهای مثبت و منفی نشان داد.

به همین ترتیب، جسم صلبی که حول محور ثابتی می‌چرخد، اگر از بالا و در راستای محور نگاه کنیم، تنها می‌تواند به صورت ساعتگرد یا پادساعتگرد بچرخد و در نتیجه می‌توان دو جهت را با علامتهای مثبت و منفی مشخص کرد. اکنون پرسش این است که: «آیا می‌توان جابه‌جایی زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای جسم چرخان را به صورت بردار در نظر گرفت؟» پاسخ در صورت داشتن شرایط لازم «مثبت» است (به استدلال زیر در مورد جابه‌جاییهای زاویه‌ای توجه کنید.)

سرعت زاویه‌ای را در نظر می‌گیریم. شکل ۱۰-۶ الف صفحهٔ گرامافونی را نشان می‌دهد که روی سطح دواری می‌چرخد. این صفحه دارای تندی زاویه‌ای ثابتی برابر $\omega(=33\frac{1}{3}\,\text{rev/min})$ در جهت ساعتگرد است. می‌توان این سرعت زاویه‌ای را به صورت بردار $\vec{\omega}$ که در راستای محور دوران است همانند شکل ۱۰-۶ ب نشان داد. چگونگی آن به این صورت است که طول این بردار را برحسب مقیاس مناسبی انتخاب می‌کنیم، برای مثال $1\text{cm}$ به ازای $10\,\text{rev/min}$. سپس با استفاده از **قاعدهٔ دست راست** جهتی را برای بردار $\vec{\omega}$ به دست می‌آوریم. به طوری که شکل ۱۰-۶ پ نشان می‌دهد اگر انگشتان دست راست خود را در جهت چرخش صفحه حلقه کنیم انگشت شست کشیده در جهت بردار سرعت زاویه‌ای خواهد بود. اگر صفحه در خلاف جهت بچرخد، طبق قاعدهٔ دست راست بردار سرعت زاویه‌ای در جهت مخالف قبل است.

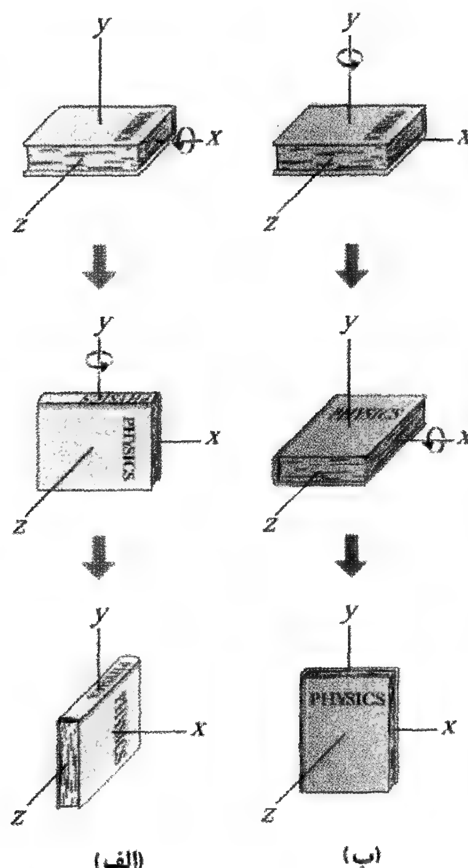



**شکل ۱۰-۶** (الف) صفحه‌ای حول یک محور قائم که بر محور حرکت منطبق است، می‌چرخد. (ب) سرعت زاویه‌ای صفحهٔ چرخان را می‌توان با بردار $\vec{\omega}$ نشان داد که در راستای محور و به طرف پایین قرار دارد. (پ) با استفاده از قانون دست راست جهت سرعت زاویه‌ای به سمت پایین به دست می‌آید. هرگاه انگشتان دست راست خود را به دور صفحه در جهت حرکت آن حلقه کنیم انگشت شست باز شده در جهت $\vec{\omega}$ خواهد بود.

در نظر گرفتن کمیتهای زاویه‌ای به عنوان بردار و به کار بردن آنها ساده نیست زیرا معمولاً انتظار داریم که چیزی در *راستای* بردار حرکت کند، در حالی که در اینجا چنین نیست، بلکه چیزی (مثل جسم صلب) *حول* راستای بردار می‌چرخد. از نظر چرخش خالص، یک بردار نشان دهندهٔ محوری برای دوران است نه جهتی که جسم حرکت می‌کند. با وجود این یک بردار حرکت را هم مشخص می‌کند و علاوه بر این، این بردار از تمام

قاعده‌های برداری گفته شده در فصل ۳ پیروی می‌کنـد. شـتاب زاویه‌ای $\vec{\alpha}$ بردار دیگری است که آن نیز از این قاعده‌ها پیروی می‌کند.

در این فصل فقط چرخش حول یک محور ثابت را در نظر می‌گیریم. برای چنین حالتهایی نیازی به استفاده از بردارها نداریم، یعنی می‌توان سرعت زاویه‌ای را با $\omega$ و شتاب زاویه‌ای را با $\alpha$ نشان داد و جهت آن را با علامت مثبت برای پادساعتگرد یا علامت منفی برای ساعتگرد مشخص کرد.




**شکل ۱۰-۷** (الف) به کتاب از موضع اولیه‌اش، از بالا، دو چرخش °۹۰ پی در پی داده می‌شود، ابتدا حول محور $x$ (افقی) و سپس حول محور $y$ (قائم). (ب) همین چرخشها به طور معکوس به کتاب داده شده است.

اکنون توجه داشته باشید که *جابه‌جاییهای* زاویه‌ای را *نمی‌توان* به صورت بردار در نظر گرفت (مگر آنکه بسیار کوچک باشند.) چرا؟ یقیناً می‌توانیم به آنها بزرگی و جهت نسبت دهیم، همان‌طور که برای بردار سرعت زاویه‌ای شکل ۱۰-۶ این کار را کردیم، اما برای اینکه کمیتی بردار باشد باید از قاعده‌های جمع برداری *نیز* پیروی کند. بنابر یکی از این قاعده‌ها اگر دو بردار را با هم جمع کنیم ترتیب جمع آنها نباید تأثیری در حاصل جمع داشته باشد در حالی‌که این امر برای جابه‌جاییهای زاویه‌ای صادق نیست.

شکل ۱۰-۷ مثالی در این زمینه است. یک کتاب که در ابتدا به صورت افقی قرار گرفته است دو جابه‌جایی زاویه‌ای °۹۰ پیدا می‌کند، ابتدا مطابق شکل ۱۰-۷ الف و بار دوم مطابق شکل ۱۰-۷ ب. اگر چه دو جابه‌جایی زاویه‌ای مشابه‌اند ولی ترتیب آنها یکی نیست و در نتیجه کتاب در سمتگیریهای متفاوتی قرار می‌گیرد. مثال دیگر این است. دست راست خود را به طرف پایین نگهدارید، کف دست به طرف پا واقع می‌شود. مچ خود را محکم نگهدارید، (۱) دست خود را به سمت جلو بالا ببرید تا افقی شود، (۲) آن را در صفحه افقی حرکت دهید تا در راستای سمت راست قرار گیرد، و (۳) سپس آن را پایین آورید تا در پهلوی شما واقع شود. کف دست شما اکنون رو به جلو قرار دارد. اگر دوباره ولی این بار به طور معکوس این کار را انجام دهید، این دفعه کف دست شما در چه جهتی است؟ از هر دو مثال باید نتیجه گرفته باشیم که جمع دو جابه‌جایی زاویه‌ای به ترتیب آنها بستگی دارد و نمی‌توانند بردار باشند.

## ۱۰-۴ چرخش با شتاب زاویه‌ای ثابت

در حرکت انتقالی خالص، حرکت با *شتاب خطی ثابت* (مثلاً برای سقوط آزاد یک جسم) یکی از حالتهای ویژهٔ مهم است. در جدول ۲-۱ دسته معادله‌هایی مربوط به این حرکت درج شده است.

در چرخش خالص نیز حالت *شتاب زاویه‌ای ثابت* از اهمیت برخوردار است و برای این حالت هم دسته معادله‌های مشابهی برقرار است. در اینجا نمی‌خواهیم آنها را اثبات کنیم ولی با قرار دادن کمیتهای زاویه‌ای معادل برای هر کمیت خطی به سادگی می‌توان آنها را مشابه معادله‌های خطی نوشت. این کار در جدول ۱۰-۱ انجام شده است به طوری که هر دو دسته معادله‌ها (معادله‌های ۲-۱۱، ۲-۱۵ تا ۲-۱۸؛ و معادله‌های ۱۰-۱۲ تا ۱۰-۱۶) نوشته شده‌اند.

توجه کنید که معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵ معادله‌های اصلی برای شتاب خطی ثابت‌اند به طوری که بقیهٔ معادله‌ها را می‌توان از روی آنها به دست آورد. به همین ترتیب، معادله‌های ۱۰-۱۲ و ۱۰-۱۳ معادله‌های اصلی برای شتاب زاویه‌ای ثابت‌اند و معادله‌های زاویه‌ای دیگر را می‌توان از روی آنها به دست آورد. برای حل یک مسئلهٔ ساده در مورد شتاب زاویه‌ای ثابت معمولاً باید از یکی از معادله‌های زاویه‌ای استفاده کرد، (البته اگر این جدول را در اختیار داشته باشیم). در این صورت معادله‌ای را انتخاب می‌کنیم که متغیر نامعلوم مسئله در آن معادله موجود باشد.

روش بهتر این است که فقط معادله‌های ۱۰-۱۲ و ۱۰-۱۳ را در ذهن داشته باشیم و در صورت نیاز آنها را همزمان حل کنیم. مسئله نمونهٔ ۱۰-۴ مثالی در این مورد است.

**جدول ۱۰-۱**

معادله‌های حرکت برای شتاب خطی ثابت و شتاب زاویه‌ای شتاب

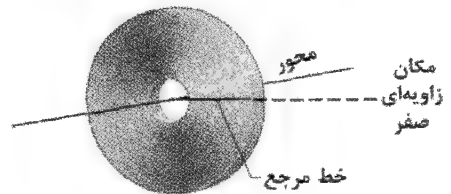
| شمارهٔ معادله | معادلهٔ زاویه‌ای | متغیرهای نامعلوم | | معادلهٔ خطی | شمارهٔ معادله |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\theta - \theta_0$ | $x - x_0$ | | |
| ۱۲-۱۰ | $\omega = \omega_0 + \alpha t$ | $\theta - \theta_0$ | $x - x_0$ | $v = v_0 + at$ | (۱۱-۲) |
| ۱۳-۱۰ | $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ | $\omega$ | $v$ | $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ | (۱۵-۲) |
| ۱۴-۱۰ | $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$ | $t$ | $t$ | $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ | (۱۶-۲) |
| ۱۵-۱۰ | $\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$ | $\alpha$ | $a$ | $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$ | (۱۷-۲) |
| ۱۶-۱۰ | $\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2} a t^2$ | $\omega_0$ | $v_0$ | $x - x_0 = vt - \frac{1}{2} a t^2$ | (۱۸-۲) |

✓ **نکتهٔ وارسی ۲** در چهار وضعیت، یک جسم در حال چرخش دارای مکان زاویه‌ای $\theta(t)$، از این قرار است: (الف) $\theta = 3t - 4$، (ب) $\theta = -5t^3 - 4t^2 + 6$، (پ) $\theta = 2/t^2 - 4/t$ و (ت) $\theta = 5t^2 - 3$. برای کدامیک از حالتها، معادله‌های زاویه‌ای جدول ۱۰-۱ برقرارند؟

## مسئلهٔ نمونه ۱۰-۳

سنگ سمباده‌ای (شکل ۱۰-۸) با شتاب زاویه‌ای ثابت $\alpha = 0.35\,\text{rad/s}^2$ می‌چرخد. در لحظهٔ $t = 0$ سرعت زاویه‌ای $\omega_0 = -4.6\,\text{rad/s}$ و خط مرجع روی آن افقی و در مکان زاویه‌ای $\theta_0 = 0$ است.

(الف) در چه زمانی پس از $t = 0$ خط مرجع در مکان زاویه‌ای $\theta = 5.0\,\text{rev}$ خواهد بود؟




**شکل ۱۰-۸** یک سنگ سمباده که خط مرجع آن در $t = 0$ (که فرض می‌کنیم روی سنگ علامتگذاری شده) افقی است.

**نکتهٔ کلیدی** چون شتاب زاویه‌ای ثابت است می‌توان از معادله‌های حرکت چرخشی جدول ۱۰-۱ استفاده کرد. معادلهٔ ۱۰-۱۳ را انتخاب می‌کنیم، چون تنها متغیر نامعلوم آن زمان $t$ است

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

***محاسبه‌ها:*** با قرار دادن مقدارهای معلوم و قرار دادن $\theta_0 = 0$ و $\theta = 5.0\,\text{rev} = 10\pi\,\text{rad}$ داریم

$$10\pi\,\text{rad} = (-4.6\,\text{rad/s})t + \frac{1}{2}(0.35\,\text{rad/s}^2)t^2$$

(در اینجا به جای $5.0\,\text{rev}$ مقدار $10\pi\,\text{rad}$ را قرار داده‌ایم تا یکاها سازگار باشند.) با حل این معادله برای $t$، داریم

$$t = 32\,\text{s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

ب) چرخش سنگ سمباده را بین $t = 0$ و $t = 32\,\text{s}$ توصیف کنید.

***توصیف:*** این چرخ ابتدا در جهت منفی (ساعتگرد) با سرعت زاویه‌ای $\omega_0 = -4.6\,\text{rad/s}$ می‌چرخد، اما شتاب زاویه‌ای آن $\alpha$، مثبت است. این علامت مخالف برای سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای به این معناست که چرخش چرخ در جهت منفی کند، و متوقف می‌شود و پس از تغییر جهت دادن در جهت مثبت می‌چرخد. بعد از اینکه خط مرجع به سمتگیری اولیهٔ خود در $\theta = 0$ برگشت، چرخ در مدت $t = 32\,\text{s}$ تعداد $5.0$ دور دیگر می‌زند.

(پ) در چه زمان $t$ سنگ سمباده به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود؟

***محاسبه‌ها:*** باز هم به جدول معادله‌های مربوط به شتاب زاویه‌ای ثابت رجوع می‌کنیم و دوباره به معادله‌ای نیاز داریم که فقط شامل متغیر نامعلوم مورد نظر، یعنی $t$ باشد. اکنون این معادله باید شامل متغیر $\omega$ نیز باشد به طوری بتوان آن را مساوی صفر قرار داد و معادله را برای $t$ حل کرد. معادلهٔ ۱۰-۱۲ را انتخاب می‌کنیم که به دست می‌دهد

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4.6\,\text{rad/s})}{0.35\,\text{rad/s}^2} = 13\,\text{s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

## مسئلهٔ نمونه ۱۰-۴

وقتی یک گردونه را به کار می‌اندازیم (استوانهٔ چرخانی که در مسئلهٔ نمونهٔ ۶-۸ مورد بحث قرار دادیم) متوجه نگرانی بیش از حد یکی از مسافرها می‌شویم و در طی ۲۰ دور تندی زاویه‌ای را از $3.40\,\text{rad/s}$ به $2.00\,\text{rad/s}$ با شتاب زاویه‌ای ثابت کاهش می‌دهیم. (واضح است که مسافر بیشتر «شخص انتقالی» است تا «شخص چرخشی».)

(الف) شتاب زاویه‌ای ثابت گردونه در طی کاهش سرعت زاویه‌ای چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** از آنجا که شتاب زاویه‌ای ثابت است، با توجه به معادله‌های اصلی مربوط به شتاب زاویه‌ای ثابت (معادله‌های ۱۰-۱۲ و ۱۰-۱۳) شتاب زاویه‌ای را می‌توان به سرعت زاویه‌ای و جابه‌جایی زاویه‌ای مربوط کرد.

***محاسبه‌ها:*** سرعت زاویه‌ای اولیهٔ $\omega_0 = ۳/۴۰ \text{rad/s}$، جابه‌جایی زاویه‌ای برابر $\theta - \theta_0 = ۲۰/۰ \text{rev}$ و سرعت زاویه‌ای در پایان این جابه‌جایی برابر $\omega = ۲/۰۰ \text{ rad/s}$ است. اما شتاب زاویه‌ای $\alpha$ و زمان $t$ را نمی‌دانیم که هر دو در معادلهٔ اصلی ما هستند.

برای حذف متغیر نامعلوم $t$، از معادلهٔ ۱۰-۱۲ می‌توان نوشت

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

که اگر آن را در معادلهٔ ۱۰-۱۳ قرار می‌دهیم، داریم

$$\theta - \theta_0 = \omega_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \frac{۱}{۲}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^۲$$

با حل این معادله برای $\alpha$ و با قرار دادن داده‌های معلوم و تبدیل $۲۰ \text{rev}$ به $۱۲۵/۷ \text{rad}$ خواهیم داشت

$$\alpha = \frac{\omega^۲ - \omega_0^۲}{۲(\theta - \theta_0)} = \frac{(۲/۰۰ \text{rad/s})^۲ - (۳/۴۰ \text{ rad/s})^۲}{۲(۱۲۵/۷ \text{rad})}$$

$$= -۰/۰۳۰۱ \text{ rad/s}^۲ \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) این کاهش تندی چه مدت زمانی طول می‌کشد؟

***محاسبه‌ها:*** اکنون $\alpha$ را داریم و می‌توانیم از معادلهٔ ۱۰-۱۲ استفاده کنیم. حل آن برای $t$ به دست می‌دهد

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{۲/۰۰ \text{ rad/s} - ۳/۴۰ \text{ rad/s}}{-۰/۰۳۰۱ \text{ rad/s}^۲}$$

$$= ۴۶/۵ \text{ s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

## ۱۰-۵ رابطهٔ میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای

در بخش ۴-۷، دربارهٔ حرکت دایره‌ای یکنواخت بحث کردیم که در آن ذره‌ای با تندی خطی ثابت $v$ روی دایره‌ای حول یک محور چرخش ثابت حرکت می‌کرد. وقتی یک جسم صلب مثل چرخ و فلک حول محوری می‌چرخد، هر ذرهٔ جسم روی دایرهٔ خودش به دور محور حرکت می‌کند. چون جسم صلب است، همه ذره‌ها یک چرخش در زمان یکسان انجام می‌دهند؛ یعنی همهٔ آنها دارای تندی زاویه‌ای یکسان $\omega$ هستند.

اما ذره‌ای که در فاصلهٔ دورتری از محور قرار دارد دارای محیط دایرهٔ بزرگتری است و در نتیجه تندی خطی $v$ بیشتری دارد. این مطلب را می‌توان روی چرخ و فلک دریافت. بدون توجه به فاصلهٔ شما از مرکز چرخ و فلک با تندی زاویه‌ای یکسان $\omega$ می‌چرخید ولی اگر به طرف لبهٔ خارجی آن حرکت کنید، تندی خطی $v$ شما به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد.

معمولاً لازم است که متغیرهای خطی $s$، $v$ و $a$ را برای نقطهٔ بخصوصی در یک جسم چرخان به متغیرهای زاویه‌ای $\theta$ و $\omega$ و $\alpha$ مربوط کنیم. این دو مجموعه متغیرها از طریق $r$ یعنی *فاصلهٔ عمودی* نقطه از محور دوران به هم مربوط‌اند. این فاصلهٔ عمودی، فاصلهٔ میان آن نقطه و محور دوران است که در امتداد عمود بر محور اندازه‌گیری می‌شود. این فاصله همچنین شعاع $r$ دایره طی شده توسط این نقطه حول محور دوران است.

### مکان

اگر خط مرجع روی جسم صلب با زاویهٔ $\theta$ بچرخد، یک نقطهٔ روی جسم در مکان $r$ از محور چرخش مسافت $s$ را در طول یک کمان دایره‌ای طی می‌کند که $s$ از معادلهٔ ۱۰-۱ به دست می‌آید

$$s = \theta r \qquad \text{(برحسب رادیان)} \qquad (۱۰\text{-}۱۷)$$

این اولین رابطهٔ خطی- زاویه‌ای است. *توجه کنید:* زاویهٔ $\theta$ در اینجا باید برحسب رادیان اندازه‌گیری شود چون خود معادلهٔ ۱۰-۱۷ تعریف اندازهٔ زاویه برحسب رادیان است.

### تندی

با مشتق گیری از معادلهٔ ۱۰-۱۷ نسبت به زمان- در صورتی که $r$ ثابت باشد- داریم

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r$$

اما، کمیت $\frac{ds}{dt}$ تندی خطی (بزرگی سرعت خطی) نقطهٔ مورد نظر و $\frac{d\theta}{dt}$ برابر تندی زاویه‌ای $\omega$ جسم چرخان است، به طوری که

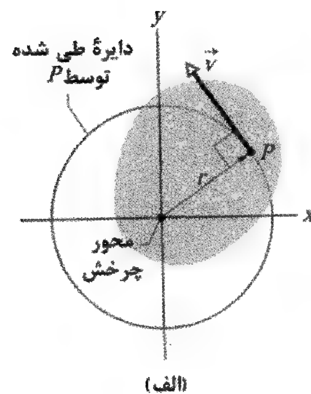
$$v = \omega r \qquad \text{(برحسب رادیان)} \qquad (۱۰\text{-}۱۸)$$

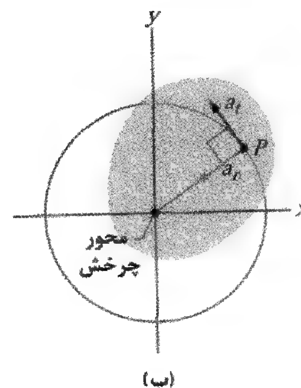
*توجه کنید:* تندی زاویه‌ای $\omega$ باید با مقیاس رادیان بیان شود.

معادلهٔ ۱۰-۱۸ حاکی از آن است که چون همهٔ نقطه‌های داخل جسم صلب دارای تندی زاویه‌ای $\omega$ هستند، نقطه‌های با شعاع $r$ بزرگتر تندی خطی بزرگتری دارند. شکل ۱۰-۹ الف خاطر نشان می‌کند که سرعت خطی همیشه بر مسیر دایره‌ای نقطهٔ مورد بحث مماس است.

اگر تندی زاویه‌ای $\omega$ جسم صلب ثابت باشد، آنگاه بنابر معادلهٔ ۱۰-۱۸ تندی خطی $v$ برای هر نقطهٔ درون آن نیز ثابت است. در نتیجه هر نقطهٔ داخل جسم حرکت دایره‌ای یکنواخت خواهد داشت. دورهٔ تناوب چرخش $T$ برای حرکت هر نقطه و برای خود جسم صلب با معادلهٔ ۴-۳۵ داده می‌شود

$$T = \frac{۲\pi r}{v} \qquad (۱۰\text{-}۱۹)$$




**شکل ۱۰-۹** جسم صلب در حال چرخش شکل ۱۰-۲ که سطح مقطع آن را از نمای دید بالا می‌بینیم. هر نقطه از جسم (مانند $P$) روی دایره‌ای حول محور چرخش حرکت می‌کند. (الف) سرعت خطی $\vec{v}$ برای هر نقطه بر دایره‌ای که روی آن می‌چرخد مماس است. (ب) شتاب خطی $a$ این نقطه (به طور کلی) دارای دو مؤلفه است: مؤلفهٔ مماسی $a_t$ و مؤلفهٔ شعاعی $a_r$.

این معادله حاکی از آن است که زمان لازم برای یک دور، برابر فاصلهٔ $2\pi r$ طی شده در یک دور تقسیم بر تندی حرکت جسم است. با قرار دادن $v$ از معادلهٔ ۱۰-۱۸ و حذف $r$ خواهیم داشت

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (۱۰-۲۰)$$

بنا به این معادله زمان لازم برای پیمودن یک دور برابر فاصلهٔ زاویه‌ای $2\pi$ رادیان طی شده در یک دور تقسیم بر تندی زاویه‌ای (یا آهنگ) مربوط به پیمودن آن زاویه است.

### شتاب

با مشتق گیری از معادلهٔ ۱۰-۱۸ نسبت به زمان- باز هم در حالتی که $r$ ثابت باشد- خواهیم داشت

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r \qquad (۱۰-۲۱)$$

در اینجا به مشکلی بر می‌خوریم. در معادلهٔ ۱۰-۲۱، $dv/dt$ نشان دهندهٔ فقط بخشی از شتاب خطی است که ناشی از تغییر در بزرگی سرعت خطی $\vec{v}$ است. نظیر $\vec{v}$، این بخش از شتاب خطی نیز مماس بر مسیر نقطهٔ مورد نظر است که آن را *مؤلفهٔ مماسی* $a_t$ شتاب خطی آن نقطه می‌نامیم و می‌نویسیم

$$a_t = \alpha r \qquad \text{(برحسب رادیان)} \qquad (۱۰-۲۲)$$

که در آن $\alpha = d\omega/dt$ است. *توجه کنید:* شتاب زاویه‌ای $\alpha$ در معادلهٔ ۱۰-۲۲ باید بر حسب رادیان بیان شود.

علاوه بر این، همان‌طور که معادلهٔ ۴-۳۴ نشان می‌دهد یک ذره (یا نقطه) که در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند دارای یک *مؤلفهٔ شعاعی* شتاب خطی $a_r = v^2/r$ است (به طور شعاعی و به طرف داخل) که از تغییر در جهت سرعت خطی $\vec{v}$ ناشی می‌شود. با قرار دادن $v$ از معادلهٔ ۱۰-۱۸ می‌توان این مؤلفه را به صورت زیر نوشت

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(برحسب رادیان)} \qquad (۱۰-۲۳)$$

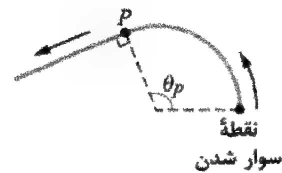
بنابراین، همان‌طور که شکل ۱۰-۹ ب نشان می دهد شتاب خطی یک نقطه از جسم صلب در حال چرخش در حالت کلی دارای دو مؤلفه است. یک مؤلفهٔ شعاعی $a_r$ به طرف داخل (که از معادلهٔ ۱۰-۲۳به دست می‌آید)، در صورتی که سرعت زاویه‌ای جسم صفر نباشد، یک مؤلفهٔ مماسی $a_t$ (که از معادلهٔ ۱۰-۲۲ به دست می‌آید) در صورتی که شتاب زاویه‌ای صفر نباشد.

> ✔ **نکتهٔ وارسی۳** سوسکی در کنارهٔ یک چرخ و فلک در حال چرخش قرار دارد. اگر تندی زاویه‌ای این دستگاه (چرخ و فلک + سوسک) ثابت باشد، آیا این سوسک (الف) شتاب شعاعی و (ب) شتاب مماسی دارد؟ اگر $\omega$ شروع به کاهش کند، آیا این سوسک (پ) شتاب شعاعی و (ت) شتاب مماسی دارد؟

#### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۵

به رغم دقت زیاد در مهندسی قطار تفریحی، چند نفر از میلیونها مردمی که سوار بر آن می‌شوند با مشکل پزشکی سردرد روبه‌رو می‌شوند. علائم مرض که ممکن است تا چند روز بروز نکند، با سردرد و سرگیجه همراه است، که هر دو مستلزم درمان پزشکی است. می‌خواهیم علت احتمالی را با طراحی مسیری برای یک *قطار تفریحی القایی* بررسی کنیم (که بتواند با نیروی مغناطیسی حتی روی یک مسیر افقی شتاب بگیرد). برای ایجاد هیجان اولیه می‌خواهیم که هر مسافر با شتاب $g$ در امتداد مسیر افقی از نقطهٔ سوار شدن حرکت کند. برای افزایش این هیجان همچنین می‌خواهیم که قسمت اولیهٔ مسیر یک کمان دایره‌ای تشکیل دهد (شکل ۱۰-۱۰)، به طوری که مسافر یک شتاب مرکز گرا نیز حس کند. وقتی مسافر در طول کمان شتاب بگیرد بزرگی این شتاب مرکزگرا به طور هراس‌آوری افزایش می‌یابد. وقتی بزرگی $a$ شتاب خالص در یک نقطهٔ $P$ و زاویهٔ $\theta_P$ در طول کمان به $4g$ برسد می‌خواهیم که مسافر روی خط راستی در امتداد مماس بر کمان حرکت کند.

(الف) زاویهٔ $\theta_P$ باید چقدر باشد تا $a$ در نقطهٔ $P$ برابر $4g$ شود؟




**شکل ۱۰-۱۰** نمای دید از بالای یک مسیر افقی برای یک قطار تفریحی. مسیر با یک کمان دایره‌ای از نقطهٔ سوار شدن آغاز می‌شود و سپس از نقطهٔ $P$ در راستای مماس بر کمان ادامه می‌یابد.

**نکتهٔ کلیدی** (۱) در یک لحظهٔ معین، شتاب خالص مسافر $\vec{a}$ برابر جمع برداری شتاب مماسی $\vec{a}_t$ در راستای مسیر و شتاب شعاعی $\vec{a}_r$ در جهت مرکز خمیدگی (مانند شکل ۱۰-۹ ب) است. (۲) بنابر معادلهٔ ۱۰-۲۳ مقدار $a_r$ در هر لحظهٔ معین به تندی زاویه‌ای $\omega$ بستگی دارد ($a_r = \omega^2 r$ که در آن $r$ شعاع کمان دایره‌ای است.) (۳) شتاب زاویه‌ای $\alpha$ به دور کمان بنابر معادلهٔ ۱۰-۲۲ ($a_t = \alpha r$) به شتاب مماسی $a_t$ در امتداد مسیر بستگی دارد. (۴) چون $a_t$ و $r$ ثابت‌اند، بنابراین، $\alpha$ نیز ثابت است و در نتیجه می‌توانیم معادله‌های شتاب زاویه‌ای ثابت را به کار بریم.

***محاسبه‌ها:*** چون می‌خواهیم مقدار مکان زاویه‌ای $\theta$ را تعیین کنیم، از معادله‌های شتاب زاویه‌ای ثابت معادلهٔ ۱۰-۱۴ را انتخاب می‌کنیم

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (۱۰\text{-}۲۴)$$

با جایگذاری از معادلهٔ ۱۰-۲۲ برای شتاب زاویه‌ای $\alpha$ داریم

$$\alpha = \frac{a_t}{r} \qquad (۱۰\text{-}۲۵)$$

همچنین با قرار دادن $\omega_0 = 0$ و $\theta_0 = 0$ خواهیم داشت

$$\omega^2 = \frac{2a_t\theta}{r} \qquad (۱۰\text{-}۲۶)$$

با قرار دادن این نتیجه به جای $\omega^2$ در

$$a_r = \omega^2 r \qquad (۱۰\text{-}۲۷)$$

رابطهٔ بین شتاب شعاعی، شتاب مماسی، و مکان زاویه‌ای $\theta$ حاصل می‌شود

$$a_r = 2a_t\theta \qquad (۱۰\text{-}۲۸)$$

چون $\vec{a}_t$ و $\vec{a}_r$ بردارهایی بر هم عمودند، جمع آنها دارای این بزرگی است

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} \qquad (۱۰\text{-}۲۹)$$

با قرار دادن به جای $a_r$ از معادلهٔ ۱۰-۲۸ و حل آن برای $\theta$ داریم

$$\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{a_t^2} - 1} \qquad (۱۰\text{-}۳۰)$$

وقتی $a$ به مقدار معین $4g$ برسد، $\theta$ به زاویهٔ $\theta_P$ که می‌خواستیم می‌رسد. با قرار دادن $a = 4g$، $\theta = \theta_P$ و $a_t = g$ در معادله ۱۰-۳، به دست می‌آید

$$\theta_P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4g)^2}{g^2} - 1} = 1/94\,\text{rad} = 111^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) بزرگی شتاب خالص $a$ مسافر در نقطهٔ $P$ و پس از نقطهٔ $P$ چقدر است؟

***استدلال:*** در نقطهٔ $P$، $a$ دارای مقدار مورد نظر $4g$ است. درست پس از رسیدن به $P$ مسافر روی خط راستی حرکت می‌کند و دیگر شتاب مرکز گرا ندارد. بنابراین، مسافر فقط دارای شتاب به بزرگی $g$ در امتداد مسیر است. پس

(پاسخ) در P $a = 4g$ و پس از P $a = g$

سردرد قطار تفریحی وقتی ایجاد می‌شود که شتاب سر مسافر به طور ناگهانی تغییر کند، و مقدار شتاب قبل یا بعد از این تغییر بزرگ باشد. دلیل آن این است که این تغییر می‌تواند باعث حرکت مغز نسبت به جمجمه شود و رگهای متصل کنندهٔ مغز و جمجمه را پاره کند. در مسئلهٔ ما برای افزایش شتاب از $g$ تا $4g$ در طول مسیر تا نقطهٔ $P$ ممکن است به مسافر صدمه بزنند اما تغییر ناگهانی در شتاب وقتی مسافر از نقطهٔ $P$ می‌گذرد عامل اصلی سردرد قطار تفریحی است.

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱ یکاهای مربوط به متغیرهای زاویه‌ای*

در معادلهٔ ۱۰-۱ ($\theta = s/r$) با این شروع کردیم که وقتی معادله‌هایی شامل متغیرهای زاویه‌ای و خطی باشند، متغیرهای زاویه‌ای را با مقیاس رادیان به کار ببریم. بنابراین، باید جابه‌جایهای زاویه‌ای را برحسب رادیان، سرعتهای زاویه‌ای را برحسب rad/s، rad/min و شتابهای زاویه‌ای را برحسب $\text{rad/s}^2$ و $\text{rad/min}^2$ بیان کنیم. در معادله‌های ۱۰-۱۷، ۱۰-۱۸، ۱۰-۲۰، ۱۰-۲۲ و ۱۰-۲۳ بر این مطلب تأکید شده است. تنها استثنایی که در این قاعده وجود دارد، در مورد معادله‌هایی است که شامل *فقط* متغیرهای زاویه‌ای باشند، مانند معادله‌های زاویه‌ای که در جدول ۱۰-۱ داده شده‌اند. در این معادله‌ها می‌توانیم برای متغیرهای زاویه‌ای هر یکایی را به کار ببریم؛ یعنی مثلاً می‌توانیم برحسب چگونگی استفاده از آنها از رادیان، درجه یا تعداد دور استفاده کنیم.

در معادله‌هایی که باید برحسب رادیان باشند، نیازی نیست که مانند دیگر یکاها که باید در عملیات جبری دیگر قید شوند یکای «رادیان» (rad) را مرتب قید کنیم. می‌توان آن را بسته به موضوع اضافه یا حذف کرد.

## ۱۰-۶ انرژی جنبشی چرخشی

تیغهٔ یک ارهٔ صفحه‌ای که به سرعت در حال چرخش است به یقین دارای انرژی جنبشی ناشی از این چرخش است. این انرژی را چگونه می‌توان بیان کرد؟ در اینجا نمی‌توان رابطهٔ آشنای $K=\frac{1}{2}mv^2$ را برای کل تیغه به کار برد زیرا این فرمول فقط انرژی جنبشی مرکز جرم اره را به دست می‌دهد که برابر صفر است.

تیغهٔ ارهٔ صفحه‌ای و همهٔ جسمهای صلب در حال چرخش را به صورت مجموعه‌ای از ذره‌ها با تندیهای متفاوت در نظر می‌گیریم، در این صورت می‌توانیم انرژی جنبشی این ذره‌ها را با هم جمع کنیم و انرژی جنبشی کل جسم را به دست آوریم. به این ترتیب برای انرژی جنبشی یک جسم چرخان داریم

$$K=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}m_3v_3^2+\cdots$$

$$=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2 \qquad (۱۰-۳۱)$$

که در آن $m_i$ جرم $i$ امین ذره و $v_i$ تندی آن است. عمل جمع روی همهٔ ذره‌های جسم صورت می‌گیرد.

مشکل معادلهٔ ۱۰-۳۱ این است که $v_i$ برای همه ذره‌ها یکسان نیست. این مسئله را با قرار دادن $v$ از معادلهٔ ۱۰-۱۸ ($v=\omega r$) می‌توان حل کرد. در این صورت خواهیم داشت

$$K=\sum\frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2=\frac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2 \qquad (۱۰-۳۲)$$

که در آن $\omega$ برای همهٔ ذره‌ها یکسان است.

کمیت داخل پرانتز در سمت راست معادلهٔ ۱۰-۳۲ چگونگی توزیع جرم جسم چرخان حول محور چرخش را مشخص می‌کند. این کمیت **لختی چرخشی (یا گشتاور ماند)** $I$ این جسم نسبت به محور چرخش نامیده می‌شود. این کمیت برای یک جسم صلب و یک محور چرخش خاص ثابت است. (اگر بخواهیم $I$ با معنی باشد، همیشه باید محور چرخش را مشخص کنیم.) اکنون می‌توان نوشت

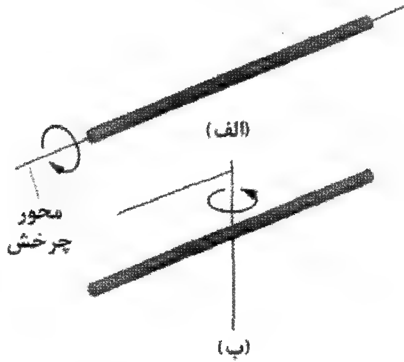
$$I=\sum m_ir_i^2 \qquad \text{(لختی چرخشی)} \qquad (۱۰-۳۳)$$

و با قرار دادن در معادلهٔ ۱۰-۳۲ داریم

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(در مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰-۳۴)$$

این همان عبارتی است که در پی آن بودیم. چون از رابطهٔ $v=\omega r$ برای به دست آوردن معادلهٔ ۱۰-۳۴ استفاده کردیم، $\omega$ باید در مقیاس رادیان بیان شود. یکای SI برای $I$ برابر کیلوگرم در متر مربع ($kg\cdot m^2$) است.

معادلهٔ ۱۰-۳۴ که انرژی جنبشی یک جسم صلب را در چرخش خالص به دست می‌دهد هم ارز زاویه‌ای رابطهٔ $K=\frac{1}{2}Mv_{com}^2$ است که انرژی جنبشی جسم صلب را در حرکت انتقالی خالص به دست می‌دهد. در هر دو رابطه ضریب $\frac{1}{2}$ وجود دارد. جرم $M$ در یک معادله و $I$ (که در برگیرندهٔ جرم و چگونگی توزیع جرم است) در معادلهٔ دیگر ظاهر می‌شود. سرانجام، هر دو معادله شامل مجذور سرعت (انتقالی یا چرخشی) است. انرژیهای جنبشی انتقالی و چرخشی انواع مختلفی از انرژی نیستند. هر دوی آنها انرژی جنبشی‌اند که بسته به حرکت به روشهای متناسب با آن بیان می‌شوند.




**شکل ۱۰-۱۱** چرخاندن یک میلهٔ بلند حول (الف) محور مرکزی خود (محور طولی) خیلی آسانتر از چرخاندن آن حول (ب) محوری است که از مرکز آن می‌گذرد و عمود بر آن است. علت این اختلاف این است که در حالت (الف) جرم میله نسبت به شکل (ب) نزدیکتر به محور چرخش توزیع شده است.

قبلاً خاطرنشان کردیم که لختی چرخشی یک جسم چرخان نه تنها به جرم جسم بلکه به چگونگی توزیع جرم نسبت به محور چرخش نیز بستگی دارد. در اینجا مثالی می‌آوریم که این موضوع را دقیقاً دریابید. میلهٔ بلند و نسبتاً سنگینی (مثل میلهٔ آهنی، قطعه‌ای از الوار یا چیزی شبیه آنها) را ابتدا حول محور مرکزی (طولی) آن (شکل ۱۰-۱۱ الف) و سپس حول محوری عمود بر میله که از مرکز آن بگذرد (شکل ۱۰-۱۱ب) بچرخانید. در هر دو چرخش جرم کاملاً یکسانی وجود دارد، اما چرخش در حالت اول بسیار راحت‌تر از چرخش در حالت دوم است. دلیل آن این است که در حالت اول جرم بسیار نزدیک به محور چرخش توزیع شده است. در نتیجه، لختی چرخشی میله در شکل ۱۰-۱۱ الف بسیار کوچکتر از مقدار آن در شکل ۱۰-۱۱ ب است. به طور کلی، لختی چرخشی کوچکتر به معنای چرخش آسانتر است.

✔ **نکتهٔ وارسی ۴** شکل سه کرهٔ کوچک را نشان می‌دهد که حول محوری قائم می‌چرخند. فاصلهٔ عمودی بین این محور و مرکز هر کره داده شده است. این سه کره را به ترتیب بزرگی لختی چرخشی حول آن محور مرتب کنید.

محور چرخش — 1 m, 36 kg; 2 m, 9 kg; 3 m, 4 kg

## ۱۰-۷ محاسبهٔ لختی چرخشی

اگر یک جسم صلب از تعداد کمی ذره تشکیل شده باشد، می‌توان لختی چرخشی آن حول یک محور چرخش داده شده را با معادلهٔ ۱۰-۳۳ ($I = \sum m_i r_i^2$) به دست آورد؛ یعنی می‌توان حاصلضرب $mr^2$ را برای هر ذره تعیین و سپس این حاصلضربها را با هم جمع کرد. (به خاطر داشته باشید که $r$ فاصلهٔ عمودی هر ذره از محور چرخش است.)

اگر جسم صلبی از ذره‌های نزدیک به هم زیادی تشکیل شده باشد (یعنی پیوسته مثل بشقاب پرندهٔ بازی)، برای استفاده از معادلهٔ ۱۰-۳۳ نیاز به یک رایانه خواهیم داشت. دراین صورت، به جای عمل جمع در معادلهٔ ۱۰-۳۳ از انتگرال استفاده می‌کنیم و لختی چرخشی جسم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I = \int r^2 dm \qquad \text{(لختی چرخشی برای جسم پیوسته)} \qquad (۱۰-۳۵)$$

جدول ۱۰-۲ پاسخهای چنین انتگرالهایی را برای ۹ جسم متداول و محورهای چرخشی نشان داده شده به دست می‌دهد.

### قضیهٔ محورهای موازی

فرض کنید که می‌خواهیم لختی چرخشی $I$ را برای جسمی به جرم $M$ نسبت به یک محور داده شده به دست آوریم. به طور کلی، همیشه می‌توان $I$ را با انتگرالگیری از معادلهٔ ۱۰-۳۵ به دست آورد. اما اگر $I_{com}$، لختی چرخشی جسم نسبت به یک محور موازی که از مرکز جرم جسم می‌گذرد معلوم باشد، مسئله ساده‌تر می‌شود. فرض کنید $h$ فاصلهٔ عمودی میان محور داده شده و محوری باشد که از مرکز جرم می‌گذرد (توجه داشته باشید که این دو محور باید موازی باشند.) آنگاه، لختی چرخشی $I$ حول محور داده شده برابر است با

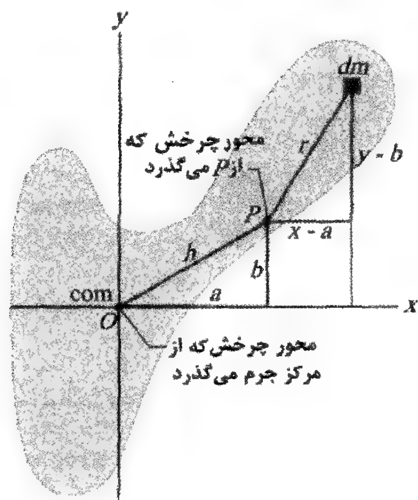
$$I = I_{com} + Mh^2 \qquad \text{(قضیهٔ محورهای موازی)} \qquad (۱۰-۳۶)$$

این معادله را *قضیهٔ محورهای موازی* می‌نامند. اکنون آن را اثبات می‌کنیم و سپس در نکتهٔ وارسی ۵ و مسئله نمونهٔ ۱۰-۶ آن را به کار می‌بریم.

### اثبات قضیهٔ محورهای موازی

فرض کنید نقطهٔ $O$ مرکز جرم جسمی با شکل دلخواه باشد که سطح مقطع آن در شکل ۱۰-۱۲ نشان داده شده است. مبداء مختصات را در نقطهٔ $O$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید محوری که از $O$ می‌گذرد عمود بر صفحهٔ شکل است و محور دیگری که از $P$ می‌گذرد موازی با محور اولی است. $a$ و $b$ را نیز مختصات $x$ و $y$ نقطهٔ $P$ در نظر می‌گیریم.

فرض کنید $dm$ عنصر جرم با مختصات عمومی $x$ و $y$ باشد، بنابراین لختی چرخشی جسم حول محوری که از $P$ می‌گذرد از معادلهٔ ۱۰-۳۵ برابر است با




**شکل ۱۰-۱۲** سطح مقطع جسم صلبی که مرکز جرم آن در $O$ قرار دارد. قضیهٔ محورهای موازی (معادلهٔ ۱۰-۳۶) لختی چرخشی جسم حول محوری را که از $O$ می‌گذرد نسبت به یک محور موازی که از نقطه‌ای مثل $P$ (که به فاصلهٔ $h$ از مرکز جرم قرار دارد) می‌گذرد، مربوط می‌کند. هر دو محور بر صفحهٔ شکل عمودند.

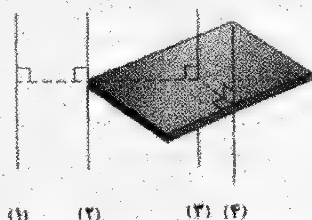
$$I = \int r^2 dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] dm$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$I = \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x\, dm - 2b \int y\, dm + \int (a^2 + b^2) dm \qquad (۱۰-۳۷)$$

از تعریف مرکز جرم (معادلهٔ ۹-۹)، دو انتگرال میانی معادلهٔ ۱۰-۳۷ مختصات مرکز جرم (با یک ضریب ثابت) را به دست می‌دهند و در نتیجه هر کدام باید برابر صفر باشند. چون $x^2 + y^2$ برابر $R^2$، که $R$ فاصلهٔ نقطهٔ $O$ تا $dm$ است، در نتیجه اولین انتگرال به سادگی برابر $I_{com}$ است، که لختی چرخشی جسم حول محوری است که از مرکز جرم می‌گذرد. با نگاهی به شکل ۱۰-۱۲ در می‌یابیم که جملهٔ آخر در معادلهٔ ۱۰-۳۷ برابر $Mh^2$ است، که $M$ جرم کل جسم است. بنابراین، معادلهٔ ۱۰-۳۷ تبدیل به معادلهٔ ۱۰-۳۶ می‌شود که همان رابطه‌ای است که می‌خواستیم اثبات کنیم.

✓ ***نکتهٔ وارسی ۵*** شکل جسمی شبیه کتاب (که یک وجه آن بزرگتر از دیگری است) و چهار محور چرخش را که همگی عمود بر صفحهٔ جسم هستند نشان می‌دهد. چهار محور را به ترتیب بزرگی لختی چرخشی حول آنها مرتب کنید.



**جدول ۱۰-۲**

لختیهای چرخشی چند جسم

| | | |
|---|---|---|
| (الف) حلقهٔ نسبت به محور مرکزی (محور، $R$) $I = MR^2$ | (ب) استوانهٔ لایه‌ای (پوسته‌ای) نسبت به محور مرکزی (محور، $R_1$، $R_2$) $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ | (پ) استوانهٔ توپر (یا قرص) نسبت به محور مرکزی (محور، $R$، $L$) $I = \frac{1}{2}MR^2$ |
| (ت) استوانهٔ توپر (یا قرص) نسبت به قطر مرکزی (محور، $R$، $L$) $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ | (ث) میلهٔ باریک نسبت به محوری که از مرکز می‌گذرد و بر میله عمود است (محور، $L$) $I = \frac{1}{12}ML^2$ | (ج) کرهٔ توپر نسبت به یکی از قطرهای آن (محور، $2R$) $I = \frac{2}{5}MR^2$ |
| (چ) پوستهٔ کروی نازک نسبت به یکی از قطرهای آن (محور، $2R$) $I = \frac{2}{3}MR^2$ | (ح) حلقه نسبت به یکی از قطرهای آن (محور، $R$) $I = \frac{1}{2}MR^2$ | (خ) مکعب نازک نسبت به محوری که از مرکز می‌گذرد و بر آن عمود است (محور، $a$، $b$) $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ |

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۶

شکل ۱۰-۱۳ الف جسم صلبی را نشان می‌دهد که از دو ذره هر یک به جرم $m$ تشکیل شده است و توسط میله‌ای به طول $L$ و جرم ناچیز به هم متصل‌اند.

(الف) لختی چرخشی جسم $I_{com}$، حول محوری عمود بر میله که از مرکز جرم می‌گذرد چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** چون جسم فقط دو ذرهٔ دارای جرم دارد، می‌توان لختی چرخشی $I_{com}$ را با استفاده از معادلهٔ ۱۰-۳۳ و بدون انتگرالگیری به دست آورد.

***محاسبه‌ها:*** برای این دو ذره که هر یک به فاصلهٔ $\frac{1}{2}L$ از محور چرخش قرار دارند، داریم

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + (m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}mL^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) لختی چرخشی $I$ جسم حول محوری که از انتهای چپ میله و موازی با محور اول می‌گذرد (شکل ۱۰-۱۳ ب) چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** این وضعیت آنقدر ساده است که می‌توان $I$ را با استفاده از دو روش به دست آورد. روش اول همان است که در قسمت (الف) از آن استفاده کردیم. روش دوم، روش بسیار قدرتمند اعمال قضیهٔ محور موازی است.

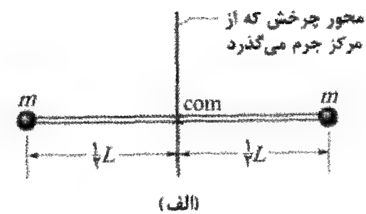
***روش اول:*** $I$ را مانند بند (الف) محاسبه می‌کنیم. جز اینکه در اینجا فاصلهٔ عمودی $r_i$ برای ذره‌ای که در سمت چپ میله قرار دارد برابر صفر و برای ذره‌ای که در سمت راست آن قرار دارد برابر $L$ است. اکنون از معادلهٔ ۱۰-۳۳ به دست می‌آوریم

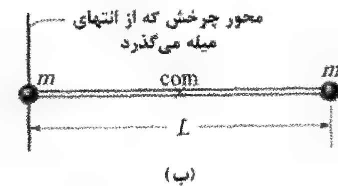
$$I = m(0)^2 + mL^2 = mL^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

***روش دوم:*** چون $I_{com}$ نسبت به محوری که از مرکز جرم می‌گذرد معلوم است و محور مورد نظر با محور مرکز جرم موازی است، از قضیهٔ محورهای موازی (معادلهٔ ۱۰-۳۶) داریم

$$I = I_{com} + Mh^2 = \frac{1}{2}mL^2 + (2m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2$$

$$= mL^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$




**شکل ۱۰-۱۳** جسم صلبی از دو ذره هر یک به جرم $m$ تشکیل شده است که توسط میله‌ای به جرم ناچیز به هم متصل شده‌اند.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۷

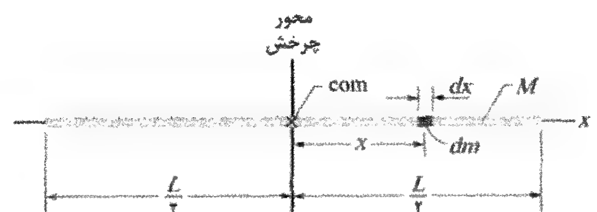
شکل ۱۰-۱۴ میلهٔ نازک و یکنواختی به جرم $M$ و طول $L$ را روی محور $x$ نشان می‌دهد که مرکز آن در مبداء مختصات قرار دارد.

(الف) لختی چرخشی میله حول محور چرخش عمودی که از مرکز آن می‌گذرد چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** (۱) به دلیل یکنواخت بودن میله مرکز جرم میله در مرکز آن قرار دارد. بنابراین، باید $I_{com}$ را به دست آوریم. (۲) چون میله جسم پیوسته‌ای است باید از انتگرال معادلهٔ ۱۰-۳۵ برای محاسبهٔ لختی چرخشی استفاده کنیم

$$I = \int r^2 dm \qquad (۱۰-۳۸)$$

***محاسبه‌ها:*** باید نسبت به مختصهٔ $x$ انتگرال‌گیری کنیم (نه نسبت به جرم $m$ که در انتگرال آمده است)، بنابراین، باید $dm$ یک عنصر از میله را به طول $dx$ آن در امتداد میله مرتبط کنیم. (چنین عنصری در شکل ۱۰-۱۴ نشان داده شده است.) چون میله یکنواخت است نسبت جرم به طول آن برای همهٔ عنصرها و برای کل میله یکسان است. لذا می‌توان نوشت




**شکل ۱۰-۱۴** میلهٔ یکنواختی به طول $L$ و جرم $M$، عنصر جرم $dm$ و عنصر طول $dx$ نشان داده شده‌اند.

$$\frac{\text{عنصر جرم } dm}{\text{عنصر طول } dx} = \frac{\text{جرم میله } M}{\text{طول میله } L}$$

یا

$$dm = \frac{M}{L}dx$$

اکنون می‌توان این نتیجه را به جای $dm$ قرار داد و به جای $r$ در معادلهٔ ۱۰-۳۸، $x$ را نوشت. سپس از یک انتهای میله تا انتهای دیگر آن (از $x=-L/2$ تا $x=L/2$) انتگرال‌گیری می‌کنیم تا تمام عنصرها را شامل شود. بنابراین، داریم

$$I = \int_{x=-L/2}^{x=+L/2} x^2\left(\frac{M}{L}\right)dx$$

$$= \frac{M}{3L}[x^3]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{1}{12}ML^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

که همان مقداری است که در جدول ۱۰-۲ ث آمده است.

(ب) لختی چرخشی میلهٔ $I$ حول محور چرخش جدیدی که عمود بر میله است و از انتهای سمت چپ آن می‌گذرد، چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** با منتقل کردن مبداء محور $x$ به انتهای چپ میله و سپس با انتگرال‌گیری از $x=0$ تا $x=L$، می‌توان I را پیدا کرد. اما این بار از روشی قدرتمند (و آسان) استفاده می‌کنیم که اعمال قضیهٔ محورهای موازی است (معادلهٔ ۱۰-۳۶).

***محاسبه‌ها:*** اگر محور را در انتهای میله طوری قرار دهیم که موازی با محوری باشد که از مرکز جرم می‌گذرد، آنگاه می‌توان از قضیهٔ محورهای موازی (معادلهٔ ۱۰-۳۶) استفاده کرد. از قسمت الف می‌دانیم که $I_{com}$ برابر $\frac{1}{12}ML^2$ است. از شکل ۱۰-۱۴ فاصلهٔ عمودی $h$ میان محور چرخش جدید و مرکز جرم برابر $\frac{1}{2}L$ است. در نتیجهٔ معادله به دست می‌دهد

$$I = I_{com} + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + (M)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

در واقع این نتیجه برای هر محوری که از انتهای چپ یا راست که عمود بر میله باشد بگذرد برقرار است، چه موازی با محور نشان داده شده در شکل ۱۰-۱۴ باشد و چه نباشد.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۸

اجزای یک ماشین بزرگ را که باید مدتها با تندیهای بالا چرخش کند ابتدا برای عیب‌یابی با دستگاهی به نام دستگاه آزمون چرخش امتحان می‌کنند. در این دستگاه، قطعهٔ مورد آزمایش (با تندی خیلی زیاد) به چرخش درمی‌آید در حالی‌که درون محفظه‌ای استوانه‌ای از آجرهای سربی قرار دارد که همگی درون بدنه‌ای فولادی جای می‌گیرند که با در پوشی محکم مسدود شده است. اگر چرخش باعث شود که آن قطعه متلاشی شود، آجرهای سربی نرم قطعه‌ها را می‌گیرند تا بتوان علت خرابی را بررسی کرد.

درسال ۱۹۸۵/۱۳۶۴ مؤسسهٔ آزمون وسایل (www.testdevices.com) نمونه‌ای از یک گردونهٔ فولادی صلب (مثل قرص) به جرم $m = 272\,\text{kg}$ و شعاع $R = 38/0\,\text{cm}$ را آزمون چرخش کرد. وقتی نمونه به تندی زاویه‌ای $\omega$ برابر $14000\,\text{rev/min}$ رسید

مهندسان آزمایش کننده صدای مهیبی از دستگاه شنیدند که در طبقهٔ پایین در اتاقی دور از آنها قرار داشت. آنها با بررسی دریافتند که آجرهای سربی به خارج از اتاق و به راهرو منتهی به اتاق آزمون پرتاب شده‌اند و درب اتاق به داخل پارکینگ مجاور پرتاب شده و یک آجر دیگر از دیوار آزمایشگاه گذشته و به آشپزخانهٔ همسایه پرتاب شده است. تیرهای سقف ساختمان آزمایشگاه صدمه دیده‌اند، کف بتون زیر اتاقک با چرخش به اندازهٔ حدود ۰/۵cm به سمت پایین جابه‌جا شده بود و درپوش ۹۰۰ کیلوگرمی دستگاه به طرف سقف پرتاب شده و سپس روی دستگاه آزمایش افتاده است (شکل ۱۰-۱۵). خوشبختانه تکه‌های منفجر شده نتوانسته بودند به داخل اتاقک مهندسان آزمایش کننده وارد شوند. چه مقدار انرژی در انفجار این گردونه آزاد شده است؟

**نکتهٔ کلیدی** انرژی آزاد شده برابر با انرژی جنبشی چرخشی $K$ مربوط به گردونه درست در زمانی است که به تندی زاویه‌ای ۱۴۰۰۰ rev/min می‌رسد.

***محاسبه‌ها:*** می‌توان $K$ را از معادلهٔ ۱۰-۳۴ ($K=\frac{1}{2}I\omega^2$) به دست آورد ولی اول نیاز به عبارتی برای لختی چرخشی $I$ داریم. چون گردونه به صورت قرصی است که شبیه یک چرخ و فلک می‌چرخد، در نتیجه $I$ از رابطه‌ای که در جدول ۱۰-۲ پ ($I=\frac{1}{2}MR^2$) داده شده به دست می‌آید. بنابراین، داریم

$$I=\frac{1}{2}MR^2=\frac{1}{2}(۲۷۲\text{kg})(۰/۳۸\text{ m})^2=۱۹/۶۴\text{kg/m}^2$$



**شکل ۱۰-۱۵** بعضی از خرابیهای ایجاد شده بر اثر انفجار ناگهانی یک قرص فولادی با چرخش سریع.

تندی زاویه‌ای گردونه برابر است با

$$\omega=(۱۴۰۰۰\text{rev/min})(۲\pi\text{ rad/rev})\left(\frac{۱\text{min}}{۶۰\text{ s}}\right)$$
$$=۱/۴۶۶\times۱۰^۳\text{ rad/s}$$

اکنون، می‌توان از معادلهٔ ۱۰-۳۴ استفاده کرد و نوشت

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}(۱۹/۶۴\text{kg}\cdot\text{m}^2)(۱/۴۶۶\times۱۰^۳\text{rad/s})^2$$
$$=۲/۱\times۱۰^۷\text{ J} \quad \text{(پاسخ)}$$

نزدیک این انفجار بودن کاملاً مخاطره آمیز است.

## ۱۰-۸ گشتاور نیرو

دستگیرهٔ در را در دورترین نقطه از خط لولا قرار می‌دهند زیرا اگر بخواهیم در سنگینی را باز کنیم باید حتماً نیرویی وارد کرد ولی وارد کردن نیرو به تنهایی کافی نیست؛ بلکه جایی که آن نیرو را وارد می‌کنیم و جهت آن نیز مهم است. اگر نیرو را در فاصلهٔ نزدیکتری از لولای در وارد کنیم یا با هر زاویه‌ای غیر از °۹۰ به صفحه در نیرو وارد کنیم باید نیروی بیشتری به کار بریم تا حالتی که نیرو را به طور عمود و به دستگیرهٔ در وارد می‌کنیم.

شکل ۱۰-۱۶ الف مقطع جسمی را نشان می‌دهد که می‌تواند آزادانه حول محوری که از نقطهٔ $O$ می‌گذرد و بر سطح مقطع عمود است بچرخد. نیروی $\vec{F}$ در نقطهٔ $P$ که مکان آن نسبت به $O$ با بردار موضع $\vec{r}$ داده می‌شود، وارد شده است. جهت بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{F}$ با یکدیگر زاویهٔ $\phi$ می‌سازند. (برای سادگی فقط نیروهایی را در نظر می‌گیریم که هیچ مؤلفه‌ای موازی با محور چرخش ندارند در نتیجه $\vec{F}$ در صفحهٔ شکل قرار دارد.)

برای تعیین اینکه چگونه $\vec{F}$ باعث چرخش جسم حول محور چرخش می‌شود، $\vec{F}$را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم (شکل ۱۰-۱۶ ب)، یکی از مؤلفه‌ها ***مؤلفه شعاعی*** $F_r$ نام دارد که در امتداد $\vec{r}$ واقع است. این مؤلفه موجب چرخش نمی‌شود چون در امتدادی است که از نقطهٔ $O$ می‌گذرد. (اگر در را موازی با صفحه بکشیم در نمی‌چرخد.) مؤلفهٔ دیگر $\vec{F}$ ***مؤلفهٔ مماسی*** $F_t$ نام دارد، که عمود بر $\vec{r}$ و دارای بزرگی $F_t=F\sin\phi$ است. این مولفه *باعث* چرخش می‌شود. (اگر به طور عمود بر صفحهٔ در آن را فشار دهیم می‌توانیم در را بچرخانیم.)

توانایی $\vec{F}$ برای چرخاندن جسم نه تنها به بزرگی مؤلفهٔ مماسی $F_t$ بستگی دارد بلکه همچنین به فاصلهٔ نقطهٔ وارد کردن نیرو تا $O$ نیز بستگی دارد. برای در نظر گرفتن این دو عامل کمیتی را به نام **گشتاور نیرو** $\tau$ به صورت حاصلضرب دو عامل تعریف می‌کنیم

$$\tau=(r)(F\sin\phi) \qquad (۱۰-۳۹)$$

دو روش معادل محاسبهٔ گشتاور نیرو عبارت‌اند از

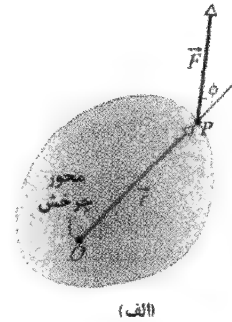
$$\tau=(r)(F\sin\phi)=rF_t \qquad (۱۰-۴۰)$$

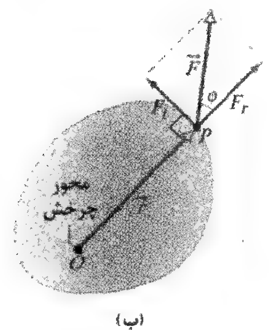
$$\tau=(r\sin\phi)(F)=r_\perp F \qquad (۱۰-۴۱)$$

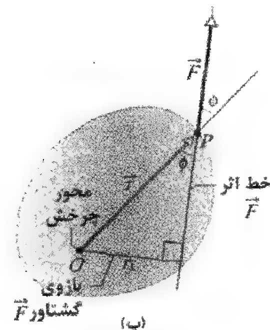
که در آن $r_\perp$ فاصلهٔ عمودی میان محور چرخش در نقطهٔ $O$ و امتداد بردار $\vec{F}$ (شکل ۱۰-۱۶ پ) است. این امتداد را **خط اثر** نیروی $\vec{F}$ و $r_\perp$ را **بازوی گشتاور** $\vec{F}$ می‌نامند. شکل ۱۰-۱۶ ب نشان می‌دهد که می‌توان $r$ یعنی بزرگی بردار $\vec{r}$ را به عنوان بازوی گشتاور مؤلفهٔ نیروی $F_t$ در نظر گرفت.

گشتاور نیرو با مسامحه به عنوان اثر چرخش یا پیچش نیروی $\vec{F}$ در نظر گرفته می‌شود. وقتی نیرویی را به یک جسم

وارد کنیم، مانند یک پیچ گوشتی یا آچار، تا آن را بپیچانیم، گشتاور نیرویی به کار می‌بریم. یکای SI گشتاور نیرو نیوتون–متر ($N \cdot m$) است. *توجه کنید:* نیوتون– متر یکای کار نیز هست. البته،گشتاور نیرو و کار کمیتهای کاملاً متفاوتی هستند و نباید آنها را با هم اشتباه کرد. کار اغلب برحسب ژول ($1\,J = 1\,N \cdot m$) بیان می‌شود اما گشتاور نیرو هرگز برحسب ژول بیان نمی‌شود.



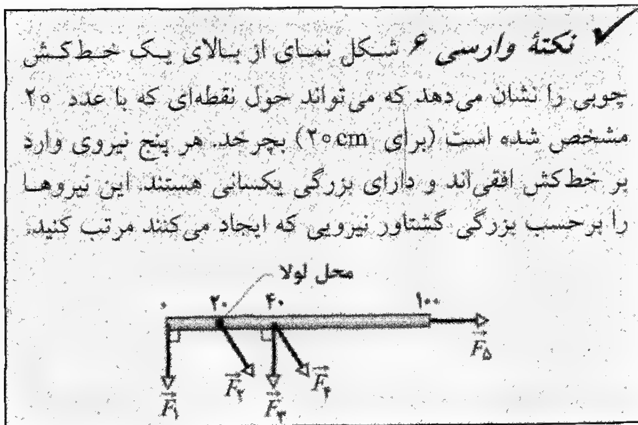




**شکل ۱۰–۱۶** (الف) نیروی $\vec{F}$ در نقطهٔ $P$ بر جسم صلبی وارد می‌شود که می‌تواند آزادانه حول محوری که از $O$ می‌گذرد بچرخد، این محور بر صفحهٔ مقطع نشان داده شده عمود است. (ب) گشتاور نیروی ناشی از این نیرو برابر است با $(r)(F \sin \phi)$. همچنین می‌توان آن را به صورت $rF_t$ نیز نوشت که $\vec{F_t}$ مؤلفهٔ مماسی $F$ است. (پ) این گشتاور نیرو را همچنین می‌توان به صورت $r_{\perp}F$ نوشت که $r_{\perp}$ بازوی گشتاور نیروی $\vec{F}$ است.

در فصل بعد به طور کلی در مورد گشتاور نیرو به عنوان یک کمیت برداری بحث خواهیم کرد. اما در اینجا چون چرخش را حول یک محور تنها در نظر می‌گیریم، در نتیجه نیازی به نمادگذاری برداری نداریم. گشتاور نیرو بسته به جهت چرخش می‌تواند دارای مقدار مثبت یا منفی باشد. فرض کنید جسم در ابتدا ساکن باشد، اگر جسم به طور پادساعتگرد بچرخد گشتاور نیرو مثبت و اگر به طور ساعتگرد بچرخد گشتاور نیرو منفی است. (عبارت «ساعتها منفی‌اند» از بخش ۱۰–۲ در اینجا نیز صادق است.)

گشتاور نیروها از اصل بر هم نهی که در فصل ۵ برای نیروها بحث کردیم پیروی می‌کنند: وقتی چندین گشتاور نیرو به یک جسم وارد شوند، **گشتاور نیروی خالص** (یا **گشتاور نیروی برایند**) برابر با مجموع تک تک گشتاورهاست. نماد گشتاور نیروی خالص $\tau_{net}$ است.

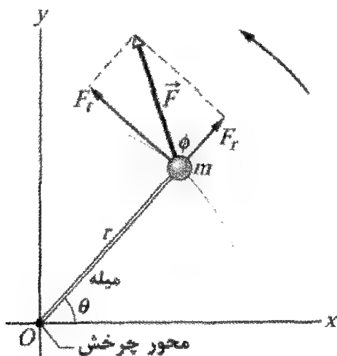


✔ ***نکتهٔ وارسی ۶*** شکل نمای از بالای یک خط‌کش چوبی را نشان می‌دهد که می‌تواند حول نقطه‌ای که با عدد ۲۰ مشخص شده است (برای ۲۰cm) بچرخد. هر پنج نیروی وارد بر خط‌کش افقی‌اند و دارای بزرگی یکسانی هستند. این نیروها را برحسب بزرگی گشتاور نیرویی که ایجاد می‌کنند مرتب کنید.



## ۱۰–۹ قانون دوم نیوتون برای چرخش

گشتاور نیرو می‌تواند موجب چرخش یک جسم صلب شود، مثلاً برای چرخش یک در از گشتاور نیرو استفاده می‌کنیم. در اینجا می‌خواهیم گشتاور نیروی خالص $\tau_{net}$ یک جسم صلب را به شتاب زاویه‌ای $\alpha$ که بر اثر این گشتاور نیرو ایجاد می‌شود مرتبط کنیم. این کار را مشابه با قانون دوم نیوتون ($F_{net} = ma$) برای شتاب $a$ یک جسم به جرم $m$ که از نیروی




**شکل ۱۰–۱۷** یک جسم صلب ساده که می‌تواند آزادانه حول محوری که از $O$ می‌گذرد بچرخد شامل ذره‌ای به جرم $m$ متصل به انتهای میله‌ای به طول $r$ و جرم ناچیز است. نیروی وارد شدهٔ $\vec{F}$ باعث می‌شود که این جسم به چرخش در آید.

خالص $F_{net}$ در امتداد محور مختصات ناشی می‌شود، انجام می‌دهیم. با قرار دادن $\tau_{net}$ به جای $F_{net}$، $I$ به جای $m$ و $\alpha$ به جای $a$ می‌توان نوشت

$$\tau_{net} = I\alpha \qquad \text{(قانون دوم نیوتون برای چرخش)} \qquad (۱۰-۴۲)$$

### اثبات معادلهٔ ۱۰-۴۲

معادلهٔ ۱۰-۴۲ را ابتدا با در نظر گرفتن وضعیت ساده شده در شکل ۱۰-۱۷، اثبات می‌کنیم. جسم صلب در اینجا از ذره‌ای به جرم $m$ که در انتهای میلهٔ بدون جرمی به طول $r$ قرار دارد، تشکیل شده است. این میله می‌تواند تنها حول محوری که از انتهای دیگر آن می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ شکل است بچرخد. بنابراین، ذره تنها می‌تواند در مسیری دایره‌ای به طوری که محور چرخش در مرکز آن قرار دارد حرکت کند.

نیروی $\vec{F}$ به ذره وارد می‌شود. اما چون ذره تنها می‌تواند در امتداد مسیری دایره‌ای حرکت کند، فقط مؤلفهٔ مماسی $F_t$ نیرو (مؤلفه‌ای که مماس بر مسیر دایره‌ای است) می‌تواند به ذره در طول مسیرش شتاب دهد. با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان $F_t$ را به مؤلفهٔ مماسی شتاب $a_t$ در طول مسیر ارتباط داد، و نوشت

$$F_t = ma_t$$

گشتاور نیروی وارد بر ذره با استفاده از معادلهٔ ۱۰-۴۰ عبارت است از

$$\tau = F_t r = ma_t r$$

از معادلهٔ ۱۰-۲۲ $(a_t = \alpha r)$ می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha \qquad (۱۰-۴۳)$$

کمیت داخل پرانتز در سمت راست معادله، لختی چرخشی ذره حول محور چرخشی است (به معادلهٔ ۱۰-۳۳ نگاه کنید.) بنابراین، معادلهٔ ۱۰-۴۴ تبدیل می‌شود به

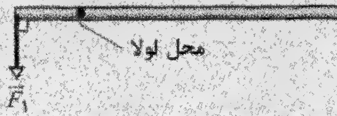
$$\tau = I\alpha \qquad \text{(با مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰-۴۴)$$

برای وضعیتی که در آن بیش از یک نیرو به ذره وارد می‌شود می‌توان معادلهٔ ۱۰-۴۴ صورت کلی زیر نوشت

$$\tau_{net} = I\alpha \qquad \text{(با مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰-۴۵)$$

که همان معادله‌ای است که قرار بود ثابت کنیم. می‌توان این معادله را به هر جسم صلبی که حول یک محور ثابت می‌چرخد تعمیم داد، چون هر جسم شبیه این را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از ذره‌های منفرد در نظر گرفت.

**نکتهٔ وارسی ۷** شکل نمای از بالای یک خط‌کش چوبی را نشان می‌دهد که می‌تواند حول محوری که از نقطهٔ مشخص شده در سمت چپ مرکز خط‌کش می‌گذرد بچرخد. دو نیروی افقی، $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به خط‌کش اثر می‌کنند. فقط نیروی $\vec{F}_1$ نشان داده شده است. $\vec{F}_2$، عمود بر خط‌کش است و به انتهای سمت راست آن اثر می‌کند. اگر خط‌کش نچرخد، (الف) $\vec{F}_2$ باید در چه جهتی باشد و (ب) آیا $\vec{F}_2$ باید بزرگتر از، کوچکتر از یا مساوی $\vec{F}_1$ باشد؟




### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۹ مهارت خود را تقویت کنید

شکل ۱۰-۱۸ الف قرص یکنواختی به جرم $M = ۲۵\text{kg}$ و شعاع $R = ۲۰\text{cm}$ را نشان می‌دهد که روی یک محور افقی ثابت نصب شده است. جسمی به جرم $m = ۱/۲\text{kg}$ از ریسمان بدون وزنی که دور کنارهٔ قرص پیچیده شده آویزان است. مطلوب است تعیین شتاب جسم در حین سقوط، شتاب زاویه‌ای قرص و کشش در ریسمان. ریسمان سُر نمی‌خورد و محور بدون اصطکاک است.

**نکتهٔ کلیدی** (۱) اگر جسم را به عنوان یک دستگاه در نظر بگیریم می‌توان شتاب $a$ را به نیروهای وارده به آن با استفاده از قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{net} = m\vec{a})$ مربوط کرد. (۲) اگر قرص را به عنوان یک دستگاه در نظر بگیریم، می‌توان شتاب زاویه‌ای $\alpha$ را به گشتاور نیروی وارد بر آن با استفاده از قانون دوم نیوتون برای چرخش $(\tau_{net} = I\alpha)$ ربط داد. (۳) برای ترکیب حرکتهای جسم و قرص از این واقعیت استفاده می‌کنیم که شتاب خطی $a$ جسم و شتاب خطی (مماسی) $a_t$ پیرامون قرص برابرند.

***نیروهای وارد بر جسم:*** این نیروها در شکل ۱۰-۱۸ ب در نمودار آزاد جسم نشان داده شده‌اند. نیروی کشش ریسمان $\vec{T}$ و نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ با بزرگی $mg$ است. اکنون می‌توان قانون دوم نیوتون را برای مؤلفه‌های در امتداد محور قائم $y$ $(F_{net,y} = ma_y)$ به صورت زیر نوشت

$$T - mg = ma \qquad (۱۰-۴۶)$$

با این وجود، نمی‌توانیم این معادله را برای $a$ حل کنیم چون $T$ نیز در آن نامعلوم است.

***گشتاور وارد بر قرص:*** قبلاً دیدیم به جای محور $y$ می‌توانیم محور $x$ را در نظر بگیریم. در اینجا محور را محور چرخش قرص درنظر می‌گیریم. برای محاسبهٔ گشتاورهای نیرو و لختی چرخشی $I$، محور چرخش را عمود بر قرص در نظر می‌گیریم که از مرکز آن نقطهٔ $O$ در شکل ۱۰-۱۸ پ می‌گذرد.

حال گشتاورهای نیرو با استفاده از معادلهٔ ۱۰-۴۰ $(\tau = rF_t)$ به دست می‌آیند. نیروی گرانشی وارد بر قرص و نیرویی که از محور به قرص وارد می‌شود هر دو به مرکز قرص یعنی در $r = ۰$ اثر می‌کنند و در نتیجه گشتاور آنها برابر صفر است. نیروی $\vec{T}$ وارد بر قرص ناشی از ریسمان در فاصلهٔ $r = R$ وارد می‌شود و بر لبهٔ قرص مماس است. بنابراین،

گشتاور این نیرو برابر $-RT$ است، علامت منفی به دلیل این است که گشتاور نیرو قرص را از حال سکون به طور ساعتگرد می‌چرخاند. از جدول ۱۰-۲ پ لختی چرخشی $I$ قرص برابر $\frac{1}{2}MR^2$ است. بنابراین، می‌توان رابطهٔ $\tau_{net}=I\alpha$ را به صورت زیر نوشت

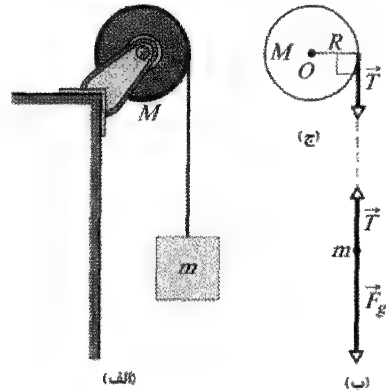
$$-RT=\frac{1}{2}MR^2\alpha \qquad (۱۰-۴۷)$$

بنظر می‌رسد که این معادله قابل استفاده نیست چون دارای دو کمیت نامعلوم $\alpha$ و $T$ است و هیچ یک از آنها کمیت $a$ مورد نظر نیستند. با این وجود، از راههای فیزیکی می‌توان آن را قابل استفاده کرد: چون ریسمان لغزشی ندارد، شتاب خطی $a$ مربوط به جسم و شتاب خطی (مماسی) $a_t$ لبهٔ قرص برابرند. بنابراین، با به کار بردن معادلهٔ ۱۰-۲۲ $(a_t=\alpha r)$ خواهیم داشت $\alpha=\frac{a}{R}$. قرار دادن این مقدار در معادلهٔ ۱۰-۴۷ به دست می‌دهد

$$T=-\frac{1}{2}Ma \qquad (۱۰-۴۸)$$

***ترکیب نتایج:*** ترکیب معادله‌های ۱۰-۴۶ و ۱۰-۴۸ به دست می‌دهد

$$a=-g\frac{2m}{M+2m}=-(9/8\,m/s^2)\frac{(2)(1/2\,kg)}{2/5\,kg+(2)(1/2\,kg)}=-4/8\,m/s^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$




**شکل ۱۰-۱۸** (الف) قطعه‌ای در حال سقوط باعث چرخش قرص می‌شود. (ب) نمودار جسم- آزاد برای جسم. (پ) نمودار جسم- آزاد ناکامل برای قرص.

حال با استفاده از معادلهٔ ۱۰-۴۸ می‌توان $T$ را به دست آورد

$$T=-\frac{1}{2}Ma=-\frac{1}{2}(2/5\,kg)(-4/8\,m/s^2)=6/0\,N \qquad \text{(پاسخ)}$$

همان‌طور که انتظار داریم، شتاب جسم در حال سقوط کمتر از $g$ و نیروی کشش ریسمان $T(=6/0\,N)$ کوچکتر از نیروی گرانش $mg(=11/8\,N)$ وارد بر جسم آویزان است. همچنین می‌بینیم که شتاب جسم و نیروی کشش ریسمان به جرم قرص بستگی دارند ولی به شعاع آن بستگی ندارند. برای بررسی این موضوع فرض کنید که رابطه‌های به دست آمده در بالا در حالتی که قرص بدون جرم $(M=0)$ است مقدارهای $a=-g$ و $T=0$ را به دست می‌دهند. بنابراین، چیزی که انتظار داریم این است که: جسم به سادگی مثل جسم آزاد سقوط می‌کند در حالی ریسمان را به دنبال خود می‌کشد. از معادلهٔ ۱۰-۲۲ شتاب زاویه‌ای قرص برابر است با

$$\alpha=\frac{a}{R}=\frac{-4/8\,m/s^2}{0/20\,m}=-24\,rad/s^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۱۰

در جودو اگر حریف بخواهد یک شخص $80\,kg$ را با پرتاب از بالای ران به زمین بیندازد، باید لباس اورا به طور یکنواخت با نیروی $\vec{F}$ و بازوی گشتاور $d_1=0/3\,m$ از نقطهٔ گرداندن (محور چرخش) روی قسمت راست مفصل ران خود بکشد، (شکل ۱۰-۱۹). جودو کار حریف را حول آن نقطه با شتاب زاویه‌ای $\alpha$ برابر $-6/0\,rad/s^2$، یعنی با شتاب زاویه‌ای که در جهت ساعتگرد مانند شکل است می‌چرخاند. فرض کنید که لختی چرخشی $I$ نسبت به نقطهٔ اتکا $15\,kg\cdot m^2$ باشد.

(الف) اگر جودو کار پیش از پرتاب حریف او را به جلو خم کند تا مرکز جرم او را به سمت خود بیاورد، بزرگی نیروی $\vec{F}$ (شکل ۱۰-۱۹ الف) چقدر خواهد بود؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توان نیروی کشیدن $\vec{F}$ وارد بر حریف را از طریق قانون دوم نیوتون برای چرخش به شتاب زاویه‌ای داده شدهٔ $\alpha$ ربط داد $(\tau_{net}=I\alpha)$.

***محاسبه‌ها:*** وقتی پاهای حریف از زمین جدا شد می‌توان فرض کرد که تنها سه نیرو بر او وارد می‌شوند: نیروی کشیدن $\vec{F}$، نیروی $\vec{N}$ وارد شده به حریف از سوی جودو کار در نقطهٔ چرخش (این نیرو در شکل ۱۰-۱۹ نشان داده نشده است)، و نیروی گرانشی $\vec{F}_g$. برای استفاده از $\tau_{net}=I\alpha$ باید گشتاور سه نیروی ذکر شده را نسبت به نقطهٔ چرخش داشته باشیم.

از معادلهٔ ۱۰-۴۱ $(\tau=r_\perp F)$ گشتاور نیروی ناشی از نیروی کشیدن $\vec{F}$ برابر $-d_1F$ است که $d_1$ بازوی گشتاور $r_\perp$ است و علامت منفی نشان دهندهٔ چرخش ساعتگرد مربوط به این گشتاور نیرو است. گشتاور نیروی مربوط به $\vec{N}$ صفر است چون $\vec{N}$ به نقطهٔ چرخش اثر می‌کند و در نتیجه بازوی گشتاور $r_\perp=0$ است.

برای محاسبهٔ گشتاور نیروی ناشی از $\vec{F}_g$ می‌توان فرض کرد که $\vec{F}_g$ به مرکز جرم حریف وارد می‌شود. اگر مرکز جرم در نقطهٔ چرخش باشد، بازوی گشتاور $\vec{F}_g$ برابر $r_\perp=0$ و در نتیجه گشتاور نیروی ناشی از آن برابر صفر است. بنابراین، تنها گشتاور نیروی وارد بر حریف ناشی از کشیدن $\vec{F}$ است و می‌توان رابطهٔ $\tau_{net}=I\alpha$ را به صورت زیر نوشت

$$-d_1F=I\alpha$$

پس داریم

$$F=\frac{-I\alpha}{d_1}=\frac{-(۱۵\,\mathrm{kg\cdot m^2})(-۶/۰\,\mathrm{rad/s^2})}{۰/۳۰\,\mathrm{m}}$$

$$=۳۰۰\,\mathrm{N}$$ (پاسخ)

(ب) اگر حریف پیش از پرتاب شدن ایستاده باشد به طوری که $\vec{F}_g$ دارای بازوی گشتاور $d_2=۰/۱۲\mathrm{m}$ (شکل ۱۰-۱۹ ب) باشد، بزرگی $\vec{F}$ باید چقدر باشد؟

**نکته کلیدی** از آنجا که بازوی گشتاور $\vec{F}_g$ دیگر صفر نیست، گشتاور نیروی ناشی از $\vec{F}_g$ در اینجا برابر با $d_2mg$ و مثبت خواهد بود، چون این گشتاور نیرو سعی در چرخش پادساعتگرد دارد.

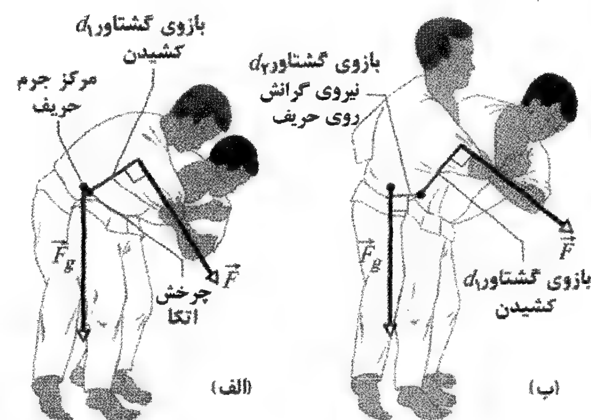
***محاسبه‌ها:*** اکنون می‌توان $\tau_{\text{net}}=I\alpha$ را به صورت زیر نوشت

$$-d_1F+d_2mg=I\alpha$$

که در نتیجه

$$F=-\frac{I\alpha}{d_1}+\frac{d_2mg}{d_1}$$

از قسمت (الف) می‌دانیم که جملهٔ نخست در سمت راست برابر $۳۰۰\mathrm{N}$ است. با قرار دادن این مقدار و داده‌های موجود خواهیم داشت




**شکل ۱۰-۱۹** پرتاب کردن در جودو (الف) اجرای درست و (ب) اجرای نادرست

$$F=۳۰۰\mathrm{N}+\frac{(۰/۱۲\mathrm{m})(۸۰\mathrm{kg})(۹/۸\mathrm{m/s^2})}{۰/۳۰\mathrm{m}}$$

$$=۶۱۳/۶\approx ۶۱۰\,\mathrm{N}$$ (پاسخ)

این نتایج بر این دلالت دارند که اگر جودو کار در ابتدا حریف خود را خم نکند و مرکز جرم او را روی نقطهٔ چرخش خود نیاورد مجبور است حریف را با نیروی خیلی بیشتری بکشد. یک جودوکار خوب این درس را از فیزیک می‌داند.

## ۱۰-۱۰ کار و انرژی جنبشی چرخشی

همان‌طور که در فصل ۷ بحث کردیم وقتی نیروی $F$ باعث شود تا یک جسم صلب به جرم $m$ در امتداد یک محور مختصات شتاب گیرد، این نیرو روی جسم کار $W$ انجام می‌دهد. بنابراین، انرژی جنبشی جسم $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ می‌تواند تغییر کند. فرض کنید این تنها انرژی مربوط به جسم است که تغییر می‌کند. در این صورت تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی را می‌توان به کار $W$ ربط داد که با استفاده از قضیهٔ کار- انرژی (معادلهٔ ۷-۱۰) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Delta K=K_f-K_i$$

$$=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=W \quad \text{(قضیهٔ کار- انرژی جنبشی)} \quad (۱۰-۴۹)$$

برای حرکتی که روی محور $x$ انجام می‌شود می‌توان کار را از معادلهٔ ۷-۳۲ به صورت زیر به دست آورد

$$W=\int_{x_i}^{x_f}F\,dx \quad \text{(کار، حرکت یک بعدی)} \quad (۱۰-۵۱)$$

این رابطه وقتی $F$ ثابت و جابه‌جایی جسم برابر $d$ باشد به رابطهٔ $W=Fd$ تبدیل می‌شود. آهنگی را که با آن کار انجام می‌شود توان می‌نامند به طوری که می‌توان با استفاده از معادله‌های ۷-۴۳ و ۷-۴۸ نوشت

$$P=\frac{dW}{dt}=Fv \quad \text{(توان، حرکت یک بعدی)} \quad (۱۰-۵۱)$$

اکنون، معادله‌های مشابه برای حرکت چرخشی را به دست می‌آوریم. وقتی گشتاور نیرویی باعث شتاب گرفتن یک جسم صلب به طور چرخشی حول یک محور ثابت شود، این گشتاور نیرو روی جسم کار $W$ را انجام می‌دهد. بنابراین، انرژی جنبشی چرخشی جسم $(K=\frac{1}{2}I\omega^2)$ می‌تواند تغییر کند. فرض کنید که انرژی جنبشی تنها انرژی در حال تغییر جسم باشد. در این صورت باز هم می‌توان تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی را به کار $W$ با استفاده از قضیهٔ کار- انرژی جنبشی ربط داد، با این تفاوت که در اینجا انرژی جنبشی چرخشی داریم

$$\Delta K=K_f-K_i$$

$$=\frac{1}{2}I\omega_f^2-\frac{1}{2}I\omega_i^2=W \quad \text{(قضیهٔ کار- انرژی جنبشی)} \quad (۱۰-۵۲)$$

در اینجا $I$ لختی چرخشی جسم حول محور ثابت است و $\omega_i$ و $\omega_f$ به ترتیب سرعتهای زاویه‌ای جسم پیش و پس از انجام کارند.

همچنین می‌توان با معادلهٔ هم ارز چرخش، از معادلهٔ ۱۰-۵۰ کار را محاسبه کرد

$$W=\int_{\theta_i}^{\theta_f}\tau\,d\theta \quad \text{(کار، چرخش حول محور ثابت)} \quad (۱۰-۵۳)$$

که در آن $\tau$ گشتاور نیرویی است که کار $W$ را انجام می‌دهد و $\theta_i$ و $\theta_f$ به ترتیب مکانهای زاویه‌ای جسم پیش و پس از انجام کارند. وقتی $\tau$ ثابت باشد، از معادلهٔ ۱۰-۵۳ نتیجه می‌گیریم

$$W=\tau(\theta_f-\theta_i) \quad \text{(کار، گشتاور نیروی ثابت)} \quad (۱۰-۵۴)$$

آهنگ انجام کار را توان می‌گویند که می‌توان آن را از هم ارز معادلهٔ ۱۰-۵۱ در چرخش به دست آورد

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \quad \text{(توان، چرخش حول محور ثابت)} \qquad (۱۰\text{-}۵۵)$$

در جدول ۱۰-۳ معادله‌هایی که بر حرکت چرخشی یک جسم صلب حول یک محور ثابت حاکم‌اند و معادله‌های متناظر برای حرکت انتقالی آمده است.

**جدول ۱۰-۳**

**برخی رابطه‌های متناظر برای حرکت انتقالی و چرخشی**

| چرخش خالص (محور ثابت) | | انتقالی خالص (راستای ثابت) | |
|---|---|---|---|
| مکان زاویه‌ای | $\theta$ | مکان | $x$ |
| سرعت زاویه‌ای | $\omega = d\theta/dt$ | سرعت | $v = dx/dt$ |
| شتاب زاویه‌ای | $\alpha = d\omega/dt$ | شتاب | $a=dv/dt$ |
| لختی چرخشی | $I$ | جرم | $m$ |
| قانون دوم نیوتون | $\tau_{net} = I\alpha$ | قانون دوم نیوتون | $F_{net} = ma$ |
| کار | $W = \int \tau\, d\theta$ | کار | $W = \int F\, dx$ |
| انرژی جنبشی | $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ | انرژی جنبشی | $K = \frac{1}{2} mv^2$ |
| توان (با گشتاور نیروی ثابت) | $P = \tau\omega$ | توان (با نیروی ثابت) | $P = Fv$ |
| قضیهٔ کار- انرژی جنبشی | $W = \Delta K$ | قضیهٔ کار- انرژی جنبشی | $W = \Delta K$ |

## اثبات معادلهٔ ۱۰-۵۲ تا ۱۰-۵۵

حال دوباره وضعیت شکل ۱۰-۱۷ را در نظر می‌گیریم که در آن نیروی $\vec{F}$ باعث چرخش جسم صلبی می‌شود که از یک ذرهٔ متصل به انتهای یک میلهٔ بدون جرم تشکیل شده است. در حین چرخش، نیروی $\vec{F}$ روی جسم کار انجام می‌دهد. فرض کنید که تغییر انرژی جسم ناشی از نیروی $\vec{F}$ فقط در انرژی جنبشی باشد، بنابراین، می‌توان قضیهٔ کار- انرژی جنبشی را از معادلهٔ ۱۰-۴۹ به صورت زیر نوشت

$$\Delta K = K_f - K_i = W \qquad (۱۰\text{-}۵۶)$$

با استفاده از رابطهٔ $K = \frac{1}{2}mv^2$ و معادلهٔ ۱۰-۱۸ $(v = \omega r)$ می‌توان معادلهٔ ۱۰-۵۶ را به صورت زیر نوشت

$$\Delta K = \frac{1}{2}mr^2\omega_f^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega_i^2 = W \qquad (۱۰\text{-}۵۷)$$

از معادلهٔ ۱۰-۳۳ لختی چرخشی برای این جسم تک ذره‌ای برابر $I = mr^2$ است. با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ ۱۰-۵۷، داریم

$$\Delta K = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W$$

که همان معادلهٔ ۱۰-۵۲ است. این معادله را برای جسم صلبی با یک ذره اثبات کردیم اما این رابطه برای هر جسم صلبی که حول یک محور چرخش می‌کند نیز صادق است.

اکنون می‌خواهیم کار انجام شدهٔ $W$ روی جسم در شکل ۱۰-۱۷ را به گشتاور نیروی $\tau$ وارد شده بر جسم بر اثر نیروی $\vec{F}$ مربوط کنیم. وقتی ذره مسافت $ds$ را در طول مسیر دایره‌ای خود می‌پیماید، فقط مؤلفه مماسی $F_t$ روی ذره کار انجام می‌دهد. کار $dW$ را به صورت $F_t ds$ می‌نویسیم. علاوه بر این، به جای $ds$ می‌توان مقدار $rd\theta$ را قرار داد که $d\theta$ زاویه‌ای است که ذره پیموده است. بنابراین، داریم

$$dW = F_t r\, d\theta \qquad (۱۰\text{-}۵۸)$$

از معادلهٔ ۱۰-۴۰ می‌بینیم که حاصلضرب $F_t r$ برابر گشتاور نیروی $\tau$ است به طوری که می‌توان معادلهٔ ۱۰-۵۸ را به صورت زیر نوشت

$$dW = \tau\, d\theta \qquad (۱۰\text{-}۵۹)$$

بنابراین، کار انجام شده در طی جابه‌جایی زاویه‌ای محدود از $\theta_i$ به $\theta_f$ برابر است با

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$$

که همان معادلهٔ ۱۰-۵۳ است، و برای هر جسم صلبی که حول محوری ثابت می‌چرخد صادق است. معادلهٔ ۱۰-۵۴ به طور مستقیم از معادلهٔ ۱۰-۵۳ به دست می‌آید.

توان $P$ مربوط به حرکت چرخشی را می‌توان از معادلهٔ ۱۰-۵۹ به صورت زیر به دست آورد

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

که همان معادلهٔ ۱۰-۵۵ است.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۱۱

فرض کنید قرص مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۹ و شکل ۱۰-۱۸ از حال سکون در زمان $t = ۰$ شروع به چرخش کند. انرژی جنبشی چرخشی $K$ آن در لحظهٔ $t = ۲/۵\,s$ چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توان $K$ را از معادلهٔ ۱۰-۳۴ $(K = \frac{1}{2}I\omega^2)$ به دست آورد. می‌دانیم که $I = \frac{1}{2}MR^2$، اما هنوز $\omega$ را در لحظهٔ $t = ۲/۵s$ نمی‌دانیم. با وجود این چون شتاب زاویه‌ای دارای مقدار ثابت $-۲۴ rad/s^2$ است. بنابراین، می‌توان از معادله‌های مربوط به شتاب زاویه‌ای ثابت از جدول ۱۰-۱ استفاده کرد.

***محاسبه‌ها:*** از آنجا که $\alpha$ و $\omega_0 (=۰)$ را داریم و $\omega$ را می‌خواهیم از معادلهٔ ۱۰-۱۲ استفاده می‌کنیم

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = ۰ + \alpha t = \alpha t.$$

با قرار دادن $\omega = \alpha t$ و $I = \frac{1}{2}MR^2$ در معادلهٔ ۱۰-۳۴ خواهیم داشت

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)(\alpha t)^2 = \frac{1}{4}M(R\alpha t)^2$$

$$= \frac{1}{4}(۲/۵kg)[(۰/۲۰\,m)(-۲۴rad/s^2)(۲/۵s)]^2$$

$$= ۹۰J \qquad \text{(پاسخ)}$$

**نکتهٔ کلیدی** همچنین می‌توان این پاسخ را با پیدا کردن انرژی جنبشی قرص از کار انجام شده روی آن به دست آورد.

***محاسبه‌ها:*** ابتدا تغییر در انرژی جنبشی قرص را به کار خالص $W$ انجام شده روی آن با استفاده از قضیهٔ کار- انرژی جنبشی یعنی معادلهٔ ۱۰-۵۲ $(K_f - K_i = W)$، ربط می‌دهیم. اگر به جای $K_f$ مقدار $K$ و به جای $K_i$ صفر را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$K = K_i + W = ۰ + W = W \qquad (۱۰-۶۰)$$

حال می‌خواهیم کار $W$ را به دست آوریم. می‌توان $W$ را از معادلهٔ ۱۰-۵۳ یا ۱۰-۵۴ به گشتاور نیروی وارد بر قرص ربط داد. تنها گشتاور نیرویی که موجب ایجاد شتاب زاویه‌ای می‌شود و کار انجام می‌دهد گشتاور نیروی ناشی از نیروی $\vec{T}$ وارد بر قرص از طرف ریسمان است. از مسئلهٔ نمونه ۱۰-۹ این گشتاور نیرو برابر $-TR$ است. چون $\alpha$ ثابت است این گشتاور نیرو نیز باید ثابت باشد. بنابراین، می‌توان با استفاده از معادلهٔ ۱۰-۵۴ نوشت

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i) \qquad (۱۰-۶۱)$$

از آنجا که $\alpha$ ثابت است می‌توان با استفاده از معادلهٔ ۱۰-۱۳ مقدار $\theta_f - \theta_i$ را به دست آورد. با توجه به اینکه $\omega_i = ۰$ است، داریم

$$\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ = ۰ + \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ = \frac{۱}{۲}\alpha t^۲$$

اکنون این رابطه را در معادلهٔ ۱۰-۶۱ قرار می‌دهیم و سپس نتیجه آن را در معادلهٔ ۱۰-۶۰ می‌گذاریم. به ازای $T = ۶/۰\,\mathrm{N}$ و $\alpha = -۲۴\,\mathrm{rad/s^۲}$ (از مسئله نمونهٔ ۱۰-۹)، خواهیم داشت

$$K = W = -TR(\theta_f - \theta_i) = -TR\left(\frac{۱}{۲}\alpha t^۲\right) = -\frac{۱}{۲}TR\alpha t^۲$$

$$= -\frac{۱}{۲}(۶/۰\,\mathrm{N})(۰/۲۰\,\mathrm{m})(-۲۴\,\mathrm{rad/s^۲})(۲/۵\,\mathrm{s})^۲$$

$$= ۹۰\,\mathrm{J}$$ (پاسخ)

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۱۲**

یک دودکش استوانه‌ای بلند با گسیختگی قاعدهٔ آن می‌افتد. دودکش را میله‌ای نازک به طول $L = ۵۵/۰\,\mathrm{m}$ فرض کنید (شکل ۱۰-۲۰ الف). در لحظه‌ای که دودکش با امتداد قائم زاویهٔ $\theta = ۳۵/۰°$ می‌سازد، سرعت زاویه‌ای $\omega_f$ آن چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** (۱) در حین چرخش، انرژی مکانیکی (مجموع انرژی جنبشی چرخشی $K$ و انرژی پتانسیل گرانشی $U$) تغییر نمی‌کند. (۲) انرژی جنبشی چرخشی با معادلهٔ ۱۰-۳۴ $(K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲)$ داده می‌شود.

***پایستگی انرژی مکانیکی:*** وقتی مرکز جرم دودکش می‌افتد، انرژی از انرژی پتانسیل گرانشی $U$ به انرژی جنبشی چرخشی $K$ منتقل می‌شود ولی کل انرژی تغییر نمی‌کند. این واقعیت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$K_f + U_f = K_i + U_i \qquad (۱۰-۶۲)$$

***انرژی جنبشی چرخشی:*** انرژی جنبشی $K$ در آغاز صفر است ولی مقدار بعدی آن $(=\frac{۱}{۲}I\omega^۲)$ به لختی چرخشی $I$ بستگی دارد. اگر میلهٔ نازکی داشته باشیم که نسبت به مرکز جرم خود (در مرکز آن) بچرخد، از جدول ۱۰-۲ می‌دانیم که $I_{com} = \frac{۱}{۱۲}mL^۲$، که $m$ جرم میله و $L$ طول آن است. ولی دودکش میله‌ای شکل نسبت به یک انتهای خود در فاصلهٔ $\frac{L}{۲}$ از مرکز می‌چرخد، بنابراین، از قضیهٔ محورهای موازی استفاده می‌کنیم

$$I = \frac{۱}{۱۲}mL^۲ + m\left(\frac{L}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۳}mL^۲ \qquad (۱۰-۶۳)$$

با قرار دادن این در $K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲$ خواهیم داشت

$$K_f = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}mL^۲\right)\omega^۲ \qquad (۱۰-۶۴)$$

***انرژی پتانسیل:*** انرژی پتانسیل $U(=mgy)$ به ارتفاع هر بخش از دودکش بستگی دارد. با وجود این می‌توان $U$ را با فرض اینکه تمام جرم آن در مرکز جرم متمرکز است محاسبه کرد، که در آغاز در ارتفاع $\frac{۱}{۲}L$ است. پس انرژی پتانسیل اولیه عبارت است از

$$U_i = \frac{۱}{۲}mgL \qquad (۱۰-۶۵)$$

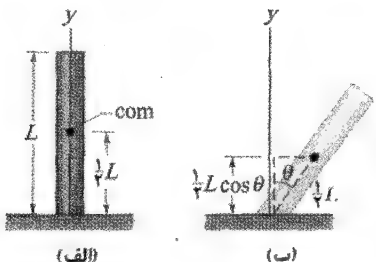
وقتی دودکش به اندازهٔ زاویهٔ $\theta$ می‌چرخد، از شکل ۱۰-۲۰ ب پیداست که مرکز آن تا ارتفاع $\frac{۱}{۲}L\cos\theta$ پایین می‌آید. پس انرژی پتانسیل آن اکنون عبارت است از

$$U_f = \frac{۱}{۲}mgL\cos\theta \qquad (۱۰-۶۶)$$

***سرعت زاویه‌ای:*** پس از جایگذاری معادله‌های ۱۰-۶۶، ۱۰-۶۵ و ۱۰-۶۴ در معادلهٔ ۱۰-۶۲ و قرار دادن $K_i = ۰$، برحسب $\omega_f$ حل کرده و پیدا می‌کنیم

$$\omega = \sqrt{\frac{۳g}{L}(۱-\cos\theta)} = \sqrt{\frac{۳(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})}{۵۵/۰\,\mathrm{m}}(۱-\cos ۳۵/۰°)}$$

$$= ۰/۳۱۱\,\mathrm{rad/s}$$




**شکل ۱۰-۲۰** (الف) یک دودکش استوانه‌ای (ب) ارتفاع مرکز جرم آن با استفاده از مثلث قائم الزاویه معلوم می‌شود.

***یادآوری:*** قسمت پایینی دودکش تمایل دارد سریعتر از قسمت بالایی آن بـه دور پایـه بچرخـد، و دودکـش احتمـالاً در طـی چرخش می‌شکند، به طوری که نیمهٔ بالایی از نیمهٔ پایینی عقب می‌ماند.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۱۳**

در چنگک بسیار بزرگ نوعی میگو دکتیلوس[1] قسمت بـزرگ و متحرک چنگک از پروپودیوس[2] (قسمت مقابل و ثابت چنگک) به کمک ماهیچه‌ای کـه تحـت کشش تـدریجی است فاصـله می‌گیرد. (شکل ۱۰-۲۱). انـرژی ذخیـره شـده در ماهیچـه بـا افـزایش کشـش افـزایش مـی‌یابـد. سـپس آزاد شـدن ناگهـانی داکتیلوس موجب چرخش آن نسبت به نقطهٔ چرخش می‌شـود، که ضربهٔ سنگینی بر پروپودیوس در فاصلهٔ زمانی $\Delta t$ برابـر بـا $۲۹۰\,\mu s$ وارد می‌کند. به خصوص، زائدهٔ واقع روی داکتیلـوس داخل حفره‌ای در پروپودیوس حرکت می‌کند که باعث می‌شـود آب از حفره آن چنان سریع بیرون بزند که حباب سـازی انجـام گیرد. یعنی آب بخار می‌شود و حبابهـایی از بخـار آب تشـکیل می‌دهد. این حبابها با ورود به آب اطراف به طـور سـریع زیـاد می‌شوند و به طور ناگهانی فرو می‌ریزند و موج صوتی شدیدی تشکیل می‌شود. ترکیب این موجهای صوتی از حبابهـای زیـاد می‌تواند طعمهٔ میگو را بیهوش کند.

بیشترین تنـدی زاویـه‌ای $\omega$ داکتیلـوس تقریبـاً $۲\times۱۰^{۳}\ \text{rad/s}$ و لختـی چرخشـی $I$ آن تقریبـاً $۳\times۱۰^{-۱۱}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{۲}$ اسـت. بـا چـه آهنگ میانگینی انرزی از ماهیچه به چـرخش تبـدیل مـی‌شـود؟

**نکتهٔ کلیدی** (۱) انرژی جنبشـی چرخشـی بـا معادلـهٔ ۱۰-۳۴ ($K=\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}$) داده می‌شود. (۲) توان میانگین بـا معادلـهٔ ۸-۴۰ ($P_{avg}=\Delta E/\Delta t$) داده می‌شود.

***محاسبه‌ها:*** وقتی تندی زاویه‌ای به بیشترین مقدار خود می‌رسد، انرژی جنبشی چرخشی عبارت است از

$$K=\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}=\frac{۱}{۲}(۳\times۱۰^{-۱۱}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{۲})(۲\times۱۰^{۳}\ \text{rad/s})^{۲}$$
$$=۶\times۱۰^{-۵}\ \text{J}$$

آنگاه توان میانگین برابر است با

$$P_{avg}=\frac{\Delta E}{\Delta t}=\frac{۶\times۱۰^{-۵}\ \text{J}}{۲۹۰\times۱۰^{-۶}\ \text{s}}$$
$$=۰/۲\ \text{W} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این توان به مقدار زیادی بیشتر از آن چیزی است کـه ماهیچـهٔ سریع عمل کننده می‌تواند در میگو ایجاد کند. بـا وجـود ایـن، میگو در چنگک، داکتیلوس را مانـند فنـر جمـع مـی‌کنـد و بـه تدریج کشش را افزایش می‌دهد و انرژی را ذخیره می‌کند (توان این مرحله کم است). سپس، وقتی انرژی ذخیره شده زیاد شـد، داکتیلوس آزاد می‌شود و ماهیچهٔ فنر مانند محکم بسته می‌شـود. (توان در اینجا زیاد است). بسیاری از جـانوران دیگـر از چنـین وضعیت ذخیرهٔ انرژی با توان کم استفاده می‌کننـد تـا سـپس بـا آزاد کردن انرژی با توان بالا طعمه‌ای را بگیرند یا از طعمه شدن بگریزند.




**شکل ۱۰-۲۱** چنگک بسیار بزرگ یـک میگـوی ایجـاد کننـدهٔ صـدا. داکتیلوس ابتدا از قسمت مقابل پروپودیوس جدا می‌شود و سـپس بـا حرکت زائده در داخل حفره به طرف آن بر می‌گردد.

1. dactylus
2. Propodius

# بازنگری و خلاصهٔ درس

**مکان زاویه‌ای** برای توصیف چرخش یک جسـم صـلب حول محوری ثابت به نام **محور چرخش**، یک **خط مرجع** ثابت را در جسم در نظر می‌گیریم که بر محور عمـود اسـت و بـا جسـم می‌چرخد. **مکان زاویه‌ای** $\theta$ این خط را نسبت به یک راسـتای ثابت اندازه می‌گیریم. وقتی $\theta$ برحسـب **رادیـان** انـدازه‌گیری شود، خواهیم داشت

$$\theta=\frac{s}{r} \qquad \text{(برحسب رادیان)} \qquad (۱-۱۰)$$

که در آن $s$ طول کمان مسیر دایـره‌ای بـه شـعاع $r$ و زاویـهٔ $\theta$ است. میان مقیاس رادیان با مقیاس زاویه در چرخش این رابطـه برقرار است

$$۱\text{rev}=۳۶۰^{\circ}=۲\pi\,\text{rad} \qquad (۲-۱۰)$$

**جابه‌جایی زاویه‌ای** جسمی که حول یک محور چرخش می‌چرخد، مکان زاویه‌ای آن از $\theta_۱$ به $\theta_۲$ تغییر می‌کنـد و یـک **جابه‌جایی زاویه‌ای** طی می‌شود

$$\Delta\theta=\theta_۲-\theta_۱ \qquad (۴-۱۰)$$

که در آن $\Delta\theta$ برای چرخش پادساعتگرد مثبت و برای چـرخش ساعتگرد منفی است.

**سرعت و تندی زاویه‌ای** اگر جسمی با جابه‌جـایی $\Delta\theta$ در بازهٔ زمانی $\Delta t$ چرخش کند، **سرعت زاویـه‌ای میـانگین** آن $\omega_{avg}$ برابر است با

$$\omega_{avg}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (۵-۱۰)$$

**سرعت زاویه‌ای (لحظه‌ای)** جسم $\omega$، برابر است با

$$\omega=\frac{d\theta}{dt} \qquad (۶-۱۰)$$

هم $\omega_{avg}$ و هم $\omega$ بردارند، و جهت آنها از **قاعدهٔ دست راست** در شکل ۱۰-۶ به دست می آید. این کمیتها اگر چرخش پادساعتگرد باشد مثبت، و اگر ساعتگرد باشد منفی‌اند. بزرگی سرعت زاویه‌ای جسم **تندی زاویه‌ای** نامیده می‌شود.

**شتاب زاویه‌ای** اگر سرعت زاویه‌ای جسمی در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$ از $\omega_۱$ تا $\omega_۲$ تغییر کند، شتاب زاویه‌ای متوسط جسم $\alpha_{avg}$، برابر است با

$$\alpha_{avg} = \frac{\omega_۲ - \omega_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (۱۰\text{-}۷)$$

**شتاب زاویه‌ای (لحظه‌ای)** $\alpha$ یک جسم برابر است با

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (۱۰\text{-}۸)$$

**معادله های سینماتیکی برای شتاب زاویه ای ثابت**
حرکت با *شتاب زاویه‌ای ثابت* $(\alpha = \text{constant})$، حالت خاص مهمی از حرکت چرخشی است. معادله‌های سینماتیکی مربوط به این حالت که در جدول ۱۰-۱ داده شده‌اند، عبارت‌اند از

$$\omega = \omega_۰ + \alpha t \qquad (۱۰\text{-}۱۲)$$

$$\theta - \theta_۰ = \omega_۰ t + \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ \qquad (۱۰\text{-}۱۳)$$

$$\omega^۲ = \omega_۰^۲ + ۲\alpha(\theta - \theta_۰) \qquad (۱۰\text{-}۱۴)$$

$$\theta - \theta_۰ = \frac{۱}{۲}(\omega_۰ + \omega)t \qquad (۱۰\text{-}۱۵)$$

$$\theta - \theta_۰ = \omega t - \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ \qquad (۱۰\text{-}۱۶)$$

**رابطهٔ میان متغیرهای خطی و زاویه ای** نقطه‌ای از جسم صلب در حال چرخش که در فاصلهٔ $r$ از محور چرخش قرار دارد، روی دایره‌ای به شعاع $r$ حرکت می‌کند. اگر جسم به اندازهٔ $\theta$ بچرخد، این نقطه کمانی به طول $s$ را طی می‌کند که با معادلهٔ زیر داده می‌شود

$$s = \theta r \qquad \text{(با مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰\text{-}۱۷)$$

در این معادله $\theta$ برحسب رادیان است.

سرعت خطی $\vec{v}$ یک نقطه بر دایرهٔ مسیر مماس است، تندی خطی $v$ نقطه عبارت است از

$$v = \omega r \qquad \text{(با مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰\text{-}۱۸)$$

که در آن $\omega$ تندی زاویه‌ای جسم (برحسب رادیان بر ثانیه) است.

شتاب خطی $\vec{a}$ نقطه، دارای دو مؤلفهٔ *مماسی* و *شعاعی* است. برای مؤلفهٔ مماسی داریم

$$a_t = \alpha r \qquad \text{(در مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰\text{-}۲۲)$$

که در آن $\alpha$ بزرگی شتاب زاویه‌ای جسم (برحسب رادیان بر مجذور ثانیه) است. مؤلفه شعاعی $\vec{a}$ عبارت است از

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \omega^۲ r \qquad \text{(در مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰\text{-}۲۳)$$

اگر نقطه‌ای دارای حرکت دایره‌ای یکنواخت باشد، دورهٔ تناوب $T$ حرکت نقطه و جسم عبارت است از

$$T = \frac{۲\pi r}{v} = \frac{۲\pi}{\omega} \qquad \text{(در مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰\text{-}۱۹ \text{ و } ۱۰\text{-}۲۰)$$

**انرژی جنبشی چرخشی و لختی چرخشی** انرژی جنبشی $K$ یک جسم صلب، که حول محور ثابتی می‌چرخد، با معادلهٔ زیر داده می‌شود

$$K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ \qquad \text{(در مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰\text{-}۳۴)$$

که در آن $I$ **لختی چرخشی** جسم است. لختی چرخشی برای دستگاهی که از ذره‌های مجزا تشکیل شده به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I = \sum m_i r_i^۲ \qquad (۱۰\text{-}۳۳)$$

و برای جسمی که توزیع پیوسته داشته باشد عبارت است از

$$I = \int r^۲\, dm \qquad (۱۰\text{-}۳۵)$$

در این عبارتها $r$ و $r_i$ فاصلهٔ عمودی از محور چرخش تا هر جزء جرم جسم است.

**قضیهٔ محورهای موازی** *قضیهٔ محورهای موازی* لختی چرخشی جسم حول هر محور را به لختی چرخشی همان جسم حول محوری که از مرکز جرم می‌گذرد مربوط می‌کند

$$I = I_{com} + Mh^۲ \qquad (۱۰\text{-}۳۶)$$

در اینجا $h$ فاصلهٔ عمودی میان دو محور است.

**گشتاور نیرو** *گشتاور نیرو* اثر چرخشی یا پیچشی نیروی $\vec{F}$ وارد به یک جسم حول محور چرخش را بیان می‌کند. اگر $\vec{F}$ بر نقطه‌ای اثر کند که با بردار مکان $\vec{r}$ نسبت به محور داده می‌شود، آنگاه، بزرگی گشتاور نیرو عبارت است از

$$\tau = rF_t = r_\perp F = rF\sin\phi \qquad (۱۰\text{-}۳۹ \text{ و } ۱۰\text{-}۴۰ \text{ و } ۱۰\text{-}۴۱)$$

که در آن $F_t$ مؤلفهٔ $\vec{F}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ و $\phi$ زاویهٔ میان $\vec{r}$ و $\vec{F}$ است. کمیت $r_\perp$ فاصلهٔ عمودی میان محور چرخش و امتداد بردار $\vec{F}$ است. این امتداد **خط اثر** $\vec{F}$ و $r_\perp$ **بازوی گشتاور** $\vec{F}$ نامیده می‌شوند. به همین ترتیب، $r$ بازوی گشتاور $F_t$ است.

یکای SI گشتاور نیرو نیوتون- متر $(\text{N}\cdot\text{m})$ است. گشتاور نیروی $\tau$، اگر جسم ساکن را به طور پادساعتگرد بچرخاند مثبت و اگر آن را به طور ساعتگرد بچرخاند منفی است.

**قانون دوم نیوتون در شکل زاویه‌ای** قانون دوم نیوتون در حرکت چرخشی به صورت زیر است

$$\tau_{net} = I\alpha \qquad (۱۰\text{-}۴۵)$$

که در آن $\tau_{net}$ گشتاور نیروی خالص وارد بر یک ذره یا یک جسم صلب، $I$ لختی چرخشی ذره یا جسم حول محور چرخش، و $\alpha$ شتاب زاویه‌ای حاصل حول آن محور است.

**کار و انرژی جنبشی چرخشی** معادله‌های مورد استفاده در محاسبهٔ کار و توان در حرکت چرخشی، با

معادله‌های مورد استفاده در حرکت انتقالی متناظرند و عبارت‌اند از

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta \qquad (۵۳-۱۰)$$

و

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \omega \qquad (۵۵-۱۰)$$

وقتی $\tau$ ثابت باشد، معادلهٔ ۱۰-۵۳ به صورت زیر ساده می‌شود

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \qquad (۵۴-۱۰)$$

معادلهٔ مربوط به قضیهٔ کار - انرژی جنبشی، که برای جسمهای در حال چرخش به کار می‌رود به صورت زیر است

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2 = W \qquad (۵۲-۱۰)$$

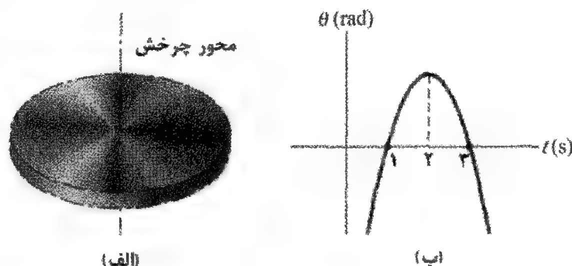
## پرسشها

۱- شکل ۱۰-۲۲ نمودار سرعت زاویه‌ای برحسب زمان را برای یک قرص چرخان مانند چرخ و فلک نشان می‌دهد. برای نقطه‌ای که در لبهٔ قرص قرار دارد، زمانهای $a$، $b$، $c$ و $d$ را برحسب بزرگی (الف) شتاب مماسی و (ب) شتاب شعاعی از بزرگ به کوچک مرتب کنید.



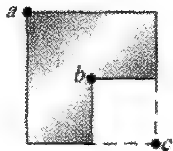

شکل ۱۰-۲۲ پرسش ۱

۲- شکل ۱۰-۲۳ ب نمودار مکان زاویه‌ای قرص چرخان شکل ۱۰-۲۳ الف را نشان می‌دهد. آیا سرعت زاویه‌ای قرص در حالتهای زیر مثبت است یا منفی یا صفر است؟(الف) $t=1\,s$، (ب) $t=2\,s$، (پ) $t=4\,s$ و (ت) آیا شتاب زاویه‌ای آن مثبت است یا منفی؟



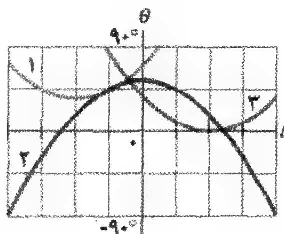

شکل ۱۰-۲۳ پرسش ۲

۳- شکل ۱۰-۲۴ صفحهٔ فلزی یکنواختی را نشان می‌دهد که مربعی است که ۲۵٪ آن را بریده‌اند. سه نقطه را با حرف نشان داده‌ایم. این حرفها را برحسب لختی چرخشی صفحه حول محور عمودی که از آنها می‌گذرد از بزرگ به کوچک مرتب کنید.



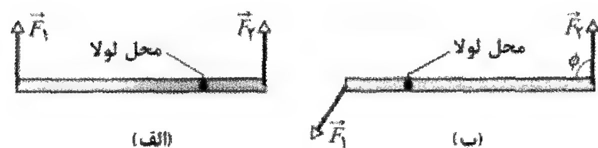

شکل ۱۰-۲۴ پرسش ۳

۴- شکل ۱۰-۲۵ نمودارهای مکان زاویه‌ای $\theta$ را برحسب زمان $t$ برای سه حالتی که در آنها قرصی نظیر یک چرخ و فلک چرخش داشته باشد نشان می‌دهد. در هر حالت، جهت چرخش در مکان زاویه‌ای معین $\theta_c$ تغییر می‌کند. (الف) در هر حالت تعیین کنید که آیا $\theta_c$ نسبت به $\theta = 0$ ساعتگرد است یا پادساعتگرد، یا در $\theta = 0$ قرار دارد. برای هر حالت تعیین کنید که (ب) آیا $\omega$ در پیش یا پس از $t = 0$ یا در آن برابر صفر است؟ و (پ) آیا $\alpha$ مثبت است یا منفی یا صفر است؟




شکل ۱۰-۲۵ پرسش ۴

۵- شکل ۱۰-۲۶ الف نمای از بالای یک میلهٔ افقی را نشان می‌دهد که می‌تواند حول نقطهٔ مشخص شده بچرخد. دو نیروی افقی بر این میله وارد می‌شوند، اما میله ساکن است. اکنون، اگر زاویهٔ میان میله و $\vec{F}_2$ را از $90°$ کاهش دهیم و میله باز هم نچرخد، آیا $\vec{F}_2$ را باید افزایش دهیم، یا کاهش یا باید ثابت نگهداریم؟

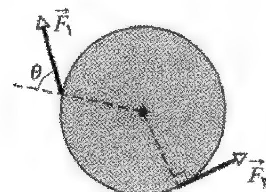



شکل ۱۰-۲۶ پرسشهای ۵ و ۶

۶- شکل ۱۰-۲۶ ب نمای از بالای میله‌ای افقی را نشان می‌دهد که حول نقطهٔ لولا شده توسط دو نیروی افقی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ می‌چرخد. نیروی $\vec{F}_2$ با میله زاویهٔ $\phi$ می‌سازد. به ازای مقدارهای $\phi$ برابر $90°$، $70°$ و $110°$، بزرگی شتاب زاویه‌ای میله را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

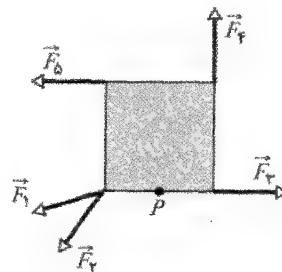
۷- در شکل ۱۰-۲۷ دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بر قرصی که حول مرکزش مانند چرخ و فلک می‌چرخد، وارد می‌شوند. این نیروها در حین چرخش زاویهٔ نشان داده شده را حفظ می‌کنند و قرص به طور پادساعتگرد و با آهنگ ثابت می‌چرخد. می‌خواهیم زاویهٔ $\theta$ مربوط به $\vec{F}_1$ را بدون تغییری در بزرگی $\vec{F}_1$ کاهش دهیم. (الف) برای ثابت نگهداشتن تندی زاویه‌ای آیا باید بزرگی $\vec{F}_2$

را افزایش دهیم یا کاهش یا در همان مقدار حفظ کنیم؟ آیا نیروهای (ب) $\vec{F}_1$ و (پ) $\vec{F}_2$ باعث چرخش قرص به صورت ساعتگرد می‌شوند یا پادساعتگرد؟




**شکل ۱۰-۲۷** پرسش ۷

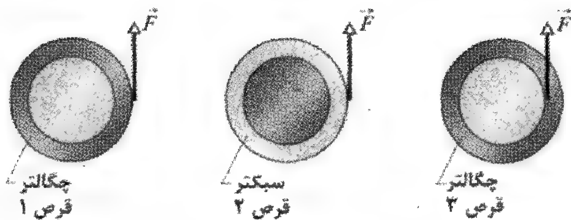
۸- در نمای از بالای شکل ۱۰-۲۸، پنج نیرو با بزرگی یکسان بر یک چرخ و فلک غیر عادی وارد می‌شوند؛ این چرخ و فلک به صورت مربعی است که می‌تواند حول نقطهٔ $P$ واقع در وسط یکی از ضلعهای آن بچرخد. نیروهای وارد بر چرخ و فلک را برحسب بزرگی گشتاور نیرویی که نسبت به نقطهٔ $P$ ایجاد می‌کنند از بزرگترین تا کوچکترین مقدار مرتب کنید.




**شکل ۱۰-۲۸** پرسش ۸

۹- نیرویی را به لبهٔ قرصی که می‌تواند شبیه یک چرخ و فلک بچرخد وارد می‌کنیم به طوری که سرعت زاویه‌ای آن تغییر کند. سرعتهای زاویه‌ای اولیهٔ و نهایی به ترتیب برای چهار وضعیت به صورت زیر است: (الف) $-2\,rad/s$ ، $5\,rad/s$؛ (ب) $2\,rad/s$، $5\,rad/s$؛ (پ) $-2\,rad/s$، $-5\,rad/s$؛ (ت) $2\,rad/s$، $-5$.
این وضعیتها را برحسب بزرگی کار انجام شده توسط گشتاور ناشی از نیروها مرتب کنید.

۱۰- شکل ۱۰-۲۹ سه قرص تخت (با شعاع یکسان) را نشان می‌دهد که می‌توانند حول مرکزهایشان همانند یک چرخ و فلک بچرخند. هر قرص از دو مادهٔ مشابه تشکیل شده که یکی چگالتر از دیگری است (چگالی به معنای جرم واحد حجم است). در قرص ۱ و ۳ مادهٔ چگالتر نیمهٔ خارجی سطح قرص را تشکیل می‌دهند. در قرص ۲ نیمهٔ داخلی سطح قرص چگالتر است. نیروهایی با بزرگی یکسان را به طور مماس به قرصها وارد می‌کنیم که یا به لبهٔ خارجی یا مرز مشترک دو ماده به صورت نشان داده شده اثر می‌کنند. این قرصها را برحسب (الف) گشتاور نیرو حول مرکز قرص، (ب) لختی چرخشی حول مرکز قرص و (پ) شتاب زاویه‌ای قرص از بزرگ به کوچک مرتب کنید.




**شکل ۱۰-۲۹** پرسش ۱۰

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
•-••• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

### بخش ۱۰-۲ متغیرهای چرخشی

•۱- یک پرتاب کنندهٔ ماهر بیسبال می‌تواند توپ بیسبال را با تندی $85\,mi/h$ و با چرخش $1800\,rad/s$ به طرف محوطهٔ ضربه زدن پرتاب کند. این توپ چند دور می‌چرخد تا به محوطهٔ ضربه زدن برسد؟ برای سادگی فرض کنید که طول مسیر ۶۰ فوت و به صورت یک خط راست باشد.

•۲- تندی زاویه‌ای (الف) عقربهٔ ثانیه شمار، (ب) عقربهٔ دقیقه شمار و (پ) عقربه ساعت شمار یک ساعت را که به طور یکنواخت کار می‌کند به دست آورید. پاسخ خود را برحسب رادیان بر ثانیه بنویسید.

••۳- یک شیرجه رونده در فاصلهٔ بین سکوی شیرجه و سطح آب که ۱۰ متر است ۲/۵ دور می‌زند. اگر مؤلفهٔ قائم سرعت اولیه صفر باشد، سرعت زاویه‌ای میانگین شیرجه رونده را حساب کنید. **ILW**

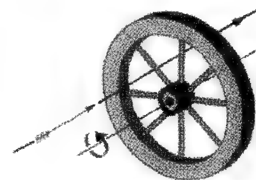
••۴- مکان زاویه‌ای نقطه‌ای روی لبهٔ یک چرخ دوار با رابطهٔ $\theta = 4/0t - 3/0t^2 + t^3$ داده می‌شود که $\theta$ برحسب رادیان و $t$ برحسب ثانیه است. سرعت زاویه‌ای این نقطه در زمانهای (الف) $t = 2/0\,s$ و (ب) $t = 4/0\,s$ چقدر است؟ (پ) شتاب زاویه‌ای میانگین برای بازهٔ زمانی که از $t = 2/0\,s$ شروع و در $t = 4/0\,s$ پایان می‌یابد چقدر است؟ شتابهای زاویه‌ای لحظه‌ای در (پ) شروع و (ت) پایان این بازهٔ زمانی چقدر است؟

••۵- هرگاه به لبهٔ کناری برشی از نان برشتهٔ کره زده شده ناگهان فشاری وارد شود، موقع سقوط می‌چرخد. اگر فاصله تا

کف اتاق $76\,cm$ و چرخش کمتر از $1\,rev$ باشد، (الف) کوچکترین و (ب) بزرگترین تندیهای زاویه‌ای که موجب می‌شود تا نان پس از اصابت به زمین واژگون شود و قسمت کره‌دار آن در پایین قرار گیرد چقدر است؟

●●۶- مکان زاویه‌ای نقطه‌ای روی یک چرخ دوار با رابطهٔ $\theta = 2/0 + 4/0t^2 + 2/0t^3$ داده می‌شود که $\theta$ برحسب رادیان و $t$ برحسب ثانیه است. در لحظهٔ $t = 0$، (الف) مکان زاویه‌ای این نقطه و (ب) سرعت زاویه‌ای آن چقدر است؟ (پ) سرعت زاویه‌ای نقطه در $t = 4/0\,s$ چقدر است؟ (ت) شتاب زاویه‌ای نقطه را در $t = 2/0\,s$ حساب کنید. (ث) آیا شتاب زاویه‌ای آن ثابت است؟

●●●۷- چرخ نشان داده شده در شکل ۱۰-۳۰ دارای هشت پره با فاصله‌های مساوی و شعاع $30\,cm$ است. این چرخ روی محور ثابتی قرار دارد و با تندی $2/5\,rev/s$ می‌چرخد. می‌خواهیم پیکانی به طول $20\,cm$ را موازی با محور چرخش طوری پرتاب کنیم که بدون برخورد با هیچ کدام از پره‌ها از چرخ بگذرد. فرض کنید که پیکان و پره‌ها بسیار باریک‌اند. (الف) کمینهٔ تندی پیکان چقدر باید باشد؟ (ب) آیا مهم است که چه نقطه‌ای در فاصلهٔ میان محور و کنارهٔ چرخ هدف گرفته شود؟ اگر چنین است بهترین مکان آن کجاست؟



**شکل ۱۰-۳۰** مسئلهٔ ۷

●●●۸- شتاب زاویه‌ای چرخی عبارت است از $\alpha = 6/0t^4 - 4/0t^2$ که در آن $\alpha$ برحسب رادیان بر مجذور ثانیه و $t$ برحسب ثانیه است. در لحظهٔ $t = 0$ چرخ دارای سرعت زاویه‌ای $+2/0\,rad/s$ و مکان زاویه‌ای $+1\,rad$ است. عبارتی برای (الف) سرعت زاویه‌ای $(rad/s)$ و (ب) مکان زاویه‌ای $(rad)$ به صورت تابعی از زمان $(s)$ بنویسید.

### بخش ۱۰-۴ چرخش با شتاب زاویه‌ای ثابت

●۹- قرصی که در ابتدا با $120\,rad/s$ می‌چرخد با شتاب زاویه‌ای ثابتی به بزرگی $40\,rad/s^2$ کند می‌شود. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا این قرص متوقف شود؟ (ب) در طول این زمان قرص چه زاویه‌ای چرخیده است؟

●۱۰- تندی زاویه‌ای موتور اتومبیلی با آهنگ ثابت از $1200\,rev/min$ به $3000\,rev/min$ در $12\,s$ افزایش می‌یابد. (الف) شتاب زاویه‌ای این حرکت چند دور بر مجذور دقیقه است؟ (ب) در طی این بازهٔ $12\,s$ این موتور چند دور می‌چرخد؟

●۱۱- استوانه‌ای به دور محور مرکزی خود با سرعت زاویه‌ای $12/6\,rad/s$ می‌چرخد. اگر این استوانه بعداً با آهنگ ثابت $4/20\,rad/s^2$ کند شود (الف) در چه مدتی و (ب) در طی چه زاویه‌ای از چرخش به حالت سکون می‌رسد؟

●۱۲- قرصی از حالت سکون حول محور مرکزی خود با شتاب زاویه‌ای ثابت شروع به چرخش می‌کند. قرص در مدت $5/0\,s$ به اندازهٔ $25\,rad$ می‌چرخد. در این مدت، بزرگی (الف) شتاب زاویه‌ای و (ب) سرعت زاویه‌ای میانگین قرص چقدر است؟ (پ) سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای این قرص در انتهای $5/0\,s$ چقدر است؟ (ت) اگر شتاب زاویه‌ای تغییر نکند، کل زاویهٔ طی شده توسط قرص در طی $5/0\,s$ بعدی چقدر است؟

●●۱۳- چرخی دارای شتاب زاویه‌ای ثابت $3/0\,rad/s^2$ است. در طی یک بازهٔ زمانی معین $4/0\,s$ این چرخ به اندازهٔ زاویهٔ $120\,rad$ می‌چرخد. با فرض اینکه چرخ از حال سکون شروع به حرکت کند، چه مدت قبل از شروع این بازهٔ زمانی $4/0\,s$ چرخ در حرکت بوده است؟ **SSM**

●●۱۴- چرخ و فلکی از حال سکون با شتاب زاویه‌ای $1/50\,rad/s^2$ شروع به چرخش می‌کند؟ (الف) دو دور اول، و (ب) دو دور بعدی چقدر طول می‌کشد؟

●●۱۵- چرخ لنگری در لحظهٔ $t = 0$ دارای سرعت زاویه‌ای $4/7\,rad/s$، شتاب زاویه‌ای ثابت $-0/25\,rad/s^2$ و خط مرجعی در $\theta_0 = 0$ است. (الف) زاویهٔ بیشینهٔ $\theta_{max}$، که این خط مرجع به طرف مثبت می‌چرخد چقدر است؟ (ب) اولین و (پ) دومین زمانی که خط مرجع در $\theta = \frac{1}{2}\theta_{max}$ قرار می‌گیرد کدام است؟ در چه (ت) زمان منفی و (ث) زمان مثبتی خط مرجع به $\theta = -10/5\,rad$ می‌رسد؟ (ج) نمودار $\theta$ را برحسب $t$ رسم کنید و پاسخهای (الف) تا (ث) را روی آن نشان دهید.

●●۱۶- قرصی حول محور مرکزی خود از حال سکون شروع به چرخش می‌کند و با شتاب زاویه‌ای ثابت شتاب می‌گیرد. در یک لحظه قرص با تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$ می‌چرخد؛ پس از ۶۰ دور بعدی تندی زاویه‌ای آن به $15\,rev/s$ می‌رسد. مطلوب است تعیین (الف) شتاب زاویه‌ای، (ب) زمان لازم برای پیمودن ۶۰ دور کامل. (پ) زمان لازم برای رسیدن به تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$ و (ت) تعداد دورهایی که قرص از حالت سکون تا زمانی که به تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$ می‌رسد چرخیده است.

●●۱۷- تندی زاویه‌ای چرخ لنگری در طی $40\,rev$ از $1/5\,rad/s$ به صفر می‌رسد. (الف) با فرض اینکه شتاب زاویه‌ای آن ثابت باشد، چه مدت طول می‌کشد تا چرخ متوقف

شود؟ (ب) شتاب زاویه‌ای آن چقدر است؟ (پ) مدت زمان چرخیدن ۲۰ دور اول از ۴۰ دور چقدر است؟ ILW

## بخش ۱۰-۵ رابطهٔ میان متغییرهای خطی و زاویه‌ای

•۱۸- یک صفحهٔ گرامافون با چرخیدن این صفحه کار می‌کند، به طوری که سوزنی در داخل شیار تقریباً دایره‌ای شکل در صفحه می‌لغزد. برآمدگیهای درون شیار باعث می‌شود که سوزن حرکت کند و به نوسان درآید. دستگاه این نوسانها را به سیگنالهای الکتریکی و سپس به صوت تبدیل می‌کند. فرض کنید که صفحه‌ای با آهنگ $33\frac{1}{3}$ rev/min می‌چرخد و شیار در شعاع ۱۰/۰cm است و برآمدگیهای درون شیار به طور یکنواخت به اندازهٔ ۱/۷۵ mm از هم فاصله دارند. با چه آهنگی (ضربه در ثانیه) این برآمدگیها با سوزن برخورد می‌کنند؟

•۱۹- بین سالهای ۱۹۱۱ تا ۱۹۹۰ نوک برج کج پیزا در ایتالیا با آهنگ متوسط ۱/۲ mm/y به طرف جنوب حرکت کرده است. ارتفاع این برج ۵۵ m است. تندی زاویه‌ای میانگین نوک این برج حول پایه‌اش برحسب رادیان بر ثانیه چقدر است؟

•۲۰- فضانوردی در یک دستگاه مرکز گریز باید آزمایش شود. شعاع دستگاه ۱۰m است و در آغاز حرکت بنابر رابطهٔ $\theta = 0/30t^2$ می‌چرخد، که در آن $t$ برحسب ثانیه و $\theta$ برحسب رادیان است. در لحظهٔ $t = 5/0$s ، بزرگی (الف) سرعت زاویه‌ای، (ب) سرعت خطی، (پ) شتاب مماسی و (ت) شتاب شعاعی فضانورد چقدر است؟

•۲۱- چرخ لنگری به قطر ۱/۲۰m در حال چرخش با تندی زاویه‌ای ۲۰۰rev/min است. (الف) تندی زاویه‌ای این چرخ لنگر برحسب رادیان بر ثانیه چقدر است؟ (ب) تندی خطی نقطه‌ای روی لبهٔ چرخ چقدر است؟ (پ) چه شتاب زاویه‌ای ثابتی (برحسب دور بر مجذور دقیقه) باعث افزایش تندی زاویه‌ای چرخ به مقدار ۱۰۰۰rev/min در مدت ۶۰/۰s می‌شود؟ (ت) چرخ در طی این ۶۰/۰s چند دور می‌زند؟ WWW SSM

•۲۲- اگر ملخ هواپیمایی با ۲۰۰۰ rev/min در حالی که هواپیما با تندی ۴۸۰km/h نسبت به زمین حرکت می‌کند بچرخد، تندی خطی نقطه‌ای روی نوک این ملخ در شعاع ۱/۵ m نسبت به (الف) خلبان و (ب) ناظری که روی زمین قرار دارد چقدر است؟ سرعت هواپیما موازی با محور چرخش است.

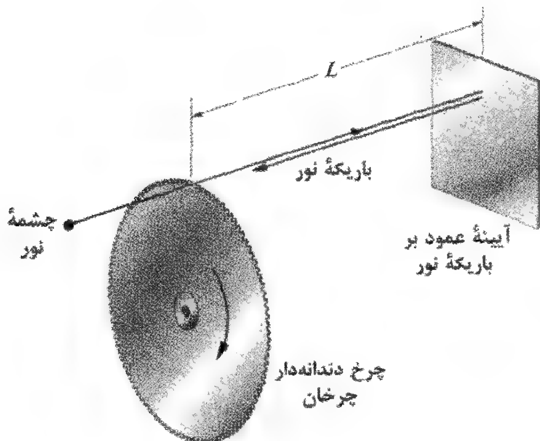
•۲۳- بزرگی (الف) سرعت زاویه‌ای، (ب) شتاب شعاعی و (پ) شتاب مماسی فضا پیمایی که در مسیری دایره‌ای به شعاع ۳۲۲۰km و با تندی ۲۹۰۰۰km/h می‌چرخد چقدر است؟

•۲۴- جسمی حول محور ثابتی می‌چرخد به طوری که مکان زاویه‌ای یک خط مرجع روی جسم با رابطهٔ $\theta = 0/4e^{2t}$ داده می‌شود که در آن $\theta$ برحسب رادیان و $t$ برحسب ثانیه است. نقطه‌ای را روی جسم در نظر بگیرید که در فاصلهٔ ۴/۰cm از محور چرخش قرار دارد. در لحظهٔ $t = 0$ بزرگی (الف) مؤلفهٔ مماسی شتاب و (ب) مؤلفهٔ شعاعی شتاب نقطه چقدر است؟

••۲۵- قرصی با شعاع ۰/۲۵m همانند یک چرخ و فلک به اندازهٔ ۸۰۰rad می‌چرخد. حرکت از حال سکون شروع می‌شود و در طی ۴۰۰rad نخست به یک تندی زاویه‌ای با آهنگ ثابت $\alpha_1$ می‌رسد و سپس تندی زاویه‌ای خود را با آهنگ ثابت $-\alpha_1$ از دست می‌دهد تا دوباره به سکون برسد. بزرگی شتاب مرکزگرای هر قسمت قرص از ۴۰۰m/s$^2$ تجاوز نمی‌کند. (الف) کمترین زمان لازم برای این چرخش چقدر است؟ (ب) مقدار متناظر $\alpha_1$ چقدر است؟

••۲۶- چرخ لنگری به شعاع ۲/۸۳cm را از حال سکون با شتاب ۱۴/۲ rad/s به حرکت در می‌آوریم تا تندی زاویه‌ای آن به ۲۷۶۰rev/min برسد. (الف) شتاب مماسی نقطه‌ای روی کنارهٔ این چرخ را در طی فرایند شتاب گرفتن به دست آورید. (ب) شتاب شعاعی این نقطه وقتی این چرخ لنگر با تندی نهایی خود بچرخد چقدر است؟ (پ) در مدت شتاب گرفتن چرخ لنگر، نقطهٔ واقع بر کنارهٔ آن چه مسافتی را طی می‌کند؟

••۲۷- در یکی از روشهای اولیه برای اندازه‌گیری تندی نور، از یک چرخ دندانه‌دار چرخان استفاده شده است. در این روش، باریکه‌ای از نور که از شکاف میان دندانه‌های کنارهٔ خارجی چرخ، مطابق شکل ۱۰-۳۱ عبور می‌کند، به آینه‌ای که در فاصلهٔ دور قرار دارد می‌تابد و چنان به طرف چرخ بر می‌گردد که درست از شکاف بعدی چرخ عبور کند. شعاع چنین چرخ دندانه‌داری ۵/۰cm بود و در کنارهٔ آن ۵۰۰ دندانه وجود داشت. اندازه‌گیریهای مربوط به حالتی که فاصلهٔ آینه از چرخ $L = 500$m بوده تندی نور را $3/0\times10^5$ km/s به دست داده است. (الف) تندی زاویه‌ای (ثابت) چرخ چقدر بوده است؟

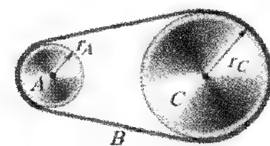



**شکل ۱۰-۳۱** مسئلهٔ ۲۷

•••۲۸- چرخ لنگر یک ماشین بخار با سرعت زاویه‌ای ثابت $۱۵۰\,\mathrm{rev/min}$ می‌چرخد. وقتی بخار قطع شود، اصطکاک یاتاقانها و مقاومت هوا چرخ را پس از مدت ۲/۲ ساعت متوقف می‌کند. (الف) شتاب زاویه‌ای ثابت چرخ برحسب دور بر مجذور دقیقه در حین کند شدن حرکت چقدر است؟ (ب) چرخ قبل از توقف چند دور می‌چرخد؟ (پ) در لحظه‌ای که این چرخ لنگر با تندی زاویه‌ای $۷۵\,\mathrm{rev/min}$ می‌چرخد مؤلفهٔ مماسی شتاب خطی نقطه‌ای از چرخ لنگر که به فاصلهٔ $۵۰\,\mathrm{cm}$ از محور چرخش قرار دارد چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب خالص نقطهٔ ذکر شده در قسمت (پ) چقدر است؟

•••۲۹- (الف) تندی زاویه‌ای $\omega$ حول محور قطبی برای نقطه‌ای روی سطح زمین در عرض جغرافیایی $۴۰^\circ$ شمالی چقدر است؟ (زمین به دور این محور می‌چرخد.) (ب) تندی خطی $v$ این نقطه چقدر است؟ مقدارهای (پ) $\omega$ و (ت) $v$ برای نقطه‌ای از استوا چقدر است؟ **SSM**

•••۳۰- در شکل ۱۰-۳۲ چرخ $A$ به شعاع $r_A = ۱۰\,\mathrm{cm}$ توسط تسمهٔ $B$ به چرخ $C$ به شعاع $r_C = ۲۵\,\mathrm{cm}$ وصل شده است. تندی زاویه‌ای چرخ $A$ را از حال سکون با آهنگ ثابت $۱/۶\,\mathrm{rad/s^2}$ افزایش می‌دهیم. زمان لازم برای اینکه چرخ $C$ به تندی زاویه‌ای $۱۰۰\,\mathrm{rev/min}$ برسد چقدر است. فرض کنید که تسمه لغزش ندارد. (راهنمایی: اگر تسمه لغزش نداشته باشد سرعتهای خطی در هر دو لبهٔ چرخها باید برابر باشند.)



**شکل ۱۰-۳۲** مسئلهٔ ۳۰

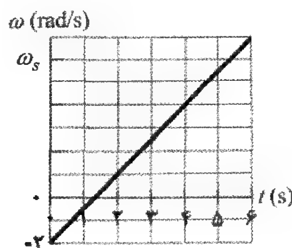
•••۳۱- صفحهٔ گرامافونی با تندی زاویه‌ای $۳۳\frac{۱}{۳}\,\mathrm{rad/min}$ می‌چرخد. یک تخم هندوانه روی این صفحه به فاصلهٔ $۶/۰\,\mathrm{cm}$ از محور چرخش قرار دارد. (الف) شتاب زاویه‌ای این تخم هندوانه را با فرض اینکه لغزش نداشته باشد به دست آورید. (ب) کمینهٔ مقدار ضریب اصطکاک ایستایی میان تخم هندوانه و صفحه باید چقدر باشد تا تخم هندوانه نلغزد؟ (پ) فرض کنید این صفحه گرامافون تندی زاویه‌ای خود را از حال سکون و با شتاب ثابت در مدت زمان $۰/۲۵\,\mathrm{s}$ به دست آورد. کمینهٔ ضریب اصطکاک ایستایی لازم را برای اینکه این تخم هندوانه در طی دورهٔ شتاب گرفتن نلغزد محاسبه کنید.

•••۳۲- تپ اختر، یک ستارهٔ نوترونی است که با سرعت زیادی می‌چرخد و مانند گسیل باریکهٔ نور توسط فانوس دریایی، باریکه‌ای از موجهای رادیویی گسیل می‌کند. با هر دور چرخش ستاره ما یک تپ رادیویی دریافت می‌کنیم. دورهٔ تناوب $T$ چرخش را با اندازه‌گیری زمان بین تپها اندازه می‌گیرند. تپ اختر واقع در سحابی خرچنگ دارای دورهٔ تناوب $T = ۰/۰۳۳\,\mathrm{s}$ است که با آهنگ $۱/۲۶ \times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{s/y}$ افزایش می‌یابد. (الف) شتاب زاویه‌ای $\alpha$ این تپ اختر چقدر است؟ (ب) اگر $\alpha$ ثابت باشد از حالا چند سال طول می‌کشد تا چرخش این تپ اختر متوقف شود؟ (پ) این تپ اختر از انفجار یک آبرنواختر که در سال ۱۰۵۴ مشاهده شد به وجود آمده است. با فرض اینکه $\alpha$ ثابت باشد، دورهٔ تناوب اولیهٔ را به دست آورید.

## بخش ۱۰-۶ انرژی جنبشی چرخشی

•۳۳- لختی چرخشی چرخی را که وقتی با تندی $۶۰۲\,\mathrm{rev/min}$ می‌چرخد دارای انرژی جنبشی $۲۴۴۰۰\,\mathrm{J}$ است، حساب کنید. **SSM**

•۳۴- شکل ۱۰-۳۳ تندی زاویه‌ای میلهٔ نازکی را که حول یک انتهای آن می‌چرخد برحسب زمان نشان می‌دهد. مقیاس محور $\omega$ با $\omega_s = ۶/۰\,\mathrm{rad/s}$ داده شده است. (الف) بزرگی شتاب زاویه‌ای میله چقدر است؟ (ب) در $t = ۴/۰\,\mathrm{s}$ انرژی جنبشی چرخشی میله برابر $۱/۶۰\,\mathrm{J}$ است. انرژی جنبشی آن در $t = ۰$ چقدر است؟

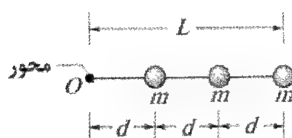


**شکل ۱۰-۳۳** مسئلهٔ ۳۴

## بخش ۱۰-۷ محاسبهٔ لختی چرخشی

•۳۵- لختی چرخشی یک خط‌کش یک متری به جرم $۰/۵۶\,\mathrm{kg}$ را که حول محوری عمود بر این خط‌کش که از نقطهٔ $۲۰\,\mathrm{cm}$ آن می‌گذرد می‌چرخد حساب کنید. (خط‌کش را به صورت یک میلهٔ نازک فرض کنید.) **SSM**

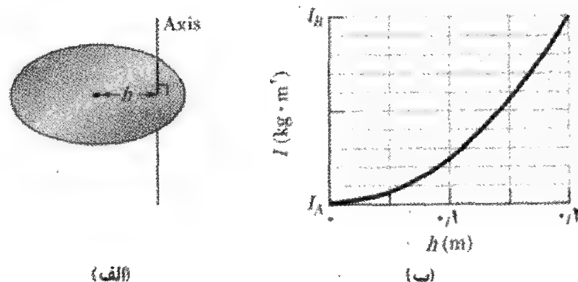
•۳۶- شکل ۱۰-۳۴ سه جسم به جرم $۰/۰۱۰۰\,\mathrm{kg}$ را نشان می‌دهد که به میله‌ای به طول $L = ۶/۰۰\,\mathrm{cm}$ و جرم ناچیز متصل‌اند. کل این مجموعه می‌تواند حول محوری عمودی که از نقطهٔ $O$ در انتهای چپ می‌گذرد بچرخد. اگر یک جسم (که ۳۳٪ جرم را تشکیل می‌دهد) را برداریم حداکثر تا چند درصد لختی چرخشی این مجموعه حول محور چرخش کاهش می‌یابد در صورتی که جسم برداشته شده (الف) جسم میانی و (ب) یکی از جسمهای بیرونی باشد؟



**شکل ۱۰-۳۴** مسئله‌های ۳۶ و ۶۴

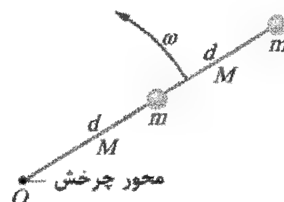
•۳۷- دو استوانهٔ صلب یکنواخت که هر یک حول محور مرکزی (طولی) خود می‌چرخند دارای جرم یکسان $1/25\ kg$ هستند و با تندی زاویه‌ای یکسان $235\ rad/s$ می‌چرخند ولی شعاعهای آنها متفاوت است. انرژی جنبشی چرخشی (الف) استوانهٔ کوچکتر به شعاع $0/25\ m$ و (ب) استوانهٔ بزرگتر به شعاع $0/75\ m$ چقدر است؟ SSM

•۳۸- شکل ۱۰-۳۵ الف قرصی را نشان می‌دهد که می‌تواند حول محوری عمود بر صفحهٔ آن و به فاصلهٔ شعاعی $h$ از مرکز قرص بچرخد. شکل ۱۰-۳۵ ب لختی چرخشی $I$ این قرص را حول این محور به صورت تابعی از فاصلهٔ $h$ نشان می‌دهد که از مرکز شروع و تا لبهٔ قرص تغییر می‌کند. مقیاس محور $I$ با $I_A = 0/050\ kg \cdot m^2$ و $I_B = 0/150\ kg \cdot m^2$ مشخص شده است. جرم قرص چقدر است؟




شکل ۱۰-۳۵ مسئلهٔ ۳۸

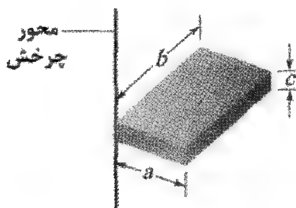
••۳۹- شکل ۱۰-۳۶ دو جسم هر یک به جرم $m = 0/85\ kg$ را نشان می‌دهد که توسط دو میلهٔ نازک هر یک به طول $5/6\ cm$ و جرم $M = 1/2\ kg$ به یکدیگر و محور چرخش در نقطهٔ $O$ متصل‌اند. کل این مجموعه با تندی زاویه‌ای $\omega = 0/30\ rad/s$ حول محور چرخش می‌چرخد. (الف) لختی چرخشی و (ب) انرژی جنبشی این مجموعه نسبت به نقطهٔ $O$ چقدر است؟




شکل ۱۰-۳۶ مسئلهٔ ۳۹

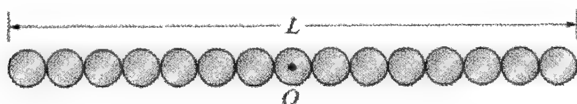
••۴۰- چهار جسم یکسان به جرم $0/500\ kg$ که هر یک در گوشه‌های مربعی $2/0\ m \times 2/0\ m$ قرار دارند، با چهار میلهٔ بدون جرم به هم متصل‌اند. لختی چرخشی این جسم صلب را حول محوری که (الف) از وسط ضلعهای رو به رو می‌گذرد و در صفحهٔ مربع قرار دارد، (ب) از وسط یکی از ضلعها می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ مربع است و (پ) در صفحهٔ مربع است و از دو جسم رو به روی هم که روی قطر آن قرار دارند می‌گذرد به دست آورید.

••۴۱- قطعهٔ صلب و یکنواخت در شکل ۱۰-۳۷ دارای جرم $0/172\ kg$ و ضلعهای $a = 3/5\ cm$، $b = 8/4\ cm$ و $c = 1/4\ cm$ است. لختی چرخشی این قطعه را حول محوری که از یکی از گوشه‌های آن می‌گذرد و بر وجه‌های بزرگتر عمود است حساب کنید. SSM WWW




شکل ۱۰-۳۷ مسئلهٔ ۴۱

••۴۲- شکل ۱۰-۳۸ آرایه‌ای از ۱۵ قرص مشابه را نشان می‌دهد که به صورت میله‌ای به طول $L = 1/0000\ m$ و جرم (کل) $M = 100/0\ mg$ به یکدیگر چسبیده‌اند. این آرایه می‌تواند حول محور عمودی که از نقطهٔ $O$ در قرص مرکزی می‌گذرد بچرخد. (الف) لختی چرخشی این آرایه حول این محور چقدر است؟ (ب) اگر فرض کنیم که این آرایه به صورت میلهٔ یکنواختی به جرم $M$ و طول $L$ باشد، و اگر از رابطهٔ جدول ۱۰-۲ ث برای محاسبهٔ لختی چرخشی استفاده کنیم، تا چند درصد خطا خواهیم داشت؟




شکل ۱۰-۳۸ مسئلهٔ ۴۲

••۴۳- بعضی از کامیونها با بهره گرفتن از انرژی ذخیره شده در یک چرخ لنگر در حال چرخش حرکت می‌کنند. انرژی این کامیونها با استفاده از یک موتور الکتریکی که چرخ لنگر را به تندی نهایی $200\pi\ rad/min$ می‌رساند تأمین می‌شود. چنین چرخ لنگری یک استوانهٔ توپر و یکنواخت با جرم $500\ kg$ و شعاع $1/0\ m$ است. (الف) انرژی جنبشی چرخ لنگر پس از تأمین انرژی چقدر است؟ (ب) اگر توان متوسط لازم برای کار کامیون $8/0\ kW$ باشد، پس از هر بار تأمین انرژی، کامیون به مدت چند دقیقه کار می‌کند؟

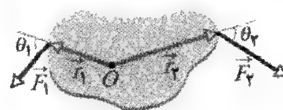
••۴۴- جرمها و مختصات چهار ذره عبارت‌اند از: $50\ g$، $x = 2/0\ cm$، $y = 2/0\ cm$؛ $25\ g$، $x = 0$، $y = 4/0\ cm$؛ $25\ g$، $x = -3/0\ cm$، $y = -3/0\ cm$؛ $30\ g$، $x = -2/0\ cm$، $y = 4/0$. لختی چرخشی این مجموعه را حول محورهای (الف) $x$، (ب) $y$ و (پ) $z$ به دست آورید. (ت) فرض کنید پاسخ قسمت (الف) و (ب) به ترتیب $A$ و $B$ باشد، آنگاه پاسخ (پ) برحسب $A$ و $B$ چقدر است؟

## بخش ۱۰-۸ گشتاور نیرو

•۴۵- گلولهٔ کوچکی به جرم $0/75\,kg$ به یک انتهای میلهٔ بدون جرمی به طول $1/25\,m$ بسته شده و انتهای دیگر میله از نقطه‌ای آویزان است. وقتی این آونگ ایجاد شده با محور قائم زاویهٔ $30°$ بسازد، بزرگی گشتاور نیروی آن حول نقطهٔ آویز چقدر است؟ SSM

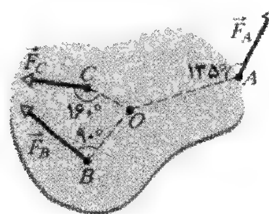
•۴۶- طول بازوی رکاب دوچرخه‌ای برابر $0/152\,m$ است و یک نیروی $111\,N$ رو به پایین توسط دوچرخه سوار به رکاب وارد می‌شود. بزرگی گشتاور این نیرو حول محور بازوی رکاب وقتی بازو در زاویهٔ (الف) $30°$، (ب) $90°$ و (پ) $180°$ نسبت به قائم قرار دارد چقدر است؟

•۴۷- جسم شکل ۱۰-۳۹ می‌تواند حول نقطهٔ $O$ بچرخد و دو نیرو مطابق شکل بر آن وارد می‌شود. اگر $r_1 = 1/30\,m$، $r_2 = 2/15\,m$ و $F_1 = 4/20\,N$، $F_2 = 4/90\,N$، $\theta_1 = 75/0°$ و $\theta_2 = 60/0°$ باشد، گشتاور نیروی خالص نسبت به این نقطه چقدر است؟ SSM ILW




شکل ۱۰-۳۹ مسئلهٔ ۴۷

•۴۸- جسم نشان داده شده در شکل ۱۰-۴۰ می‌تواند حول نقطهٔ $O$ بچرخد، سه نیروی وارد برآن عبارت‌اند از: $F_A = 10\,N$ در نقطهٔ $A$ به فاصلهٔ $8/0\,m$ از نقطهٔ O؛ $F_B = 16\,N$ در نقطهٔ $B$ به فاصلهٔ $4/0\,m$ از نقطهٔ $O$ و $F_C = 19\,N$ در نقطهٔ $C$ به فاصلهٔ $3/0\,m$ از نقطهٔ $O$. گشتاور نیروی خالص حول نقطهٔ $O$ چقدر است؟



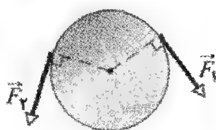

شکل ۱۰-۴۰ مسئلهٔ ۴۸

## بخش ۱۰-۹ قانون دوم نیوتون برای حرکت چرخشی

•۴۹- شیرجه رونده‌ای از سکوی شیرجه پرش می‌کند و در طی آن تندی زاویه‌ای او حول مرکز جرمش در مدت $220\,ms$ از صفر تا $6/20\,rad/s$ تغییر می‌کند. لختی چرخشی شیرجه رونده نسبت به مرکز جرمش $12/0\,kg \cdot m^2$ است. در طی این پرش بزرگی (الف) شتاب زاویه‌ای میانگین و (ب) گشتاور نیروی خارجی میانگین وارد بر او از طرف تخته چقدر است؟ SSM ILW

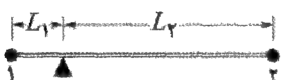
•۵۰- اگر گشتاور نیروی $32/0\,N.m$ وارد بر چرخی باعث ایجاد شتاب زاویه‌ای $25/0\,rad/s^2$ شود، لختی چرخشی چرخ چقدر است؟

••۵۱- شکل ۱۰-۴۱ قرص یکنواختی را نشان می‌دهد که همانند یک چرخ و فلک حول مرکزش می‌چرخد. شعاع این قرص برابر $2/00\,cm$ و جرم آن $20/0$ گرم و در ابتدا در حال سکون است. با شروع از زمان $t = 0$ دو نیروی نشان داده شده بر لبهٔ آن به طور مماس وارد می‌شوند به طوری که در زمان $t = 1/25\,s$ این قرص دارای سرعت زاویه‌ای $250\,rad/s$ به طور پادساعتگرد است. نیروی $\vec{F}_1$ دارای بزرگی $0/100\,N$ است. بزرگی نیروی $\vec{F}_2$ چقدر است؟



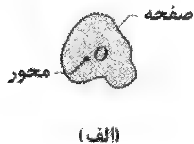

شکل ۱۰-۴۱ مسئلهٔ ۵۱

••۵۲- شکل ۱۰-۴۲ دو ذرهٔ ۱ و ۲ را نشان می‌دهد که جرم هر یک $m$ است و به دو انتهای میلهٔ بدون جرم صلبی به طول $L_1 + L_2$ متصل‌اند، به طوری که $L_1 = 20\,cm$ و $L_2 = 80\,cm$. این میله را به طور افقی روی تکیه‌گاهی قرار می‌دهیم و سپس رها می‌کنیم. بزرگی شتابهای اولیهٔ (الف) ذرهٔ ۱ و (ب) ذرهٔ ۲ چقدر است؟




شکل ۱۰-۴۲ مسئلهٔ ۵۲

••۵۳- در شکل ۱۰-۴۳ الف یک صفحهٔ پلاستیکی با شکل نامنظم و با ضخامت و چگالی (جرم در یکای حجم) یکنواخت را حول محوری که عمود بر صفحه است و از نقطهٔ $O$ می‌گذرد بچرخش در می‌آوریم. لختی چرخشی صفحه حول این محور با روش زیر اندازه‌گیری می‌شود. یک قرص دایره‌ای به جرم $0/500\,kg$ و شعاع $2/00\,cm$ را به این صفحه می‌چسبانند، به طوری که مرکز آن با نقطهٔ $O$ بر هم قرار گیرند (شکل ۱۰-۴۳ ب). ریسمانی را به دور لبهٔ این قرص مثل ریسمانی که دور فرفره‌ای پیچانده می‌شود می‌پیچانند. سپس نخ به مدت $5/00\,s$ کشیده می‌شود. در نتیجه، قرص و صفحه با نیروی ثابتی برابر $0/400\,N$ که مماس بر لبهٔ قرص است به‌چرخش در می‌آیند. تندی زاویه‌ای حاصل برابر $114\,rad/s$ است. لختی چرخشی صفحه حول این محور چقدر است؟



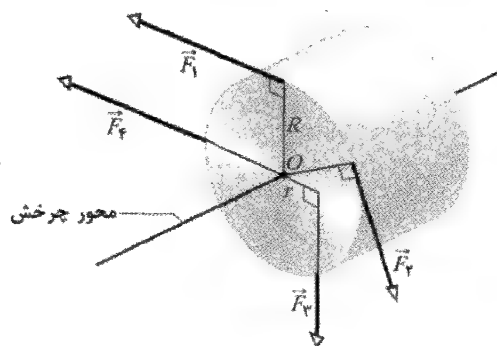






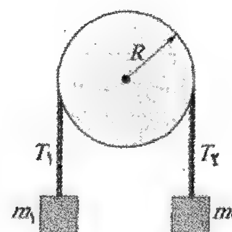
شکل ۱۰-۴۳ مسئلهٔ ۵۶

۵۴●●●- در شکل ۱۰-۴۴ استوانه‌ای به جرم $۲/۰ kg$ حول محور مرکزی آن که از نقطهٔ $O$ می‌گذرد می‌چرخد. نیروهای واردهٔ نشان داده شده در شکل عبارت‌اند از: $F_1 = ۶/۰ N$، $F_2 = ۴/۰ N$، $F_3 = ۲/۰ N$ و $F_4 = ۵/۰ N$. هم چنین، $r = ۵/۰ cm$ و $R = ۱۲ cm$ است. مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب زاویه‌ای استوانه. (در طی چرخش زاویهٔ نیروها نسبت به استوانه تغییر نمی‌کنند.)



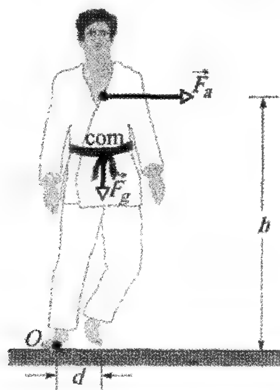

شکل ۱۰-۴۴ مسئلهٔ ۵۴

۵۵●●- در شکل ۱۰-۴۵ جرم یک جسم $m_1 = ۴۶۰ g$ و جرم دیگری $m_2 = ۵۰۰ g$ است، و قرقره که روی محوری افقی و بدون اصطکاک سوار شده دارای شعاع $۵/۰۰ cm$ است. وقتی آنها را از حال سکون رها کنیم، جسم سنگینتر به اندازهٔ $۷۵/۰ cm$ در مدت $۵/۰۰ s$ (بدون اینکه نخ روی قرقره بلغزد) به طرف پایین می‌آید. (الف) بزرگی شتاب این جسم چقدر است؟ کشش ریسمان در قسمتی که (ب) جسم سنگینتر و (پ) جسم سبکتر را نگه می‌دارد چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره چقدر است؟ (ث) لختی چرخشی آن چقدر است؟




شکل ۱۰-۴۵ مسئله‌های ۵۵ و ۷۳

۵۶●●●- در ورزش جودو در حرکت سریع پا، شما پای چپ حریف را از زیر او سریعاً می‌زنید در حالی که لباس او را به همان طرف می‌کشید. در نتیجه حریف به دور پای راستش می‌چرخد تا به زمین بخورد. شکل ۱۰-۴۶ نشان دهندهٔ نمودار ساده شده‌ای از حریف در برابر شماست به طوری پای چپ او زده شده است. محور چرخش از نقطهٔ $O$ می‌گذرد. نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر او، به طور مؤثری بر مرکز جرم او وارد می‌شود که به فاصلهٔ $d = ۲۸ cm$ از نقطهٔ $O$ قرار دارد. جرم شخص برابر $۷۰ kg$ و لختی چرخشی او حول نقطهٔ $O$ برابر $۶۵ kg/m^2$ است. بزرگی شتاب زاویه‌ای اولیهٔ او حول نقطهٔ $O$ چقدر است در صورتی که نیروی $\vec{F}_a$ کشیدن لباس او (الف) ناچیز و (ب) افقی و به بزرگی $۳۰۰ N$ در ارتفاع $h = ۱/۴ m$ وارد شده باشد؟




شکل ۱۰-۴۶ مسئلهٔ ۵۶

۵۷●●●- قرقره‌ای به شعاع $۱۰ cm$ و لختی چرخشی $۱/۰ \times ۱۰^۳ kg.m^2$ نسبت به محورش، تحت تأثیر نیرویی مماس بر لبهٔ آن قرار دارد. بزرگی این نیرو برحسب زمان به صورت $F = ۰/۵t + ۳/۰t^2$ تغییر می‌کند که $F$ برحسب نیوتون و $t$ برحسب ثانیه است. این قرقره ابتدا در حال سکون است. در $t = ۳/۰ s$ (الف) شتاب زاویه‌ای و (ب) تندی زاویه‌ای آن را به دست آورید.

## بخش ۱۰-۱۰ کار و انرژی جنبشی چرخشی

۵۸●- میلهٔ نازکی به طول $۰/۷۵ cm$ و جرم $۰/۴۲ kg$ آزادانه از یک انتهای آن آویخته شده است. میله را به یک طرف می‌کشیم و سپس رها می‌کنیم تا بتواند شبیه یک آونگ ساده تاب بخورد. وقتی این میله به پایینترین وضعیت خود می‌رسد، تندی زاویه‌ای آن $۴/۰ rad/s$ است. با چشمپوشی از اصطکاک و مقاومت هوا (الف) انرژی جنبشی میله را در پایینترین وضعیت خود به دست آورید و (ب) فاصلهٔ بالا رفتن مرکز جرم نسبت به پایینترین وضعیت چقدر است؟

۵۹●- یک چرخ ۳۲/۰ کیلوگرمی به شکل حلقهٔ نازکی به شعاع $۱/۲۰ m$ با $۲۸۰ rev/min$ می‌چرخد. می‌خواهیم آن را در مدت $۱۵/۰ s$ متوقف کنیم. (الف) چقدر کار باید برای توقف آن انجام داد. (ب) توان میانگین لازم چقدر است؟

۶۰●- (الف) اگر در شکل ۱۰-۱۸ $R = ۱۲ cm$، $M = ۴۰۰ g$ و $m = ۵۰ g$ باشند، تندی جسم را پس از اینکه از حال سکون به اندازهٔ $۵۰ cm$ پایین می‌آید پیدا کنید. این مسئله را با استفاده از اصل پایستگی انرژی حل کنید. (ب) قسمت (الف) را با $R = ۵/۰ cm$ دوباره حل کنید.

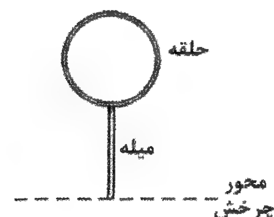
•۶۱- میل لنگ اتومبیلی، وقتی با تندی زاویه‌ای $1800 rev/min$ بچرخد انرژی را با آهنگ $100 hp$ $(= 74/6 kW)$ از موتور به محورها انتقال می‌دهد. چه گشتاور نیرویی (برحسب نیوتون-متر) توسط میل لنگ منتقل شده است؟

••۶۲- استوانهٔ یکنواختی به شعاع $10 cm$ و جرم $20 kg$ طوری قرار داده شده است که می‌تواند آزادانه حول محوری افقی که موازی و به فاصلهٔ $5/0 cm$ از محور طولی مرکزی استوانه قرار دارد بچرخد. (الف) لختی چرخشی استوانه نسبت به محور چرخش چقدر است؟ (ب) اگر استوانه از حال سکون طوری رها شود که محور طولی مرکزی آن با محور چرخش هم ارتفاع باشد تندی زاویه‌ای استوانه وقتی از پایین‌ترین مکان عبور می‌کند چقدر است؟

••۶۳- یک سر خط‌کشی را روی زمین گذاشته و آن را به طور قائم نگه می‌داریم و سپس رها می‌کنیم تا بیفتد. تندی انتهای دیگر آن را درست در لحظهٔ پیش از اصابت به زمین، با فرض اینکه انتهای آن روی کف نلغزد پیدا کنید. (*راهنمایی:* خط‌کش را یک میله نازک فرض و از اصل پایستگی انرژی استفاده کنید). **ILW SSM**

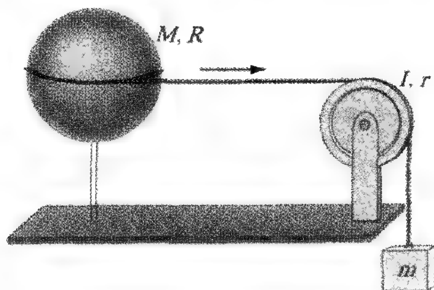
••۶۴- در شکل ۱۰-۳۴ سه جسم به جرم $0/0100 kg$ که به میله‌ای به طول $L = 6/00 cm$ و جرم ناچیز چسبیده‌اند می‌توانند به دور محوری که از نقطهٔ $O$ در یک انتهای میله می‌گذرد بچرخند. چه مقدار کار لازم است تا آهنگ چرخش را (الف) از صفر تا $20/0 rad/s$، (ب) از $20/0 rad/s$ تا $40/0 rad/s$ و (پ) از $40/0 rad/s$ تا $60/0 rad/s$ تغییر دهد؟ (ت) شیب خط تغییرات انرژی جنبشی مجموعه (برحسب ژول) نسبت به مجذور آهنگ چرخش (برحسب مجذور رادیان بر مجذور ثانیه) چقدر است؟

•••۶۵- شکل ۱۰-۴۷ مجموعهٔ صلبی شامل یک حلقهٔ نازک (به جرم $m$ و شعاع $R = 0/15 m$) و میلهٔ شعاعی نازکی (به جرم $m$ و طول $L = 2/00 R$) را نشان می‌دهد. این مجموعه به حالت قائم است، اما اگر ضربهٔ کوچکی به آن وارد کنیم می‌تواند حول محوری افقی در صفحهٔ میله و حلقه از انتهای پایین آن بچرخد. فرض کنید انرژی داده شده به این مجموعه در ضربهٔ اولیه ناچیز باشد، تندی زاویه‌ای این مجموعه حول محور چرخش وقتی از سمتگیری معکوس می‌گذرد چقدر است؟




**شکل ۱۰-۴۷** مسئلهٔ ۶۵

•••۶۶- پوستهٔ کروی یکنواختی به جرم $M = 45 kg$ و شعاع $R = 8/5 cm$ می‌تواند حول محوری قائم که روی یاتاقان بدون اصطکاکی (شکل ۱۰-۴۸) قرار دارد بچرخد. ریسمان بدون جرمی به دور استوای پوستهٔ کروی پیچیده شده و پس از عبور از روی قرقره‌ای با لختی چرخشی $I = 3/0 \times 10^{-3} kg \cdot m^2$ و شعاع $r = 5/0 cm$ به جسم کوچکی به جرم $m = 0/60 kg$ متصل شده است. محور قرقره اصطکاک ندارد و ریسمان روی قرقره نمی‌لغزد. تندی جسم را وقتی به اندازهٔ $82 cm$ از حالت سکون پایین آمد به دست آورید. از پایستگی انرژی استفاده کنید.




**شکل ۱۰-۴۸** مسئلهٔ ۶۶

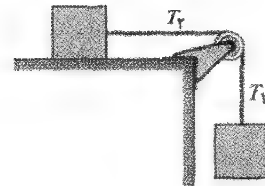
•••۶۷- یک دودکش استوانه‌ای بلند از پایه شکسته می‌شود و به زمین سقوط می‌کند. دودکش را به صورت میله‌ای نازک به طول $55/0 m$ در نظر بگیرید. در لحظه‌ای که دودکش با محور قائم زاویهٔ $35/0°$ دارد، (الف) تندی زاویه‌ای و (ب) شتاب شعاعی نوک آن و (پ) شتاب مماسی نوک دودکش چقدر است؟ (*راهنمایی:* از پایستگی انرژی استفاده کنید، نه از گشتاور نیرو). (ت) در چه زاویهٔ $\theta$ شتاب مماسی برابر $g$ خواهد بود؟

## مسئله‌های اضافی

۶۸- جورج واشنگتن گیل فریس پسر[1]، فارغ التحصیل مهندسی راه و ساختمان از مؤسسهٔ پلی تکنیک رنسلر نخستین چرخ فریس را برای نمایشگاه جهانی کلمبیا در شیکاگو در ۱۸۹۳/۱۲۷۲ ساخت. این چرخ که ساختار مهندسی مبهوت کننده‌ای در آن زمان داشت شامل ۳۶ واگن چوبی بود که هر یک گنجایش تا ۶۰ مسافر را داشتند و به دور دایره‌ای به قطر $76 m$ می‌چرخیدند. واگنها در یک زمان ۶ نفر را سوار می‌کردند و وقتی هر ۳۶ واگن پر می‌شد چرخ با تندی زاویه‌ای ثابت در حدود ۲ دقیقه یک دور کامل می‌زد. مقدار کاری که این ماشین لازم دارد تا فقط مسافرین را بچرخاند برآورد کنید.

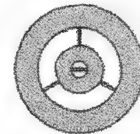
1. George Washington Gale Ferris,Jr.

۶۹- در شکل ۱۰-۴۹ دو قطعه به جرم ۶/۲۰kg با نخ بدون جرمی که از روی قرقره‌ای به شعاع ۲/۴۰ cm می‌گذرد به هم متصل‌اند. لختی چرخشی قرقره برابر $7/40 \times 10^{-4}$ kg·m² است. این نخ هیچ لغزشی روی قرقره ندارد؛ ولی معلوم نیست که بین میز و جسم لغزنده اصطکاک وجود دارد یا خیر؛ محور قرقره نیز بدون اصطکاک است. وقتی این دستگاه از حال سکون رها شود، قرقره در مدت ۹۱/۰ ms به اندازهٔ ۱/۳۰rad می‌چرخد و شتاب دو جسم ثابت است. (الف) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره چقدر است؟ (ب) بزرگی شتاب هر یک از دو جسم را به دست آورید. (پ) کشش نخ $T_1$ چقدر است؟ (ت) کشش نخ $T_2$ چقدر است؟ **SSM**




**شکل ۱۰-۴۹** مسئلهٔ ۶۹

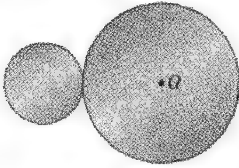
۷۰- شکل ۱۰-۵۰ ساختار تختی شامل دو حلقهٔ هم مرکز را نشان می‌دهد که توسط سه میله با جرمهای ناچیز به هم متصل‌اند. این ساختار، که در ابتدا ساکن است، می‌تواند حول مرکز مشترکشان که یک میلهٔ دیگر به جرم ناچیز دارد بچرخند (مثل چرخ و فلک). جرم، شعاع داخلی و شعاع خارجی حلقه‌ها در جدول زیر داده شده‌اند. یک نیروی مماسی به بزرگی ۱۲/۰ N به مدت ۰/۳۰۰ s به لبهٔ بیرونی حلقهٔ خارجی وارد می‌شود. تغییر در تندی زاویه‌ای این ساختار را در طی این بازهٔ زمانی به دست آورید.



**شکل ۱۰-۵۰** مسئلهٔ ۷۰

| حلقه | جرم (kg) | شعاع داخلی (m) | شعاع خارجی (m) |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۰/۱۲۰ | ۰/۰۱۶۰ | ۰/۰۴۵۰ |
| ۲ | ۰/۲۴۰ | ۰/۰۹۰۰ | ۰/۱۴۰۰ |

۷۱- در شکل ۱۰-۵۱ قرص کوچکی به شعاع $r =$ ۲/۰۰cm به لبهٔ قرص بزرگتری به شعاع $R =$ ۴/۰۰cm چسبیده است به طوری که قرصها می‌توانند به دور محوری عمود که از نقطهٔ $O$ مرکز قرص بزرگتر می‌گذرد بچرخند. این قرصها هم دارای چگالی (جرم یکای حجم) یکنواخت $1/40 \times 10^{3}$ kg/m³ و هم ضخامت یکنواخت ۵/۰۰ mm هستند. لختی چرخشی این مجموعهٔ دو- قرص حول محور چرخشی که از نقطهٔ $O$ می‌گذرد چقدر است؟




**شکل ۱۰-۵۱** مسئلهٔ ۷۱

۷۲- در ساعت ۷:۱۴ صبح روز ۳۰ ژوئن سال ۱۹۸۰/۱۲۸۷ انفجار مهیبی برفراز نقطهٔ دوری از سیبری مرکزی در عرض جغرافیایی ۶۱°N و ۱۰۲°E رخ داد؛ در نتیجهٔ آن گوی آتشین ایجاد شده دارای روشنترین درخششی بود که قبل از سلاحهای هسته‌ای دیده شده بود. رویداد تونگوسکا[1] که بر اساس اظهار یک شاهد عینی «بخش عظیمی از آسمان را پوشانیده بود» احتمالاً در نتیجه انفجار یک *سیارک سنگی* به پهنای حدود ۱۴۰m بوده است. (الف) با فرض اینکه زمین فقط در حال چرخش است، تعیین کنید که چه مدت بعد از آن این سیارک می‌توانست انفجاری را بر فراز هلسینکی در طول جغرافیایی ۲۵°E ایجاد کند. این انفجار باعث از بین رفتن کامل این شهر می‌شد. (ب) اگر این سیارک یک *سیارک فلزی* می‌بود می‌توانست به سطح زمین برسد. چه مدت طول می‌کشید تا سیارک با اقیانوس اطلس در طول جغرافیایی ۲۰°E برخورد کند؟ (در نتیجهٔ این برخورد آبلرزهٔ حاصل می‌توانست کل تمدن موجود در دو طرف اقیانوس اطلس را نابود کند.)

۷۳- در شکل ۱۰-۴۵ دو قطعه به جرم $m_1 =$ ۴۰۰g و $m_2 =$ ۶۰۰g با ریسمان بدون جرمی به دور یک قرص یکنواخت به جرم $M =$ ۵۰۰g و شعاع $R =$ ۱۲/۰cm پیچیده شده است. قرص می‌تواند بدون اصطکاک حول یک محور افقی که از مرکزش می‌گذرد بچرخد؛ ریسمان روی قرص لغزش ندارد. این مجموعه را از حال سکون رها می‌کنیم. مطلوب است (الف) بزرگی شتاب دو جسم؛ (ب) کشش $T_1$ در ریسمان سمت چپ و (پ) کشش $T_2$ در ریسمان سمت راست.

۷۴- دو گلولهٔ کوچک هر یک به جرم ۱/۰kg به دو انتهای یک میلهٔ فولادی نازک به طول ۱/۲۰m و جرم ۶/۴۰kg متصل شده‌اند. این میله مقید است که روی یک صفحهٔ افقی حول محور قائم که از وسط آن می‌گذرد بچرخد. در یک لحظهٔ معین، این میله با تندی ۳۹/۰rev/s می‌چرخد ولی به دلیل وجود اصطکاک این حرکت کند و در مدت ۳۲/۰ s متوقف می‌شود. با فرض وجود گشتاور نیروی ثابت کند کننده‌ای بر اثر اصطکاک، مطلوب است محاسبهٔ (الف) شتاب زاویه‌ای، (ب) گشتاور

1. Tunguska

نیروی کند کننده، (پ) انرژی کل منتقل شده از انرژی مکانیکی به انرژی گرمایی توسط اصطکاک و (ت) تعداد دورهایی که در مدت ۳۲/۰s این جسم می‌چرخد. (ث) اکنون فرض کنید گشتاور نیروی کند کننده ثابت نباشد. هر یک از مقدارهای (الف)، (ب)، (پ) و (ت) را که هنوز با این داده‌ها می‌توان محاسبه کرد به دست آورید.

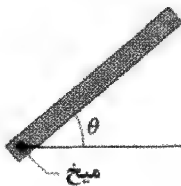
۷۵- تیغهٔ یکنواخت گردونهٔ یک بالگرد به طول ۷/۸۰m دارای جرمی برابر ۱۱۰kg است و به محور گردونه متصل شده است. (الف) وقتی گردونه با تندی ۳۲۰rev/min بچرخد بزرگی نیروی وارد بر این اتصال از طرف محور چقدر است؟ (*راهنمایی:* برای محاسبه تیغه را می‌توان به صورت یک جرم نقطه‌ای در مرکز آن فرض کرد، چرا؟) (ب) گشتاور نیرویی که باید به گردونه وارد شود تا آن را در مدت ۶/۷۰s به بیشترین تندی آن از حال سکون برساند چقدر است؟ از مقاومت هوا صرفنظر کنید. (در اینجا تیغه را نمی‌توان به صورت یک جرم نقطه‌ای در نظر گرفت، چرا؟ توزیع جرم را به صورت میلهٔ نازک یکنواخت فرض کنید.) (پ) چه مقدار کار باید این گشتاور نیرو روی تیغه انجام دهد تا تندی آن را به ۳۲۰ rev/min برساند.

۷۶- چرخی با شروع از حالت سکون، با شتاب زاویه‌ای ثابت ۲/۰۰rad/s$^2$ می‌چرخد. در بازهٔ زمانی ۳/۰۰s ، ۹۰/۰rad می‌چرخد. (الف) سرعت زاویه‌ای چرخ در آغاز بازهٔ ۳/۰۰s چقدر است؟ (ب) پیش از شروع بازهٔ ۳/۰۰s چقدر می‌چرخد؟

۷۷- یک توپ گلف را با زاویهٔ °۲۰ نسبت به افق با تندی ۶۰ m/s و آهنگ چرخش ۹۰rad/s پرتاب می‌کنیم. با صرفنظر کردن از مقاومت هوا تعیین کنید که این توپ چند دور در یکای زمان باید بچرخد تا به ارتفاع بیشینه‌اش برسد.

۷۸- دو کرهٔ توپر یکنواخت با جرم یکسان ۱/۶۵ kg دارای شعاعهای ۰/۲۲۶ m و ۰/۸۵۴m هستند. هر کره می‌تواند حول محوری که از مرکزش می‌گذرد بچرخد. (الف) بزرگی $\tau$ گشتاور نیروی لازم برای رساندن کره کوچکتر از حال سکون به تندی زاویه‌ای ۳۱۷rad/s در مدت ۱۵/۵s چقدر است؟ (ب) بزرگی نیرویی که باید به طور مماسی به خط استوای کره وارد کرد تا این گشتاور نیرو را ایجاد کند چقدر است؟ مقدارهای متناظر را برای (پ) گشتاور نیروی $\tau$ و (ت) نیروی $F$، برای کرهٔ بزرگتر به دست آورید.

۷۹- میلهٔ نازک و یکنواخت در شکل ۱۰-۵۲ دارای طول ۲/۰m است و می‌تواند حول یک میخ افقی که از یک انتهای آن می‌گذرد بچرخد. میله را از حال سکون با زاویهٔ $\theta =$ °۴۰ بالای افق رها می‌کنیم. با استفاده از اصل پایستگی انرژی تندی زاویه‌ای میله را وقتی از وضعیت افقی می‌گذرد به دست آورید.




**شکل ۱۰-۵۲** مسئلهٔ ۷۹

۸۰- چرخ لنگر یک موتور با تندی ۲۵/۰rad/s می‌چرخد. وقتی موتور را خاموش کنیم چرخ لنگر با آهنگ ثابتی کند می‌شود و در مدت ۲۰/۰s می‌ایستد. مطلوب است محاسبهٔ (الف) شتاب زاویه‌ای چرخ لنگر، (ب) زاویه‌ای که این چرخ طی کرده است تا متوقف شود و (پ) تعداد دورهایی که این چرخ می‌زند تا متوقف شود.

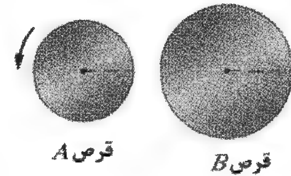
۸۱- گلولهٔ کوچکی به جرم ۱/۳۰kg را به یک انتهای میله‌ای به طول ۰/۷۸۰m و جرم نا چیز متصل کرده‌ایم. این دستگاه در یک دایرهٔ افقی حول انتهای دیگر آن با تندی ۵۰۱۰ rev/min می‌چرخد. (الف) لختی چرخشی این دستگاه حول محور چرخشی چقدر است؟ (ب) اگر مقاومت هوا برابر ۲/۳۰×۱۰$^{-2}$ N به گلوله در جهت مخالف حرکتش وارد شود، چه گشتاور نیرویی باید به این دستگاه وارد کرد تا تندی زاویه‌ای آن ثابت بماند؟

۸۲- با شروع از $t =$ ۰s ، چرخی با شتاب زاویه‌ای ثابت از حال سکون شروع به چرخش می‌کند. در لحظهٔ $t =$ ۲/۰s سرعت زاویه‌ای چرخ برابر ۵/۰rad/s است. شتاب به مدت $t =$ ۲۰s ادامه می‌یابد و سپس به طور ناگهانی قطع می‌شود. این چرخ در بازهٔ زمانی از $t =$ ۰ تا $t =$ ۴۰s چه زاویه‌ای می‌چرخد؟

۸۳- بندبازی تلاش می‌کند که مرکز جرم خود را روی سیم (یا طناب) نگهدارد. او به طور معمول میله‌ای طویل و سنگین را با خود حمل می‌کند. او اگر مثلاً به سمت راست تکیه دهد (مرکز جرم او به طرف راست حرکت می‌کند) و خطر چرخش نسبت به سیم وجود دارد، او میله را به سمت چپ می‌برد (مرکز جرم او به سمت چپ حرکت می‌کند) تا چرخش خود را کند و بدین وسیله تعادل خود را تنظیم کند. فرض کنید جرم بندباز ۷۰/۰kg و لختی چرخشی او نسبت به سیم ۱۵/۰kg·m$^2$ است. اگر او ۵/۰cm روی سیم به سمت راست برود، و (الف) میله را حمل نکند و (ب) میله با جرم ۱۴/۰kg از سمت چپ سیم ۱۰cm فاصله داشته باشد، شتاب زاویه‌ای او چقدر است؟

۸۴- مسابقهٔ *قرصها مسابقه*. شکل ۱۰-۵۳ دو قرص را نشان می‌دهد که می‌توانند حول مرکزشان همانند یک چرخ و فلک بچرخند. در لحظهٔ $t =$ ۰ خطهای مرجع این دو قرص دارای یک

ستمگیری هستند. قرص $A$ با سرعت زاویه‌ای ثابت $9/5 \mathrm{rad/s}$ می‌چرخد. قرص $B$ ساکن است اما اکنون با شتاب زاویه‌ای ثابت $2/2 \mathrm{rad/s^2}$ شروع به چرخش می‌کند. (الف) در چه زمان $t$ خطهای مرجع این دو قرص به طور لحظه‌ای جابه‌جایی زاویه‌ای یکسان $\theta$ خواهند داشت؟ آیا این زمان $t$ اولین زمانی پس از $t=0$ است که خطهای مرجع به طور لحظه‌ای در یک راستا قرار می‌گیرند؟

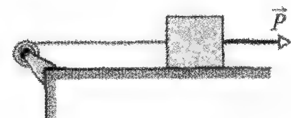



**شکل ۱۰-۵۳** مسئلهٔ ۸۴

۸۵- دوچرخه سواری به جرم $70 \mathrm{~kg}$ همهٔ جرم خود را روی هر یک از رکابهای پایین رونده وارد می‌آورد تا از جاده شیبداری بالا رود. فرض کنید قطر دایره‌ای که رکابها می‌چرخند برابر $0/40 \mathrm{~m}$ باشد، بزرگی بیشینهٔ گشتاور نیرویی را که دوچرخه سوار وارد می‌کند تعیین کنید.

۸۶- قرصی با شتاب زاویه‌ای ثابت در مدت $6/00 \mathrm{s}$ از مکان زاویه‌ای $\theta_1=10/0 \mathrm{rad}$ تا مکان زاویه‌ای $\theta_2=70/0 \mathrm{rad}$ می‌چرخد. سرعت زاویه‌ای قرص در $\theta_2$ برابر $15/0 \mathrm{rad/s}$ است. (الف) سرعت زاویه‌ای آن در $\theta_1$ چقدر بوده است؟ (ب) شتاب زاویه‌ای آن چقدر است؟ (پ) این قرص در ابتدا در کدام مکان زاویه‌ای ساکن بوده است؟ (ت) $\theta$ را برحسب زمان $t$ و تندی زاویه‌ای $\omega$ را برحسب $t$ از زمان شروع این حرکت در $t=0$ برای این قرص رسم کنید.

۸۷- چرخی به شعاع $0/2 \mathrm{~m}$ به محور افقی بدون اصطکاکی متصل است. لختی چرخشی چرخ حول این محور برابر $0/050 \mathrm{~kg \cdot m^2}$ است. ریسمان بدون جرمی که به دور این چرخ پیچیده شده به جسمی به جرم $2/0 \mathrm{~kg}$ وصل است. جسم روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد. اگر نیرویی افقی با بزرگی $P=3/0 \mathrm{N}$ را مطابق شکل ۱۰-۵۴ به این جسم وارد کنیم، بزرگی شتاب زاویه‌ای چرخ چقدر است؟ فرض کنید ریسمان روی چرخ نمی‌لغزد. **SSM**

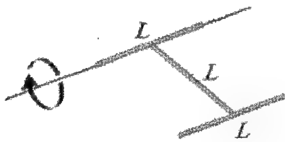



**شکل ۱۰-۵۴** مسئلهٔ ۸۷

۸۸- خورشید ما در فاصلهٔ $2/3\times10^4 \mathrm{~ly}$ (سال نوری) از مرکز کهکشان راه شیری قرار دارد و روی دایره‌ای حول این مرکز با تندی $250 \mathrm{km/s}$ حرکت می‌کند. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا خورشید یک دور کامل به دور مرکز کهکشان بچرخد؟ (ب) اگر خورشید در $4/5\times10^9$ سال قبل تشکیل شده باشد، چند دور تاکنون به دور مرکز کهکشان چرخیده است؟

۸۹- یک صفحهٔ گرامافون با تندی $33\frac{1}{3} \mathrm{rev/min}$ می‌چرخد و وقتی موتور خاموش شود حرکت آن کند شده و پس از $30 \mathrm{s}$ متوقف می‌شود. (الف) شتاب زاویه‌ای (ثابت) آن را برحسب دور بر مجذور دقیقه به دست آورید. (ب) در این مدت صفحه چند دور چرخیده است؟ **SSM**

۹۰- جسم صلبی از سه میلهٔ نازک مشابه هر یک به طول $L=0/600 \mathrm{m}$ تشکیل شده است که به شکل حرف H (شکل ۱۰-۵۵) به هم متصل‌اند. این جسم می‌تواند آزادانه حول یک محور افقی که از یکی از ساقهای حرف H می‌گذرد بچرخد. جسم را رها می‌کنیم تا از حال سکون و از وضعیتی که صفحهٔ H به صورت افقی است سقوط کند. تندی زاویه‌ای جسم در وقتی که صفحهٔ H به حالت قائم قرار می‌گیرد چقدر است؟




**شکل ۱۰-۵۵** مسئلهٔ ۹۰

۹۱- (الف) نشان دهید که لختی چرخشی یک استوانهٔ توپر به جرم $M$ و شعاع $R$ حول محور مرکزی آن برابر لختی چرخشی حلقه‌ای به جرم $M$ و شعاع $R/\sqrt{2}$ حول محور مرکزی خود است. (ب) نشان دهید که لختی چرخشی $I$ هر جسم معین به جرم $M$ حول هر محور داده شده برابر است با لختی چرخشی یک *حلقهٔ هم‌ارز* حول آن محور در صورتی که این حلقه دارای همان جرم $M$ و شعاعی برابر $k$ باشد که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

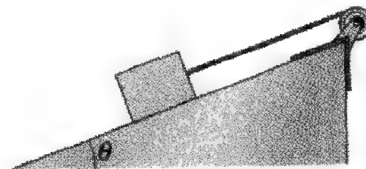
$$k=\sqrt{\frac{I}{M}}$$

شعاع $k$ حلقهٔ معادل را *شعاع چرخش* جسم داده شده می‌نامند. **SSM**

۹۲- پوستهٔ کروی نازکی به شعاع $1/90 \mathrm{m}$ را در نظر بگیرید که یک گشتاور نیروی $960 \mathrm{N \cdot m}$ به آن وارد و باعث ایجاد شتاب زاویه‌ای برابر با $6/2 \mathrm{rad/s^2}$ حول محوری که از مرکز پوسته می‌گذرد شده است. مطلوب است (الف) لختی چرخشی پوستهٔ کروی حول این محور و (ب) جرم این پوسته.

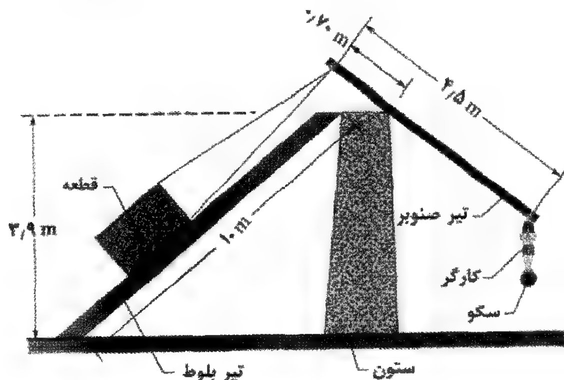
۹۳- در شکل ۱۰-۵۶ چرخی به شعاع $0/20 \mathrm{m}$ روی محوری افقی و بدون اصطکاک قرار گرفته است. ریسمان بدون جرمی به دور این چرخ پیچیده شده است و طرف دیگر آن به یک جعبهٔ $2/0 \mathrm{kg}$ که روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی می‌لغزد قرار دارد. زاویهٔ سطح شیبدار با افق $\theta=20°$ است. جعبه روی

سطح با شتاب $۲/۰ m/s^2$ به طرف پایین حرکت می‌کند. لختی چرخشی چرخ را حول محورش به دست آورید.




**شکل ۱۰-۵۶** مسئلهٔ ۹۳

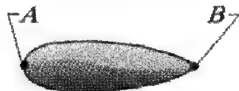
۹۴- روش بالا بردن و قرار دادن سر ستونهای سنگین روی ستونها همواره موضوعی بحث انگیز بوده است. یکی از این روشها در شهر کوچکی از کشور چک[1] مورد آزمایش قرار گرفته است. در این روش قطعه‌ای بتن به جرم ۵۱۲۴ kg روی دو تیر از چوب بلوط که پوست آنها را کنده و با روغن لغزنده کرده بودند بالا کشیده شد (شکل ۱۰-۵۷). هر تیر ۱۰m طول و از زمین تا بالای ستونی که قطعهٔ بتن باید در بالای آن قرار می‌گرفت امتداد داشت. ارتفاع ستونها ۳/۹m و میان قطعه و تیرها ضریب اصطکاک ایستایی برابر ۰/۲۲ بود. نیروی کششی وارد بر قطعه از طریق طنابهایی وارد می‌شد که به دور آن و به دور انتهای بالایی تیری از صنوبر به طول ۴/۵m پیچیده می‌شد. سکویی در انتهای دیگر هر تیر بسته می‌شد. وقتی کارگران بحد کافی روی سکو می‌نشستند یا می‌ایستادند تیر صنوبر حول انتهای بالایی ستون می‌چرخید و قطعه را روی تیر بلوط قدری بالا می‌کشید. طناب متصل به قطعه تقریباً عمود بر تیر صنوبر و فاصلهٔ میان نقطهٔ چرخش و محل پیچیدن طنابها به دور تیر صنوبر ۰/۷۰m بود. فرض کنید که هر کارگر جرمی برابر ۸۵ kg داشته باشد، حداقل تعداد کارگران لازم روی دو سکو باید چقدر باشد تا قطعه شروع به حرکت به سمت بالا در راستای تیر بلوط کند. (تقریباً نصف این تعداد می‌توانند قطعه را از یک طرف و سپس به طرف دیگر حرکت دهند)




**شکل ۱۰-۵۷** مسئلهٔ ۹۴

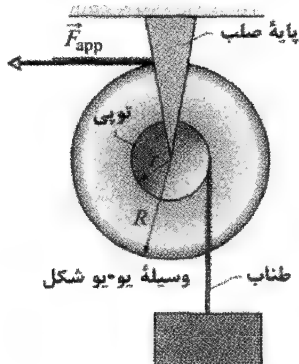
1. Czech

۹۵- شکل ۱۰-۵۸ پرهٔ ملخ هواپیمایی را نشان می‌دهد که با تندی ۲۰۰۰rev/min حول محوری عمودی در نقطهٔ $B$ می‌چرخد. نقطهٔ $A$ در لبهٔ خارجی پره قرار دارد و فاصلهٔ شعاعی آن ۱/۵m است. (الف) اختلاف در بزرگیهای $a$، شتاب مرکزگرای نقطهٔ $A$ و نقطه‌ای به فاصلهٔ شعاعی ۰/۱۵m چقدر است؟ (ب) شیب نمودار تغییرات $a$ برحسب فاصلهٔ شعاعی در راستای این پره چقدر است؟



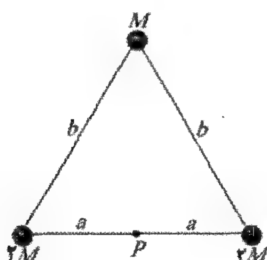

**شکل ۱۰-۵۸** مسئلهٔ ۹۵

۹۶- یک وسیلهٔ یو- یو شکل به محوری افقی و بدون اصطکاک وصل شده است که از آن برای بلند کردن یک جعبهٔ ۳۰kg نشان داده شده در شکل ۱۰-۵۹، استفاده می‌شود. شعاع خارجی این وسیله ۰/۵۰m و شعاع $r$ توپی آن ۰/۲۰m است. وقتی نیروی افقی $\vec{F}_{app}$ با بزرگی ۱۴۰N را به طنابی که به دور لبهٔ خارجی این وسیله پیچیده شده است وارد کنیم، جعبه که از یک طناب آویزان است با شتابی به بزرگی $۰/۸۰ m/s^2$ به طرف بالا حرکت می‌کند. لختی چرخشی این وسیله حول محور چرخش آن چقدر است؟




**شکل ۱۰-۵۹** مسئلهٔ ۹۶

۹۷- جسم صلب نشان داده شده در شکل ۱۰-۶۰ از سه ذره تشکیل شده که به وسیلهٔ میله‌های بدون جرمی به یکدیگر متصل‌اند. این جسم حول محوری عمود به صفحهٔ خود که از نقطهٔ $P$ می‌گذرد می‌چرخد. اگر $M = ۰/۴۰ kg$ ، $a = ۳۰ cm$ و $b = ۵۰ cm$ باشد، چه مقدار کار لازم است تا این جسم از حال سکون به تندی ۵/۰rad/s برسد؟



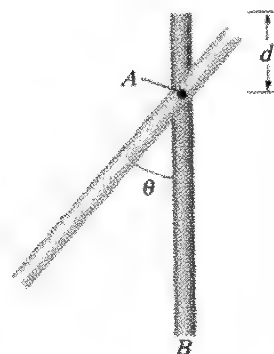

**شکل ۱۰-۶۰** مسئلهٔ ۹۷

**۹۸-** *مهندسی نوشیدنیها*. درهای فشاری یکی از پیشرفتهای مهم در طراحی مهندسی قوطیهای نوشابه است. این در دور یک میلهٔ مرکزی در بالای قوطی می‌چرخد. وقتی انتهای در را به طرف بالا بکشیم انتهای دیگر آن به طرف پایین می‌رود و روی قسمتی از لبهٔ بالایی قوطی که علامتگذاری شده است فشار می‌آورد. اگر نیروی به طرف بالا ۱۰N باشد، بزرگی نیروی وارد بر قسمت علامتگذاری شدهٔ قوطی به طور تقریب چقدر است؟ (برای این کار می‌توانید یک قوطی با چنین دری را امتحان کنید.)

**۹۹-** ناظرانی که با وسیلهٔ نقلیه در کنار یوزپلنگها حرکت کرده‌اند گزارش داده‌اند که یوزپلنگها با تندی اعجاب آور ۱۱۴ km/h (حدود ۷۱ mi/h) می‌دوند. فرض کنید می‌خواهید تندی یوزپلنگی را با قرار دادن اتومبیل خود در کنار این حیوان در حالی که تندی سنج اتومبیل عدد ۱۱۴km/h را نشان می‌دهد اندازه بگیرید. اتومبیل خود را در فاصلهٔ ۸/۰m از یوزپلنگ قرار می‌دهید ولی صدای ناشی از اتومبیل باعث می‌شود که یوزپلنگ رفته رفته مسیر خود را تغییر دهد و روی دایره‌ای به شعاع ۹۲ m حرکت کند. بنابراین، شما نیز در طول یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۱۰۰m حرکت می‌کنید. (الف) تندی زاویه‌ای شما و یوزپلنگ در طول مسیر چقدر است؟ (ب) تندی خطی یوزپلنگ در طول مسیرش چقدر است؟ (اگر این حرکت دایره‌ای را به حساب نیاورده باشید به اشتباه نتیجه می‌گیرید که تندی یوزپلنگ برابر ۱۱۴ km/h است. از این نوع اشتباهها به وضوح در گزارشها دیده می‌شود.)

**۱۰۰-** نقطه‌ای روی لبهٔ چرخ چاقو تیزکنی به قطر ۰/۷۵m با آهنگ ثابت تندی خود را در مدت ۶/۲s از ۱۲m/s به ۲۵m/s تغییر می‌دهد. شتاب زاویه‌ای متوسط این چرخ چقدر است؟

**۱۰۱-** در شکل ۱۰-۶۱ میلهٔ نازک یکنواختی به جرم ۳/۰kg و طول ۴/۰m آزادانه به دور محور افقی $A$ که عمود بر میله و از نقطه‌ای به فاصلهٔ $d = ۱/۰\text{m}$ از انتهای میله می‌گذرد، می‌چرخد. انرژی جنبشی میله وقتی از مکان قائم می‌گذرد برابر ۲۰J است. (الف) لختی چرخشی میله را حول محور $A$ به دست آورید. (ب) تندی (خطی) انتهای $B$ میله وقتی میله از مکان قائم می‌گذرد چقدر است؟ (پ) در چه زاویهٔ $\theta$ میله به طور لحظه‌ای در مسیر حرکتش متوقف می‌شود؟



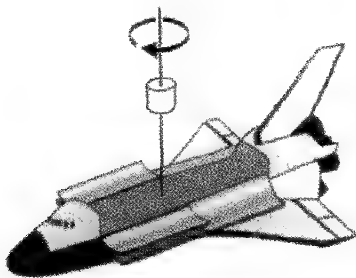

**شکل ۱۰-۶۱** مسئلهٔ ۱۰۱

**۱۰۲-** اتومبیلی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۳۰/۰m دور می‌زند. تندی این اتومبیل با آهنگ ثابت ۰/۵۰۰m/s² افزایش می‌یابد. (الف) بزرگی شتاب خطی *خالص* اتومبیل در ۱۵s بعد چقدر خواهد بود؟ (ب) در این زمان زاویهٔ بردار شتاب خالص با سرعت اتومبیل چقدر است؟

**۱۰۳-** یک قرقره به قطر ۸/۰cm دارای ریسمانی به طول ۵/۶m است که به دور محیط آن پیچیده شده است. قرقره با شتاب زاویه‌ای ثابت ۱/۵ rad/s² از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. (الف) این قرقره چه زاویه‌ای را باید طی کند تا کل ریسمان از روی آن باز شود؟ (ب) این کار چقدر طول می‌کشد؟

**۱۰۴-** چرخ لنگر سنگینی که روی محور مرکزی خود می‌چرخد به دلیل وجود اصطکاک در یاتاقانهای آن حرکتش کند می‌شود. در انتهای دقیقهٔ اول کند شدن تندی زاویه‌ای ۰/۹۰۰ برابر تندی زاویه‌ای اولیهٔ آن (برابر ۲۰۰rev/min) است. با فرض اینکه شتاب زاویه‌ای ثابت باشد، تندی زاویه‌ای را در انتهای دقیقهٔ دوم به دست آورید.

**۱۰۵-** شکل ۱۰-۶۲ یک ماهوارهٔ مخابراتی را نشان می‌دهد که به صورت استوانهٔ توپری به جرم ۱۲۱۰kg، قطر ۱/۲۱m و طول ۱/۷۵m است. این ماهواره قبل از پرتاب شدن از شاتل با تندی ۱۵/۲rev/s حول محور استوانه می‌چرخد. (الف) لختی چرخشی استوانه حول محور چرخشی و (ب) انرژی جنبشی چرخشی آن چقدر است؟



**شکل ۱۰-۶۲** مسئلهٔ ۱۰۵

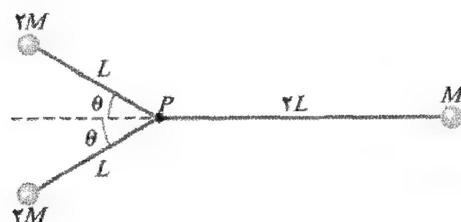
**۱۰۶-** یک صفحهٔ گرامافون روی گرامافونی قرار دارد که با تندی $۳۳\frac{۱}{۳}$ rev/min می‌چرخد. (الف) تندی زاویه‌ای آن را برحسب رادیان بر ثانیه به دست آورید. تندی خطی نقطه‌ای روی صفحه به فاصلهٔ (ب) ۱۵cm و (پ) ۷/۴cm از محور صفحه چقدر است؟

**۱۰۷-** تندی زاویه‌ای اتومبیلی که با تندی ۵۰km/h حرکت می‌کند و در مسیری دایره‌ای به شعاع ۱۱۰m دور می‌زند چقدر است؟

۱۰۸- مطلوب است تعیین (الف) گشتاور نیرو، (ب) انرژی و (پ) توان متوسط لازم برای شتاب دادن زمین از حال سکون به تندی زاویه‌ای فعلی آن حول محورش در مدت یک روز.

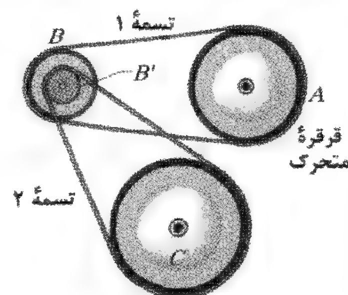
۱۰۹- مولکول اکسیژن $O_2$ دارای جرم $5/30\times10^{-26}$ kg و لختی چرخشی $1/94\times10^{-46}$ $kg\cdot m^2$ حول محوری است که از مرکز خط واصل بین اتمها می‌گذرد و بر آن خط عمود است. فرض کنید که مرکز جرم یک مولکول اکسیژن $O_2$ در گازی دارای تندی انتقالی ۵۰۰m/s باشد و مولکول دارای انرژی جنبشی چرخشی برابر $\frac{2}{3}$ انرژی جنبشی انتقالی مرکز جرم آن است. آنگاه تندی زاویه‌ای مولکول حول مرکز جرم آن چقدر است؟

۱۱۰- جسم صلب نشان داده شده در شکل ۱۰-۶۳ شامل سه گلوله و سه میلهٔ رابط است، با $M = 1/6$kg، $L = 0/60$m و $\theta = 30°$. گلوله‌ها را می‌توان به صورت یک ذره در نظر گرفت و میله‌های رابط جرم ناچیز دارند. انرژی جنبشی چرخشی این جسم در صورتی که تندی زاویه‌ای آن برابر ۱/۲ rad/s باشد، (الف) حول محوری که از نقطهٔ $P$ می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ شکل است و (ب) حول محوری که از نقطهٔ $P$ می‌گذرد و عمود بر میلهٔ به طول $2L$ است و در صفحهٔ شکل قرار دارد، چقدر است؟




**شکل ۱۰-۶۳** مسئلهٔ ۱۱۰

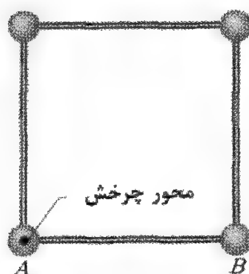
۱۱۱- در شکل ۱۰-۶۴ چهار قرقره توسط دو تسمه به هم متصل شده‌اند. قرقرهٔ $A$ (به شعاع ۱۵ cm) قرقرهٔ متحرک است و با تندی زاویه‌ای ۱۰ rad/s می‌چرخد. قرقرهٔ $B$ (به شعاع ۱۰ cm) توسط تسمهٔ ۱ به قرقرهٔ $A$ متصل شده است. قرقرهٔ $B'$ (به شعاع ۵ cm) هم مرکز با قرقرهٔ $B$ است و محکم به آن متصل شده است. قرقرهٔ $C$ (به شعاع ۲۵ cm) توسط تسمهٔ ۲ به




**شکل ۱۰-۶۴** مسئلهٔ ۱۱۱

قرقرهٔ $B'$ متصل شده است. (الف) تندی خطی یک نقطه واقع بر تسمهٔ ۱، (ب) تندی زاویه‌ای قرقرهٔ $B$، (پ) تندی زاویه‌ای قرقرهٔ $B'$، (ت) تندی خطی یک نقطه واقع بر تسمهٔ ۲ و (ث) تندی زاویه‌ای قرقرهٔ $C$ را محاسبه کنید. (*راهنمایی*: اگر تسمهٔ بین دو قرقره نلغزد، تندیهای خطی در پیرامون دو قرقره باید یکسان باشد.)

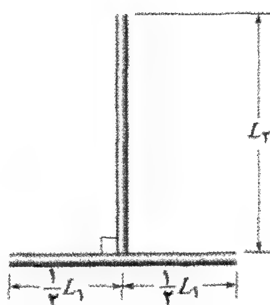
۱۱۲- چهار ذره هر یک به جرم ۰/۲۰kg در چهار رأس مربعی به ضلع ۰/۵m قرار دارند. این ذره‌ها توسط میله‌هایی با جرم ناچیز به هم متصل‌اند. این جسم صلب می‌تواند در صفحه‌ای قائم حول محور افقی $A$ که از یکی از ذره‌ها می‌گذرد بچرخد. جسم را از حال سکون در حالی که میلهٔ $AB$ به صورت افقی است مطابق شکل ۱۰-۶۵، رها می‌کنیم. (الف) لختی چرخشی جسم حول محور $A$ چقدر است؟ (ب) تندی زاویه‌ای جسم حول محور $A$ در لحظه‌ای که میلهٔ $AB$ به حالت قائم در می‌آید چقدر است؟




**شکل ۱۰-۶۵** مسئلهٔ ۱۱۲

۱۱۳- صفحهٔ یک گرامافون دارای تندی زاویه‌ای ۸/۰rad/s در لحظه‌ای است که آن را خاموش می‌کنیم. سه ثانیه بعد این صفحه به تندی زاویه‌ای ۲/۶ rad/s می‌رسد. این صفحه از لحظهٔ خاموش شدن چند رادیان می‌چرخد تا متوقف شود؟ ($\alpha$ را ثابت فرض کنید.)

۱۱۴- دو میلهٔ نازک (هر یک به جرم ۰/۲۰kg) به ترتیب شکل ۱۰-۶۶ به یکدیگر متصل‌اند به طوری که یک جسم صلب را تشکیل می‌دهند. یکی از میله‌ها دارای طول $L_1 = 0/40$m و طول دیگری برابر $L_2 = 0/5$m است. لختی چرخشی این جسم صلب را حول (الف) محوری که عمود بر صفحهٔ کاغذ است و از مرکز میلهٔ کوچکتر می‌گذرد و (ب) محوری که عمود بر صفحه است و از مرکز میلهٔ بزرگتر می‌گذرد، به دست آورید.




**شکل ۱۰-۶۶** مسئلهٔ ۱۱۴

۱۱۵- در شکل ۱۰-۱۸ الف قرصی به شعاع ۰/۲۰m به یک محور افقی بدون اصطکاک متصل شده است. لختی چرخشی قرص حول این محور برابر $۰/۴۰ kg/m^2$ است. ریسمان بدون جرمی که به دور محیط قرص پیچیده شده به یک جعبهٔ ۶/۰kg متصل است. دستگاه از حال سکون رها می‌شود. وقتی انرژی جنبشی جعبه ۶/۰J است (الف) انرژی جنبشی چرخشی قرص و (ب) مسافتی که جعبه به پایین حرکت می‌کند، چقدر است؟ SSM

۱۱۶- سه ذرهٔ ۰/۵kg مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۰/۶۰m را تشکیل داده‌اند. این ذره‌ها توسط میله‌هایی با جرم ناچیز به هم متصل‌اند. لختی چرخشی این جسم صلب حول (الف) محوری که از میان یکی از ذره‌ها می‌گذرد و موازی با میلهٔ رابط دو ذرهٔ دیگر است، (ب) محوری که از مرکز یکی از اضلاع می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ مثلث است و (پ) محوری که موازی با یکی از اضلاع مثلث است و از نقطهٔ میانی دو ضلع دیگر می‌گذرد، چقدر است؟

# ۱۱

# غلتش، گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای



باله چند نوع پرش دارد ولی پرشی به نام تورجت[1] مسحور کننده‌ترین آنهاست. پس از خیز برداشتن مستقیم به طرف بالا در آن پرش، مجری باله ناگهان شروع به چرخش می‌کند به طوری که گویا توسط دستی نامرئی چرخانده شده است. پس از نیم دور، چرخش تمام می‌شود و سپس مجری بر زمین می‌نشیند. حتی اگر بیننده‌ها دربارهٔ قانونهای نیوتون چیزی ندانند، می‌دانند که در حالی که مجری در میان هواست چرخش نمی‌تواند ناگهان شروع و ناگهان ختم شود. با این حال چیزی که آنها می‌بینند سحرآمیز است.

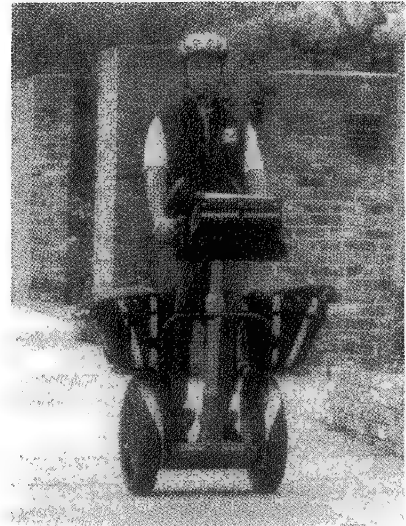
**چه چیزی موجب سحرانگیز شدن پرش تورجت می‌شود؟**

پاسخ در همین فصل.

1. Tour jete'

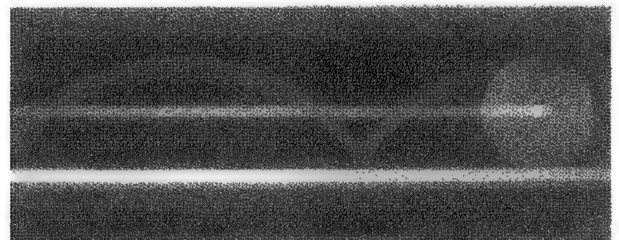
## ۱۱-۱ فیزیک چیست؟

بـه طـوری کـه در فصل ۱۰ بحث کردیم، فیزیک شامل مطالعـهٔ چرخش است. بدیهی است که مهمترین کاربرد ایـن فیزیـک در حرکت غلتشی چرخها و جسمهای چرخ مانند است. این کاربرد فیزیکی از قدیم مورد استفاده بوده است. برای مثال وقتی انسانهای ماقبل تاریخ جزیرهٔ پاک[1] مجسمه‌هـای سـنگی غـول پیکـری از شکار را از میان جزیره جابه‌جا می‌کردند، آنها را روی الوارهایی می‌کشیدند که نقش غلتک را بازی می‌کردند. بعدها، مهـاجرینی که در سالهای ۱۸۰۰ از امریکا به طرف غـرب حرکـت کردنـد، وسایل خود را ابتدا با واگن و سپس با قطار حمـل مـی‌کردنـد. امروزه جهان پر از اتومبیل، کامیون، موتورسیکلت، دوچرخـه و دیگر وسایل نقلیهٔ غلتان است.



**شکل ۱۱-۱** وسیله‌ای برای حمل و نقل انسان.

فیـزیک و مهنـدسی غلـتش از زمانهای قدیـم وجود داشـته است به طـوری کـه نمی‌توان تصور کرد کـه نظرهای جدیـدی می‌توانند در این زمینه وجود داشته باشند. با وجـود ایـن تختـه اسکیتها و انواع دیگری کـه امـروزه ابـداع و طراحـی شـده‌انـد موفقیتهای مالی چشـمگیری داشته‌انـد. درشـکه‌هـای خیابـانی



**شکل ۱۱-۲** تصویر یک قرص چرخان با نوردهی لحظه‌ای. لامپهـای کوچکی به قرص وصل شده‌اند، یکی در مرکـز و دیگـری در لبـهٔ آن. لامپی که روی لبه قرار دارد یک منحنی به نام *چرخزاد* را طی می‌کند.

[1] جزیره‌ای در شرق اقیانوس آرام، م.

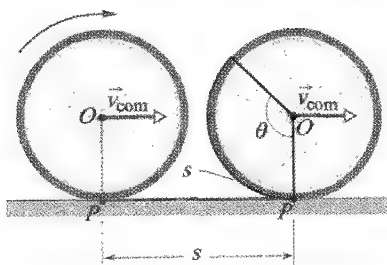
امروزه مردم پسندتر شده و سورتمه‌های تک نفره (شکل ۱۱-۱) در شهرهای بزرگ برای جابه‌جایی مردم به کار مـی‌رود. اعمـال فیزیک غلتش هنوز هم نتایج غیـر منتظـره‌ای در بـر دارد. نقطـهٔ شروع ما در تشریح فیزیک آن سـاده سـازی حرکـت چرخشـی است.

## ۱۱-۲ غلتش به صورت ترکیبی از چـرخش و انتقال

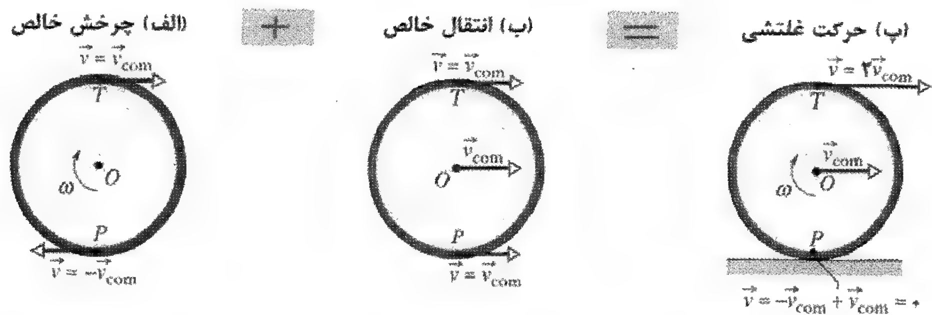
در اینجا فقط جسمهایی را در نظر می‌گیـریم کـه روی سـطحی دارای *غلتش هموار* هستند، یعنی بدون لغـزش یـا جهـش روی سطح می‌غلتند. شکل ۱۱-۲ نشان می‌دهد کـه حرکـت غلتشـی هموار چقدر می‌تواند پیچیده باشد: با وجودی که مرکـز جسـم روی خط راستی موازی با سطح حرکت می‌کنـد، ولـی نقطـه‌ای روی لبهٔ آن یقیناً این حرکت را ندارد. اما این حرکت را می‌توان با در نظر گرفتن ترکیبی از انتقـال مرکـز جـرم وچـرخش بقیـهٔ جسم به دور این مرکز بررسی کرد.

برای مشاهدهٔ اینکه چگونه می‌تـوان ایـن کـار را انجـام داد فرض کنید که در یک پیاده‌رو ایستاده‌اید و چرخ دوچرخهٔ شکل ۱۱-۳ را که در طول خیابان می‌غلتد تماشا می‌کنید. همـان‌طـور که نشان داده‌ایم می‌بینید که مرکز جرم $O$ چرخ بـا تنـدی ثابـت $v_{com}$ به طرف جلو حرکت می‌کند. نقطهٔ $P$ روی خیابان جـایی که چرخ با آن در تماس است نیز روی سطح خیابـان بـا تنـدی $v_{com}$ به طرف جلو حرکـت مـی‌کنـد، بـه طـوری کـه نقطـهٔ $P$ همواره مستقیماً در زیر $O$ قرار دارد.

در طول یک بازهٔ زمانی $t$ مشاهده می‌شود که هم $O$ و هم $P$ به اندازهٔ مسافت $s$ به طرف جلو حرکت می‌کنند. دوچرخه سوار می‌بیند که چرخ به اندازهٔ زاویهٔ $\theta$ حول مرکز چرخ می چرخـد به طوری که نقطه‌ای از چرخ که در شروع زمان $t$ بـا خیابـان در تماس است به اندازهٔ کمان $s$ حرکـت مـی‌کنـد. معادلـهٔ ۱۰-۱۷ رابطهٔ میان کمان $s$ و زاویهٔ چرخش را به دست می‌دهد




شکل ۱۱-۳ مرکز جرم $O$ چرخ غلتان مسافت $s$ را با سرعت $\vec{v}_{com}$ طی می‌کند در حالی که چرخ به اندازهٔ زاویهٔ $\theta$ می‌چرخـد. نقطهٔ $P$، کـه چرخ موقع غلتش با آن در تماس است نیز به اندازهٔ مسافت $s$ حرکت می‌کند.




**شکل ۱۱-۴** حرکت غلتشی یک چرخ به صورت ترکیبی از حرکت چرخشی خالص و حرکت انتقالی خالص. (الف) حرکت چرخشی خالص: همهٔ نقطه‌های چرخ با تندی زاویه‌ای یکسان $\omega$ و همهٔ نقطه‌های روی لبهٔ خارجی چرخ با تندی خطی یکسان $v = v_{com}$ حرکت می‌کنند. سرعتهای خطی $v$ برای دو نقطه از این نقطه‌ها، یکی در بالا ($T$) و دیگری در پایین ($\vec{P}$) نشان داده شده‌اند. (ب) حرکت انتقالی خالص: همهٔ نقطه‌های روی چرخ با سرعت خطی یکسان $\vec{v}_{com}$ به طرف راست حرکت می‌کنند. (پ) حرکت غلتشی چرخ ترکیب (الف) و (ب) است.

$$s = \theta R \tag{۱-۱۱}$$

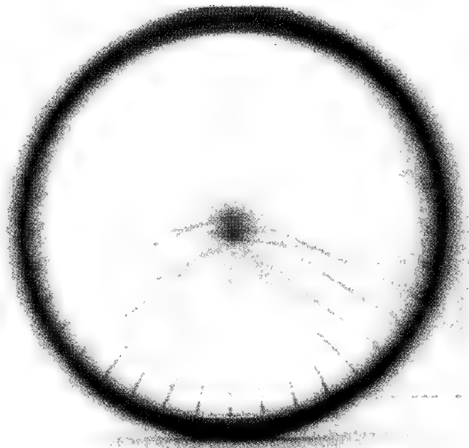
که در آن $R$ شعاع چرخ است. تندی خطی $v_{com}$ مربوط به مرکز چرخ (مرکز جرم این چرخ یکنواخت) برابر با $\frac{ds}{dt}$ است.تندی زاویه‌ای $\omega$ چرخ حول مرکز آن برابر $\frac{d\theta}{dt}$ است. بنابراین، با مشتق‌گیری از معادلهٔ ۱۱-۱ برحسب زمان (با ثابت بودن $R$) خواهیم داشت

$$v_{com} = \omega R \quad \text{(حرکت غلتشی هموار)} \tag{۲-۱۱}$$

شکل ۱۱-۴ نشان می‌دهد که حرکت غلتشی چرخ ترکیبی از حرکتهای انتقالی خالص و چرخشی خالص است. شکل ۱۱-۴ الف حرکت چرخشی خالص را نشان می دهد (که گویی محور چرخش که از مرکز آن می‌گذرد ثابت است): هر نقطه از چرخ با تندی زاویه‌ای $\omega$ حول مرکز آن می‌چرخد. (این نوع حرکت در فصل ۱۰ مورد بحث قرار گرفت). هر نقطه روی لبهٔ خارجی چرخ دارای تندی خطی $v_{com}$ است که با معادله ۱۱-۲ داده می‌شود. شکل ۱۱-۴ ب نشان دهندهٔ حرکت انتقالی خالص است (که گویی چرخ هیچ حرکت چرخشی ندارد): هر نقطه از چرخ با تندی $v_{com}$ به سمت راست حرکت می‌کند.

ترکیب شکلهای ۱۱-۴ الف و ۱۱-۴ ب حرکت غلتشی واقعی چرخ را به دست می‌دهد، شکل ۱۱-۴ پ. توجه کنید که در این ترکیب حرکتها، بخش پایینی چرخ (در نقطهٔ $P$) ساکن می‌ماند و بخش بالایی چرخ (در نقطهٔ $T$) با تندی $2v_{com}$ که سریعتر از بخشهای دیگر چرخ است حرکت می‌کند. این نتیجه‌ها در شکل ۱۱-۵ که عکسی با نوردهی لحظه‌ای از چرخ غلتان دوچرخه است نشان داده شده‌اند. می‌توان گفت که بالای چرخ سریعتر از پایین آن حرکت می‌کند زیرا پره‌های چرخ در بالای آن تارتر از پایین است.

حرکت هر جسم کروی را که به طور هموار روی یک سطح می‌غلتد می‌توان به صورت شکلهای ۱۱-۴ الف و ۱۱-۴ ب به حرکتهای چرخشی خالص و انتقالی خالص مجزا کرد.

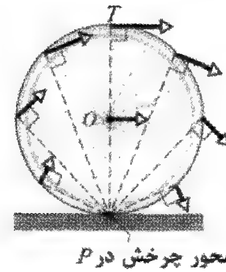


**شکل ۱۱-۵** عکسی از چرخ دوچرخهٔ در حال غلتش. پره‌های نزدیک بالای چرخ تارتر از پره‌های پایینی به‌نظر می‌رسند، زیرا بر اساس شکل ۱۱-۴ پ لبهٔ بالایی تندتر از لبهٔ پایینی حرکت می‌کند.

### *غلتش به عنوان چرخش خالص*

شکل ۱۱-۶ روش دیگری را برای نشان دادن حرکت غلتشی یک چرخ نشان می‌دهد. در اینجا حرکت غلتشی به صورت حرکت چرخشی خالص حول محوری در نظر گرفته می‌شود که موقع حرکت همیشه از نقطه‌ای که چرخ با زمین در تماس است می‌گذرد. حرکت غلتشی را به صورت حرکت چرخشی خالص حول محوری که از نقطهٔ $P$ در شکل ۱۱-۴ پ می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ شکل است، در نظر می‌گیریم. بنابراین، بردارهای شکل

۱۱-۶ نشانگر سرعتهای لحظه‌ای نقطه‌های روی چرخ در حال غلتش‌اند.




**شکل ۱۱-۶** غلتش را می‌توان به صورت چرخش خالص با تندی زاویه‌ای $\omega$ حول محوری که همیشه از نقطهٔ $P$ می‌گذرد در نظر گرفت. بردارها نشان دهندهٔ سرعتهای خطی لحظه‌ای نقطه‌های انتخاب شده‌ای روی چرخ در حال غلتش‌اند. می‌توان این بردارها را با ترکیب حرکتهای انتقالی و چرخشی همانند شکل ۱۱-۴ به دست آورد.

**پرسش:** یک ناظر ساکن چه تندی زاویه‌ای را حول این محور جدید به چرخ دوچرخهٔ در حال غلتش نسبت می‌دهد؟

**پاسخ:** همان تندی زاویه‌ای را نسبت می‌دهد که دوچرخه سوار در حرکت چرخشی خالص چرخ حول محوری که از مرکز جرم می‌گذرد به آن نسبت می‌دهد.

برای اثبات این پاسخ، تندی خطی نقطهٔ بالایی چرخ در حال غلتش را از نظر ناظر ساکن محاسبه می‌کنیم. اگر شعاع چرخ را $R$ بنامیم، نقطهٔ بالایی به فاصلهٔ $2R$ از محوری که از $P$ در شکل ۱۱-۶ می‌گذرد قرار دارد به طوری که تندی خطی نقطهٔ بالایی برابر خواهد بود با (با استفاده از معادلهٔ ۱۱-۲)

$$v_{top} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{com}$$

که در توافق کامل با شکل ۱۱-۴ پ است. به همین ترتیب، می‌توان تندیهای خطی نشان داده شده برای هر بخش از چرخ را در نقطه‌های $O$ و $P$ در شکل ۱۱-۴ پ به دست آورد.

> **نکتهٔ وارسی ۱** شعاع چرخ عقب یک دوچرخهٔ سیرک دو برابر شعاع چرخ جلو آن است. (الف) وقتی دوچرخه در حال حرکت است، آیا تندی خطی در بالاترین نقطهٔ بالایی چرخ عقب نسبت به بالاترین نقطهٔ در چرخ جلو بزرگتر است یا کوچکتر یا برابر آن است؟ (ب) آیا تندی زاویه‌ای چرخ عقب نسبت به چرخ جلو بزرگتر است یا کوچکتر یا برابر آن است؟

## ۱۱-۳ انرژی جنبشی در حرکت غلتشی

می‌خواهیم انرژی جنبشی چرخ در حال غلتش را از دید یک ناظر ساکن محاسبه کنیم. اگر غلتش چرخ را به صورت حرکت چرخشی خالص حول محوری که از نقطهٔ $P$ در شکل ۱۱-۶ می‌گذرد در نظر بگیریم، از معادلهٔ ۱۰-۳۴ خواهیم داشت

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \qquad (۱۱-۳)$$

که در آن $\omega$ تندی زاویه‌ای چرخ و $I_P$ لختی چرخشی چرخ حول محوری است که از نقطهٔ $P$ می‌گذرد. با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی در معادلهٔ ۱۰-۳۶ $(I = I_{com} + Mh^2)$، داریم

$$I_p = I_{com} + MR^2 \qquad (۱۱-۴)$$

که در آن $M$ جرم چرخ و $I_{com}$ لختی چرخشی آن حول محوری است که از مرکز جرم آن می‌گذرد و $R$ (شعاع چرخ) برابر فاصلهٔ عمودی $h$ است. با قرار دادن معادلهٔ ۱۱-۴ در معادلهٔ ۱۱-۳، خواهیم داشت

$$K = \frac{1}{2} I_{com}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

و با استفاده از رابطهٔ $v_{com} = \omega R$ (معادلهٔ ۱۱-۲) به دست می‌آید

$$K = \frac{1}{2} I_{com}\omega^2 + \frac{1}{2} Mv_{com}^2 \qquad (۱۱-۵)$$

می‌توان جملهٔ $\frac{1}{2} I_{com}\omega^2$ را به عنوان انرژی جنبشی وابسته به چرخش چرخ حول محوری که از مرکز جرم آن می‌گذرد (شکل ۱۱-۴ الف)، و جملهٔ $\frac{1}{2} Mv_{com}^2$ را به عنوان انرژی جنبشی وابسته به حرکت انتقالی (شکل ۱۱-۴ ب) در نظر گرفت. بنابراین، قاعدهٔ زیر را خواهیم داشت

> یک جسم غلتان دارای دو نوع انرژی جنبشی است: یکی انرژی جنبشی چرخشی $(\frac{1}{2} I_{com}\omega^2)$ مربوط به چرخش حول مرکز جرم و دیگری انرژی جنبشی انتقالی $(\frac{1}{2} Mv_{com}^2)$ مربوط به انتقال مرکز جرم.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱-۱**

رکورد سرعت زمینی در صحرای بلک راک نوادا در سال ۱۹۹۷ توسط اتومبیل تراست SSC ثبت شد. این سرعت ۱۲۲۲km/h در یک جهت و ۱۲۳۳km/h در جهت مقابل بود. هر دو مقدار بیش از سرعت صوت در آن محل (۱۲۰۷km/h) بود.

رکورد ثبت شده به چند دلیل خیلی خطرناک بود. یکی از این موارد چرخهای ماشین است. فرض کنید که هر چرخ اتومبیل تراستSSC به صورت یک قرص با ضخامت یکنواخت و جرم $M = 170\text{kg}$ است، همچنین فرض کنید که غلتش به صورت هموار انجام می‌گیرد. وقتی تندی اتومبیل به ۱۲۳۳km/h برسد، انرژی جنبشی هر چرخ چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** معادلهٔ ۱۱-۵ انرژی جنبشی یک جسم غلتان را به دست می‌دهد، اما به سه نکته نیاز داریم:

۱. وقتی از تندی یک جسم غلتان صحبت می‌کنیم، همیشه منظورمان تندی مرکز جرم است، بنابراین،

$v_{com} = ۱۲۳۳\ \text{km/h} = ۳۴۲/۵\text{m/s}$.

**۲.** معادلهٔ ۱۱-۵ نیازمند تندی زاویه‌ای $\omega$ برای جسم غلتان است که می‌توان آن را با معادلهٔ ۱۱-۲ به $v_{\text{com}}$ ربط داد، به طوری که داریم $\omega = \frac{v_{\text{com}}}{R}$ که در آن $R$ شعاع چرخ است.

**۳.** معادلهٔ ۱۱-۵ همچنین نیازمند لختی چرخشی $I_{\text{com}}$ جسم حول مرکز جرم خود است. از جدول ۱۰-۲ پ به دست می‌آوریم که برای یک قرص یکنواخت، $I_{\text{com}} = \frac{1}{2}MR^2$.

***محاسبه‌ها:*** اکنون از معادلهٔ ۱۱-۵ داریم

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{com}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{com}}^2$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)(\frac{v_{\text{com}}}{R})^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{com}}^2 = \frac{3}{4}Mv_{\text{com}}^2$$
$$= \frac{3}{4}(170\,\text{kg})(342/5\,\text{m/s})$$
$$= 1/50 \times 10^7\ \text{J} \quad \text{(پاسخ)}$$

(توجه کنید که شعاع چرخ $R$ درمحاسبه حذف می‌شود.)

این پاسخ وقتی تراست SSC به رکورد سرعت زمینی خود می‌رسد مقدار خطرناکی را به دست می‌دهد: انرژی جنبشی هر چرخ اتومبیل (آلومینیوم ریخته شده) خیلی زیاد است، تقریباً به بزرگی انرژی جنبشی ($2/1 \times 10^7$ J) مربوط به دیسک فولادی در حال چرخش که در مسئله نمونهٔ ۱۰-۸ منفجر شد. اگر چنین چرخی با هر مانع سختی در طول مسیر اتومبیل برخورد کند، چرخ همانند آن قرص فولادی منفجر می‌شود در حالی که اتومبیل و راننده تندتر از صوت حرکت می‌کنند!

## ۱۱-۴ نیروها در حرکت غلتشی

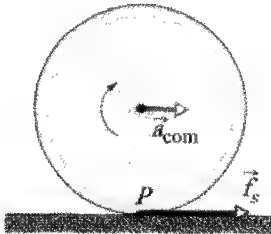
### *اصطکاک و غلتش*

اگر چرخی مطابق شکل ۱۱-۳ با تندی ثابت غلتش کند، هیچ تمایلی به لغزش در نقطهٔ تماس خود $P$ ندارد و بنابراین، هیچ نیروی اصطکاکی در اینجا اثر نمی‌کند. اما اگر نیروی خالصی بر چرخ غلتان اثر کند و تندی آن را افزایش یا کاهش دهد، این نیروی خالص باعث ایجاد شتاب $\vec{a}_{\text{com}}$ برای مرکز جرم در طول راستای حرکت می‌شود. همچنین این نیرو باعث می‌شود تا چرخ تندتر یا کندتر بچرخد، بدین معنا که باعث ایجاد یک شتاب زاویه‌ای $\alpha$ می‌گردد. این شتابها می‌خواهند تا چرخ را در نقطهٔ $P$ بلغزانند. بنابراین، یک نیروی اصطکاک باید در نقطهٔ $P$ به چرخ وارد شود تا با این لغزش مخالفت کند.

اگر چرخ *نلغزد*، این نیرو یک نیروی اصطکاک *ایستایی* $\vec{f}_s$ است و حرکت به صورت غلتش هموار صورت می‌گیرد. بنابراین، می‌توان بزرگی شتاب خطی $\vec{a}_{\text{com}}$ و شتاب زاویه‌ای $\alpha$ را با مشتق‌گیری از معادلهٔ ۱۱-۲ برحسب زمان (با توجه به ثابت بودن $R$) به دست آورد. در طرف چپ این معادله $\frac{dv_{\text{com}}}{dt}$ برابر $a_{\text{com}}$ و در طرف راست $\frac{d\omega}{dt}$ همان $\alpha$ است. بنابراین، برای غلتش هموار داریم

$$a_{\text{com}} = \alpha R \qquad \text{(حرکت غلتشی هموار)} \qquad (۱۱\text{-}۶)$$

اگر چرخ وقتی نیروی خالصی به آن وارد می‌شود *بلغزد*، نیروی اصطکاک وارده در نقطهٔ $P$ در شکل ۱۱-۳ یک نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$ است. بنابراین، حرکت غلتشی هموار نیست و معادلهٔ ۱۱-۶ برای این حرکت به کار نمی‌رود. در این فصل فقط با حرکت غلتشی هموار سر و کار داریم.




**شکل ۱۱-۷** چرخی بدون لغزش روی سطح افقی می‌غلتد در حالی که دارای شتاب خطی $\vec{a}_{\text{com}}$ است. نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ در نقطهٔ $P$ بر چرخ وارد می شود و از لغزش آن جلوگیری می‌کند.

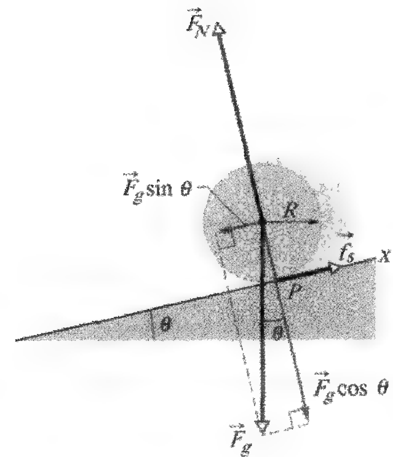
شکل ۱۱-۷ مثالی را نشان می‌دهد که در آن، مانند چرخ دوچرخه در شروع مسابقه، چرخ با سرعت می‌چرخد و در همان حال روی یک سطح تخت می‌غلتد. چرخش سریع چرخ باعث می‌شود تا پایین چرخ در نقطهٔ $P$ به طرف چپ بلغزد. ولی یک نیروی اصطکاک در نقطهٔ $P$ به سمت راست وارد می‌شود و با لغزیدن مخالفت می‌کند. اگر چرخ لغزش نداشته باشد، این نیروی اصطکاک یک نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ است (مطابق شکل) و حرکت به صورت غلتش هموار خواهد بود و معادلهٔ ۱۱-۶ برای این حرکت صادق است. (بدون اصطکاک دوچرخه ساکن می‌ماند و حرکت بسیار کسالت آور خواهد بود.)

اگر چرخ شکل ۱۱-۷ مثل چرخ دوچرخه‌ای که سرعتش کم می‌شود، کندتر بچرخد دو تغییر باید در شکل ایجاد شود: جهتهای شتاب مرکز جرم $\vec{a}_{\text{com}}$ و نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ در نقطهٔ $P$ اکنون باید به سمت چپ باشند.

### *غلتش به پایین سطح شیبدار*

شکل ۱۱-۸ جسم گرد یکنواختی به جرم $M$ و شعاع $R$ را نشان می‌دهد که به طور هموار از سطح شیبداری با زاویهٔ $\theta$ در راستای محور $x$ به پایین می‌غلتد. می‌خواهیم عبارتی را برای شتاب رو به پایین جسم $a_{\text{com},x}$، پیدا کنیم. این کار را می‌توان با استفاده از قانون دوم نیوتون هم در شکل خطی ($F_{\text{net}} = Ma$) و هم در شکل زاویه‌ای ($\tau_{\text{net}} = I\alpha$) انجام داد.

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را به صورت شکل ۱۱-۸ رسم می‌کنیم:




**شکل ۱۱-۸** جسم گرد یکنواختی به شعاع $R$ از سطح شیبداری به پایین می‌غلتد. نیروهایی که بر جسم وارد می‌شوند عبارت‌اند از نیروی گرانشی $\vec{F}_g$، نیروی عمود بر سطح $\vec{F}_N$ و نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ که به طرف بالای سطح شیبدار است. (برای سادگی بردار $\vec{F}_N$ را تا مرکز جسم جابه‌جا کرده‌ایم.)

**۱.** در این شکل نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر جسم به طرف پایین است. انتهای این بردار در مرکز جرم جسم قرار دارد و مؤلفهٔ موازی سطح شیبدار این نیرو $F_g \sin\theta$ و برابر $Mg\sin\theta$ است.

**۲.** نیروی عمودی $\vec{F}_N$ بر سطح شیبدار عمود است که در نقطهٔ تماس با $P$ وارد می‌شود ولی در شکل ۱۱-۸ آن را در راستای خود طوری جابه‌جا کرده‌ایم که انتهای آن از مرکز جرم جسم می‌گذرد.

**۳.** نیروی اصطکاک ایستایی برابر $\vec{f}_s$ در نقطهٔ تماس $P$ وارد می‌شود که جهتش به سمت بالای سطح شیبدار است. (آیا می‌دانید چرا؟ اگر جسم بخواهد در نقطهٔ $P$ لغزش کند باید به سمت *پایین* سطح شیبدار بلغزد. بنابراین، جهت نیروی اصطکاک که با لغزش مخالفت می‌کند، باید به طرف *بالای* سطح شیبدار باشد.)

می‌توان قانون دوم نیوتون را برای مؤلفه‌های $x$ شکل ۱۱-۸ $(F_{\text{net},x} = ma_x)$ به صورت زیر نوشت

$$f_s - Mg\sin\theta = Ma_{\text{com},x} \qquad (۱۱-۷)$$

این معادله شامل دو مجهول $f_s$ و $a_{\text{com},x}$ است. (نباید فرض کنیم که $f_s$ در اینجا مقدار بیشینهٔ خود یعنی $f_{s,\max}$ را دارد. آنچه می‌دانیم این است که مقدار $f_s$ فقط در حدی است که جسم می‌تواند بدون لغزیدن به طور هموار به پایین بغلتد.)

اکنون می‌خواهیم قانون دوم نیوتون را در شکل زاویه‌ای برای چرخش جسم حول مرکز جرم خود به کار بریم. ابتدا از معادلهٔ ۱۰-۴۱ $(\tau = r_\perp F)$ برای نوشتن گشتاور نیروهای وارد بر جسم نسبت به مرکز جرم استفاده می‌کنیم. نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ دارای بازوی گشتاور $R$ است و در نتیجه گشتاور نیرویی برابر $Rf_s$ را ایجاد می‌کند که مقدارش مثبت است، زیرا تمایل دارد تا جسم را در شکل ۱۱-۸ به صورت پادساعتگرد بچرخاند. نیروهای $\vec{F}_g$ و $\vec{F}_N$ دارای بازوهای گشتاور صفرند زیرا از مرکز جرم می‌گذرند و در نتیجه گشتاور نیرویی برابر صفر دارند. بنابراین، می‌توانیم شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون $(\tau_{\text{net}} = I\alpha)$ را نسبت به محوری که از مرکز جرم جسم می‌گذرد به صورت زیر بنویسیم

$$Rf_s = I_{\text{com}}\alpha \qquad (۱۱-۸)$$

این معادله شامل دو مجهول $f_s$ و $\alpha$ است.

از آنجا که جسم به صورت هموار می‌غلتد، می‌توان معادلهٔ ۱۱-۶ $(a_{\text{com}} = \alpha R)$ را به کار برد تا مجهولهای $a_{\text{com},x}$ و $\alpha$ را به هم مربوط سازیم. اما باید دقت کنیم که در اینجا $a_{\text{com},x}$ منفی (در جهت منفی محور $x$) و $\alpha$ مثبت (پادساعتگرد) است. بنابراین، به جای $\alpha$ در معادلهٔ ۱۱-۸ مقدار $\frac{-a_{\text{com},x}}{R}$ را قرار می‌دهیم. در نتیجه با حل آن برحسب $f_s$ خواهیم داشت

$$f_s = -I_{\text{com}}\frac{a_{\text{com},x}}{R^2} \qquad (۱۱-۹)$$

سپس با قرار دادن سمت راست معادلهٔ ۱۱-۹ به جای $f_s$ در معادلهٔ ۱۱-۷ خواهیم داشت

$$a_{\text{com},x} = \frac{-g\sin\theta}{1 + I_{\text{com}}/MR^2} \qquad (۱۱-۱۰)$$

این معادله را می‌توان برای به دست آوردن شتاب خطی $a_{\text{com},x}$ هر جسمی که روی سطح شیبداری با زاویهٔ $\theta$ نسبت به افق می‌غلتد به کار برد.

✓ ***نکتهٔ وارسی ۲*** قرصهای $A$ و $B$ مشابه‌اند و روی زمین با تندیهای یکسانی می‌غلتند. سپس قرص $A$ روی سطح شیبداری به طرف بالا می‌غلتد و به ارتفاع بیشینهٔ $h$ می‌رسد و قرص $B$ روی سطح شیبدار مشابهی به طرف بالا می‌رود با این تفاوت که سطح شیبدار اصطکاک ندارد. آیا بیشینهٔ ارتفاعی که قرص $B$ به آن می‌رسد بزرگتر از، کوچکتر از، یا مساوی $h$ است؟

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱-۲ مهارت خود را تقویت کنید

گلولهٔ یکنواختی به جرم $M = ۶/۰۰\ \text{kg}$ و شعاع $R$ به طور هموار از حال سکون از سطح شیبداری به زاویهٔ $\theta = ۳۰/۰^\circ$ (شکل ۱۱-۸) به پایین می‌غلتد.

(الف) توپ ارتفاع قائم $h = ۱/۲۰\ \text{m}$ را طی می‌کند تا به پایین سطح شیبدار برسد. تندی آن در پایین سطح شیبدار چقدر است؟

**نکته کلیدی** انرژی مکانیکی $E$ دستگاه گلوله - زمین وقتی گلوله به طرف پایین سطح شیبدار می‌غلتد پایسته است، زیرا تنها نیرویی که روی گلوله کار انجام می‌دهد نیروی گرانش است که نیرویی پایستار است. نیروی عمود بر سطح وارد بر

گلوله از طرف سطح شیبدار کاری انجام نمی‌دهد زیرا بر مسیر گلوله عمود است. نیروی اصطکاک وارد بر گلوله از طرف سطح شیبدار هم هیچ تبدیل انرژی به صورت انرژی گرمایی نخواهد داشت زیرا گلوله لغزش ندارد (*غلتش هموار است*). بنابراین، می‌توان پایستگی انرژی مکانیکی $(E_f = E_i)$ را به صورت زیر نوشت

$$K_f - U_f = K_i + U_i \qquad (۱۱-۱۱)$$

که زیرنویسهای $f$ و $i$ به ترتیب مربوط به مقدارهای نهایی (در پایین) و مقدارهای اولیه (در حالت سکون) هستند. انرژی پتانسیل گرانشی اولیه برابر $U_i = Mgh$ ($M$ جرم گلوله است) و در پایان $U_f = ۰$ است. انرژی جنبشی اولیه $K_i = ۰$ است. برای انرژی جنبشی نهایی $K_f$ به نکتهٔ دیگری نیاز داریم: به دلیل غلتش توپ انرژی جنبشی آن شامل هم انتقالی و هم چرخشی است، و این دو مقدار در طرف راست معادلهٔ ۱۱-۵ نوشته شده‌اند.

***محاسبه‌ها:*** با قرار دادن همهٔ این عبارتها در معادلهٔ ۱۱-۱۱، خواهیم داشت

$$\left(\frac{۱}{۲}I_{\text{com}}\omega^۲ + \frac{۱}{۲}Mv_{\text{com}}^۲\right) + ۰ = ۰ + Mgh \qquad (۱۱-۱۲)$$

که در آن $I_{\text{com}}$ لختی چرخشی گلوله نسبت به محوری است که از مرکز جرم آن می‌گذرد، $v_{\text{com}}$ تندی خواسته شده در پایین و $\omega$ تندی زاویه‌ای در آنجاست.

چون گلوله به طور هموار می‌غلتد، می‌توان معادلهٔ ۱۱-۲ را به کار برد و $\frac{v_{\text{com}}}{R}$ را به جای $\omega$ قرار داد تا از مجهولهای معادلهٔ ۱۱-۱۲ کاسته شود. برای انجام این کار با قرار دادن $\frac{۲}{۵}MR^۲$ به جای $I_{\text{com}}$ (از جدول ۱۰-۲ ج) و حل آن برای $v_{\text{com}}$ به دست می‌آوریم

$$v_{\text{com}} = \sqrt{\left(\frac{۱۰}{۷}\right)gh} = \sqrt{\left(\frac{۱۰}{۷}\right)(۹/۸\ \text{m/s}^۲)(۱/۲۰\ \text{m})}$$

$$= ۴/۱۰\,\text{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که این پاسخ به جرم $M$ یا شعاع $R$ گلوله بستگی ندارد.

(پ) وقتی گلوله به سمت پایین سطح شیبدار می‌غلتد، بزرگی و جهت نیروی اصطکاک وارد بر گلوله را به دست آورید.

**نکتهٔ کلیدی** چون گلوله به طور هموار می‌غلتد، معادلهٔ ۱۱-۹ نیروی اصطکاک وارد بر گلوله را به دست می‌دهد.

***محاسبه‌ها:*** چون گلوله می‌غلتد ابتدا باید شتاب گلوله $a_{\text{com},x}$ را از معادلهٔ ۱۱-۱۰ به دست آوریم

$$a_{\text{com},x} = \frac{-g\sin\theta}{۱ + I_{\text{com}}/MR^۲} = -\frac{g\sin\theta}{۱ + \frac{۲}{۵}MR^۲/MR^۲}$$

$$= -\frac{(۹/۸\ \text{m/s}^۲)\sin ۳۰}{۱ + \frac{۲}{۵}} = -۳/۵۰\ \text{m/s}^۲$$

توجه کنید برای به دست آوردن $a_{\text{com},x}$ نه به جرم $M$ و نه به شعاع $R$ نیازی نداشتیم. بنابراین، هر گلوله‌ای با هر اندازه و هر جرم یکنواختی دارای چنین شتابی موقع پایین آمدن از سطح شیبدار $۳۰/۰^\circ$ خواهد بود به شرطی که غلتش گلوله هموار باشد.

اکنون می‌توان معادلهٔ ۱۱-۹ را به صورت زیر حل کرد

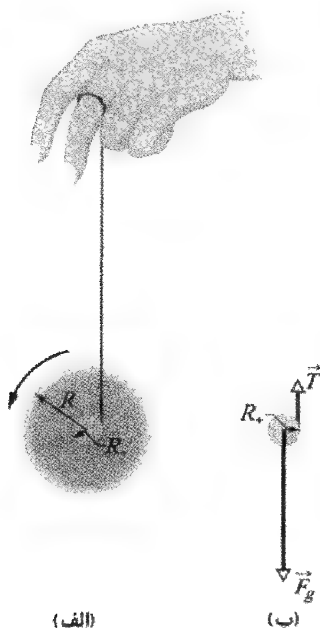
$$f_s = -I_{\text{com}}\frac{a_{\text{com},x}}{R^۲} = -\frac{۲}{۵}MR^۲\frac{a_{\text{com},x}}{R^۲} = -\frac{۲}{۳}Ma_{\text{com},x}$$

$$= -\frac{۲}{۵}(۶/۰۰\text{kg})(-۳/۵۰\,\text{m/s}^۲) = ۸/۴۰\ \text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که در اینجا به جرم $M$ نیاز است ولی شعاع $R$ را لازم نداریم. بنابراین، نیروی اصطکاک وارد بر هر گلولهٔ $۶/۰۰\text{kg}$ که به طور هموار از سطح شیبداری به زاویهٔ $۳۰/۰^\circ$ به پایین بغلتد، بدون توجه به شعاع گلوله برابر $۸/۴۰\text{N}$ است.

## ۱۱-۵ یو - یو

یو- یو یک آزمایشگاه فیزیک است که می‌توان آن را در جیب خود جا داد. وقتی یو- یو با نخ خود به اندازهٔ $h$ به طرف پایین بغلتد، انرژی پتانسیل خود را به میزان $mgh$ از دست می‌دهد ولی انرژی جنبشی، هم به صورت انتقالی $(\frac{۱}{۲}mv_{\text{com}}^۲)$ و هم به صورت چرخشی $(\frac{۱}{۲}I_{\text{com}}\omega^۲)$، به دست می‌آورد. وقتی یو- یو به بالا برگردد، انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد و دوباره انرژی پتانسیل به دست می‌آورد.




**شکل ۱۱-۹** (الف) سطح مقطع یک یو- یو را در شکل نشان داده‌ایم. نخ که ضخامت آن ناچیز فرض می‌شود به دور محوری به شعاع $R_۰$ پیچیده می‌شود. (ب) نمودار جسم - آزاد برای یو - یو در حال پایین آمدن. فقط محور نشان داده شده است.

در یو- یوهای جدید، نخ به محور بسته نشده بلکه به دور آن پیچیده شده است. وقتی یو- یو به انتهای نخ برخورد می‌کند نیروی به سمت بالایی که از طرف نخ به محور آن وارد می‌شود پایین رفتن را متوقف می‌کند. سپس یو- یو در حالی که محور درون حلقه است فقط با انرژی جنبشی چرخشی می‌چرخد. یو- یو به چرخش خود (در حال خواب) ادامه می‌دهد تا زمانی که با تکان شدید نخ آن را بیدار کنیم، با این کار نخ با محور درگیر می‌شود و یو- یو به بالا بر می‌گردد. انرژی جنبشی چرخشی یو- یو در انتهای نخ (و در نتیجه زمان در حال خواب) را می‌توان به طور قابل توجهی با پرتاب یو- یو به طرف پایین افزایش داد به طوری که نخ را با تندیهای اولیهٔ $v_{\text{com}}$ و $\omega$ به جای غلتش به پایین از حالت سکون به طرف پایین حرکت دهد.

برای به دست آوردن عبارتی برای شتاب خطی $a_{\text{com}}$ یو- یو که از نخ به پایین می‌غلتد، باید از قانون دوم نیوتون درست همانند کاری که در مورد غلتش جسم روی سطح شیبدار انجام دادیم (شکل ۱۱-۸) استفاده کنیم. تحلیل این وضعیت همانند آن است با این تفاوت که:

۱. یو- یو به جای اینکه از سطح شیبداری با زاویهٔ $\theta$ نسبت به افق پایین بیاید به دور نخی با زاویهٔ $90^\circ$ نسبت به افق می‌غلتد.

۲. به جای غلتش روی سطح خارجی در شعاع $R$، غلتش یو- یو روی محوری به شعاع $R_0$ است، (شکل ۱۱-۹ الف).

۳. به جای کاهش سرعت با نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$، یو- یو به وسیلهٔ نیروی $\vec{T}$ وارد بر آن از طرف نخ کُند می‌شود، (شکل ۱۱-۹ ب).

با تحلیل دوباره به معادلهٔ ۱۱-۱۰ می‌رسیم. در نتیجه، فقط نمادگذاری خود را در معادلهٔ ۱۱-۱۰ تغییر می‌دهیم و با قرار دادن $\theta = 90^\circ$ شتاب خطی را به این صورت می‌نویسیم

$$a_{\text{com}} = -\frac{g}{1 + I_{\text{com}}/MR_0^2} \qquad (۱۱-۱۳)$$

که در این معادله $I_{\text{com}}$ لختی چرخشی یو- یو نسبت به مرکز یو- یو و $M$ جرم آن است. یو- یو وقتی پایین می‌رود همان شتابی را دارد که موقع بالا رفتن دارد

## ۱۱-۶ بازنگری گشتاور نیرو

در فصل ۱۰ گشتاور نیروی $\tau$ را برای جسم صلبی تعریف کردیم که می‌تواند حول محور ثابتی بچرخد، به طوری که هر ذرهٔ جسم مجبور است که در مسیری دایره‌ای به مرکز محور آن حرکت کند. اکنون تعریف گشتاور نیرو را تعمیم می‌دهیم تا بتوانیم از آن برای هر ذره منفردی که در طول هر مسیری نسبت به *نقطه‌ای* ثابت (به جای محور ثابت) حرکت می‌کند، استفاده کنیم. لزومی ندارد که مسیر حتماً دایره‌ای باشد ولی باید گشتاور را به صورت بردار $\vec{\tau}$ که می‌تواند در هر جهتی باشد بنویسیم.

شکل ۱۱-۱۰ الف چنین ذره‌ای را در نقطهٔ $A$ از صفحهٔ $xy$ نشان می‌دهد. یک تک نیروی $\vec{F}$ در این صفحه بر این ذره وارد می‌شود و مکان این ذره نسبت به مبدأ $O$ را با بردار $\vec{r}$ نشان می‌دهیم. گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ وارده بر ذره نسبت به نقطهٔ ثابت $O$ کمیتی برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{(تعریف گشتاور نیرو)} \qquad (۱۱-۱۴)$$

می‌توان حاصلضرب برداری در این تعریف $\vec{\tau}$ را با استفاده از قاعده‌ای که در بخش ۳-۸ برای چنین ضربهایی تعریف کردیم محاسبه کرد. برای به دست آوردن جهت $\vec{\tau}$ بردار $\vec{F}$ را (بدون تغییر راستا) آن قدر می‌لغزانیم تا انتهای آن به مبداء $O$ برسد، به طوری که انتهای دو بردار مربوط به ضرب برداری در شکل ۱۱-۱۰ ب به هم برسد. سپس، با استفاده از قاعدهٔ دست راست برای ضرب خارجی، در شکل ۳-۲۰ الف اگر انگشتان دست راست را از $\vec{r}$ (بردار اول در ضرب برداری) به طرف $\vec{F}$ (بردار دوم) بچرخانیم در نتیجه، انگشت شست باز شده جهت $\vec{\tau}$ را نشان می‌دهد. در شکل ۱۱-۱۰ ب $\vec{\tau}$ در جهت مثبت محور $z$ است.

برای تعیین بزرگی $\vec{\tau}$، جواب عمومی معادلهٔ ۳-۲۷ $(c = ab\sin\phi)$ را به کار می‌بریم، به دست می‌آید

$$\tau = rF\sin\phi \qquad (۱۱-۱۵)$$

که در آن $\phi$ زاویهٔ کوچکتر بین جهتهای $\vec{r}$ و $\vec{F}$ است وقتی بردارها همگی از یک مبدأ رسم شوند. از شکل ۱۱-۱۰ ب می‌بینیم که می‌توان معادلهٔ ۱۱-۱۵ را به صورت زیر نوشت

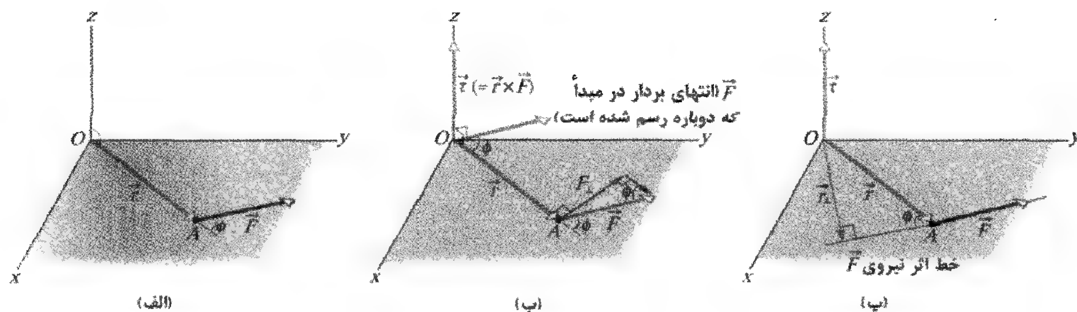
$$\tau = rF_\perp \qquad (۱۱-۱۶)$$

که $F_\perp (= F\sin\phi)$ مؤلفهٔ $\vec{F}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ است. از شکل ۱۱-۱۰ پ می‌بینیم که می‌توان معادلهٔ ۱۱-۱۵ را به صورت زیر نیز نوشت

$$\tau = r_\perp F \qquad (۱۱-۱۷)$$

که در آن $r_\perp (= r\sin\phi)$ بازوی گشتاور نیروی $F$ (فاصلهٔ عمودی بین $O$ و خط اثر نیروی $F$) است.

✔ **نکتهٔ وارسی ۳** بردار مکان $\vec{r}$ یک ذره در جهت مثبت محور $z$ قرار دارد. اگر گشتاور نیروی وارد بر ذره برابر (الف) صفر، (ب) در جهت منفی $x$ و (پ) در جهت منفی $y$ باشد، این نیرو در کدام جهت ایجاد گشتاور نیرو می‌کند؟




**شکل ۱۱-۱۰** تعریف گشتاور نیرو. (الف) نیروی $F$ که در صفحهٔ $xy$ قرار دارد بر ذره‌ای در نقطهٔ $A$ وارد می‌شود. (ب) این نیرو گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ ($=\vec{r}\times\vec{F}$) را روی ذره نسبت به مبداء $O$ ایجاد می‌کند. با استفاده از قاعدهٔ دست راست برای ضرب برداری، بردار گشتاور نیرو در جهت مثبت $z$ است. بزرگی آن از رابطهٔ $rF_{\perp}$ در (ب) و از $rF_{\perp}$ در (پ) به دست می‌آید.

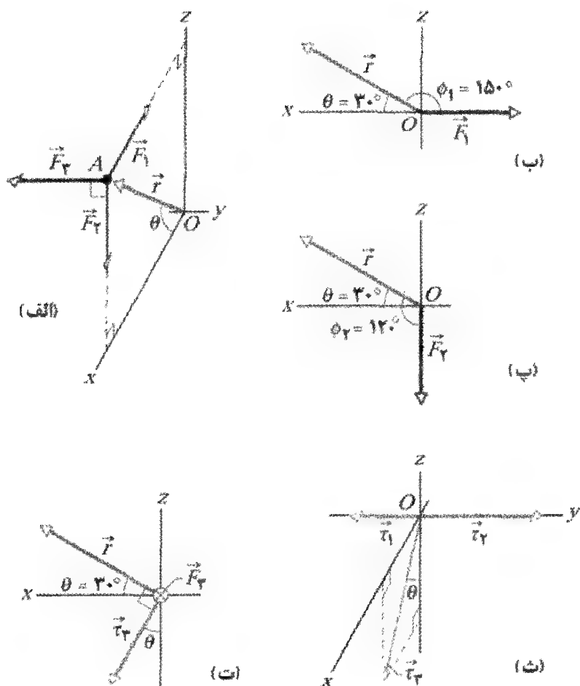
## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱-۳

در شکل ۱۱-۱۱ الف سه نیرو هر یک به بزرگی ۲/۰N بر ذره‌ای وارد شده‌اند. ذره را در صفحهٔ $xz$ و در نقطهٔ $A$ با بردار مکان $\vec{r}$ نشان داده‌ایم، که در آن $r=۳/۰\,\mathrm{m}$ و $\theta=۳۰°$. نیروی $\vec{F}_1$ موازی محور $x$، نیروی $\vec{F}_2$ موازی محور $z$ و نیروی $\vec{F}_3$ موازی محور $y$ است. گشتاور نیروی مربوط به هر نیرو نسبت به مبداء $O$ چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** چون این سه نیرو در یک صفحه قرار ندارند نمی‌توان گشتاورهای آنها را همانند فصل ۱۰ محاسبه کرد. در اینجا باید از ضرب خارجی (برداری) با بزرگیهای داده شده از معادلهٔ ۱۱-۱۵ ($\tau=rF\sin\phi$) و جهتهای داده شده از قاعدهٔ دست راست برای ضرب خارجی استفاده کرد.

***محاسبه‌ها:*** چون گشتاور نیروها را نسبت به مبداء $O$ می‌خواهیم، بردار $\vec{r}$ لازم برای ضرب خارجی برابر بردار مکان داده شده است. برای تعیین زاویهٔ $\phi$ میان جهت $\vec{r}$ و جهت هر نیرو، هر یک از بردارهای نیروی شکل ۱۱-۱۱ الف را به ترتیب طوری انتقال می‌دهیم که انتهای آنها (دُم آنها) در مبدأ قرار گیرند. شکلهای ۱۱-۱۱ ب، پ، ت که نماهایی از صفحهٔ $xz$ هستند این بردارهای نیروی انتقال یافتهٔ $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ را به ترتیب نشان می‌دهند. (توجه کنید که زاویه‌ها چقدر ساده‌تر دیده می‌شوند.)

در شکل ۱۱-۱۱ ت زاویهٔ میان جهتهای $\vec{r}$ و $\vec{F}_3$ برابر ۹۰° است و نماد ⊗ نشان می‌دهد که $\vec{F}_3$ در جهت داخل صفحه است. اگر نیرو در جهت خارج از صفحه قرار گیرد آن را با نماد ⊙ نشان می‌دهند.




**شکل ۱۱-۱۱** (الف) ذره‌ای در نقطهٔ $A$ که بر آن سه نیروی موازی با محورهای مختصات وارد شده‌اند. زاویهٔ $\phi$ (که برای به دست آوردن گشتاور نیرو مفید است) (ب) برای $\vec{F}_1$ و (پ) برای $\vec{F}_2$ نشان داده شده است. (ت) گشتاور نیروی $\vec{\tau}_3$ بر $\vec{r}$ و $\vec{F}_3$ هر دو عمود است (نیروی $\vec{F}_3$ به سمت داخل صفحهٔ شکل است). (ث) گشتاورهای نیرو (نسبت به مبداء $O$) که بر ذره وارد می‌شوند.

اکنون با استفاده از معادلهٔ ۱۱-۱۵ برای هر نیرو، بزرگی گشتاور نیروها را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\tau_1 = rF_1\sin\phi_1 = (۳/۰\,\mathrm{m})(۲/۰\,\mathrm{m})(\sin ۱۵۰°) = ۳/۰\,\mathrm{N\cdot m}$$

$$\tau_2 = rF_2\sin\phi_2 = (۳/۰\,\mathrm{m})(۲/۰\,\mathrm{m})(\sin ۱۲۰°) = ۵/۲\,\mathrm{N\cdot m}$$

و

$$\tau_۳ = rF_۳ \sin\phi_۳ = (۳/۰\,\mathrm{m})(۲/۰\,\mathrm{N})(\sin ۹۰°) = ۶/۰\,\mathrm{N\cdot m}$$

(پاسخ)

برای به‌دست آوردن جهت این گشتاور نیروها از قاعدهٔ دست راست استفاده می‌کنیم، با قرار دادن انگشتان دست راست به طوری که آنها از $\vec{r}$ به طرف $\vec{F}$ در جهت زاویهٔ کوچکتر میان دو راستای آنها بپیچند. در این صورت انگشت شست در جهت گشتاور خواهد بود. بنابراین، $\vec{\tau}_۱$ به سمت داخل صفحه در شکل ۱۱-۱۱ ب؛ $\vec{\tau}_۲$ به سمت خارج از صفحه در شکل ۱۱-۱۱ پ و $\vec{\tau}_۳$ در جهتی است که در شکل ۱۱-۱۱ ت نشان داده‌ایم. هر سه بردار گشتاور نیرو در شکل ۱۱-۱۱ ث نشان داده شده‌اند.

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱: ضرب برداری و گشتاور نیروها*

معادلهٔ ۱۱-۱۵ برای گشتاور نیروها کاربرد اولیهٔ ضرب برداری (یا خارجی) را نشان می‌دهد. در بخش ۳-۸ که در آن قاعده‌های ضرب برداری ارائه شده است، بسیاری از خطاهای معمول در به دست آوردن جهت حاصلضرب برداری آورده شده است.

به خاطر داشته باشید که گشتاور نیرو را *نسبت به (یا حول)* یک نقطه محاسبه می‌کنند که در صورتی که مقدار گشتاور نیرو مورد نظر باشد باید محل آن معلوم باشد. تغییر نقطه می‌تواند هم باعث تغییر بزرگی و هم جهت گشتاور نیرو شود. برای مثال در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱-۳ گشتاور نیروهای ناشی از سه نیرو حول مبداء $O$ محاسبه شده‌اند. می‌توان نشان داد که این گشتاور نیروهای ناشی از سه نیروی یکسان اگر آنها را حول نقطهٔ $A$ (در مکان ذره) محاسبه کنیم همگی برابر صفرند زیرا در این حالت برای هر نیرو $r = ۰$ است.

## ۱۱-۷ اندازه حرکت زاویه‌ای

به خاطر داشته باشید که مفهوم اندازه حرکت خطی $\vec{p}$ و اصل پایستگی اندازه حرکت خطی ابزارهای فوق العاده توانمندی هستند. آنها باعث می‌شوند تا نتیجهٔ مثلاً برخورد دو اتومبیل را بدون دانستن جزئیات برخورد پیش‌بینی کنیم. در اینجا ما بحث مشابهی مربوط به همتای زاویه‌ای $\vec{p}$ را آغاز می‌کنیم و در بخش ۱۱-۱۱ به بحث مربوط به همتای زاویه‌ای اصل پایستگی می‌پردازیم.

شکل ۱۱-۱۲ ذره‌ای به جرم $m$ را با اندازه حرکت خطی $\vec{p}(=m\vec{v})$ نشان می‌دهد که در صفحهٔ $xy$ از نقطهٔ $A$ می‌گذرد. **اندازه حرکت زاویه‌ای** $\vec{\ell}$ مربوط به این ذره نسبت به مبداء $O$



(الف)



(ب)

**شکل ۱۱-۱۲** تعریف اندازه حرکت زاویه‌ای. ذره‌ای که از نقطهٔ $A$ می‌گذرد دارای اندازه حرکت $\vec{p}(=m\vec{v})$ است و بردار $p$ در صفحهٔ $xy$ قرار دارد. ذره دارای اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{l}\,(=\vec{r}\times\vec{p})$ نسبت به مبداء $O$ است. از قاعدهٔ دست راست اندازه حرکت زاویه‌ای در جهت مثبت $z$ است. (الف) بزرگی $\vec{l}$ از رابطهٔ $l = rp_\perp = rm\,v_\perp$ به دست می‌آید. (ب) بزرگی $\vec{l}$ را همچنین می‌توان از رابطهٔ $l = rp_\perp = rm\,v_\perp$ به دست آورد.

یک کمیت برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p} = m(\vec{r}\times\vec{v}) \quad \text{(تعریف اندازه حرکت زاویه‌ای)} \quad (۱۱\text{–}۱۸)$$

که در آن $\vec{r}$ بردار مکان ذره نسبت به $O$ است. وقتی ذره نسبت به $O$ در جهت اندازه حرکت $\vec{p}(=m\vec{v})$ حرکت کند، بردار مکان $\vec{r}$ به دور $O$ می‌چرخد. باید دقت کرد که برای به دست آوردن اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به نقطهٔ $O$ لازم نیست خود ذره حول نقطهٔ $O$ بچرخد. مقایسهٔ معادله‌های ۱۱-۱۴ و ۱۱-۱۸ نشان می‌دهد که اندازه حرکت زاویه‌ای با اندازه حرکت خطی همان رابطه‌ای را دارد که هر گشتاور نیرو با نیرو دارد. یکای SI اندازه حرکت زاویه‌ای کیلوگرم متر مربع بر ثانیه $(\mathrm{kg\cdot m^2/s})$ یعنی معادل با ژول- ثانیه $(\mathrm{J\cdot s})$ است.

برای پیدا کردن جهت بردار اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{\ell}$ در شکل ۱۱-۱۲، بردار $\vec{p}$ را به مبداء مختصات منتقل می‌کنیم به طوری که انتهای آن در مبدأ قرار گیرد. سپس با استفاده از قاعدهٔ دست راست برای ضرب بردارها با چرخاندن انگشتان از $\vec{r}$ به $\vec{p}$، شست باز شدهٔ دست راست نشان دهندهٔ جهت $\vec{\ell}$ است که در شکل ۱۱-۱۲ در جهت مثبت محور $z$ است. این جهت مثبت با چرخش پادساعتگرد بردار مکان $\vec{r}$ حول محور $z$ وقتی

ذره حرکت می‌کند سازگار است. (جهت منفی $\vec{\ell}$ معادل است با چرخش ساعتگرد $\vec{r}$ حول محور $z$).

برای به دست آوردن بزرگی $\vec{\ell}$ از نتیجهٔ کلی معادلهٔ ۳-۲۷ به صورت زیر استفاده می‌کنیم، داریم

$$\ell = rmv\sin\phi \qquad (۱۱-۱۹)$$

که در آن $\phi$ زاویهٔ کوچکتر بین $\vec{r}$ و $\vec{p}$ است وقتی هر دو بردار از یک نقطه رسم شوند. از شکل ۱۱-۱۲ الف می‌بینیم که معادلهٔ ۱۱-۱۹ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\ell = r\,p_{\perp} = r\,m\,v_{\perp} \qquad (۱۱-۲۰)$$

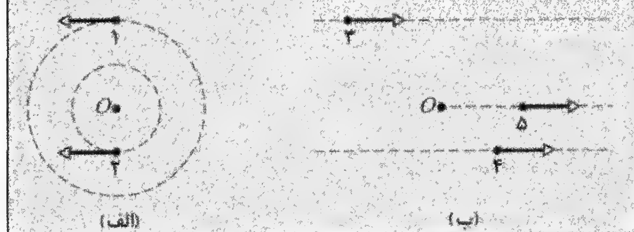
که در آن $p_{\perp}$ مؤلفهٔ $\vec{p}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ و $v_{\perp}$ مؤلفهٔ $\vec{v}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ است. از شکل ۱۱-۱۲ ب می‌بینیم که معادلهٔ ۱۱-۱۹ را همچنین می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv \qquad (۱۱-۲۱)$$

که در آن $r_{\perp}$ فاصلهٔ عمودی میان $O$ و امتداد $\vec{p}$ است.

اندازه حرکت زاویه‌ای نیز مانند گشتاور نیرو فقط نسبت به یک مبداء مشخص معنی دارد. به علاوه، اگر ذرهٔ شکل ۱۱-۱۲ در صفحهٔ $xy$ واقع نباشد، یا اندازه حرکت خطی $\vec{p}$ ذره نیز در آن صفحه نباشد، اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{\ell}$ با محور $z$ موازی نخواهد بود. بردار اندازه حرکت زاویه‌ای همیشه بر صفحهٔ تشکیل شده از بردارهای مکان و اندازه حرکت خطی $\vec{r}$ و $\vec{p}$ عمود است.

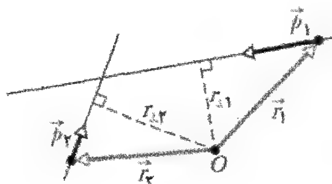
**✔ *نکتهٔ وارسی ۴*** در قسمت الف شکل، ذره‌های ۱ و ۲ به دور نقطهٔ $O$ و در جهتهای مخالف هم و روی دایره‌هایی به شعاعهای ۲m و ۴m حرکت می‌کنند. در قسمت ب ذره‌های ۳ و ۴ نیز در یک جهت روی خط راست و در فاصله‌های عمودی ۴m و ۲m از مبدأ حرکت می‌کنند ذرهٔ ۵ به طور مستقیم از $O$ دور می‌شود. هر پنج ذره دارای جرم و تندیهای ثابت یکسانی هستند. (الف) این ذره‌ها را برحسب بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای آنها نسبت به نقطهٔ $O$ به ترتیب از بزرگ به کوچک مرتب کنید. (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای کدام ذره نسبت به نقطهٔ $O$ منفی است؟




## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱-۴

شکل ۱۱-۱۳ نما از بالای دو ذره را نشان می‌دهد که با اندازه حرکت خطی ثابتی در طول مسیرهای افقی حرکت می‌کنند. ذرهٔ ۱ با اندازه حرکتی به بزرگی $p_1 = ۵/۰\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$ دارای بردار مکان $\vec{r}_1$ است و از فاصلهٔ $۲/۰\,\text{m}$ از نقطهٔ $O$ می‌گذرد. ذرهٔ ۲ با بزرگی اندازه حرکت $p_2 = ۲/۰\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$ دارای بردار مکان $\vec{r}_2$ و فاصلهٔ $۴/۰\,\text{m}$ از نقطهٔ $O$ است. بزرگی و جهت اندازه حرکت زاویه‌ای خالص $\vec{L}$ این دستگاه دو ذره‌ای نسبت به نقطهٔ $O$ چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** برای به‌دست آوردن $\vec{L}$ می‌توان ابتدا اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{\ell}_1$ و $\vec{\ell}_2$ را به طور جداگانه حساب و سپس آنها را با هم جمع کرد. برای محاسبهٔ بزرگی آنها می‌توان از هر یک از معادله‌های ۱۱-۱۸ تا ۱۱-۲۱ استفاده کرد. ولی معادلهٔ




**شکل ۱۱-۱۳** دو ذره که از نزدیکی نقطهٔ $O$ می‌گذرند.

۱۱-۲۱ ساده‌تر است زیرا فاصله‌های عمودی $r_{\perp 1}(=۲/۰\,\text{m})$ و $r_{\perp 2}(=۴/۰\,\text{m})$ و بزرگی اندازه حرکتهای $p_1$ و $p_2$ معلوم‌اند، در حالی که مقدارهای لازم مربوط به معادله‌های دیگر داده نشده‌اند.

***محاسبه‌ها:*** برای ذرهٔ ۱ از معادلهٔ ۱۱-۲۱، داریم

$$\ell_1 = r_{\perp 1}p_1 = (۲/۰\,\text{m})(۵/۰\,\text{kg}\cdot\text{m/s}) = ۱۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲/\text{s}$$

برای به دست آوردن جهت بردار $\vec{\ell}_1$ از معادلهٔ ۱۱-۱۸ و قاعدهٔ دست راست برای ضرب خارجی $\vec{r}_1\times\vec{p}_1$ استفاده می‌کنیم. برای بردار حاصلضرب به سمت خارج از صفحه و عمود بر صفحهٔ شکل ۱۱-۱۳ است. این جهت مثبت است و با چرخش پادساعتگرد بردار مکان ذره $\vec{r}_1$ حول نقطهٔ $O$ وقتی ذرهٔ ۱ حرکت می‌کند، سازگار است. بنابراین، بردار اندازه حرکت زاویه‌ای برای ذرهٔ ۱ برابر است با

$$\ell_1 = +۱۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲/\text{s}$$

به همین ترتیب بزرگی $\vec{\ell}_2$ برابر است با

$$\ell_2 = r_{\perp 2}p_2 = (۴/۰\,\text{m})(۲/۰\,\text{kg}\cdot\text{m/s}) = ۸/۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲/\text{s}$$

جهت حاصلضرب برداری $\vec{r}_2\times\vec{p}_2$ به طرف داخل صفحه یعنی منفی است و با چرخش ساعتگرد $\vec{r}_2$ حول نقطهٔ $O$ وقتی ذرهٔ ۲ حرکت می‌کند سازگار است. بنابراین، اندازه حرکت زاویه‌ای ذرهٔ ۲ برابر است با

$$\ell_2 = -۸/۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲/\text{s}$$

پس، اندازه حرکت زاویه‌ای برایند دستگاه دو ذره‌ای برابر است با

$$L = \ell_1 + \ell_2 = +۱۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲/\text{s} + (-۸/۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲/\text{s}) = +۲/۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲/\text{s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

علامت مثبت به معنای آن است که اندازه حرکت زاویه‌ای خالص دستگاه نسبت به نقطهٔ $O$ به سمت خارج از صفحه است.

## ۱۱-۸ شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون

قانون دوم نیوتون به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(برای تک ذره)} \qquad (۱۱-۲۲)$$

که بیانگر رابطهٔ نزدیک میان نیرو و اندازه حرکت خطی برای یک تک ذره است. رابطهٔ هم ارز میان کمیتهای خطی و زاویه‌ای را به قدر کافی دیده‌ایم. به طوری که کاملاً مطمئن هستیم که رابطهٔ نزدیکی میان گشتاور نیرو و اندازه حرکت زاویه‌ای وجود دارد. با توجه به معادلهٔ ۱۱-۲۲ می‌توان حدس زد که رابطهٔ آنها باید به صورت زیر باشد

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad \text{(برای تک ذره)} \qquad (۱۱-۲۳)$$

معادلهٔ ۱۱-۲۳ در واقع شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون برای یک تک ذره است

> جمع برداری همهٔ گشتاور نیروهای وارد بر یک ذره برابر آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای ذره است.

معادلهٔ ۱۱-۲۳ فقط به شرطی معنی دارد که گشتاور نیروهای $\vec{\tau}$ و اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{\ell}$ نسبت به مبداء یکسانی تعریف شوند.

### *اثبات معادلهٔ ۱۱-۲۳*

از معادلهٔ ۱۱-۱۸ شروع و اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

که در آن $\vec{r}$ بردار مکان و $\vec{v}$ سرعت ذره است. با مشتق‌گیری[۱] از دو طرف معادله نسبت به زمان داریم

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) \qquad (۱۱-۲۴)$$

ولی $\frac{d\vec{v}}{dt}$ برابر شتاب $\vec{a}$ ذره و $\frac{d\vec{r}}{dt}$ برابر سرعت $\vec{v}$ آن است. بنابراین، می‌توان معادلهٔ ۱۱-۲۴ را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v})$$

۱- در مشتق‌گیری از ضرب برداری مطمئن شوید که مرتبهٔ دو کمیت (در اینجا $\vec{r}$ و $\vec{v}$) که حاصلضرب را تشکیل می‌دهند تغییر نکند. (معادلهٔ ۳-۲۸ را ببینید.)

می‌دانیم $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ است (حاصلضرب هر بردار در خودش برابر صفر است زیرا زاویهٔ میان دو بردار در این حالت لزوماً برابر صفر است). بنابراین، داریم

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}$$

اکنون از قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a})$ مقدار معادل $m\vec{a}$ را که برابر جمع برداری نیروهایی است که بر ذره وارد می‌شوند قرار می‌دهیم و خواهیم داشت

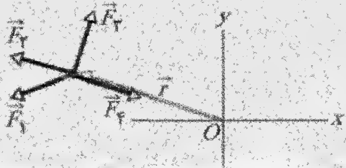
$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{net}} = \sum(\vec{r} \times \vec{F}) \qquad (۱۱-۲۵)$$

در اینجا نماد $\Sigma$ نشان دهندهٔ این است که جمع باید روی $\vec{r} \times \vec{F}$ و برای همهٔ نیروها صورت گیرد. بنابراین، از معادلهٔ ۱۱-۱۴ می‌دانیم که هر یک از این ضربهای برداری گشتاور نیروهایی متناظر با هر نیرو را نشان می‌دهد. در نتیجهٔ معادلهٔ ۱۱-۲۵ بیان می‌کند که

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

این همان معادلهٔ ۱۱-۲۳ است که در اینجا آن را اثبات کردیم.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۵*** شکل نشان دهندهٔ بردار مکان $\vec{r}$ یک ذره در لحظهٔ معینی است و چهار گزینه برای جهت نیرویی که به ذره شتاب می‌دهد وجود دارد. هر چهار گزینه در صفحهٔ $xy$ قرار دارند. (الف) گزینه‌ها را برحسب بزرگی آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای $(d\vec{\ell}/dt)$ ایجاد شده نسبت به نقطهٔ $O$ از بزرگ به کوچک به ترتیب بنویسید. (ب) آهنگ تغییر کدام حالت نسبت به نقطهٔ $O$ منفی است؟



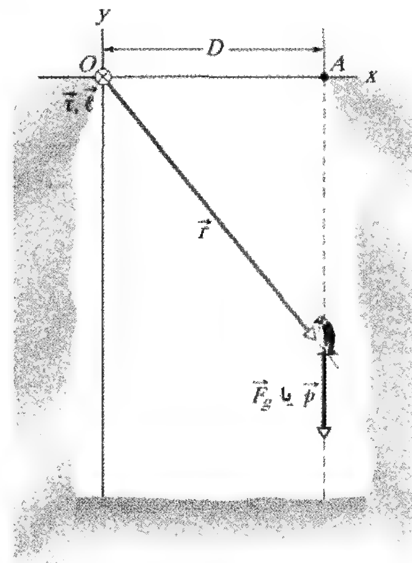

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱-۵ مهارت خود را تقویت کنید**

در شکل ۱۱-۱۴ پنگوئنی به جرم $m$ از حال سکون از نقطهٔ $A$ سقوط می‌کند که فاصلهٔ افقی آن از مبداء $O$ در دستگاه مختصات $xyz$ برابر $D$ است. (جهت مثبت محور $z$ به سمت خارج از صفحهٔ شکل است.)

(الف) اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{\ell}$ پنگوئن در حال سقوط نسبت به نقطهٔ $O$ چقدر است؟

**نکته کلیدی** می‌توان پنگوئن را به صورت یک ذره در نظر گرفت و در نتیجه اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{\ell}$ آن را از معادلهٔ ۱۱-۱۸ $(\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p})$ به دست آورد، که $\vec{r}$ بردار مکان پنگوئن (امتداد نقطهٔ $O$ تا پنگوئن) و $\vec{p}$ اندازه حرکت خطی پنگوئن است. (حتی اگر پنگوئن در خط مستقیم حرکت کند، دارای

اندازه حرکت *زاویه‌ای* نسبت به نقطهٔ $O$ است، زیرا بردار $\vec{r}$ وقتی پنگوئن سقوط می‌کند حول نقطهٔ $O$ می‌چرخد).




**شکل ۱۱-۱۴** پنگوئنی که به طور قائم از نقطهٔ $A$ سقوط می‌کند. گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ و اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{\ell}$ پنگوئن در حال سقوط نسبت به مبداء $O$، به سمت داخل صفحهٔ شکل و در نقطهٔ $O$ است.

***محاسبه‌ها:*** برای به دست آوردن بزرگی $\vec{\ell}$ می‌توان از هر یک از معادله‌های نرده‌ای به دست آمده از معادلهٔ ۱۱-۱۸، مثلاً معادله‌های ۱۱-۱۹ تا ۱۱-۲۱ استفاده کرد. اما، معادلهٔ ۱۱-۲۱ $(\ell = r_\perp mv)$ ساده‌تر است، زیرا فاصلهٔ عمودی $r_\perp$ میان $O$ و امتداد بردار $\vec{p}$ با فاصلهٔ $D$ داده شده است. تندی جسمی که از حال سکون به مدت $t$ سقوط می‌کند برابر $v = gt$ است. اکنون می‌توان معادلهٔ ۱۱-۲۱ را برحسب کمیتهای داده شده به صورت زیر نوشت

$$\ell = r_\perp mv = Dmgt \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای تعیین جهت $\vec{\ell}$ از قاعدهٔ دست راست برای ضرب برداری $\vec{r} \times \vec{p}$ در معادلهٔ ۱۱-۱۸ استفاده می‌کنیم. بردار $\vec{p}$ را به طور ذهنی طوری جابه‌جا می‌کنیم تا انتهای آن در مبدأ قرار گیرد و سپس از انگشتان دست راست برای چرخاندن $\vec{r}$ به طرف $\vec{p}$ از طریق زاویهٔ کوچکتر میان این دو بردار استفاده می‌کنیم. در نتیجه شست باز شدهٔ دست راست به سمت داخل صفحهٔ شکل قرار می‌گیرد و نشان می‌دهد که حاصلضرب $\vec{r} \times \vec{p}$ و در نتیجه $\vec{\ell}$ به طرف داخل صفحه و در جهت منفی محور $z$ است، بنابراین، $\vec{\ell}$ را با یک دایره و ضربدر ⊗ در نقطهٔ $O$ نشان می‌دهیم. بردار $\vec{\ell}$ فقط از نظر بزرگی با زمان تغییر می‌کند ولی جهت آن بدون تغییر می‌ماند.

(ب) گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ پنگوئن نسبت به مبداء $O$ ناشی از نیروی گرانش $\vec{F}_g$ چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) گشتاور نیرو با معادلهٔ ۱۱-۱۴ داده می‌شود $(\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F})$ که در اینجا نیرو همان $\vec{F}_g$ است. (۲) حتی اگر پنگوئن به خط مستقیم هم حرکت کند، $\vec{F}_g$ باعث ایجاد گشتاور نیرویی روی پنگوئن می‌شود، زیرا $\vec{r}$ حول $O$ با حرکت پنگوئن می‌چرخد.

***محاسبه‌ها:*** برای به دست آوردن بزرگی $\vec{\tau}$، می‌توان هر یک از معادله‌های نرده‌ای به دست آمده از معادلهٔ ۱۱-۱۴ را مانند معادله‌های ۱۱-۱۵ تا ۱۱-۱۷ به کار برد. ولی معادلهٔ ۱۱-۱۷ $(\tau = r_\perp F)$ ساده‌تر است، زیرا فاصلهٔ عمودی $r_\perp$ میان $O$ و خط اثر $\vec{F}_g$ با فاصلهٔ $D$ داده شده است. بنابراین، با قرار دادن $D$ و استفاده از $mg$ برای بزرگی $\vec{F}_g$ می‌توان معادلهٔ ۱۱-۱۷ را به صورت زیر نوشت

$$\tau = DF_g = Dmg \qquad \text{(پاسخ)}$$

با استفاده از قاعدهٔ دست راست برای حاصلضرب خارجی $\vec{r} \times \vec{F}$ در معادلهٔ ۱۱-۱۴ درمی‌یابیم که $\vec{\tau}$ در جهت منفی محور $z$ و هم جهت با $\vec{\ell}$ است.

نتیجه‌هایی که در بخشهای (الف) و (ب) به دست آوردیم باید با قانون دوم نیوتون به شکل زاویه‌ای معادلهٔ ۱۱-۲۳ $(\vec{\tau}_{\text{net}} = d\vec{\ell}/dt)$ سازگار باشند. برای بررسی این مقدار به دست آمده معادلهٔ ۱۱-۲۳ را برحسب مؤلفه‌های مربوط به محور $z$ می‌نویسیم و سپس رابطهٔ $\ell = Dmgt$ را در آن قرار می‌دهیم. در نتیجه، خواهیم داشت

$$\tau = \frac{d\ell}{dt} = \frac{d(Dmgt)}{dt} = Dmg$$

که همان بزرگی بردار $\vec{\tau}$ است. برای بررسی جهتها توجه کنید که بنابر معادلهٔ ۱۱-۲۳، $\vec{\tau}$ و $d\vec{\ell}/dt$ باید جهتهای یکسانی داشته باشند. بنابراین، $\vec{\tau}$ و $\vec{\ell}$ نیز باید هم جهت باشند، و این همان چیزی است که به دست آوردیم.

## ۱۱-۹ اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاهی از ذره‌ها

حال به بررسی اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاهی از ذره‌ها نسبت به یک مبدأ می‌پردازیم. اندازه حرکت زاویه‌ای کل $\vec{L}$ این دستگاه برابر جمع (برداری) اندازه حرکتهای زاویه‌ای ذره‌های منفرد است (که در اینجا با زیرنویس $i$ مشخص شده‌اند).

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i \qquad (۱۱\text{-}۲۶)$$

اندازه حرکت زاویه‌ای هر یک از ذره‌ها ممکن است بر اثر برهمکنشهای داخل دستگاه (بین ذره‌های منفرد) یا به دلیل تأثیراتی که از خارج می‌توانند بر دستگاه اثر بگذارند با زمان تغییر کند. می‌توان تغییر نتیجه شده در $\vec{L}$ را با مشتق گیری زمانی از معادلهٔ ۱۱-۲۶ به دست آورد، بنابراین، داریم

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{\ell}_i}{dt} \qquad (۲۷-۱۱)$$

از معادلهٔ ۱۱-۲۳ می‌بینیم که $d\vec{\ell}_i/dt$ برابر گشتاور نیروی خالص $\vec{\tau}_{net,i}$ وارد بر ذرهٔ $i$ام است. می‌توان معادلهٔ ۱۱-۲۷ را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{\tau}_{net,i} \qquad (۲۸-۱۱)$$

یعنی آهنگ تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه $\vec{L}$ برابر جمع برداری گشتاور نیروهای وارد بر هر ذره جداگانه است. این گشتاور نیروها شامل *گشتاور نیروهای داخلی* (ناشی از نیروهای بین ذره‌ها) و *گشتاور نیروهای خارجی* (ناشی از نیروهای وارد بر ذره‌ها از طرف جسمهای خارج از دستگاه) است. ولی، نیروهای بین ذره‌ها همیشه به صورت جفت نیروهای مربوط به قانون سوم هستند، به طوری که مجموع گشتاور نیروهای آنها برابر صفر است. بنابراین، تنها گشتاور نیروهایی که می‌توانند اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ یک دستگاه را تغییر دهند گشتاور نیروهای خارجی وارد بر دستگاه هستند.

فرض کنید $\vec{\tau}_{net}$ نشان دهندهٔ گشتاور نیروی خارجی خالص یعنی جمع برداری همهٔ گشتاور نیروهای وارده به همهٔ ذره‌ها در دستگاه باشد. بنابراین، معادلهٔ ۱۱-۲۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{\tau}_{net}=\frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(دستگاه ذره‌ها)} \qquad (۲۹-۱۱)$$

که همان قانون دوم نیوتون به شکل زاویه‌ای است و نشان می‌دهد که

گشتاور نیروی خارجی خالص $\vec{\tau}_{net}$ وارد بر دستگاهی از ذره‌ها برابر آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای کل $\vec{L}$ است.

معادلهٔ ۱۱-۲۹ مشابه معادلهٔ $\vec{F}_{net}=\frac{d\vec{P}}{dt}$ (معادلهٔ ۹-۲۳) است ولی باید به آن توجه خاص داشت: گشتاور نیروها و اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه باید نسبت به مبداء یکسانی اندازه‌گیری شوند. اگر مرکز جرم دستگاه نسبت به یک چارچوب لخت بدون شتاب باشد، مبدأ می‌تواند هر نقطه‌ای باشد. اما اگر مرکز جرم دستگاه *شتاب داشته باشد*، مبدأ تنها می‌تواند در مرکز جرم باشد. برای مثال، یک چرخ را به عنوان دستگاهی از ذره‌ها در نظر بگیرید. اگر این چرخ به دور محوری که نسبت به زمین ثابت است بچرخد، برای به کار بردن معادلهٔ ۱۱-۲۹ مبدأ می‌تواند هر نقطه‌ای که نسبت به زمین ساکن است باشد. اما اگر چرخ حول محور شتابدار بچرخد، (مانند وقتی که چرخ به طرف پایین سطح شیبدار می‌غلتد) مبدأ فقط می‌تواند مرکز جرم چرخ باشد.

## ۱۱-۱۰ اندازه حرکت زاویه‌ای جسم صلبی که حول محور ثابتی می‌چرخد

حال می‌خواهیم اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاهی از ذره‌ها را که جسم صلبی را تشکیل می‌دهند که به دور محوری ثابت می‌چرخد محاسبه کنیم. شکل ۱۱-۱۵ الف چنین جسمی را نشان می‌دهد. محور ثابت چرخش محور $z$ است و جسم با تندی زاویه‌ای $\omega$ به دور آن می‌چرخد. می‌خواهیم اندازه حرکت زاویه‌ای جسم را نسبت به این محور به دست آوریم.

می‌توان اندازه حرکت زاویه‌ای را با جمع مؤلفه‌های z اندازه حرکتهای زاویه‌ای عنصرهای جرم در یک جسم به دست آورد. در شکل ۱۱-۱۵ الف یک عنصر جرم نوعی به جرم $\Delta m_i$ به دور محور $z$ در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. مکان عنصر جرم نسبت به مبداء $O$ با بردار مکان $\vec{r}_i$ مشخص شده است. شعاع مسیر دایره‌ای عنصر جرم برابر $r_{\perp i}$ است، که فاصلهٔ عمودی میان این عنصر و محور $z$ است.

بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{\ell}_i$ این عنصر جرم نسبت به $O$ با معادلهٔ ۱۱-۱۹ داده می‌شود

$$\ell_i=(r_i)(p_i)(\sin 90^\circ)=(r_i)(\Delta m_i v_i)$$

که در آن $p_i$ و $v_i$ اندازه حرکت خطی و تندی خطی عنصر جرم هستند و زاویهٔ $90^\circ$ زاویهٔ میان $\vec{r}_i$ و $\vec{p}_i$ است. بردار اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{\ell}_i$ برای عنصر جرم در شکل ۱۱-۱۵ الف را در شکل ۱۱-۱۵ ب نشان داده‌ایم، این بردار باید بر بردارهای $\vec{r}_i$ و $\vec{p}_i$ عمود باشد.

حال می‌خواهیم مؤلفهٔ $\vec{\ell}_i$ موازی با محور چرخش را که در اینجا همان محور $z$ است پیدا کنیم. مؤلفهٔ $z$ برابر است با

$$\ell_{iz}=\ell_i\sin\theta=(r_i\sin\theta)(\Delta m_i v_i)=r_{\perp i}\Delta m_i v_i$$

مؤلفهٔ z اندازه حرکت زاویه‌ای کل جسم صلب در حال چرخش با جمع اندازه حرکتهای زاویه‌ای عنصرهای جسم به دست می‌آید. بنابراین، چون $v=\omega r_\perp$ ، می‌توان نوشت

$$L_z=\sum_{i=1}^{n}\ell_{iz}=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i v_i r_{\perp i}=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i(\omega r_{\perp i})r_{\perp i}$$

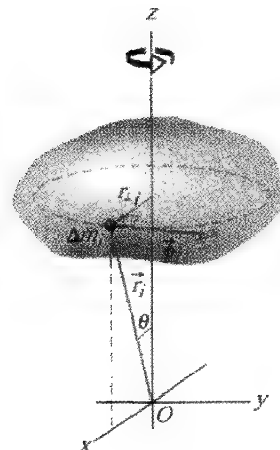
$$=\omega\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_{\perp i}^2\right) \qquad (۳۰-۱۱)$$

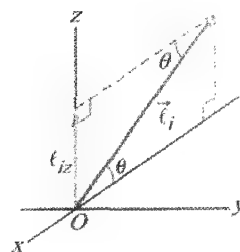
می‌توان $\omega$ را از جمع خارج کرد زیرا $\omega$ برای تمام نقطه‌های جسم صلب در حال چرخش یکسان است.

کمیت $\sum \Delta m_i r_{\perp i}^2$ در معادلهٔ ۱۱-۳۰ به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$L=I\omega \quad \text{(برای جسم صلب و محور ثابت)} \qquad (۳۱-۱۱)$$

در اینجا از زیرنویس پایین $z$ صرفنظر کرده‌ایم، اما باید به خاطر داشته باشید که اندازه حرکت زاویه‌ای تعریف شده با معادلهٔ




**شکل ۱۱-۱۵** (الف) جسم صلبی با تندی زاویه‌ای $\omega$ حول محور $z$ می‌چرخد. یک عنصر جرم با جرم $\Delta m_i$ درون جسم حول محور $z$ در دایره‌ای به شعاع $r_{\perp}$ حرکت می‌کند. این عنصر جرم دارای اندازه حرکت خطی $\vec p_i$ است و نسبت به مبداء $O$ با بردار مکان $\vec r_i$ مشخص می‌شود. در اینجا عنصر جرم را در زمانی که $r_{i\perp}$ موازی محور $x$ است نشان داده‌ایم. (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec l_i$ مربوط به عنصر جرم نسبت به $O$ در قسمت (الف). مؤلفهٔ $\vec l_{iz}$ مربوط به محور $z$ را نیز نشان داده‌ایم.

۱۱-۳۱ برابر اندازه حرکت زاویه‌ای حول محور چرخش است. $I$ نیز در این معادله لختی چرخشی حول همان محور است. جدول ۱۱-۱ که مکمل جدول ۱۰-۳ است فهرست ما را برای رابطه‌های متناظر خطی و زاویه‌ای گسترش می‌دهد.

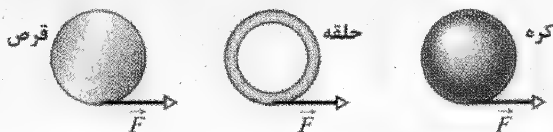
**جدول ۱۱-۱**

متغیرهای متناظر بیشتر و رابطه‌های آنها برای حرکت انتقالی و چرخشی[1]

| دورانی | | انتقالی | |
|---|---|---|---|
| گشتاور نیرو | $\vec\tau\,(=\vec r\times\vec F)$ | نیرو | $\vec F$ |
| اندازه حرکت زاویه‌ای | $\vec\ell\,(=\vec r\times\vec p)$ | اندازه حرکت خطی | $\vec p$ |
| اندازه حرکت زاویه‌ای[2] | $\vec L\,(=\sum\vec\ell_i)$ | اندازه حرکت خطی[2] | $\vec p\,(=\sum\vec p_i)$ |
| اندازه حرکت زاویه‌ای[3] | $L=I\omega$ | اندازه حرکت خطی[2] | $\vec P=M\vec v_{\text{com}}$ |
| قانون دوم نیوتون[2] | $\vec\tau_{\text{net}}=\dfrac{d\vec L}{dt}$ | قانون دوم نیوتون[2] | $\vec F_{\text{net}}=\dfrac{d\vec P}{dt}$ |
| قانون پایستگی[4] | $\vec L=$ ثابت | قانون پایستگی[4] | $\vec P=$ ثابت |

۱. جدول ۱۰-۳ را نیز ببینید.
۲. برای دستگاهی از ذره‌ها شامل جسمهای صلب
۳. برای یک جسم صلب حول محوری ثابت به طوری که $L$ مؤلفه در طول آن محور است.
۴. برای دستگاه بسته و منزوی

**✔ نکتهٔ وارسی ۶** در شکل یک قرص، یک حلقه و یک کرهٔ صلب می‌توانند حول محورهای مرکزی خود (مانند یک فرفره) به وسیله نخهایی که به دور آنها پیچیده‌ایم بچرخند، به طوری که نخها نیروهای مماسی یکسانی برابر $\vec F$ را به هر سه جسم وارد می‌کنند. این سه جسم جرم و شعاع یکسانی دارند و ابتدا در حال سکون هستند. این جسمها را برحسب (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای آنها حول محورهای مرکزی خود و (ب) تندی زاویه‌ای آنها به ترتیب از بزرگ به کوچک، وقتی که نخها برای مدت زمان معین $t$ کشیده شوند، مرتب کنید.




## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱-۶

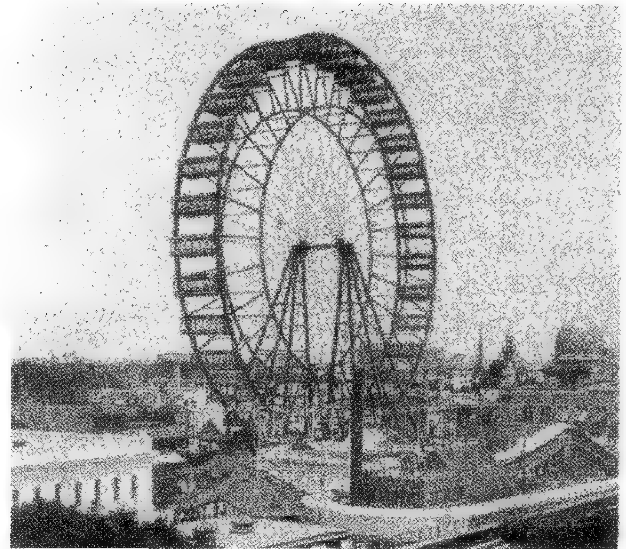
جورج واشینگتن گیل فریس فارغ التحصیل مهندسی راه و ساختمان از مؤسسهٔ پلی تکنیک رنسلر نخستین چرخ فریس (شکل ۱۱-۱۶) را برای نمایشگاه جهانی کلمبیا در شیکاگو ساخت. این چرخ که سازهٔ مهندسی شگفت آوری در آن زمان بود ۳۶ واگن چوبی را حمل می‌کرد که در هر یک تا ۶۰ مسافر سوار می‌شدند و به دور دیواره‌ای به شعاع $R=۳۸\,\text{m}$ می‌چرخیدند. جرم هر واگن حدود $۱/۱\times۱۰^{۴}\,\text{kg}$ و جرم ساختار چرخ مانند حدود $۶/۰\times۱۰^{۵}\,\text{kg}$ بود که بیشتر در شبکهٔ دایره‌ای شکل که از آن واگنها آویزان بودند قرار داشت. چرخ چرخش کامل را با تندی زاویه‌ای $\omega_F$ در حدود ۲ دقیقه انجام می‌داد.

(الف) بزرگی $L$ اندازه حرکت زاویه‌ای این چرخ و مسافرهای آن وقتی چرخ با تندی زاویه‌ای $\omega_F$ می‌چرخد چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توان واگنهای این چرخ و مسافرهای آن را به عنوان یک جسم صلب که به دور یک محور ثابت یعنی محور چرخ، می‌چرخند در نظر گرفت و سپس از معادلهٔ ۱۱-۳۱ $(L=I\omega)$ بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای این جسم را به دست آورد. اکنون نیاز داریم که $\omega_F$ و لختی چرخشی $I$ را برای این جسم پیدا کنیم.

***لختی چرخشی:*** برای به دست آوردن $I$ از واگنهای پر از مسافر آغاز می‌کنیم. از آنجا که می‌توان آنها را به صورت ذره‌هایی واقع در فاصلهٔ $R$ از محور چرخش در نظر گرفت، از معادلهٔ ۱۰-۳۳ می‌دانیم که لختی چرخشی آنها برابر $I_{pc}=M_{pc}R^{۲}$ است که $M_{pc}$ جرم کل آنهاست. فرض کنید که این ۳۶ واگن هر یک دارای ۶۰ مسافر است و هر مسافر $۷۰\,\text{kg}$ جرم دارد. پس، جرم کل آنها برابر است با

$$M_{pc}=۳۶[۱/۱\times۱۰^{۴}\,\text{kg}+۶۰\,(۷۰\,\text{kg})]=۵/۴۷\times۱۰^{۵}\,\text{kg}$$



**شکل ۱۱-۱۶** چرخ فریس اصلی.

و لختی چرخشی آنها برابر است با

$$I_{pc} = M_{pc}R^2 = (5.47\times10^5\ \text{kg})(38\ \text{m})^2 = 7.90\times10^8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

حال ساختار چرخ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که لختی چرخشی این ساختار عمدتاً مربوط به شبکهٔ دایره‌ای آن است که واگنها به آن آویخته‌اند. علاوه بر این فرض می‌کنیم که این شبکه مانند حلقه‌ای به شعاع $R$ و جرم $M_{\text{hoop}}$ برابر $3.0\times10^5$ kg (نصف جرم چرخ) است. از جدول ۱۰-۲ الف لختی چرخشی حلقه برابر است با

$$I_{\text{hoop}} = M_{\text{hoop}}R^2 = (3.0\times10^5\ \text{kg})(38\ \text{m})^2 = 4.33\times10^8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

بنابراین، لختی چرخشی ترکیب واگنها، مسافرها و حلقه برابر است با

$$I = I_{pc} + I_{\text{hoop}} = 7.90\times10^8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 4.33\times10^8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 = 1.22\times10^9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

***تندی زاویه‌ای:*** برای به دست آوردن تندی چرخشی $\omega_F$، معادلهٔ ۱۰-۵ ($\omega_{\text{avg}} = \Delta\theta/\Delta t$) را به کار می‌بریم. در اینجا چرخ در مدت زمان $\Delta t = 2\,\text{min}$ جابه‌جایی زاویه‌ای $\Delta\theta = 2\pi$ rad پیدا می‌کند. بنابراین، داریم

$$\omega_F = \frac{2\pi\ \text{rad}}{(2\ \text{min})(60\ \text{s/min})} = 0.0524\ \text{rad/s}$$

***اندازه حرکت زاویه‌ای:*** اکنون می‌توانیم بزرگی $L$ اندازه حرکت زاویه‌ای را از معادلهٔ ۱۱-۳۱ به دست آوریم

$$L = I\omega_F = (1.22\times10^9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(0.0524\ \text{rad/s}) = 6.39\times10^7\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \approx 6.4\times10^7\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$ (پاسخ)

(ب) فرض کنید چرخ که کاملاً پر است در مدت زمان $\Delta t_1 = 5.0$ s از حال سکون به تندی زاویه‌ای $\omega_F$ برسد. بزرگی $\tau_{\text{avg}}$ متوسط گشتاور نیروی خالص خارجی که در مدت $\Delta t_1$ بر چرخ وارد می‌شود چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** میانگین گشتاور نیروی خالص خارجی طبق معادلهٔ ۱۱-۲۹ ($\vec{\tau}_{\text{net}} = d\vec{L}/dt$) به تغییر $\Delta L$ در اندازه حرکت زاویه‌ای چرخ بستگی دارد.

***محاسبه‌ها:*** چون چرخ برای رسیدن به تندی زاویه‌ای $\omega_F$ در مدت زمان $\Delta t_1$ حول محور ثابتی می‌چرخد، می‌توانیم معادلهٔ ۱۱-۲۹ را به صورت $\tau_{\text{avg}} = \Delta L/\Delta t_1$ بنویسیم. تغییر $\Delta L$ از صفر تا مقدار پاسخ به دست آمده در قسمت (الف) صورت می‌گیرد. بنابراین، داریم

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{\Delta L}{\Delta t_1} = \frac{6.39\times10^7\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} - 0}{5.0\ \text{s}} \approx 1.3\times10^7\ \text{N}\cdot\text{m}$$ (پاسخ)

## ۱۱-۱۱ پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای

تاکنون دربارهٔ دو قانون پایستگی توانمند بحث کردیم، پایستگی انرژی و پایستگی اندازه حرکت خطی. حال به قانون سومی از این نوع یعنی پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای می‌پردازیم. از معادلهٔ ۱۱-۲۹ ($\vec{\tau}_{\text{net}} = d\vec{L}/dt$) که قانون دوم نیوتون در شکل زاویه‌ای آن است آغاز می‌کنیم. اگر هیچ گشتاور نیروی خارجی بر دستگاه وارد نشود، این معادله به صورت $d\vec{L}/dt = 0$ در می‌آید یا

$$\vec{L} = \text{مقداری ثابت} \quad \text{(دستگاه منزوی)} \qquad (۱۱\text{-}۳۲)$$

این نتیجه را که **قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای** نامیده می‌شود به صورت زیر می نویسیم

(اندازه حرکت زاویه‌ای خالص در زمان اولیهٔ $t_i$) = (اندازه حرکت زاویه‌ای خالص در زمان دیگر $t_f$)

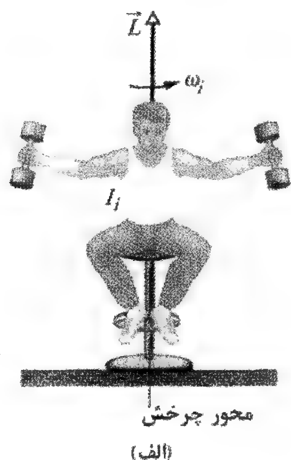
یا

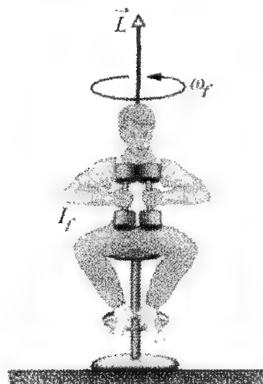
$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad \text{(دستگاه منزوی)} \qquad (۱۱\text{-}۳۳)$$

معادله‌های (۱۱-۳۲) و (۱۱-۳۳) نشان می‌دهند که

> اگر گشتاور نیروی خارجی خالص وارد بر دستگاهی برابر صفر باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ این دستگاه ثابت می‌ماند و به تغییرات داخلی دستگاه بستگی ندارد.

معادله‌های ۱۱-۳۲ و ۱۱-۳۳ معادله‌هایی برداری‌اند و به همین دلیل آنها معادل با سه معادلهٔ مؤلفه‌ای متناظر با پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای در سه جهت متقابل عمود بر هم هستند. بسته به گشتاور نیروهای وارد به یک دستگاه اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه می‌تواند فقط در یک یا دو راستا پایسته باشد ولی در همهٔ راستاها پایسته نباشد




**شکل ۱۱-۱۷** (الف) دانشجویی دارای لختی چرخشی نسبتاً بزرگ حول محور چرخش و تندی زاویه‌ای نسبتاً کوچک است. (ب) با کاهش لختی چرخشی تندی زاویه‌ای این دانشجو خود به خود افزایش می‌یابد. اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ این دستگاه چرخان بدون تغییر می‌ماند.

> اگر مؤلفه گشتاور نیروی خارجی خالص وارد بر یک دستگاه در راستای محور معینی صفر باشد، مؤلفهٔ اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه در راستای این محور نمی‌تواند تغییر کند و این به تغییرات ایجاد شده در درون دستگاه بستگی ندارد.

می‌توان این قانون را در مورد جسم منزوی شکل ۱۱-۱۵ که حول محور $z$ می‌چرخد به کار برد. فرض کنید جسمی که در ابتدا صلب است به طریقی بتواند جرمش را نسبت به محور چرخش تغییر دهد، در نتیجه لختی چرخشی آن حول این محور تغییر خواهد کرد. معادله‌های ۱۱-۳۲ و ۱۱-۳۳ بیان می‌کنند که اندازه حرکت زاویه‌ای این جسم نمی‌تواند تغییر کند. با قرار دادن معادلهٔ ۱۱-۳۱ (برای اندازه حرکت زاویه‌ای در راستای محور چرخش) در معادلهٔ ۱۱-۳۳، این قانون پایستگی را به صورت زیر می‌نویسیم

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \qquad (۱۱-۳۴)$$

در اینجا زیرنویسهایی که به مقدارهای لختی چرخشی و تندی زاویه‌ای نسبت داده‌ایم مربوط به قبل و بعد از توزیع جرم هستند.

شبیه به دو قانون پایستگی انرژی دیگر که توضیح دادیم، معادله‌های ۱۱-۳۲ و ۱۱-۳۳ فراتر از محدودیتهای مربوط به مکانیک نیوتونی نیز برقرارند. آنها برای ذره‌هایی که با تندیهای نزدیک به تندی نور حرکت می‌کنند (که در آنجا نظریهٔ نسبیت خاص حکمفرماست) نیز برقرارند و حتی برای جهان ذره‌های زیر اتمی (که فیزیک کوانتومی بر آن حکمفرماست) نیز صادق‌اند. هیچ استثنایی برای قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای تاکنون پیدا نشده است.

اکنون به توضیح چهار مثال در مورد کاربردهای این قانون می‌پردازیم.

**۱- *شخص چرخان*** شکل ۱۱-۱۷ دانشجویی را نشان می‌دهد که روی صندلی چرخانی که می‌تواند آزادانه به دور محور قائم بچرخد نشسته است. این دانشجو که در حال چرخش با تندی زاویهٔ اولیهٔ نسبتاً کم $\omega_i$ است، دو دمبل را در دستهای باز شدهٔ خود نگهداشته است. بردار اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ در راستای محور چرخش قائم به سمت بالا قرار دارد.

اکنون اگر از دانشجو بخواهیم که بازوهایش را جمع کند، این عمل لختی چرخشی او را از مقدار اولیهٔ $I_i$ به مقدار کوچکتر $I_f$ کاهش می‌دهد، زیرا اکنون جرم بیشتری در نزدیکی محور چرخش قرار دارد. در نتیجه، آهنگ چرخش او به طور قابل توجهی از $\omega_i$ به $\omega_f$ افزایش می‌یابد. سپس دانشجو می‌تواند دوباره با باز کردن بازوهایش و حرکت دادن دمبلها به طرف خارج تندی خود را کاهش دهد.

در اینجا هیچ گشتاور نیروی خارجی خالصی بر دستگاه شامل دانشجو، صندلی چرخان و دمبلها وارد نمی‌شود. بنابراین، اندازه حرکت زاویه‌ای این دستگاه حول محور چرخش باید ثابت بماند و به چگونگی در دست گرفتن دمبلها توسط دانشجو مربوط نمی‌شود. در شکل ۱۱-۱۷ الف تندی زاویه‌ای دانشجو $\omega_i$ ، نسبتاً کم و لختی چرخشی او $I_i$ ، نسبتاً زیاد است. بر اساس معادلهٔ ۱۱-۳۴ تندی زاویه‌ای او در شکل ۱۱-۱۷ ب باید بزرگتر باشد تا کاهش $I_f$ را جبران کند.

**۲- *شیرجه رونده از تخته شیرجه*** شکل ۱۱-۱۸ شیرجه رونده‌ای را نشان می‌دهد که شیرجه با یک و نیم پشتک را اجرا می‌کند. همان‌طور که انتظار می‌رود مرکز جرم او یک مسیر سهموی را طی می‌کند. شخص تخته شیرجه را با اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ حول محوری که از مرکز جرم او می‌گذرد ترک می‌کند که آن را با برداری که به سمت داخل صفحهٔ شکل ۱۱-۱۸ و عمود بر صفحه است نشان داده‌ایم. وقتی شخص در هوا قرار دارد، هیچ گشتاور نیروی خارجی خالصی نسبت به مرکز جرم به او وارد نمی‌شود، بنابراین، اندازه حرکت زاویه‌ای او نسبت




**شکل ۱۱-۱۸** اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ یک شیرجه رونده در حین شیرجه ثابت می‌ماند که آن را با نماد ⊗ از یک پیکان عمود بر صفحهٔ شکل نشان داده‌ایم. توجه کنید که مرکز جرم او (نقطه ها را ببینید) یک مسیر سهموی را طی می‌کند.

به مرکز جرم نمی‌تواند تغییر کند. با جمع کردن بازوها و پاهایش *به طرف داخل*، می‌تواند لختی چرخشی خود را به طور قابل توجهی نسبت به محور کاهش و در نتیجه طبق معادلهٔ ۱۱-۳۴ تندی زاویه‌ای خود را به طور قابل توجهی افزایش دهد. او با باز کردن دست و پاهایش از حالت جمع شده (*به حالت باز شده*) در انتهای شیرجه، لختی چرخشی خود را زیاد می‌کند و بنابراین آهنگ چرخش او کُند می‌شود به طوری که می‌تواند به آرامی داخل آب شود. حتی در شیرجه‌های پیچیده‌تر شامل پیچش و پشتک، نیز اندازه حرکت زاویه‌ای باید هم از لحاظ بزرگی و هم *از لحاظ جهت* در طول شیرجه پایسته بماند.

**۳- *پرش بلند.*** وقتی ورزشکاری به حالت پرش بلند از زمین برمی‌خیزد، نیروهای وارد بر پاهای ورزشکار یک اندازه حرکت زاویه‌ای با چرخش رو به جلو نسبت به محور افقی به او می‌دهند. چنین چرخشی نمی‌گذارد ورزشکار درست فرود آید: هنگام فرود آمدن پاها به هم نزدیک و تحت زاویه‌ای کشیده به جلو است به طوری که پاشنه‌ها شن را به فاصلهٔ دوری علامت می‌گذارند. با حرکت در هوا اندازه حرکت زاویه‌ای نمی‌تواند تغییر کند (آن پایسته است) چون هیچ گشتاور خارجی بر آن وارد نمی‌شود که آن را تغییر دهد. ولی ورزشکار با چرخش بازوهای خود به صورت پروانه اندازه حرکت زاویه‌ای را تغییر می‌دهد (شکل ۱۱-۱۹). بنابراین بدن برای فرود آمدن مناسب رو به بالا می‌ماند.



**شکل ۱۱-۱۹** حرکت پروانه‌ای بازوها در ضمن پرش بلند به نگهداری سمتگیری بدن برای فرود آمدن کمک می‌کند.

**۴- *تورجت*** در یک تورجت مجری باله با یک حرکت چرخشی کوچک روی کف با یک پا می‌پرد در حالی که پای دیگر خود را نسبت به بدن عمود نگه می‌دارد (شکل ۱۱-۲۰ الف). تندی زاویه‌ای به اندازه‌ای کوچک است که توسط بیننده حس نمی‌شود. وقتی مجری بالا می‌رود، پای کشیده شده پایین و پای دیگر بالا آورده می‌شود، به این صورت که هر دو با بدن زاویه $\theta$ می‌سازند (شکل ۱۱-۲۰ ب). این حرکتی ظریف است، ولی او چرخش را نیز زیاد می‌کند چون با داخل آوردن پای کشیده شدهٔ آغازین لختی چرخشی کاهش می‌یابد. چون هیچ گشتاور خارجی به شخصی که در هواست وارد نمی‌شود، اندازه حرکت زاویه‌ای نمی‌تواند تغییر کند. بنابراین، با کاهش در لختی چرخشی ،تندی زاویه‌ای باید افزایش یابد. هرگاه پرش خوب انجام گیرد، به نظر می‌رسد که شخص ناگهان شروع به چرخش می‌کند و قبل از اینکه سمتگیری پای آغازین برای فرود آمدن آماده شود، °۱۸۰ می‌چرخد. دوباره پا کشیده می‌شود، بنظر می‌رسد که چرخش تمام شده است.







**شکل ۱۱-۲۰** (الف) مرحلهٔ اول تورجت: لختی چرخشی زیاد و تندی زاویه‌ای کوچک. (ب) مرحلهٔ بعدی: لختی چرخشی کوچک و تندی زاویه‌ای بزرگ.

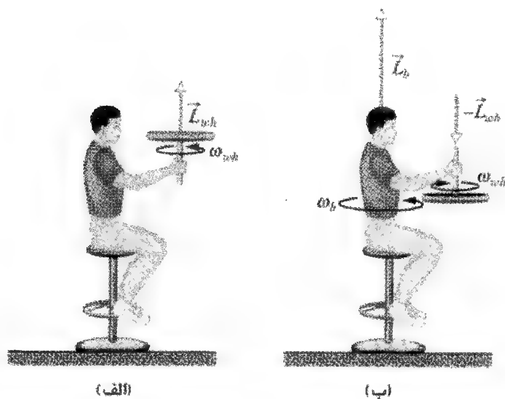
✔ ***نکتهٔ وارسی ۷*** سوسکی در کنارهٔ قرص کوچکی قرار دارد که همانند یک چرخ وفلک می‌چرخد. اگر این سوسک به طرف مرکز قرص حرکت کند، آیا کمیتهای زیر (هر یک نسبت به محور مرکزی) افزایش می‌یابند، کاهش می‌یابند یا بدون تغییر می‌مانند؟
(الف) لختی چرخشی، (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای و (پ) تندی زاویه‌ای.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱-۷

شکل ۱۱-۲۱ الف دانشجویی را نشان می‌دهد که دوباره روی صندلی چرخانی نشسته است که می‌تواند آزادانه به دور محور قائمی بچرخد. دانشجو ابتدا در حال سکون است و چرخ دوچرخه‌ای را در دست نگهداشته است که لبهٔ آن را با سرب پوشانده‌اند و لختی چرخشی آن $I_{wh}$ نسبت به محور مرکزی برابر $۱/۲\,\mathrm{kg\cdot m^{۲}}$ است. چرخ با تندی زاویه‌ای $\omega_{wh}$ برابر $۳/۹\,\mathrm{rev/s}$ می‌چرخد و به طوری که از نمای بالا دیده می‌شود چرخش به صورت پادساعتگرد است. محور چرخ قائم و اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}_{wh}$ چرخ در راستای قائم رو به بالا است. اکنون دانشجو چرخ را وارون می‌کند (شکل ۱۱-۲۱ ب) به طوری که از نمای بالا چرخش به صورت ساعتگرد صورت می‌گیرد. در این حالت اندازه حرکت زاویه‌ای برابر $-\vec{L}_{wh}$ است. وارون کردن باعث می‌شود که دانشجو، صندلی چرخان و مرکز چرخ به همراه هم به صورت یک جسم صلب حول محور چرخش صندلی چرخان بچرخند که لختی چرخشی آنها برابر $I_b = ۶/۸\,\mathrm{kg\cdot m^{۲}}$ است. (این واقعیت که چرخ نیز حول مرکز خود می‌چرخد تأثیری بر توزیع جرم این جسم مرکب ندارد، پس مقدار $I_b$ به چرخش چرخ بستگی ندارد.) پس از وارونه کردن چرخ این جسم مرکب با چه تندی زاویه‌ای $\omega_b$ و در چه جهتی می‌چرخد؟

**نکتهٔ کلیدی**

۱. تندی زاویه‌ای $\omega_b$ که به دنبال آن هستیم، بنابر معادلهٔ ۱۱-۳۱ $(L = I\omega)$ به $\vec{L}_b$، یعنی اندازه حرکت زاویه‌ای نهایی جسم مرکب نسبت به محور چرخش صندلی چرخان بستگی دارد.
۲. تندی زاویه ای اولیهٔ $\omega_{wh}$ چرخ، طبق همان رابطه به اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}_{wh}$ چرخ نسبت به مرکزش بستگی دارد.
۳. جمع برداری $\vec{L}_b$ و $\vec{L}_{wh}$ اندازه حرکت زاویه‌ای کل $\vec{L}_{tot}$ دستگاه دانشجو، صندلی چرخان و چرخ را به دست می‌دهد.
۴. وقتی چرخ وارونه شود، هیچ گشتاور نیروی *خارجی* خالصی برای تغییر $\vec{L}_{tot}$ نسبت به هر محور قائمی به دستگاه وارد نمی‌شود. (وقتی چرخ وارونه شود، گشتاور نیروهای ناشی از نیروهای میان دانشجو و چرخ برای کل دستگاه *داخلی* محسوب می‌شوند.) بنابراین، اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه نسبت به هر محور قائمی پایسته می‌ماند.




$\vec{L}_{wh}$ = $\vec{L}_b$ + $-\vec{L}_{wh}$

(پ)

**شکل ۱۱-۲۱** (الف) دانشجویی چرخ دوچرخه‌ای را حول محور قائمی می‌چرخاند. (ب) این دانشجو چرخ را وارونه می‌کند و خودش شروع به چرخش می‌کند. (پ) اندازه حرکت زاویه‌ای خالص این دستگاه در برابر این وارون شدن باید ثابت بماند.

***محاسبه‌ها:*** پایستگی $\vec{L}_{tot}$ را با بردارهای شکل ۱۱-۲۱ پ نشان داده‌ایم. می‌توان این پایستگی را برحسب مولفه‌های مربوط به راستای قائم به صورت زیر نوشت

$$L_{b,f} + L_{wh,f} = L_{b,i} + L_{wh,i} \qquad (۱۱-۳۵)$$

که در آن $i$ و $f$ به حالت اولیه (قبل از وارونه شدن چرخ) و حالت نهایی (پس از وارونه شدن) مربوط هستند. چون وارونه شدن چرخ باعث وارونه شدن اندازه حرکت زاویه‌ای چرخش چرخ می‌شود، مقدار $-L_{wh,i}$ را به جای $L_{wh,f}$ قرار می‌دهیم. بنابراین، اگر در نظر بگیریم که $L_{b,i} = ۰$ (زیرا دانشجو، صندلی چرخان ومرکز چرخ در ابتدا ساکن‌اند) از معادلهٔ ۱۱-۳۵ نتیجه می‌گیریم

$$L_{b,f} = ۲L_{wb,i}$$

حال با استفاده از معادلهٔ ۱۱-۳۱ و قرار دادن $I_b\omega_b$ به جای $L_{b,f}$ و $I_{wh}\omega_{wh}$ به جای $L_{wh,i}$ با حل معادله برای $\omega_b$ به دست می‌آوریم

$$\omega_b = \frac{۲I_{wh}}{I_b}\omega_{wh}$$

$$= \frac{(۲)(۱/۲\,\mathrm{kg\cdot m^{۲}})(۳/۹\,\mathrm{rev/s})}{۶/۸\,\mathrm{kg\cdot m^{۲}}} = ۱/۴\,\mathrm{rev/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این نتیجه مثبت بیانگر این است که دانشجو به طوری که از نمای بالا دیده می‌شود به صورت پادساعتگرد می‌چرخد. اگر این دانشجو بخواهد چرخش را متوقف کند باید بار دیگر چرخ را به حالت اولیهٔ خود برگرداند.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱-۸**

در شکل ۱۱-۲۲، سوسکی به جرم $m$ در کنارهٔ قرصی به جرم $۶/۰۰m$ و شعاع $R$ قرار دارد. قرص مانند یک چرخ و فلک با تندی زاویه‌ای $\omega_i = ۱/۵۰\,\text{rad/s}$ نسبت به محور آن می‌چرخد. سوسک در آغاز در شعاع $r = ۰/۸۰۰R$ بوده است سپس به پیرامون قرص می‌رسد. با فرض سوسک به عنوان یک ذره، تندی زاویه‌ای چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) حرکت سوسک توزیع جرم (و در نتیجه لختی چرخشی) دستگاه سوسک قرص را تغییر می‌دهد. (۲) اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه نباید تغییر کند چون گشتاور خارجی وجود ندارد که آن را تغییر دهد. (نیروها و گشتاورهای نیرو ناشی از حرکت سوسک نسبت به دستگاه داخلی هستند). (۳) بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم صلب یا ذره با معادلهٔ ۱۱-۳۱ $(L = I\omega)$ داده می‌شود.

***محاسبه‌ها:*** می‌خواهیم تندی زاویه‌ای نهایی را پیدا کنیم. کلید این است که اندازه حرکت زاویه‌ای نهایی $L_f$ را برابر با اندازه حرکت زاویه‌ای اولیهٔ $L_i$ قرار دهیم، چون هر دو شامل تندی زاویه‌ای هستند. آنها همچنین شامل لختی چرخشی $I$ نیز هستند. پس با محاسبهٔ لختی چرخشی دستگاه سوسک و قرص پیش و پس از حرکت شروع می‌کنیم.

لختی چرخشی یک قرص چرخان نسبت به محور مرکزی از جدول ۱۰-۲ پ؛ $\frac{1}{2}MR^2$ داده می‌شود. با قرار دادن $۶/۰۰m$ به جای $M$، لختی چرخشی قرص در اینجا عبارت خواهد بود از

$$I_d = ۳/۰۰mR^2 \qquad (۱۱\text{-}۳۶)$$

(مقدارهای $m$ و $R$ را نمی‌دانیم، ولی با شجاعت فیزیکی دنبال می‌کنیم.)

از معادلهٔ ۱۰-۳۳، می‌دانیم که لختی چرخشی سوسک (یک ذره) برابر با $mr^2$ است. با جایگذاری شعاع اولیه $(r = ۰/۸۰۰R)$ و شعاع نهایی سوسک $(r = R)$، لختی چرخشی اولیهٔ آن نسبت به محور چرخش عبارت است از

$$I_{ci} = ۰/۶۴mR^2 \qquad (۱۱\text{-}۳۷)$$

و لختی چرخشی نهایی نسبت به محور چرخش عبارت است از

$$I_{cf} = mR^2 \qquad (۱۱\text{-}۳۸)$$

پس لختی چرخشی اولیهٔ دستگاه سوسک- قرص عبارت خواهد بود از

$$I_i = I_d + I_{ci} = ۳/۶۴mR^2 \qquad (۱۱\text{-}۳۹)$$

و لختی چرخشی نهایی آن برابر است با

$$I_f = I_d + I_{cf} = ۴/۰۰mR^2 \qquad (۱۱\text{-}۴۰)$$

حال با استفاده از معادلهٔ ۱۱-۳۱ $(L = I\omega)$ این واقعیت را می‌نویسیم که اندازه حرکت زاویه‌ای نهایی دستگاه $L_f$ برابر اندازه حرکت زاویه‌ای اولیهٔ دستگاه $L_i$ است

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

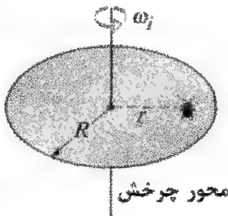
یا

$$۴/۰۰mR^2\omega_f = ۳/۶۴mR^2(۱/۵۰\,\text{rad/s}).$$

پس از حذف $m$ و $R$، خواهیم داشت

$$\omega_f = ۱/۳۷\,\text{rad/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که تندی زاویه‌ای کاهش می‌یابد چون بخشی از جرم از محور چرخش دور شده است.




**شکل ۱۱-۲۲** سوسکی در شعاع $r$ واقع بر قرص در حال چرخش مانند یک چرخ و فلک قرار دارد.

## ۱۱-۱۲ حرکت تقدیمی ژیروسکوپ

ژیروسکوپ ساده از چرخی تشکیل شده که به میله‌ای وصل شده است و آزادانه حول محور میله می‌چرخد. اگر یک انتهای میلهٔ ژیروسکوپی را که *نمی‌چرخد* روی پایه‌ای مانند شکل ۱۱-۲۳ الف قرار دهیم و ژیروسکوپ را رها کنیم، ژیروسکوپ با چرخش به سمت پایین حول نوک پایه پایین می‌افتد: چون این افتادن باعث چرخش می‌شود باید شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون بر آن حاکم باشد که با معادلهٔ ۱۱-۲۹ داده می‌شود

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (۱۱\text{-}۴۱)$$

این معادله حاکی از آن است که گشتاور نیرویی که باعث چرخش رو به پایین (افتادن) می‌شود اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ ژیروسکوپ را از مقدار اولیهٔ صفر آن تغییر می‌دهد. گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ ناشی از نیروی گرانش $M\vec{g}$ که بر مرکز جرم ژیروسکوپ وارد می‌شود همان گشتاور نیرویی است که ما به مرکز چرخ نسبت می‌دهیم. بازوی گشتاور نسبت به نوک پایه واقع در نقطهٔ $O$ در شکل ۱۱-۲۳ الف برابر $\vec{r}$ است. بزرگی $\vec{\tau}$ برابر است با

$$\tau = Mgr\sin ۹۰° = Mgr \qquad (۱۱\text{-}۴۲)$$

(زیرا زاویهٔ میان $M\vec{g}$ و $\vec{r}$ برابر $۹۰°$ است) و جهت آن در شکل ۱۱-۲۳ الف نشان داده شده است.

ژیروسکوپی که با سرعت در حال چرخش است رفتار متفاوتی دارد. فرض کنید که این ژیروسکوپ را وقتی نسبت به محور اندکی به سمت بالا قرار دارد رها کنیم. ژیروسکوپ ابتدا اندکی به سمت پایین می‌چرخد ولی بعداً در حالی که هنوز در حال چرخش به دور میله است شروع به چرخش افقی به دور یک محور قائم که از نقطهٔ $O$ پایه می‌گذرد می‌کند که به آن **حرکت تقدیمی** می‌گویند.

چرا ژیروسکوپ در حال چرخش به جای اینکه مانند ژیروسکوپ بدون چرخش به پایین بیفتد به سمت بالا باقی می‌ماند؟ نکته در این است که وقتی ژیروسکوپ چرخان رها شود، گشتاور نیروی ناشی از $M\vec{g}$ باید اندازه حرکت زاویه‌ای اولیهٔ صفر را تغییر ندهد اما مقداری اندازه حرکت زاویه‌ای غیر صفر برای چرخش در این حالت وجود خواهد داشت.

برای مشاهدهٔ اینکه چطور این اندازه حرکت زاویه‌ای اولیهٔ غیر صفر منجر به حرکت تقدیمی می‌شود، ابتدا اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ ژیروسکوپ ناشی از چرخش آن را در نظر می‌گیریم. برای ساده کردن این وضعیت، فرض می‌کنیم که آهنگ چرخش آنقدر تند است که اندازه حرکت زاویه‌ای ناشی از حرکت تقدیمی نسبت به $\vec{L}$ ناچیز است. همچنین فرض می‌کنیم که میله در هنگام شروع حرکت تقدیمی به طوری که شکل ۱۱-۲۳ ب نشان می‌دهد در حالت افقی است. بزرگی $\vec{L}$ با معادلهٔ ۱۱-۳۱ داده می‌شود

$$L = I\omega \qquad (۱۱-۴۳)$$

که در آن $I$ لختی چرخشی ژیروسکوپ حول میلهٔ آن و $\omega$ تندی زاویه‌ای است که با آن چرخ حول میله می‌چرخد. بردار $\vec{L}$ همان‌طور که در شکل ۱۱-۲۳ ب نشان داده شده در جهت میله است، چون $\vec{L}$ موازی با $\vec{r}$ است، گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ باید عمود بر $\vec{L}$ باشد.

بر اساس معادلهٔ ۱۱-۴۱، گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ باعث افزایش $d\vec{L}$ در اندازه حرکت زاویه‌ای ژیروسکوپ در بازهٔ زمانی $dt$ می‌شود، یعنی

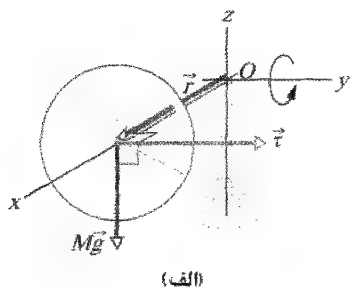
$$d\vec{L} = \vec{\tau}\, dt \qquad (۱۱-۴۴)$$

ولی، برای یک ژیروسکوپ با چرخش سریع بزرگی $\vec{L}$ از رابطهٔ ۱۱-۴۳ ثابت است. بنابراین، این گشتاور نیرو فقط می‌تواند راستای $\vec{L}$ را تغییر دهد نه بزرگی آن را.

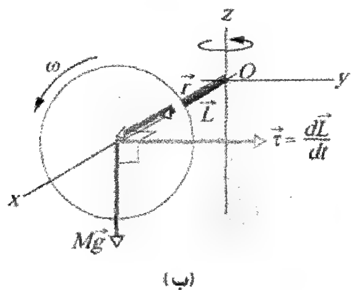
از معادلهٔ ۱۱-۴۴ می‌بینیم که $d\vec{L}$ در جهت $\vec{\tau}$ است، که عمود بر $\vec{L}$ است. تنها راهی که $\vec{L}$ می‌تواند در جهت $\vec{\tau}$ تغییر یابد بدون اینکه بزرگی $L$ تغییر کند این است که $\vec{L}$ به دور محور $z$ همانند شکل ۱۱-۲۳ پ بچرخد. $\vec{L}$ بزرگی خود را ثابت نگه می دارد، نوک بردار $\vec{L}$ در مسیری دایره ای حرکت می‌کند، و $\vec{\tau}$ همواره مماس بر این مسیر است. چون $\vec{L}$ باید همیشه به طرف میله امتداد یابد، میله باید حول محور $z$ در جهت $\vec{\tau}$ بچرخد. در نتیجه، حرکت تقدیمی خواهیم داشت. چون ژیروسکوپ چرخان باید از شکل زاویه‌ای قانون نیوتون در پاسخ به هر تغییری در اندازه حرکت زاویه‌ای اولیهٔ خود پیروی کند، باید به جای واژگون شدن، حرکت تقدیمی انجام دهد.

می‌توان **آهنگ حرکت تقدیمی** $\Omega$ را ابتدا با استفاده از معادله‌های ۱۱-۴۴ و ۱۱-۴۲ و یافتن $d\vec{L}$ پیدا کرد

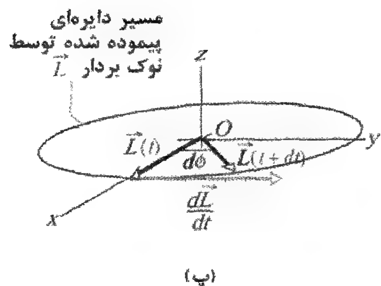
$$dL = \tau\, dt = Mgr\; dt \qquad (۱۱-۴۵)$$



(الف)



(ب)



(پ)

**شکل ۱۱-۲۳** (الف) ژیروسکوپی که نمی‌چرخد با چرخش در صفحهٔ $xz$ و به‌دلیل گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ می‌افتد. (ب) یک ژیروسکوپ که با سرعت می‌چرخد و دارای اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ است یک حرکت تقدیمی دور محور $z$ خواهد داشت. حرکت تقدیمی آن در صفحهٔ $xy$ است. (پ) تغییر $d\vec{L}/dt$ در اندازه حرکت زاویه ای منجر به چرخش $L$ حول $O$ می‌شود.

وقتی $\vec{L}$ با مقداری افزایش در بازهٔ زمانی $dt$ تغییر کند، میله و $\vec{L}$ به دور محور $z$ حرکت تقدیمی به مقدار $d\phi$ انجام می‌دهند. (در شکل ۱۱-۲۳ پ زاویهٔ $d\phi$ را برای روشنی بیشتر به طور اغراق آمیز نشان داده‌ایم.) به کمک معادله‌های ۱۱-۴۳ و ۱۱-۴۵ می‌توان $d\phi$ را به صورت زیر به دست آورد

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr\; dt}{I\omega}$$

با تقسیم این عبارت بر $dt$ و در نظر گرفتن $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$ به دست می‌آوریم

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \qquad \text{(آهنگ حرکت تقدیمی)} \qquad (۱۱-۴۶)$$

این نتیجه با این فرض که آهنگ چرخش $\omega$ سریع باشد معتبر است. توجه کنید که وقتی $\omega$ افزایش یابد $\Omega$ کاهش می‌یابد. همچنین توجه کنید که وقتی نیروی گرانشی $M\vec{g}$ بر ژیروسکوپ

اثر نکند هیچ حرکت تقدیمی وجود نخواهد داشت، اما چون $I$ تابعی از $M$ است، جرم از معادلهٔ ۱۱-۴۶ حذف می‌شود؛ بنابراین $\Omega$ مستقل از جرم است.

معادلهٔ ۱۱-۴۶ در صورتی که میلهٔ ژیروسکوپ در حال چرخش زاویه‌ای با افق داشته باشد نیز معتبر است. این امر برای فرفرهٔ در حال چرخش نیز که اصولاً یک ژیروسکوپ در حال چرخش با زاویه‌ای نسبت به افق است مصداق دارد.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**جسمهای غلتان** برای چرخی به شعاع $R$ که به طور هموار می‌غلتد، داریم

$$v_{\text{com}} = \omega R \qquad (۱۱-۲)$$

که در آن $v_{\text{com}}$ تندی خطی مرکز جرم چرخ و $\omega$ تندی زاویه‌ای چرخ حول مرکز آن است. همچنین می‌توان تصور کرد که چرخ به طور لحظه‌ای حول نقطهٔ $P$ روی سطح «جاده» که در تماس با چرخ است می‌چرخد. تندی زاویه‌ای چرخ حول این نقطه همانند تندی زاویه‌ای چرخ حول مرکز آن است. چرخ غلتان دارای انرژی جنبشی زیر است

$$K = \frac{۱}{۲} I_{\text{com}}\omega^{۲} + \frac{۱}{۲} M v_{\text{com}}^{۲} \qquad (۱۱-۵)$$

که در آن $I_{\text{com}}$ لختی چرخشی چرخ حول مرکز جرم آن و $M$ جرم چرخ است. اگر چرخ را شتاب دهیم اما باز هم به طور هموار غلتش کند، شتاب مرکز جرم چرخ $\vec{a}_{\text{com}}$ با رابطهٔ زیر به شتاب زاویه‌ای $\alpha$ حول مرکز آن مربوط است

$$a_{\text{com}} = \alpha R \qquad (۱۱-۶)$$

اگر چرخ به طور هموار از سطح شیبداری با زاویهٔ $\theta$ به پایین بغلتد، شتاب آن در راستای محور $x$ روی سطح شیبدار برابر است با

$$a_{\text{com},x} = -\frac{g \sin\theta}{۱ + I_{\text{com}}/MR^{۲}} \qquad (۱۱-۱۰)$$

**گشتاور نیرو به عنوان یک بردار** در حالت سه بعدی، *گشتاور نیروی* $\vec{\tau}$ یک کمیت برداری است که نسبت به یک نقطهٔ ثابت تعریف می‌شود (معمولاً نسبت به مبدأ) و برابر است با

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (۱۱-۱۴)$$

که در آن $\vec{F}$ نیروی وارده بر یک ذره و $\vec{r}$ بردار مکان ذره نسبت به یک نقطهٔ ثابت است. بزرگی $\vec{\tau}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\tau = rF\sin\phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F \qquad (۱۱-۱۵، ۱۱-۱۶، ۱۱-۱۷)$$

که در آن $\phi$ زاویهٔ میان $\vec{F}$ و $\vec{r}$ است، $F_{\perp}$ مؤلفهٔ $\vec{F}$ عمود بر $\vec{r}$ و $r_{\perp}$ بازوی گشتاور $\vec{F}$ است. جهت $\vec{\tau}$ از قاعدهٔ دست راست به دست می‌آید.

**اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره** *اندازه حرکت زاویه‌ای* $\vec{\ell}$ یک ذره با اندازه حرکت خطی $\vec{p}$، جرم m و سرعت خطی $\vec{v}$ کمیتی برداری است که نسبت به نقطه‌ای ثابت تعریف می‌شود (معمولاً نسبت به مبدأ) و برابر است با

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad (۱۱-۱۸)$$

بزرگی $\vec{\ell}$ از رابطه‌های زیر به دست می‌آید

$$\ell = rmv\sin\phi \qquad (۱۱-۱۹)$$

$$= rp_{\perp} = rmv_{\perp} \qquad (۱۱-۲۰)$$

$$= r_{\perp}p = r_{\perp}mv \qquad (۱۱-۲۱)$$

که آن $\phi$ زاویهٔ بین $\vec{r}$ و $\vec{p}$ است، $p_{\perp}$ و $v_{\perp}$ مؤلفه‌های $\vec{p}$ و $\vec{v}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ و $r_{\perp}$ فاصلهٔ عمودی میان نقطهٔ ثابت و امتداد $\vec{p}$ است. جهت $\vec{\ell}$ با قاعدهٔ دست راست برای ضرب خارجی به دست می‌آید.

**شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون** قانون دوم نیوتون در شکل زاویه‌ای برای یک ذره را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \qquad (۱۱-۲۳)$$

که در آن $\vec{\tau}_{\text{net}}$ گشتاور نیروی خالص وارده بر ذره و $\vec{\ell}$ اندازه حرکت زاویه‌ای آن است.

**اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاهی از ذره‌ها** اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ دستگاهی از ذره‌ها برابر جمع برداری اندازه حرکتهای زاویه‌ای تمام ذره‌هاست

$$\vec{L} = \vec{\ell}_{۱} + \vec{\ell}_{۲} + \vec{\ell}_{۳} + \cdots + \vec{\ell}_{n} = \sum_{i=۱}^{n} \vec{\ell}_{i} \qquad (۱۱-۲۶)$$

آهنگ زمانی تغییر این اندازه حرکت زاویه‌ای برابر گشتاور نیروی خارجی خالصی است که به دستگاه وارد می‌شود (جمع برداری گشتاور نیروهای ناشی از برهم کنشهای ذره‌های دستگاه با ذره‌های خارج از دستگاه)

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \text{(دستگاهی از ذره‌ها)} \qquad (۱۱-۲۹)$$

**اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم صلب** برای یک جسم صلب چرخان حول محور ثابت، مولفهٔ اندازه حرکت زاویه‌ای موازی با محور چرخش عبارت است از

$$L = I\omega \qquad \text{(برای جسم صلب و محور ثابت)} \qquad (۱۱-۳۱)$$

**پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای** اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ یک دستگاه در صورتی که گشتاور نیروی خارجی وارده بر این دستگاه برابر صفر باشد، ثابت می‌ماند

$$\vec{L} = \text{مقداری ثابت} \qquad \text{(دستگاه منزوی)} \qquad (۱۱-۳۲)$$

یا

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \qquad \text{(دستگاه منزوی)} \qquad (۱۱-۳۳)$$

**این قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای** است.

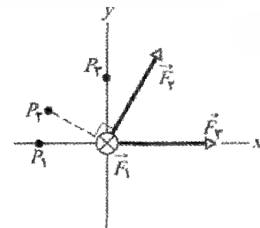
**حرکت تقدیمی ژیروسکوپ** ژیروسکوپ چرخان به دور محوری قائم که از میان پایهٔ آن می‌گذرد با آهنگ زیر حرکت تقدیمی انجام می‌دهد

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \qquad (۱۱-۴۶)$$

که $M$ جرم ژیروسکوپ، $r$ بازوی گشتاور، $I$ لختی چرخشی و $\omega$ آهنگ چرخش آن است.

## پرسشها

۱- در شکل ۱۱-۲۴ سه نیرو با بزرگیهای برابر به ذره‌ای واقع در مبدأ وارد می‌شوند ($\vec{F}_1$ به طور عمود به طرف داخل صفحهٔ

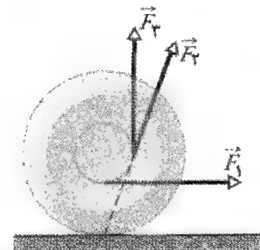



**شکل ۱۱-۲۴** پرسش ۱

شکل وارد می‌شود).این نیروها را برحسب بزرگی گشتاور نیروهای ایجاد شده نسبت به (الف) نقطهٔ $P_1$، (ب) نقطهٔ $P_2$ و (پ) نقطهٔ $P_3$ از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

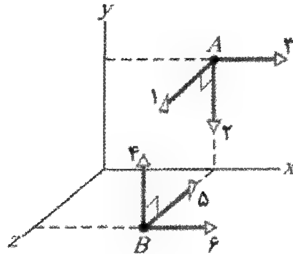
۲- بردار مکان $\vec{r}$ برای ذره‌ای نسبت به نقطه‌ای معین دارای بزرگی ۳m و نیروی $\vec{F}$ وارد بر ذره دارای بزرگی ۴N است. وقتی بزرگی گشتاور نیروی وابسته به آن برابر (الف) صفر و (ب) ۱۲N·m باشد، زاویه میان جهتهای $\vec{r}$ و $\vec{F}$ چقدر است؟

۳- اگر یک یو- یو را که در ابتدا ساکن است با نخ آن مطابق شکل ۱۱-۲۵ بکشیم، چه اتفاقی روی می‌دهد در صورتی که نیروی وارد شده برابر (الف) با نیروی $\vec{F}_2$ (نیرویی که خط اثر آن از نقطهٔ تماس با میز که در شکل نشان داده شده است می‌گذرد) (ب) با نیروی $\vec{F}_1$ (نیرویی که خط اثر آن از نقطهٔ تماس می‌گذرد) و (پ) با نیروی $\vec{F}_3$ (نیرویی که خط اثر آن از سمت راست نقطهٔ تماس می‌گذرد) باشد؟



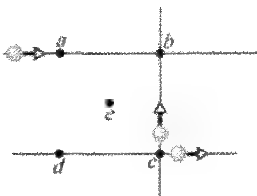

**شکل ۱۱-۲۵** پرسش ۳

۴- شکل ۱۱-۲۶ دو ذرهٔ $A$ و $B$ را با مختصات $xyz$ برابر (۱m,۱m,۰) و (۱m,۰,۱m) نشان می‌دهد. بر هر ذره سه نیرو که در شکل عدد گذاری شده‌اند وارد می‌شوند به طوری که هر نیرو موازی یکی از محورهای مختصات است. (الف) کدامیک از نیروها باعث ایجاد گشتاور نیرویی نسبت به مبدأ می‌شوند که با محور $y$ موازی است؟ (ب) این نیروها را برحسب بزرگی گشتاور نیروهایی که آنها بر هر ذره نسبت به مبدأ وارد می‌کنند به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



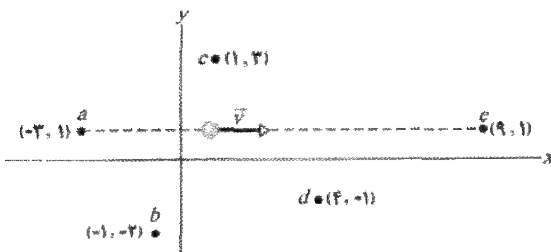

**شکل ۱۱-۲۶** پرسش ۴

۵- شکل ۱۱-۲۷ سه ذره با جرم و تندی ثابت یکسان را نشان می‌دهد که با بردارهای سرعت مشخص شده حرکت می‌کنند. نقطه‌های $a$، $b$، $c$ و $d$ یک مربع را تشکیل می‌دهند به طوری که نقطهٔ $e$ در مرکز آن قرار دارد. نقطه‌ها را برحسب بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای خالصی که هر یک از این سه ذره نسبت به نقطه‌های مختلف ایجاد می‌کنند به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.




**شکل ۱۱-۲۷** پرسش ۵

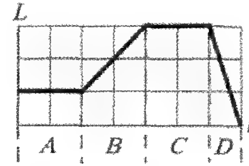
۶- شکل ۱۱-۲۸ ذره‌ای را در حال حرکت با سرعت ثابت $\vec{v}$ و پنج نقطه با مختصات $xy$ مربوط به آنها نشان می‌دهد. این نقطه‌ها را با توجه به بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای ذره نسبت به آنها به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.




**شکل ۱۱-۲۸** پرسش ۵

۷- شکل ۱۱-۲۹ بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای $L$ یک چرخ را برحسب زمان $t$ نشان می‌دهد. بزرگی گشتاور نیروی وارده بر

چرخ را در چهار بازهٔ زمانی نشان داده به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.

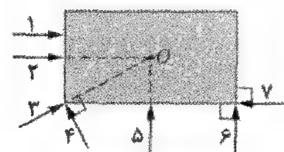



**شکل ۱۱-۲۹** پرسش ۷

۸- اندازه حرکتهای زاویه‌ای $\ell(t)$ ذره‌ای در چهار وضعیت عبارت‌اند از (۱) $\ell = 3t + 4$ ؛ (۲) $\ell = -6t^2$ ؛ (۳) $\ell = 2$ ؛ (۴) $\ell = \frac{4}{t}$ . در کدام وضعیت گشتاور نیروی خالص وارد بر ذره برابر (الف) صفر، (ب) مقداری ثابت و مثبت، (پ) مقداری منفی و با افزایش در بزرگی $(t > 0)$ است؟ (ت) مقداری منفی و با کاهش در بزرگی $(t > 0)$ است؟

۹- سوسکی روی لبهٔ یک قرص افقی که به طور پادساعتگرد شبیه یک چرخ و فلک می‌چرخد قرار دارد. اگر این سوسک در امتداد لبه و در جهت چرخش حرکت کند، آیا بزرگی این کمیتها (که حول محور چرخش اندازه‌گیری می‌شوند) نسبت به محور چرخش افزایش می‌یابند یا کاهش یا تغییر نمی‌کنند (با فرض اینکه قرص باز هم به طور پادساعتگرد بچرخد): (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه سوسک - قرص، (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای سوسک، (پ) اندازه حرکت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای قرص. (ت) اگر سوسک در جهت مخالف چرخش قرص حرکت کند، پاسخهای شما چه تغییری خواهند داشت؟

۱۰- شکل ۱۱-۳۰ نمای از بالای یک قطعهٔ چهار گوش را نشان می‌دهد که می‌تواند همانند یک چرخ و فلک حول مرکز $O$ بچرخد. همچنین هفت مسیر را نشان داده‌ایم که در امتداد هر یک از آنها می‌توان گلوله‌هایی از آدامس جویده شده را (همگی با تندی و جرم برابر) پرتاب کرد تا به قطعهٔ ساکن بچسبند. (الف) این مسیرها را برحسب تندی زاویه‌ای که قطعه (و آدامس) پس از چسبیدن آدامس به دست می‌آورد به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید. (ب) برای کدام مسیر اندازه حرکت زاویه‌ای قطعه (و آدامس) نسبت به نقطهٔ $O$ با توجه به شکل ۱۱-۳۰ منفی خواهد بود؟




**شکل ۱۱-۳۰** پرسش ۱۰

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس).
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
•-••• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است

### بخش ۱۱-۲ غلتش به صورت ترکیب انتقال و چرخش

•۱- اتومبیلی با تندی 80km/h روی سطح جاده‌ای در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کند. هر چرخ دارای قطر 66cm است. نسبت به شخصی که رانندگی می‌کند و با نماد بردار یکه سرعت $\vec{v}$ در (الف) مرکز، (ب) بالا و (پ) پایین چرخ و نیز بزرگی $a$ شتاب در (ت) مرکز (ث) بالا و (ج) پایین هر چرخ چقدر است؟ نسبت به شخصی که کنار جاده نشسته است، سرعت $\vec{v}$ در (چ) مرکز (ح) بالا و (خ) پایین چرخ و بزرگی شتاب $a$ در (د) مرکز (ذ) بالا و (ر) پایین هر چرخ چقدر است؟

•۲- اتومبیلی که با تندی 80.0km/h حرکت می‌کند دارای چرخهایی به قطر 75.0cm است. (الف) تندی زاویه‌ای چرخها نسبت به محورشان چقدر است؟ (ب) اگر این اتومبیل به طور یکنواخت با طی 30.0 دور کامل چرخها متوقف شود (بدون لغزش)، بزرگی شتاب زاویه‌ای چرخها چقدر است؟ (پ) اتومبیل در مدت ترمز گرفتن چقدر حرکت خواهد کرد؟

### بخش ۱۱-۴ نیروهای غلتشی

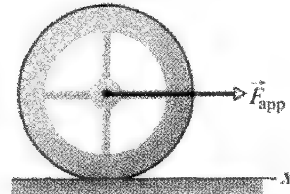
•۳- یک اتومبیل 1000kg دارای چهار چرخ 10kg است. وقتی اتومبیل در حال حرکت است، چه کسری از انرژی جنبشی کل آن مربوط به چرخش چرخها حول محورهایشان است؟ فرض کنید که چرخها دارای لختی چرخشی همانند قرصهای یکنواختی با جرم و اندازهٔ یکسان باشند. چرا به شعاع چرخها نیازی نداریم؟ **ILW**

•۴- کرهٔ صلب یکنواختی به طرف پایین یک سطح شیبدار می‌غلتد. (الف) زاویهٔ سطح شیبدار باید چقدر باشد تا شتاب خطی مرکز کره دارای بزرگی 0.10g گردد؟ (ب) اگر یک قطعه بدون اصطکاک به طرف پایین سطح شیبدار در این زاویه بلغزد، آیا بزرگی شتاب آن بیشتر، کمتر یا مساوی 0.10g است؟ چرا؟

•۵- حلقه‌ای به جرم 140kg روی یک سطح افقی حرکت غلتشی دارد به طوری که مرکز جرم حلقه دارای تندی 0.150 m/s است. چه مقدار کار برای متوقف کردن حلقه باید انجام گیرد؟ **SSM**

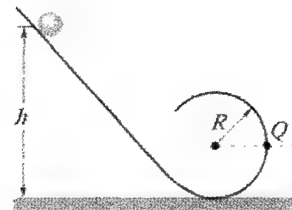
●●۶- یک کرهٔ توخالی به شعاع $0/15\text{m}$ با لختی چرخشی $I = 0/040\text{kgm}^2$ نسبت به خطی که از مرکز جرم آن می‌گذرد بدون لغزش به طرف بالای سطح شیبداری به زاویهٔ $30°$ نسبت به افق می‌غلتد. در یک مکان اولیهٔ معین انرژی جنبشی کل کره برابر $20\text{ J}$ است. (الف) چه مقدار از انرژی جنبشی اولیه چرخشی است؟ (ب) تندی مرکز جرم کره در مکان اولیه چقدر است؟ وقتی کره به اندازهٔ $1/0\text{m}$ به طرف بالای سطح شیبدار از مکان اولیه خود حرکت کند، مطلوب است (پ) انرژی جنبشی کل و (ت) تندی مرکز جرم.

●●۷- در شکل ۱۱-۳۱ یک نیروی افقی ثابت $\vec{F}_{app}$ به بزرگی $10\text{N}$ به چرخی با جرم $10\text{kg}$ و شعاع $0/30\text{m}$ وارد می‌شود. این چرخ به طور هموار روی سطحی افقی می‌غلتد و شتاب مرکز جرم آن دارای بزرگی $0/60\text{ m/s}^2$ است. (الف) نیروی اصطکاک وارد بر چرخ برحسب نماد بردار یکه چقدر است؟ (ب) لختی چرخشی چرخ نسبت به محور چرخشی که از مرکز جرم آن می‌گذرد چقدر است؟



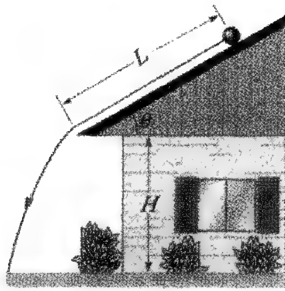

**شکل ۱۱-۳۱** مسئلهٔ ۷

●●۸- در شکل ۱۱-۳۲ یک گلولهٔ برنجی توپر به جرم $0/280\text{g}$ از حال سکون در طول یک مسیر مستقیم رها می‌شود و به طور هموار در یک مسیر مارپیچ مانند می‌غلتد. شعاع این مارپیچ دایره‌ای برابر $R = 14/0\text{cm}$ و شعاع گلوله $r \ll R$ است. (الف) در صورتی که گلوله به لبهٔ بالایی مسیر دایره‌ای برسد و سپس از آن جدا شود مقدار $h$ را به دست آورید. اگر گلوله از ارتفاع $h = 6/00R$ رها شود، مطلوب است محاسبهٔ (ب) بزرگی و (پ) جهت مؤلفهٔ نیروی افقی وارد بر گلوله در نقطهٔ $Q$؟



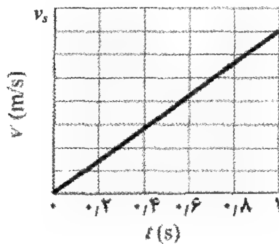

**شکل ۱۱-۳۲** مسئلهٔ ۸

●●۹- در شکل ۱۱-۳۳ استوانهٔ صلبی به شعاع $10\text{cm}$ و جرم $12\text{kg}$ از حال سکون و بدون لغزش از سقفی که شیب آن $\theta = 30°$ است به پایین می‌غلتد.(الف) تندی زاویه‌ای استوانه حول مرکزش وقتی سقف را ترک می‌کند چقدر است؟ (ب) لبهٔ سقف در ارتفاع $H = 5/0\text{m}$ قرار دارد. در چه فاصلهٔ افقی از لبهٔ سقف این استوانه با سطح زمین برخورد می‌کند؟ ILW



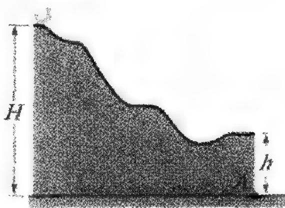

**شکل ۱۱-۳۳** مسئلهٔ ۹

●●۱۰- شکل ۱۱-۳۴ تندی $v$ برحسب زمان $t$ را برای یک جسم $0/500\text{kg}$ به شعاع $6/00\text{cm}$ که به طور هموار به طرف پایین یک سطح شیبدار $30°$ می‌غلتد نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $v_s = 4/0\text{ m/s}$ مشخص شده است. لختی چرخشی این جسم چقدر است؟




**شکل ۱۱-۳۴** مسئلهٔ ۱۰

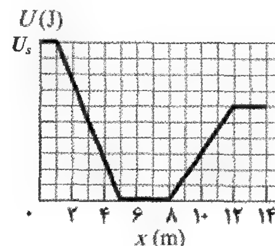
●●۱۱- در شکل ۱۱-۳۵ یک گلولهٔ توپر به طور هموار از حال سکون شروع به غلتش می‌کند (ارتفاع اولیه $H = 6/0\text{m}$ است) و در انتهای این مسیر که افقی است و در ارتفاع $h = 2/0\text{m}$ قرار دارد، از مسیر جدا می‌شود. فاصله افقی نقطهٔ برخورد گلوله با زمین تا نقطهٔ $A$ چقدر است؟




**شکل ۱۱-۳۵** مسئلهٔ ۱۱

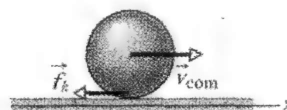
●●۱۲- شکل ۱۱-۳۶ انرژی پتانسیل $U(x)$ یک گلولهٔ توپر را نشان می‌دهد که می‌تواند در امتداد محور $x$ بغلتد. مقیاس محور $U$ برحسب $U_s = 100\text{J}$ مشخص شده است. گلوله یکنواخت است و به طور هموار می‌غلتد و دارای جرم $0/400\text{kg}$ است. گلوله را از $x = 7/0\text{m}$ در جهت منفی محور $x$ با انرژی مکانیکی $75\text{J}$ رها می‌کنیم. (الف) اگر گلوله بتواند به $x = 0\text{m}$ برسد، تندی در آنجا چقدر است و اگر نتواند برسد نقطهٔ بازگشت آن را به دست آورید. حال فرض کنید گلوله را در جهت مثبت محور $x$ از $x = 7/0\text{m}$ با انرژی $75\text{J}$ رها کنیم. (ب) اگر گلوله بتواند به $x = 13\text{m}$ برسد تندی در آن نقطه

چقدر است؟ اگر نتواند برسد نقطهٔ بازگشت آن را به دست آورید.



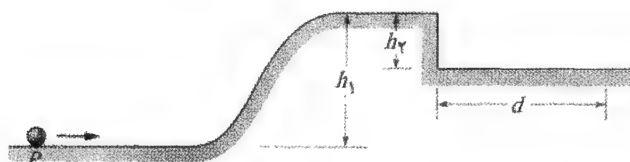

**شکل ۱۱-۳۶** مسئلهٔ ۱۲

••۱۳- توپ بولینگی به شعاع $R = ۱۱\text{cm}$ در امتداد مسیری پرتاب می‌شود. توپ (شکل ۱۱-۳۷) روی مسیر با تندی اولیهٔ $v_{com,۰} = ۸/۵\text{m/s}$ و تندی زاویه‌ای اولیهٔ $\omega_۰ = ۰$ می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی میان توپ و سطح برابر ۰/۲۱ است. نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$ که بر توپ وارد می‌شود یک شتاب خطی به توپ می‌دهد و گشتاور نیرویی ایجاد می‌کند که باعث ایجاد شتاب زاویه‌ای در توپ می‌شود. وقتی تندی $v_{com}$ به حد کافی کاهش و تندی زاویه‌ای $\omega$ به حد کافی افزایش یابد، لغزش توپ متوقف می‌شود و سپس توپ به طور هموار می‌غلتد. (الف) $v_{com}$ را برحسب $\omega$ به دست آورید. در حین لغزش مطلوب است (ب) شتاب خطی و (پ) شتاب زاویه‌ای. (ت) توپ برای چه مدتی می‌لغزد؟ (ث) توپ چه مسافتی می‌لغزد؟ (ج) تندی خطی توپ وقتی غلتش هموار توپ آغاز شود چقدر است؟




**شکل ۱۱-۳۷** مسئلهٔ ۱۳

••۱۴- در شکل ۱۱-۳۸ گلولهٔ کوچک توپر و یکنواختی را از نقطهٔ $P$ پرتاب کرده‌ایم، به طوری که گلوله در مسیری افقی به طور هموار می‌غلتد و از یک سطح شیبدار بالا می‌رود و به یک سطح افقی دیگر می‌رسد. سپس این سطح را به طور افقی ترک می‌کند و روی یک تخته، در فاصلهٔ افقی $d$ از لبهٔ سمت راست سطح فرود می‌آید. ارتفاعهای قائم عبارت‌اند از $h_۱ = ۵/۰۰\text{cm}$ و $h_۲ = ۱/۶۰\ \text{cm}$. تندی اولیهٔ گلوله باید چقدر باشد تا وقتی گلوله را از نقطهٔ $P$ پرتاب می‌کنیم در فاصلهٔ $d = ۶/۰۰\text{cm}$ فرود آید؟



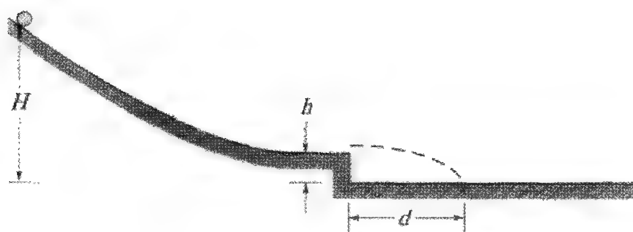

**شکل ۱۱-۳۸** مسئلهٔ ۱۴

•••۱۵- *گلولهٔ غیر یکنواخت.* در شکل ۱۱-۳۹ گلوله‌ای به جرم $M$ و شعاع $R$ به طور هموار از حال سکون به طرف پایین سطح شیبداری می‌غلتد و سپس وارد مسیری دایره‌ای به شعاع ۰/۴۸m می‌شود. ارتفاع اولیهٔ گلوله $h = ۰/۳۶\text{m}$ است. پایین مسیر دایره‌ای شکل، بزرگی نیروی عمود بر سطح وارد بر گلوله برابر $۲/۰۰Mg$ است. گلوله از یک پوستهٔ کروی خارجی (با چگالی یکنواخت و معین) تشکیل شده که به یک کرهٔ مرکزی (با چگالی یکنواخت ولی متفاوت) چسبیده است. لختی چرخشی گلوله را می‌توان به صورت کلی $I = \beta MR^۲$ نشان داد، اما مقدار $\beta$ برابر ۰/۴ یعنی همانند چگالی گلولهٔ یکنواخت نیست. $\beta$ را تعیین کنید.




**شکل ۱۱-۳۹** مسئلهٔ ۱۵

•••۱۶- جسم *استوانه‌ای غیر یکنواخت.* در شکل ۱۱-۴۰ جسمی به شکل استوانه به جرم $M$ و شعاع $R$ به طور هموار از حال سکون به طرف پایین سطح شیبداری می‌غلتد. سپس از سطح شیبدار جدا و وارد یک سطح افقی می‌شود و روی این سطح مسافت افقی $d = ۰/۵۰۶\text{m}$ را نسبت به انتهای سطح شیبدار می‌پیماید. ارتفاع اولیهٔ جسم $H = ۰/۹۰\text{m}$ است و انتهای سطح شیبدار در ارتفاع $h = ۰/۱۰\text{m}$ قرار دارد. این جسم تشکیل شده از یک پوستهٔ استوانه‌ای خارجی (با چگالی یکنواخت و معین) که به یک استوانه مرکزی (با چگالی یکنواخت ولی متفاوت) چسبیده است. لختی چرخشی جسم را می‌توان به صورت کلی $I = \beta MR^۲$ نشان داد ولی $\beta$ در اینجا همانند استوانه‌ای با چگالی یکنواخت برابر ۰/۵ نیست. $\beta$ را حساب کنید.




**شکل ۱۱-۴۰** مسئلهٔ ۱۶

## بخش ۱۱-۵ یو - یو

•۱۷- یک یو- یو دارای لختی چرخشی برابر $۹۵۰\text{g}\cdot\text{cm}^۲$ و جرم ۱۲۰g است. شعاع محور آن برابر ۳/۲mm و طول نخ ۱۲۰cm است. یو- یو از حال سکون به طرف پایین تا انتهای نخ می‌غلتد. (الف) بزرگی شتاب خطی آن چقدر است؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا یو- یو به انتهای نخ برسد؟ وقتی به

انتهای نخ برسد مطلوب است محاسبهٔ (پ) تندی خطی، (ت) انرژی جنبشی انتقالی، (ث) انرژی جنبشی چرخشی و (ج) تندی زاویه‌ای. SSM

●۱۸- در سال ۱۹۸۰/۱۳۵۹ برفراز خلیج سان‌فرانسیسکو یو- یو بزرگی را از یک جرثقیل رها کردند. این یو- یو ۱۱۶ کیلوگرمی از دو دیسک یکنواخت به شعاع ۳۲cm تشکیل شده بود که با محوری به شعاع ۳/۲cm به هم وصل شده بودند. بزرگی شتاب این یو- یو در موقع (الف) پایین رفتن و (ب) بالا آمدن آن چقدر بوده است؟ (پ) کشش طنابی که یو- یو روی آن می‌غلتیده چقدر بوده است؟ (ت) آیا کشش به دست آمده در طناب در نزدیکی محدودهٔ ۵۲ kN بوده است؟ فرض کنید که یک نوع یو- یو به همان شکل و از همان جنس ولی بزرگتر ساخته‌اید. (ث) آیا بزرگی شتاب یو- یو شما وقتی به طرف پایین می‌رود بزرگتر، کوچکتر یا برابر شتاب یو- یو سان‌فرانسیسکو است؟ در مورد کشش در طناب چطور؟

### بخش ۱۱-۶ مروری بر گشتاور نیرو

●۱۹- برحسب نماد بردار - یکه گشتاور نیروی وارد بر ذره‌ای در مختصات (۰,−۴/۰m,۳/۰m) را نسبت به مبداء مختصات در حالتی حساب کنید که این گشتاور نیرو مربوط باشد به (الف) نیروی $\vec{F}_1$ با مؤلفه‌های $F_{1x}=۲/۰\,N$ و $F_{1y}=F_{1z}=۰$. (ب) نیروی $\vec{F}_2$ با مولفه‌های $F_{2x}=۰$ و $F_{2y}=۲/۰\,N$ و $F_{2z}=۴/۰\,N$.

●۲۰- یک آلو در مختصات (−۲/۰m,۰,۴/۰m) قرار دارد. برحسب نماد بردار یکه مطلوب است، گشتاور نیروی وارد بر آن نسبت به مبدأ در صورتی که این گشتاور نیرو ناشی از یک نیروی $\vec{F}$ باشد که دارای فقط مؤلفهٔ (الف) $F_x=۶/۰\,N$، (ب) $F_x=-۶/۰\,N$ و (پ) $F_z=۶/۰\,N$ و (ت) $F_z=-۶/۰\,N$ است.

●۲۱- گشتاور نیروی وارد بر یک کک را که در مختصات (۰,−۴/۰m,۵/۰m) قرار دارد نسبت به مبدأ برحسب نماد بردار یکه بنویسید در صورتی که نیروهای $\vec{F}_1=(۳/۰N)\hat{k}$ و $\vec{F}_2=(-۲/۰N)\hat{j}$ بر این کک اثر کنند.

●●۲۲- گشتاور نیروی وارد بر یک ظرف فلفل را که در مختصات (۳/۰m,−۲/۰m,۴/۰m) قرار دارد نسب به مبدأ و برحسب نماد بردارهای یکه بنویسید در صورتی که گشتاور نیرو ناشی از (الف) نیروی $\vec{F}_1=(۳/۰N)\hat{i}-(۴/۰N)\hat{j}+(۵/۰N)\hat{k}$ (ب) نیروی $\vec{F}_2=(-۳/۰N)\hat{i}-(۳/۰N)\hat{j}-(۵/۰N)\hat{k}$ و (پ) جمع برداری $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ باشد. (ت) قسمت (پ) را برای این گشتاور نیرو نسبت به نقطه‌ای به مختصات (۳/۰m,۲/۰m,۴/۰m) تکرار کنید.

●●۲۳- نیروی $\vec{F}=(-۸/۰N)\hat{i}+(۶/۰N)\hat{j}$ بر ذره‌ای با بردار مکان $\vec{r}=(۳/۰m)\hat{i}+(۴/۰m)\hat{j}$ وارد می‌شود. (الف) گشتاور نیروی وارد بر این ذره را نسبت به مبدأ برحسب نماد بردار یکه به دست آورید. و (ب) زاویهٔ میان بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{F}$ چقدر است؟ SSM

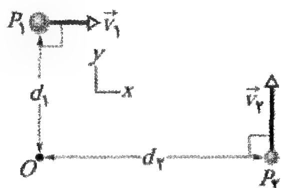
●●۲۴- به ذره‌ای که در دستگاه مختصات $xyz$ حرکت می‌کند نیرو وارد می‌شود. وقتی ذره دارای بردار مکان $\vec{r}=(۲/۰۰m)\hat{i}-(۳/۰۰m)\hat{j}+(۲/۰۰m)\hat{k}$ است نیرو برابر است با $\vec{F}=F_x\hat{i}+(۷/۰۰N)\hat{j}-(۶/۰۰N)\hat{k}$ و گشتاور نیروی مربوط نسبت به مبدأ برابر است با $\vec{\tau}=(۴/۰۰N\cdot m)\hat{i}+(۲/۰۰N\cdot m)\hat{j}-(۱/۰۰N\cdot m)\hat{k}$. مقدار $F_x$ را تعیین کنید.

●●۲۵- نیروی $\vec{F}=(۲/۰N)\hat{i}-(۳/۰N)\hat{k}$ بر ریگی با بردار مکان $\vec{r}=(۰/۵۰m)\hat{j}-(۲/۰m)\hat{k}$ نسبت به مبدأ وارد می‌شود. گشتاور نیروی ایجاد شده بر این ریگ را نسبت به (الف) مبدأ و (ب) نقطهٔ (۲/۰m,۰,−۳/۰m) به دست آورید.

### بخش ۱۱-۷ اندازه حرکت زاویه‌ای

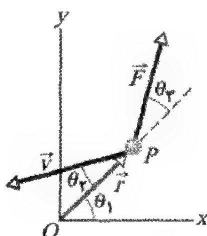
●۲۶- جسم مانندی به جرم ۲/۰kg در صفحه‌ای با مولفه‌های سرعت $v_x=۳۰\,m/s$ و $v_y=۶۰\,m/s$ حرکت می‌کند و از نقطه‌ای به مختصات $(x\ ,\ y)$ برابر (۳/۰,−۴/۰) متر می‌گذرد. درست در این لحظه و بر حسب نماد بردار یکه تعیین کنید که اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به (الف) مبدأ و (ب) نقطه‌ای به مختصات (−۲/۰,−۲/۰) متر چقدر است؟

●۲۷- در شکل ۱۱-۴۱ دو ذره در صفحهٔ $xy$ حرکت می‌کنند. ذرهٔ $P_1$ دارای جرم ۶/۵kg و تندی $v_1=۲/۲\,m/s$ است و در فاصلهٔ $d_1=۱/۵\,m$ از نقطهٔ $O$ قرار دارد. ذرهٔ $P_2$ به جرم ۳/۱ kg و تندی $v_2=۳/۶\,m/s$ است و در فاصلهٔ $d_2=۲/۸\,m$ از نقطهٔ $O$ قرار دارد. (الف) بزرگی و (ب) جهت اندازه حرکت زاویه‌ای این دو ذره را نسبت به نقطهٔ $O$ به دست آورید. ILW




شکل ۱۱-۴۱ مسئلهٔ ۲۷

●۲۸- در شکل ۱۱-۴۲ ذرهٔ $P$ به جرم ۲/۰kg دارای بردار مکان $\vec{r}$ با بزرگی ۳/۰m و زاویهٔ $\theta_1=۴۵°$ و بردار سرعت $\vec{v}$ با بزرگی ۴/۰m/s و زاویهٔ $\theta_2=۳۰°$ است. نیروی $\vec{F}$ با




شکل ۱۱-۴۲ مسئلهٔ ۲۸

بزرگی ۲/۰N و زاویهٔ $\theta_{۳} = ۳۰^{\circ}$ بر $P$ وارد می‌شود. هر سه بردار در صفحهٔ $xy$ قرار دارند. (الف) بزرگی و (ب) جهت اندازه حرکت زاویه‌ای ذرهٔ $P$، (پ) بزرگی و (ت) جهت گشتاور نیروی وارد بر ذرهٔ $P$ را نسبت به مبدأ به دست آورید.

**●۲۹-** در لحظه‌ای نیروی $\vec{F} = ۴/۰\hat{j}$ N بر ذره‌ای به جرم ۰/۲۵kg وارد می‌شود که بردار مکان آن $\vec{r} = (۲/۰\hat{i} - ۲/۰\hat{j})$ m و بردار سرعت آن $\vec{v} = (-۵/۰\hat{i} + ۵/۰\hat{k})$ m/s است. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای و (ب) گشتاور نیروی وارد بر این جسم نسبت به مبدأ و برحسب نماد بردار یکه چقدر است؟ **SSM**

**●●●۳۰-** در لحظهٔ معینی جابه‌جایی یک ذرهٔ ۲/۰۰kg نسبت به مبدأ برابر $\vec{d} = (۲/۰۰\text{m})\hat{i} + (۴/۰۰\text{m})\hat{j} - (۳/۰۰\text{m})\hat{k}$ و سرعت آن $\vec{v} = -(۶/۰۰\text{m/s})\hat{i} + (۳/۰۰\text{m/s})\hat{j} + (۳/۰۰\text{m/s})\hat{k}$ است و تحت تأثیر نیرویی برابر $\vec{F} = (۶/۰۰\text{N})\hat{i} - (۸/۰۰\text{N})\hat{j} + (۴/۰۰\text{N})\hat{k}$ قرار دارد. مطلوب است (الف) شتاب جسم، (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای جسم نسبت به مبدأ و (پ) گشتاور نیروی آن نسبت به مبدائی که به جسم نیرو وارد می‌کند و (ت) زاویهٔ بین سرعت جسم و نیروی وارده بر جسم.

**●●۳۱-** در شکل ۱۱-۴۳ یک گلولهٔ ۰/۴۰۰kg را مستقیماً به طرف بالا با تندی اولیهٔ ۴۰/۰m/s پرتاب می‌کنیم. اندازه حرکت زاویه‌ای گلوله نسبت به نقطهٔ $P$ را که به فاصلهٔ افقی ۲/۰۰m از نقطهٔ پرتاب قرار دارد در دو حالت زیر به دست آورید. (الف) وقتی گلوله در بیشینهٔ ارتفاع خود است و (ب) وقتی گلوله از وسط راه به زمین بر می‌گردد. گشتاور نیروی وارد بر گلوله را نسبت به نقطهٔ $P$ بر اثر نیروی گرانشی به دست آورید در صورتی که (پ) گلوله در بیشینهٔ ارتفاع خود و (ت) در نیمهٔ مسیر برگشت به زمین باشد.

**شکل ۱۱-۴۳** مسئلهٔ ۳۱

## بخش ۱۱-۸ شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون

**●۳۲-** ذره‌ای که در صفحهٔ $xy$ حرکت می‌کند به طور ساعتگرد به دور مبدأ وقتی از جهت مثبت محور $z$ به آن نگاه کنیم می‌چرخد. در صورتی که بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای آن نسبت به مبدأ برابر (الف) ۴/۰kg·m²/s، (ب) $۴/۰t^{2}$ kg·m²/s (پ) $۴/۰\sqrt{t}$ kg·m²/s و (ت) $۴/۰/t^{2}$ kg·m²/s باشد، گشتاور نیروی وارد بر ذره را به دست آورید.

**●۳۳-** ذره‌ای به جرم ۳/۰kg با سرعت $\vec{v} = (۵/۰\text{m/s})\hat{i} - (۶/۰\text{m/s})\hat{j}$ در مکان $x = ۳/۰$m و $y = ۸/۰$m قرار دارد. اگر این ذره را با یک نیروی ۷/۰N در جهت منفی $x$ بکشیم، (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای ذره، (ب) گشتاور نیروی وارد بر ذره و (پ) آهنگ تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای را به دست آورید. **SSM ILW WWW**

**●۳۴-** بر ذره‌ای دو گشتاور نیرو نسبت به مبدأ به صورت زیر وارد می‌شود: $\vec{\tau}_{1}$ به بزرگی ۲/۰N·m که در جهت مثبت محور $x$ است و $\vec{\tau}_{2}$ به بزرگی ۴/۰N·m که در جهت منفی محور $y$ است. $d\vec{\ell}/dt$ را برحسب نماد بردار یکه به دست آورید که $\vec{\ell}$ اندازه حرکت زاویه‌ای ذره نسبت به مبدأ است.

**●●۳۵-** در لحظهٔ $t$، $\vec{r} = ۴/۰t^{2}\hat{i} - (۲/۰t + ۶/۰t^{2})\hat{j}$ مکان یک ذرهٔ ۳/۰ کیلوگرمی را نسبت به مبدأ دستگاه مختصات $xy$ به دست می‌دهد ($\vec{r}$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است). (الف) عبارتی برای گشتاور نیروی وارد بر ذره نسبت به مبدأ پیدا کنید. (ب) آیا بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای ذره نسبت به مبدأ افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟

## بخش ۱۱-۱۰ اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم صلب که حول محور ثابتی می‌چرخد

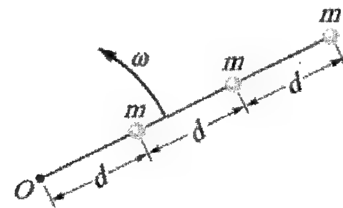
**●۳۶-** یک سنگ سمباده با لختی چرخشی $۱/۲\times۱۰^{-۳}$ kg·m² به یک متهٔ برقی متصل است که موتور آن گشتاور نیرویی به بزرگی ۱۶N·m حول محور مرکزی سنگ سمباده ایجاد می‌کند. حول این محور و با گشتاور نیروی وارده به مدت ۳۳ms بزرگی (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای و (ب) سرعت زاویه‌ای سنگ سمباده چقدر است؟

**●۳۷-** اندازه حرکت زاویه‌ای یک چرخ دوار با لختی چرخشی ۰/۱۴۰kg·m² نسبت به محور مرکزی آن در مدت ۱/۵s از ۳/۰۰ به ۰/۸۰۰kg·m²/s کاهش می‌یابد. (الف) بزرگی گشتاور نیروی میانگین وارد بر چرخ نسبت به محور مرکزی آن در این مدت چقدر است؟ (ب) فرض کنید که شتاب زاویه‌ای ثابت باشد، چرخ دوار در این مدت چه زاویه‌ای می‌پیماید؟ (پ) کار انجام شده روی چرخ چقدر است؟ (ت) توان متوسط چرخ دوار چقدر است؟ **SSM**

**●۳۸-** شکل ۱۱-۴۴ سه قرص یکنواخت چرخان را نشان می‌دهد که توسط تسمه هایی به هم متصل شده‌اند. یکی از تسمه‌ها به دور لبهٔ قرصهای $A$ و $C$ حرکت می‌کند. تسمهٔ دیگر به دور یک «توپی» روی قرص $A$ و لبهٔ قرص $B$ می‌چرخد. این تسمه‌ها به طور هموار و بدون لغزش روی لبه‌ها و توپی حرکت می‌کنند. قرص $A$ دارای شعاع $R$ و شعاع توپی آن برابر $۰/۵۰۰۰R$ است؛ و قرص $B$ دارای شعاع $۰/۲۵۰۰R$ و قرص $C$ دارای شعاع $۲/۰۰۰R$ است. قرصهای $B$ و $C$ چگالی و ضخامت یکسانی دارند. نسبت بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای قرص $C$ به قرص $B$ چقدر است؟

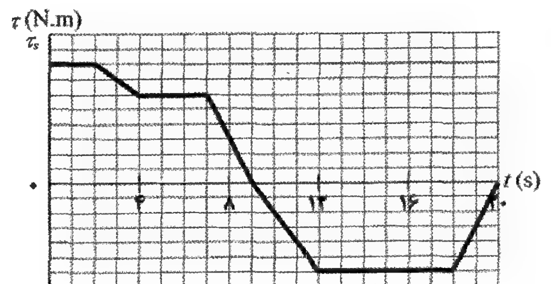
**شکل ۱۱-۴۴** مسئلهٔ ۳۸

●۳۹- در شکل ۱۱-۴۵ سه ذره هر یک به جرم $m = ۲۳\text{g}$ به سه میله به طول $d = ۱۲\ \text{cm}$ و جرم ناچیز بسته شده‌اند. این مجموعهٔ صلب حول نقطهٔ $O$ با تندی زاویه‌ای $\omega = ۰/۸۵\ \text{rad/s}$ می‌چرخد. (الف) لختی چرخشی این مجموعه حول $O$ چقدر است؟ (ب) بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای ذرهٔ وسطی و (پ) بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای این مجموعه چقدر است؟



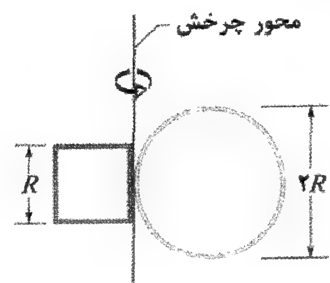
شکل ۱۱-۴۵ مسئلهٔ ۳۹

●●۴۰- شکل ۱۱-۴۶ گشتاور نیروی $\tau$ وارد بر یک قرص در ابتدا ساکن را که می‌تواند حول مرکزش مثل چرخ و فلک بچرخد به دست می‌دهد. مقیاس محور $\tau$ برحسب $\tau_s = ۴/۰\text{N}\cdot\text{m}$ مشخص شده است. اندازه حرکت زاویه‌ای این قرص حول محور چرخش در لحظه‌های (الف) $t = ۷/۰\text{s}$ و (ب) $t = ۲۰\text{s}$ چقدر است؟



شکل ۱۱-۴۶ مسئلهٔ ۴۰

●●۴۱- شکل ۱۱-۴۷ ساختار صلبی شامل یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع $R$ و جرم $m$ و یک مربع به ضلع $R$ و جرم $m$ را که از چهار میلهٔ باریک ساخته شده است نشان می‌دهد. این ساختار صلب با تندی ثابتی حول محور قائم با دورهٔ متناوب $۲/۵\text{s}$ می‌چرخد. با فرض اینکه $R = ۰/۵۰\text{m}$ و $m = ۲/۰\text{kg}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ (الف) لختی چرخشی این ساختار نسبت به محور چرخش و (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای آن نسبت به همان محور.



شکل ۱۱-۴۷ مسئلهٔ ۴۱

●●۴۲- قرصی با لختی چرخشی $۷/۰۰\text{kg}\cdot\text{m}^2$ مانند یک چرخ و فلک می‌چرخد در حالی‌که گشتاوری به آن وارد می‌شود که با $\tau = (۵/۰۰ + ۲/۰۰t)\text{N}\cdot\text{m}$ داده می‌شود. در لحظهٔ $t = ۱/۰۰\text{s}$، اندازه حرکت زاویه‌ای آن $۵/۰۰\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ است. در لحظه $t = ۳/۰۰\text{s}$ اندازه حرکت زاویه‌ای آن چقدر است؟

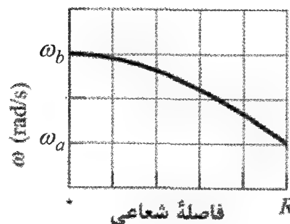
## بخش ۱۱-۱۱ پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای

●۴۳- شخصی روی سکویی ایستاده است که با تندی زاویه‌ای $۱/۲\text{rev/s}$ و بدون اصطکاک می‌چرخد. شخص بازوهای خود را از هم باز می‌کند در حالی که در هر دست او آجری قرار دارد. لختی چرخشی دستگاه شامل شخص، آجرها و سکو نسبت به محور قائم مرکزی برابر $۶/۰\text{kg}\cdot\text{m}^2$ است. اگر با حرکت دادن آجرها، شخص لختی چرخشی دستگاه را به $۲/۰\text{kg}\cdot\text{m}^2$ کاهش دهد، (الف) تندی زاویه‌ای سکو چقدر است؟ (ب) نسبت انرژی جنبشی جدید دستگاه نسبت به انرژی جنبشی اولیه چقدر است؟ (پ) این انرژی جنبشی اضافه شده از کجا تأمین شده است؟ SSM WWW

●۴۴- چرخانهٔ یک موتور الکتریکی دارای لختی چرخشی $I_m = ۲/۰ \times ۱۰^{-۳}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ نسبت به محور مرکزی آن است. از این موتور برای تغییر سمتگیری در یک کاوشگر فضایی استفاده می‌شود. محور موتور در طول محور مرکزی کاوشگر قرار دارد؛ لختی چرخشی چرخانه $I_p = ۱۲\text{kg}\cdot\text{m}^2$ نسبت به این محور است. تعداد دورهایی که چرخانه باید بزند تا کاوشگر به اندازهٔ $۳۰^\circ$ حول محور مرکزی بچرخد چقدر است؟

●۴۵- چرخی آزادانه با تندی زاویه‌ای $۸۰۰\text{rev/min}$ روی محوری با لختی چرخشی ناچیز می‌چرخد. چرخ دیگری که ابتدا ساکن و لختی چرخشی آن دو برابر چرخ اول است در یک لحظه با همان محور جفت می‌شود. (الف) تندی زاویه‌ای نهایی ترکیب محور و دو چرخ چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی چرخشی اولی تلف می شود؟ SSM ILW

●۴۶- سوسکی ابتدا در مرکز یک قرص دایره‌ای قرار دارد که می‌تواند آزادانه مانند یک چرخ و فلک بدون هیچ گشتاور نیروی خارجی بچرخد. سپس این سوسک شروع به حرکت به طرف لبهٔ قرص در شعاع $R$ می‌کند. شکل ۱۱-۴۸ تندی زاویه‌ای $\omega$ دستگاه سوسک - قرص را در طی این حرکت نشان می‌دهد. مقیاس روی محور $\omega$ برحسب $\omega_a = ۵/۰\text{rad/s}$ و $\omega_b = ۶/۰\ \text{rad/s}$ مشخص شده است. وقتی سوسک در لبهٔ قرص به شعاع $R$ قرار گیرد، نسبت لختی چرخشی سوسک نسبت به لختی چرخشی قرص وقتی هر دو نسبت به محور چرخش محاسبه شوند چقدر است؟

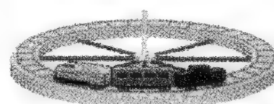



شکل ۱۱-۴۸ مسئلهٔ ۴۶

●۴۷- دو قرص با یاتاقانهای کم اصطکاک (همانند یک چرخ و فلک) روی یک محور نصب شده‌اند و می‌توانند با یکدیگر جفت شوند و به عنوان یک جسم واحد بچرخند. قرص اول را که دارای لختی چرخشی $۳/۳۰ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ نسبت به محورمرکزی خود است با ۴۵۰rev/min به صورت پادساعتگرد می‌چرخانیم. قرص دوم را با لختی چرخشی $۶/۶۰ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ حول محور مرکزی خود با ۹۰۰rev/min به صورت پادساعتگرد می‌چرخانیم. سپس آنها با هم جفت می‌شوند. (الف) تندی زاویه‌ای آنها پس از جفت شدن چقدر است؟ اگر قرص دوم را با ۹۰۰rev/min این بار به صورت ساعتگرد بچرخانیم، (ب) تندی زاویه‌ای آنها چقدر است؟ (پ) جهت چرخش پس از جفت شدن آنها با یکدیگر چیست.

●۴۸- لختی چرخشی یک ستارهٔ چرخان در حال رمبش به $\frac{1}{3}$ مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد. نسبت انرژی جنبشی چرخشی جدید نسبت به انرژی جنبشی چرخشی اولیه چقدر است؟

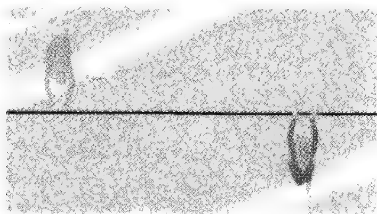
●۴۹- ریل یک قطار اسباب بازی روی چرخ بزرگی که آزادانه با اصطکاک ناچیز می‌تواند حول محوری قائم بچرخد قرار دارد (شکل ۱۱-۴۹). یک قطار اسباب بازی به جرم $m$ روی این ریل قرار می‌گیرد و دستگاه در ابتدا ساکن است. سپس کلید برق قطار زده می‌شود. تندی قطار نسبت به ریل به ۰/۱۵m/s می‌رسد. تندی زاویه‌ای چرخ در صورتی که جرم آن ۱/۱ m و شعاع آن ۰/۴۳m باشد، چقدر است؟ (چرخ را به صورت یک حلقه در نظر بگیرید و از جرم پره‌ها و توپی چرخ صرفنظر کنید.) SSM



شکل ۱۱-۴۹ مسئلهٔ ۴۹

●●۵۰- سوسکی به جرم ۰/۱۷kg روی لبهٔ صفحه‌ای دایره‌ای به شعاع ۱۵cm و لختی چرخشی $۵/۰\times۱۰^{-۳} \text{kg}\cdot\text{m}^2$ که روی محور قائمی با یاتاقانهای بدون اصطکاک قرار دارد به طور پادساعتگرد حرکت می‌کند. تندی این سوسک (نسبت به زمین) برابر ۲/۰m/s است و صفحهٔ دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای $\omega_0 = ۲/۸\text{rad/s}$ به طور ساعتگرد می‌چرخد. سوسک خرده نانی را روی لبهٔ این قرص پیدا می‌کند و در نتیجه می‌ایستد. (الف) تندی زاویه‌ای صفحهٔ دایره‌ای را بعد از ایستادن سوسک به دست آورید. (ب) آیا وقتی سوسک بایستد انرژی جنبشی پایسته است؟

●۵۱- در شکل ۱۱-۵۰ دو اسکیت باز روی یخ هر یک به جرم ۵۰kg در امتداد دو مسیر موازی به فاصلهٔ ۳/۰m به هم نزدیک می‌شوند. آنها دارای سرعتهایی مخالف هم و برابر ۱/۴m/s هستند. یکی از اسکیت بازها یک انتهای تیر بلندی با جرم ناچیز را در دست دارد و دیگری انتهای دیگر آن را وقتی به آن می‌رسد می‌گیرد. سپس اسکیت بازها به دور مرکز این تیر می‌چرخند. فرض کنید که اصطکاک بین اسکیتها و یخ ناچیز است. (الف) شعاع دایره چقدر است؟ (ب) تندی زاویه‌ای اسکیت بازها چقدر است؟ (پ) انرژی جنبشی دستگاه شامل دو اسکیت باز را به دست آورید. سپس اسکیت بازها تیر را به



شکل ۱۱-۵۰ مسئلهٔ ۵۱

طرف خود می‌کشند تا فاصلهٔ آنها به ۱/۰m برسد. در این حالت (ت) تندی زاویه‌ای آنها چقدر است؟ (ث) انرژی جنبشی دستگاه چقدر است؟ (ج) انرژی جنبشی افزایش یافته از کجا تأمین شده است؟

●۵۲- یک بولا[1] شامل سه کرهٔ مشابه سنگین است که توسط طولهای برابر از نخ محکمی به نقطهٔ مشترکی بسته شده‌اند (شکل ۱۱-۵۱ الف). برای پرتاب این اسلحهٔ بومی امریکای جنوبی یکی از کره‌ها را بالای سر نگه می‌دارند و سپس آن دست را حول مچ می‌چرخانند به طوری که دو کره دیگر در مسیر افقی دور دست می‌چرخند. هرگاه به مقدار کافی بچرخانید، می‌توانند اسلحه را به هدف بیاندازند. در آغاز بولا با تندی زاویه‌ای $\omega_i$ دور کرهٔ قبلی می‌چرخد، ولی سپس به تندی تغییر می‌کند به طوری که کره‌ها دور نقطهٔ اتصال مشترک با تندی زاویه‌ای $\omega_f$ می‌چرخند (شکل ۱۱-۵۱ ب). (الف) نسبت $\omega_f / \omega_i$ چقدر است؟ (ب) در چارچوب مرکز جرم، نسبت $K_f / K_i$ انرژیهای جنبشی چرخشی مربوطه چقدر است؟



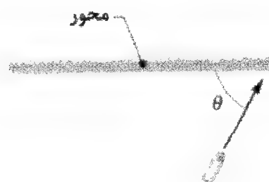

شکل ۱۱-۵۱ مسئلهٔ ۵۲

1. Bola

●۵۳- یک صفحهٔ گرامافون افقی به جرم ۰/۱۰kg و شعاع ۰/۱۰m آزادانه حول محور قائمی که از مرکزش می‌گذرد با تندی زاویه‌ای ۴/۷rad/s می چرخد. لختی چرخشی صفحه نسبت به محور چرخش آن برابر $۵/۰\times۱۰^{-۴}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. یک تکه خمیر به جرم ۰/۰۲۰kg به طور قائم روی این صفحه می‌افتد و به لبهٔ آن می‌چسبد. تندی زاویه‌ای صفحهٔ گرامافون بلافاصله بعد از چسبیدن این تکه خمیر به آن چقدر است؟

●●۵۴- در یک پرش طول، ورزشکاری زمین را با اندازه حرکت زاویه‌ای اولیه‌ای ترک می‌کند و تمایل دارد که بدن او را به سمت جلو بچرخاند و مانع شود به طور صحیح فرود آید. برای غلبه بر این، او بازوهای کشیده خود را برای ایجاد اندازه حرکت زاویه‌ای می‌چرخاند (شکل ۱۱-۱۹). در ۰/۷۰۰s یک بازو ۰/۵۰۰rev و بازوی دیگر ۱/۰۰rev دور می‌زند. هر بازو را میلهٔ نازکی به جرم ۴/۰kg و طول ۰/۶۰m در نظر بگیرید که نسبت به یک انتها می‌چرخد. در چارچوب مرجع ورزشکار، بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای کل بازوها نسبت به محور چرخش مشترکی که از کتف او می‌گذرد چقدر است؟

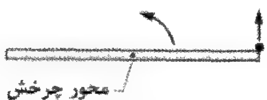
●●۵۵- میلهٔ باریک و یکنواختی به طول ۰/۵m و جرم ۴/۰kg می‌تواند در یک صفحهٔ افقی حول محور قائمی که از مرکز آن می‌گذرد بچرخد. در حالی که میله ساکن است، گلوله‌ای به جرم ۳/۰g را به طرف انتهای این میله و در صفحهٔ چرخش به آن شلیک می‌کنیم. از نمای بالا مسیر گلوله با میله زاویهٔ $\theta=۶۰^\circ$ می‌سازد (شکل ۱۱-۵۲). اگر گلوله در میله فرو رود و سرعت زاویه‌ای میله بلافاصله پس از برخورد برابر ۱۰rad/s باشد، تندی گلوله درست پیش از برخورد چقدر است؟




شکل ۱۱-۵۲ مسئلهٔ ۵۵

●●۵۶- سوسکی به جرم $m$ روی لبهٔ قرص یکنواختی به جرم ۴/۰۰m قرار دارد که می‌تواند آزادانه حول مرکز خود شبیه یک چرخ و فلک بچرخد. در ابتدا سوسک و قرص با یکدیگر می‌چرخند و سرعت زاویه‌ای آنها برابر ۰/۲۶rad/s است. سپس سوسک تا نیمهٔ راه مرکز قرص حرکت می‌کند. (الف) در این صورت سرعت زاویه‌ای دستگاه سوسک- قرص چقدر خواهد بود؟ (ب) نسبت $K/K_0$ برای انرژی جنبشی کنونی دستگاه نسبت به انرژی جنبشی اولیهٔ آن چقدر است؟ (پ) عامل تغییر انرژی جنبشی چیست؟

●●۵۷- شکل ۱۱-۵۳ نمای از بالای یک میلهٔ باریک یکنواخت به طول ۰/۸۰۰m و جرم $M$ است که به طور افقی با تندی زاویه‌ای ۲۰/۰rad/s حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد می‌چرخد. ذره‌ای به جرم $M/۳/۰۰$ که در ابتدا به یک انتهای میله چسبیده است از میله جدا می‌شود و در طول مسیری که عمود بر میله در لحظهٔ جدا شدن است حرکت می‌کند. اگر تندی ذره $v_p$ به اندازهٔ ۶/۰۰m/s بزرگتر از تندی انتهای میله درست بعد از جدا شدن باشد، مقدار $v_p$ چقدر است؟




شکل ۱۱-۵۳ مسئلهٔ ۵۷

●●۵۸- در شکل ۱۱-۵۴ یک گلولهٔ ۱/۰g به طرف قطعه چوبی که به انتهای میلهٔ غیر یکنواختی به طول ۰/۶۰m و جرم ۰/۵۰kg متصل شده است شلیک می‌شود. با این عمل، دستگاه قطعه- میله- گلوله در صفحهٔ شکل حول محور ثابتی در نقطهٔ $A$ می‌چرخد. لختی چرخشی میله به تنهایی نسبت به محور در نقطهٔ $A$ برابر $۰/۰۶\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. قطعه را به صورت یک ذره درنظر بگیرید. (الف) لختی چرخشی نهایی دستگاه قطعه- میله- گلوله نسبت به نقطهٔ $A$ چقدر است؟ (ب) اگر تندی زاویه‌ای دستگاه حول $A$ درست پس از برخورد برابر ۴/۵ rad/s باشد، تندی گلوله درست پیش از برخورد چقدر است؟

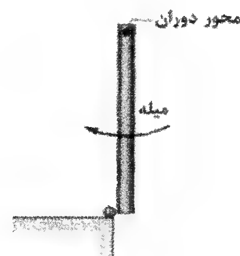



شکل ۱۱-۵۴ مسئلهٔ ۵۸

●●۵۹- یک قرص یکنواخت به جرم ۱۰$m$ و شعاع ۳/۰$r$ می‌تواند آزادانه حول مرکز ثابت خود همانند یک چرخ و فلک بچرخد. قرص یکنواخت کوچکتری به جرم $m$ و شعاع $r$ در بالای قرص بزرگتر قرار دارد که با آن هم مرکز است. این دو قرص در ابتدا با سرعت زاویه‌ای برابر ۲۰rad/s با یکدیگر می‌چرخند. سپس اغتشاش اندکی باعث می‌شود تا قرص کوچکتر به طرف خارج قرص بزرگتر بلغزد تا اینکه لبهٔ خارجی قرص کوچکتر به لبهٔ خارجی قرص بزرگتر برسد. پس از آن، این دو قرص دوباره با یکدیگر (بدون لغزش بیشتر) می‌چرخند. (الف) سرعت زاویه‌ای بعدی آنها حول مرکز قرص بزرگتر چقدر است؟ (ب) نسبت $K/K_0$ برای انرژی جنبشی جدید این دستگاه دو قرص نسبت به انرژی جنبشی اولیهٔ دستگاه چقدر است؟

●●۶۰- یک سکوی افقی به شکل قرص دایره‌ای روی یاتاقان بدون اصطکاکی قرار دارد و حول محور قائمی که از مرکز قرص می‌گذرد می‌چرخد. این سکو دارای جرم ۱۵۰kg، شعاع ۲/۰m و لختی چرخشی $۳۰۰\text{kg}\cdot\text{m}^2$ نسبت به محور چرخش است. یک دانشجوی ۶۰kg به طور آهسته از لبهٔ این قرص به طرف مرکز آن راه می‌رود. اگر تندی زاویه‌ای دستگاه در آغاز حرکت برابر ۱/۵ rad/s باشد، تندی زاویه‌ای را وقتی او به فاصلهٔ ۰/۵۰ m از مرکز قرص می‌رسد به دست آورید.

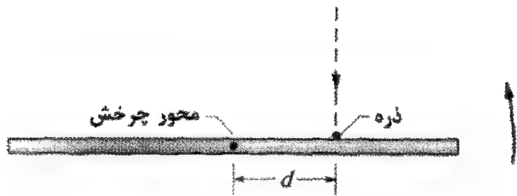
●●۶۱- میلهٔ یکنواختی (به طول ۰/۶m و جرم ۱/۰kg) در شکل ۱۱-۵۵ در صفحهٔ شکل حول محوری که از یک انتهای آن می‌گذرد با لختی چرخشی $۰/۱۲\text{kg}\cdot\text{m}^2$ می‌چرخد. وقتی میله از پایینترین مکان خود می‌گذرد با تکه خمیری به جرم ۰/۱۲kg برخورد می‌کند و خمیر به انتهای میله می‌چسبد. اگر تندی زاویه‌ای میله درست پیش از برخورد برابر ۲/۴ rad/s باشد، تندی زاویه‌ای دستگاه میله- خمیر درست پس از برخورد چقدر است؟




شکل ۱۱-۵۵ مسئلهٔ ۶۱

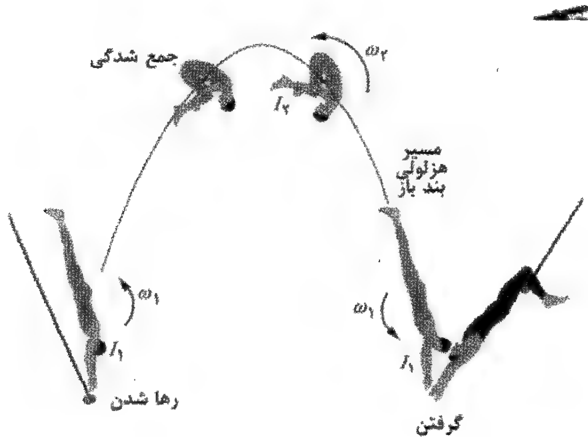
●●●۶۲-بالرینی حرکت تورجتی را (شکل ۱۱-۲۰ الف) با تندی زاویه‌ای $\omega_i$ و لختی چرخشی شامل دو بخش شروع می‌کند: $I_{\text{پا}}=۱/۴۴\text{kg}\cdot\text{m}^2$ برای پای کشیده به سوی بیرون تحت زاویهٔ $\theta=۹۰/۰^\circ$ نسبت به بدن و $I_{\text{بدن}}=۰/۶۶۰\text{kg}\cdot\text{m}^2$ برای وضعیت سکون بدن (حالت اولیهٔ بدن). درنزدیکی بیشینهٔ ارتفاع او هر دو پای خود را با زاویهٔ $\theta=۳۰/۰^\circ$ نسبت به بدنش نگه می‌دارد و تندی زاویه‌ای $\omega_f$ را دارد (شکل ۱۱-۲۰ ب). با فرض اینکه $I_{\text{بدن}}$ تغییر نکند، نسبت $\omega_f/\omega_i$ چقدر است؟

●●●۶۳-شکل ۱۱-۵۶ نمای از بالای میلهٔ نازک یکنواختی به طول ۰/۶۰۰ m و جرم $M$ را نشان می‌دهد که به طور افقی با ۸۰/۰rad/s به طور پادساعتگرد حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد می‌چرخد. ذره‌ای به جرم $M/۳/۰۰$ به طور افقی با تندی ۴۰/۰m/s به این میله برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. مسیر ذره در لحظهٔ برخورد عمود بر میله است و از مرکز میله به اندازهٔ $d$ فاصله دارد. (الف) در چه مقداری از $d$ میله و ذره بعد از برخورد به سکون می‌رسند؟ (ب) اگر $d$ از این مقدار بیشتر باشد، میله و ذره در چه جهتی می‌چرخند؟



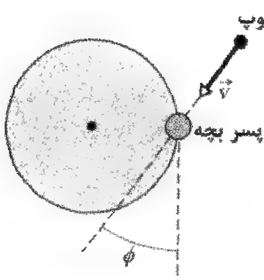

شکل ۱۱-۵۶ مسئلهٔ ۶۳

●●●۶۴-بندبازی ضمن پرش برای گرفتن همکار خود، در مدت $t=۱/۸۷\text{s}$ چهار معلق می‌زند. در چرخش اول و آخر او سمتگیری کشیده با لختی چرخشی $I_1=۱۹/۹\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ نسبت به مرکز جرم خود (نقطه سیاه) را دارد که در شکل ۱۱-۵۷ نشان داده شده است. در ضمن بقیهٔ پرش او حالت جمع شده با لختی چرخشی $I_2=۳/۹\text{kg}\cdot\text{m}^2$ دارد. تندی زاویه‌ای او نسبت به مرکز جرم در ضمن جمع شدن باید چقدر باشد؟



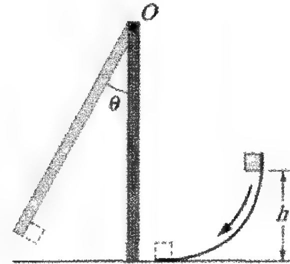

شکل ۱۱-۵۷ مسئلهٔ ۶۴

●●●۶۵-در شکل ۱۱-۵۸ یک پسر بچهٔ ۳۰ کیلوگرمی بر لبهٔ چرخ و فلک ساکنی به جرم ۱۰۰kg و شعاع ۲/۰m ایستاده است. لختی چرخشی این چرخ و فلک نسبت به چرخش برابر $۱۵۰\text{kg}\cdot\text{m}^2$ است. این پسر بچه توپی به جرم ۱/۰kg را که توسط دوستش پرتاب شده می‌گیرد. درست پیش از گرفتن آن، توپ دارای سرعت افقی $\vec{v}$ با بزرگی ۱۲ m/s و در زاویهٔ $\phi=۳۷^\circ$ با خط مماس بر لبهٔ خارجی چرخ و فلک است که در شکل نشان داده شده است. تندی زاویه ای چرخ و فلک درست پس از گرفتن توپ چقدر است؟



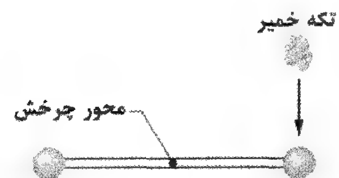

شکل ۱۱-۵۸ مسئله ۶۵

●●●۶۶- در شکل ۱۱-۵۹ یک قطعهٔ کوچک ۵۰g روی یک سطح بدون اصطکاک از ارتفاع $h=$۲۰cm به طرف پایین می‌لغزد و سپس به میلهٔ یکنواختی به جرم ۱۰۰g و طول ۴۰cm برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. محور میله حول نقطهٔ $O$ پیش از توقف لحظه‌ای تا زاویهٔ $\theta$ می‌چرخد. $\theta$ را به دست آورید.



**شکل ۱۱-۵۹** مسئلهٔ ۶۶

●●●۶۷- دو توپ ۲/۰۰kg به دو انتهای یک میلهٔ باریک به طول ۵۰/۰cm و جرم ناچیز متصل‌اند. میله آزادانه در صفحهٔ قائمی بدون اصطکاک حول محوری افقی که از مرکز آن می‌گذرد می‌چرخد. وقتی میله در ابتدا افقی است، (شکل ۱۱-۶۰) یک تکه خمیر روی یکی از توپهای آن می‌افتد، برخورد این تکه خمیر با تندی ۳/۰۰m/s صورت می‌گیرد و سپس به توپ می‌چسبد. (الف) تندی زاویه‌ای دستگاه درست پس از برخورد تکه خمیر چقدر است؟ (ب) نسبت انرژی جنبشی دستگاه پس از برخورد به وقتی که تکه خمیر برخورد می‌کند چقدر است؟ (پ) دستگاه پیش از اینکه به طور لحظه‌ای متوقف شود چقدر می‌چرخد؟ SSM WWW



**شکل ۱۱-۶۰** مسئلهٔ ۶۷

### بخش ۱۱-۱۲ حرکت تقدیمی ژیروسکوپ

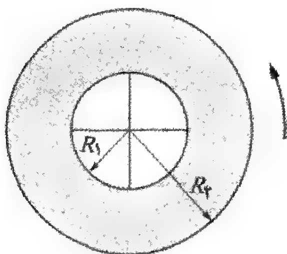
●●۶۸- فرفره‌ای با ۳۰rev/s حول محوری که با قائم زاویهٔ °۳۰ می‌سازد می‌چرخد. جرم فرفره برابر ۰/۵۰kg و لختی چرخشی نسبت به محور مرکزی آن برابر $5/0\times10^{-4}\ kg\cdot m^2$ است و مرکز جرم آن در فاصلهٔ ۴/۰cm از نقطهٔ اتکا قرار دارد. اگر این چرخش در نمای از بالا به صورت ساعتگرد باشد، (الف) آهنگ حرکت تقدیمی و (ب) جهت حرکت تقدیمی را نسبت به نمای از بالا به دست آورید.

●●۶۹- ژیروسکوپ معینی از یک قرص یکنواخت با شعاع ۵۰cm تشکیل شده که در مرکز میله‌ای که ۱۱ cm طول دارد و جرم آن ناچیز است قرار دارد. این میله افقی است و در یک انتها محکم شده است. اگر قرص به دور این میله با ۱۰۰۰rev/min بچرخد، آهنگ حرکت تقدیمی چقدر خواهد بود؟

### مسئله‌های اضافی

۷۰- قطعه‌ای یکنواخت از جنس گرانیت به شکل کتاب داریم که صفحهٔ آن دارای ابعاد ۲۰cm و ۱۰cm و ضخامت آن ۱/۲cm است. چگالی (جرم واحد حجم) گرانیت برابر $2/64 g/cm^3$ است. این قطعه به دور محوری که عمود بر صفحهٔ آن است و در وسط مرکز صفحه و یک گوشهٔ آن قرار دارد می‌چرخد. اندازه حرکت خطی آن نسبت به این محور برابر $0/104 kg\cdot m^2/s$ است. انرژی جنبشی چرخشی آن حول این محور چقدر است؟

۷۱- شکل ۱۱-۶۱ نمای از بالای حلقه‌ای را نشان می‌دهد که می‌تواند حول مرکز خود همانند یک چرخ و فلک بچرخد. شعاع خارجی $R_2$ برابر ۰/۸۰۰m و شعاع داخلی $R_1$ برابر $R_2/2/00$ است، جرم آن برابر ۸/۰۰kg و جرم میله‌های متقاطع که در مرکز آن قرار دارند ناچیز است. حلقه با یک گربه به جرم $m=M/4/00$ که روی لبهٔ خارجی آن در شعاع $R_2$ قرار دارد ابتدا با تندی زاویه‌ای ۸/۰۰rad/s می‌چرخد. اگر گربه به طرف لبهٔ داخلی با شعاع $R_1$ بخزد، انرژی جنبشی دستگاه گربه- حلقه تا چه میزان افزایش می‌یابد؟



**شکل ۱۱-۶۱** مسئلهٔ ۷۱

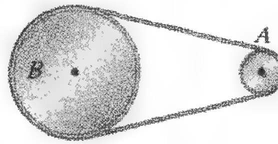
۷۲- یک جسم ۲/۵ kg که به طور افقی روی زمین با سرعت $(-3/00 m/s)\hat{j}$ حرکت می‌کند با جسمی به جرم ۴/۰۰kg که به طور افقی روی زمین با سرعت $(4/5 m/s)\hat{i}$ در حرکت است برخورد کشسان می‌کند. این برخورد در مختصات $xy$ رخ می‌دهد (۰/۱۰۰m-,۵/۰۰m-) . برحسب نماد بردار یکه اندازه حرکت زاویه‌ای این دو جسم به هم چسبیده را پس از برخورد نسبت به مبدأ به دست آورید.

۷۳- دو ذره هر یک به جرم $2/90\times10^{-4}$ kg با تندی ۵/۴۶m/s در جهتهای مخالف هم و در طول مسیرهایی موازی که ۴/۲۰cm از هم فاصله دارند حرکت می‌کنند. (الف) بزرگی $L$ اندازه حرکت زاویه‌ای این دستگاه دو ذره‌ای به دور نقطه‌ای در وسط دو مسیر چقدر است؟ (ب) آیا اگر نقطهٔ موردنظر در وسط دو مسیر نباشد مقدار $L$ تغییر خواهد کرد؟ اگر جهت

حرکت یکی از ذره‌ها معکوس شود، (پ) پاسخ قسمت (الف) چقدر خواهد شد؟ (ت) پاسخ قسمت (ب) چقدر خواهد شد؟ SSM

۷۴- میلهٔ یکنواختی در صفحهٔ افقی حول محور قائمی که از یک انتهای آن می‌گذرد می‌چرخد. طول میله ۶/۰۰m و وزن آن ۱۰/۰N است و با ۲۴۰ rev/min می‌چرخد. مطلوب است محاسبهٔ (الف) لختی چرخشی آن نسبت به محور چرخش و (ب) بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به این محور.

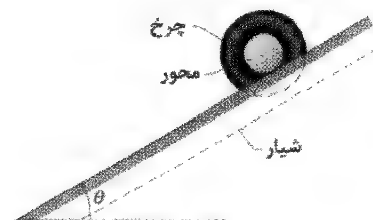
۷۵- چرخهای $A$ و $B$ در شکل ۱۱-۶۲ با تسمه‌ای بدون لغزش به هم متصل شده‌اند. شعاع $B$ ۳/۰۰ برابر شعاع $A$ است. نسبت لختی چرخشیهای $I_A/I_B$ چقدر است در صورتی که (الف) دو چرخ دارای اندازه حرکت زاویه‌ای یکسانی نسبت به محور مرکزی باشند و (ب) دو چرخ دارای انرژی جنبشی یکسانی باشند.



**شکل ۱۱-۶۲** مسئلهٔ ۷۵

۷۶- در زمان $t=0$ یک جسم ۲/۰kg با بردار مکان $\vec{r}=(4/0\,m)\hat{i}-(2/0\,m)\hat{j}$ نسبت به مبدأ قرار دارد. سرعت جسم برابر $\vec{v}=(-6/0t^2 m/s)\hat{i}$ برای $t\geq 0$ برحسب ثانیه است. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای جسم $\vec{L}$ نسبت به مبدأ و (ب) گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ وارد بر ذره نسبت به مبدأ را هر دو بر حسب نماد بردار یکه برای $t>0$ بنویسید. (پ) مقدار $\vec{L}$ و (ت) مقدار $\vec{\tau}$ را برای $t>0$ نسبت به نقطهٔ $(-2/0m, -3/0m, 0)$ به دست آورید.

۷۷- چرخ یکنواختی به جرم ۱۰/۰kg و شعاع ۰/۴۰۰m به میله‌ای که از مرکز آن می‌گذرد (شکل ۱۱-۶۳) محکم متصل شده است. شعاع میله برابر ۰/۲۰۰m و لختی چرخشی مجموعهٔ چرخ- میله نسبت به محور مرکزی آن برابر $0/600\,kg\cdot m^2$ است. چرخ ابتدا در حال سکون است و در بالای سطح شیبداری به زاویهٔ $\theta=30/0°$ با افق قرار دارد. میله روی سطح ساکن است در حالی که چرخ داخل شیاری در این سطح بدون تماس با سطح قرار دارد. وقتی چرخ رها شود، میله در طول این سطح به طور هموار به طرف پایین بدون لغزش می‌غلتد. وقتی ترکیب چرخ- میله به اندازهٔ ۲/۰۰m به طرف پایین سطح حرکت کند، مطلوب است تعیین (الف) انرژی جنبشی چرخشی و (ب) انرژی جنبشی انتقالی این دستگاه. SSM



**شکل ۱۱-۶۳** مسئلهٔ ۷۷

۷۸- فرض کنید که یو - یو در مسئلهٔ ۱۷ به جای غلتش از حال سکون طوری پرتاب شود که تندی اولیهٔ آن به طرف پایین نخ برابر ۱/۳ m/s باشد. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا یو - یو به انتهای نخ برسد. وقتی به انتهای نخ رسید مطلوب است (ب) انرژی جنبشی کل، (پ) تندی خطی (ت) انرژی جنبشی انتقالی (ث) تندی زاویه‌ای و (ج) انرژی جنبشی چرخشی.

۷۹- کرهٔ توپر کوچکی به شعاع ۰/۲۵cm و جرم ۰/۵۶g بدون لغزش درون یک نیمکرهٔ بزرگ و ثابت با شعاع ۱۵ cm و محور تقارن قائم می‌غلتد. این کره از بالا و از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. (الف) انرژی جنبشی آن در پایین نیمکره چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی آن در پایین نیمکره مربوط به چرخش حول محوری است که از مرکز جرم آن می‌گذرد؟ (پ) بزرگی نیروی عمودی وارد بر نیمکره از طرف کره وقتی به پایین سطح نیمکره می‌رسد چقدر است؟

۸۰- توپ یکنواخت صلبی به طور هموار روی زمین می‌غلتد و سپس از سطح شیبداری به زاویهٔ ۱۵/۰° بالا می‌رود. وقتی به اندازهٔ ۱/۵۰m روی سطح شیبدار بغلتد به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود. تندی اولیه توپ را به دست آورید.

۸۱- جسمی به شعاع $R$ و جرم $m$ به طور هموار با تندی $v$ روی یک سطح افقی می‌غلتد. جسم سپس تا ارتفاع بیشینهٔ $h$ از تپه‌ای بالا می‌رود. (الف) در صورتی که $h=3v^2/4g$ باشد، لختی چرخشی جسم را نسبت به محور چرخشی که از مرکز جرم آن می‌گذرد به دست آورید. (ب) این جسم چه چیزی می‌تواند باشد؟

۸۲- چرخی به شعاع ۰/۲۵۰m که در ابتدا با تندی ۴۳/۰m/s حرکت می‌کند می‌غلتد و در فاصلهٔ ۲۲۵ متری متوقف می‌شود. مطلوب است محاسبهٔ بزرگیهای (الف) شتاب خطی و (ب) شتاب زاویه‌ای (پ) لختی چرخشی چرخ نسبت به محور مرکزی برابر $0/155\,kg\cdot m^2$ است. بزرگی گشتاور نیروی ناشی از اصطکاک بر چرخ را نسبت به محور مرکزی محاسبه کنید.

۸۳- اگر کوههای یخی قطبی زمین به طور کامل ذوب شوند و آب حاصل به اقیانوسها برگردد، عمق اقیانوسها تا حدود ۳۰m افزایش می‌یابد. این واقعه چه تأثیری بر چرخش زمین خواهد داشت؟ فرض کنید تغییرات حاصل در ظرف یک روز انجام گیرد. (توجه کنید که گرم شدن جو در نتیجهٔ آلودگیهای صنعتی می‌تواند موجب ذوب یخهای قطبی شود.)

۸۴- یک هواپیمای ۱۲۰۰kg در خط راستی با تندی ۸۰m/s و در ارتفاع ۱/۳ km بالای زمین پرواز می‌کند. بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای آن نسبت به نقطه‌ای روی زمین که مستقیماً در زیر مسیر هواپیما قرار دارد چقدر است؟

۸۵- در یک زمین بازی چرخ و فلک کوچکی به شعاع ۱/۲۰m و جرم ۱۸۰kg وجود دارد. شعاع چرخش (مسئلهٔ ۹۱ فصل ۱۰

را ببینید) برابر $۹۱/۰cm$ است. پسر بچه‌ای به جرم $۴۴/۰kg$ با تندی $۳/۰۰m/s$ در طول مسیری که مماس بر لبهٔ چرخ و فلک است می‌دود و در حالی که چرخ و فلک ساکن است روی آن می‌پرد. با چشمپوشی از اصطکاک میان یاتاقانها و میلهٔ چرخ وفلک مطلوب است محاسبهٔ (الف) لختی چرخشی چرخ و فلک نسبت به محور چرخش (ب) بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای پسر بچه درحال دویدن نسبت به محور چرخش چرخ و فلک و (پ) تندی زاویه‌ای چرخ و فلک و(ت) تندی زاویه‌ای چرخ و فلک و پسر بچهٔ پس از پریدن او روی چرخ و فلک. **SSM**

۸۶- چرخی به صورت ساعتگرد حول محور مرکزی خود با اندازه حرکت زاویه‌ای $۶۰۰ kg\cdot m^2/s$ می‌چرخد. در زمان $t=۰$ ، گشتاور نیرویی با بزرگی $۵۰ N\cdot m$ به این چرخ وارد می‌شود تا چرخ را در جهت معکوس بچرخاند. در چه زمان $t$ تندی زاویه‌ای چرخ صفر است؟

۸۷- یک ماشین اسباب بازی $۳/۰ kg$ با سرعت $\vec{v}=-۲/۰t^3\hat{i}\ m/s$ که در آن $t$ برحسب ثانیه است در راستای محور $x$ حرکت می‌کند. به ازای $t>۰$ مطلوب است (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ این ماشین و (ب) گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ وارد بر ماشین، هر دو را نسبت به مبدأ محاسبه کنید. (پ) $\vec{L}$ و (ت) $\vec{\tau}$ را نسبت به نقطهٔ $(۲/۰m,۵/۰m,۰)$ به دست آورید. (ت) $\vec{L}$ و (ج) $\vec{\tau}$ را نسبت به نقطهٔ $(۲/۰m, -۵/۰m, ۰)$ به دست آورید. **SSM**

۸۸- لوله‌ای با دیوارهٔ نازک در کف اتاق می‌غلتد. نسبت انرژی جنبشی انتقالی به انرژی جنبشی چرخشی حول محور مرکزی موازی با طول آن چقدر است؟

۸۹- یک کرهٔ توپر با وزن $۳۶/۰N$ به طرف بالای سطح شیبداری با زاویهٔ $۳۰/۰°$ می‌غلتد. در پایین سطح شیبدار مرکز جرم کره دارای تندی انتقالی $۴/۹۰m/s$ است. (الف) انرژی جنبشی کره در پایین سطح شیبدار چقدر است؟ (ب) این کره تا چه مسافتی از سطح شیبدار بالا می‌رود؟ (پ) آیا پاسخ (ب) به جرم کره بستگی دارد؟

۹۰- تندی اتومبیلی به جرم کلی $۱۷۰۰kg$ از حال سکون در مدت $۱۰s$ به $۴۰ km/h$ می‌رسد. فرض کنید که هر چرخ یک قرص یکنواخت $۳۲ kg$ است. در انتهای این بازهٔ ۱۰ ثانیه‌ای مطلوب است (الف) انرژی جنبشی چرخشی هر چرخ نسبت به محورش، (ب) انرژی جنبشی کلی هر چرخ و (پ) انرژی جنبشی کل اتومبیل.

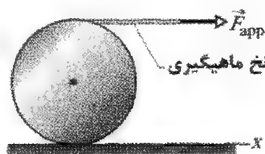
۹۱- چرخ دوچرخه‌ای را به شعاع $۰/۳۵۰m$ و وزن $۳۷/۰N$ با محور و پره‌هایی با جرم ناچیز و لبهٔ باریک در نظر بگیرید که می‌تواند روی محور خود بدون اصطکاک بچرخد. شخصی در حالی که روی صفحهٔ گردانی که می‌تواند بدون اصطکاک آزادانه بچرخد ایستاده است این چرخ را با محور قائم بالای سر خود نگه می‌دارد. صفحه در ابتدا ساکن است و وقتی از بالا دیده شود چرخ به طور ساعتگرد با تندی زاویه‌ای $۵۵/۷ rad/s$ می‌چرخد. *لختی چرخشی چرخ + شخص + صفحهٔ گردان* نسبت به محوری مشترک برای چرخش برابر $۲/۱۰kg\cdot m^2$ است. شخص ناگهان با دست‌آزاد خود چرخش چرخ را متوقف می‌کند (نسبت به صفحهٔ گردان) (الف) تندی زاویه‌ای و (ب) جهت چرخش دستگاه را تعیین کنید.

۹۲- بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای یک شخص $۸۴kg$ که در استوا ایستاده است نسبت به مرکز زمین مربوط به چرخش زمین چقدر است؟

۹۳- بچه‌ای به جرم $M$ روی لبهٔ یک چرخ و فلک به شعاع $R$ و لختی چرخشی $I$ که نمی‌چرخد ایستاده است. او سنگی به جرم $m$ را به طور افقی در جهتی که مماس بر لبهٔ خارجی چرخ و فلک است پرتاب می‌کند. تندی سنگ نسبت به زمین برابر $v$ است. بعد از این کار (الف) تندی زاویه‌ای چرخ و فلک چقدر است؟ (ب) تندی خطی بچه چقدر است؟

۹۴- یک جسم $۴/۰ kg$ در صفحهٔ $xy$ حرکت می‌کند. در یک لحظه وقتی مکان ذره و سرعت آن برابر $\vec{r}=(۲/۰\hat{i}+۴/۰\hat{j})m$ و $\vec{v}=-۴/۰\hat{j}\ m/s$ است، نیروی وارد بر ذره برابر $\vec{F}=-۳/۰\hat{i}N$ است. در این لحظه مطلوب است تعیین (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای ذره نسبت به مبدأ (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای ذره نسبت به نقطهٔ $x=۰$ و $y=۴/۰m$ . (پ) گشتاور نیروی وارد بر ذره نسبت به مبدأ و گشتاور نیروی وارد بر ذره نسبت به نقطهٔ $x=۰$ و $y=۴/۰m$ .

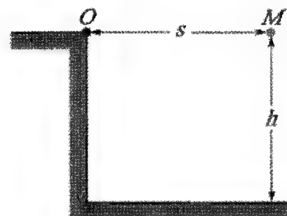
۹۵- در شکل ۱۱-۶۴ نیروی افقی ثابت $\vec{F}_{app}$ به بزرگی $۱۲N$ را به استوانهٔ توپر یکنواختی توسط یک نخ ماهیگیری که به دور استوانه پیچیده شده است وارد می‌کنیم. جرم استوانه $۱۰kg$ و شعاع آن $۰/۱۰m$ است و استوانه به طور هموار روی سطحی افقی می‌غلتد. (الف) بزرگی شتاب مرکز جرم استوانه چقدر است؟ (ب) بزرگی شتاب زاویه‌ای استوانه نسبت به مرکز جرم آن چقدر است؟ (ج) نیروی اصطکاک وارد بر استوانه برحسب نماد بردار یکه چیست؟ **SSM**




**شکل ۱۱-۶۴** مسئلهٔ ۹۵

۹۶- (الف) در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰-۸ وقتی گردونه منفجر شود چه مقدار اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به محور چرخش به اطراف منتقل می‌شود؟ (ب) اگر فرض کنیم که بیشتر تکه‌های گردونه در مدت $۰/۰۲۵s$ متوقف شوند؛ بزرگی گشتاور نیروی متوسط وارد بر این تکه‌ها نسبت به محور چرخش پس از انفجار چقدر است؟

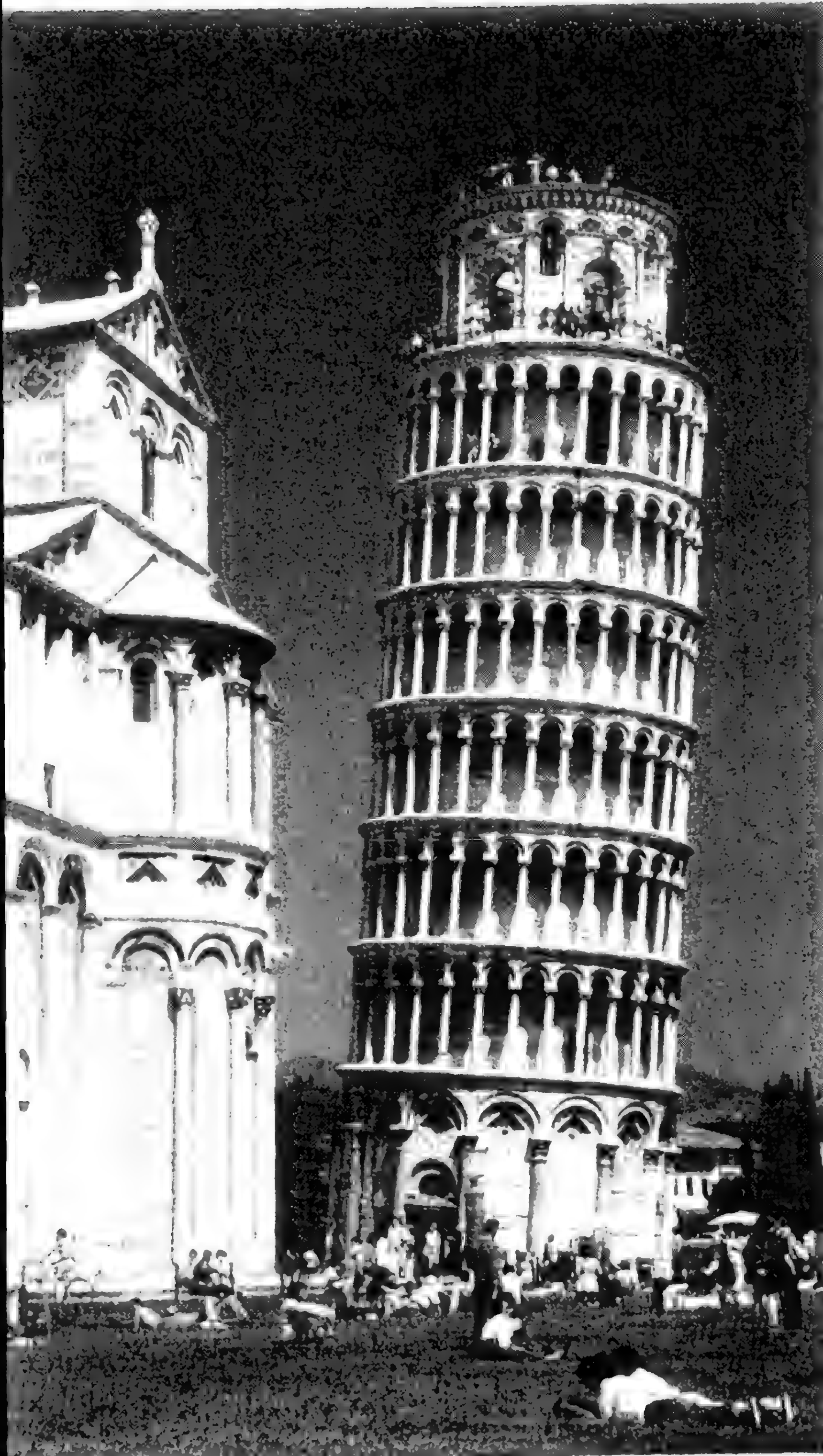
۹۷ـ ذره‌ای بــه جــرم $M = ۰/۲۵\text{kg}$ از نقطــه‌ای در ارتفــاع $h = ۱/۸\text{m}$ بالای سطح زمین و به فاصلهٔ افقــی $s = ۰/۴۵\text{m}$ از نقطهٔ مشاهدهٔ $O$ مطابق شکل ۱۱-۶۵ فرو می‌افتد. بزرگی انــدازه حرکت زاویه‌ای ذره نسبت به نقطهٔ O وقتی ذره به نیمهٔ راه خود تا زمین می‌رسد چقدر است؟




**شکل ۱۱-۶۵** مسئلهٔ ۹۷

۹۸ـ در یـک لحظــه، جسمــی بـــه جــرم $۰/۸\text{kg}$ در مکـــان $\vec{r} = (۲/۰\,\text{m})\hat{i} + (۳/۰\,\text{m})\hat{j}$ قرار دارد. اندازه حرکت خطی جسم در صفحهٔ $xy$ قــرار دارد و دارای بزرگــی $۲/۴\text{kg}\,\text{m/s}$ و جهــت $۱۱۵°$ است که از راستای مثبت محور $x$ به صورت پادساعتگرد اندازه‌گیری می‌شود. اندازه حرکت زاویه‌ای این جسم نسبت بــه مبدأ بر حسب نماد بردار یکه چیست؟

# ۱۲ تعادل و کشسانی



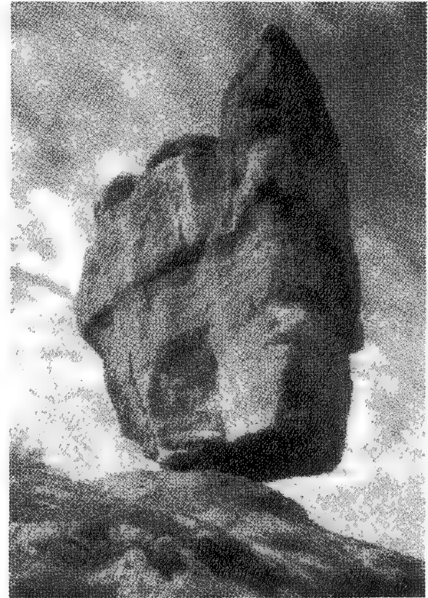
برج معروف در پیزا، ایتالیا، به آرامی حتی از زمان ساخت خود از دو قرن پیش شروع به کج شدن به جهت جنوب کرده است. این کج شدن با زمان ولی با سرعت حلزونی ۰/۰۰۱° در سال بیشتر شده است. در سالهای اخیر، وقتی انحراف به ۵/۵° رسید، این برج به روی گردشگران بسته شد. چون مسوولین از به زودی فرو ریختن آن می‌ترسیدند. ولی آیا فرو ریختن آن مستلزم این بود که مرکز جرم برج از پی آن دور شده باشد؟ این امر در سالهای بسیار زیادی اتفاق نخواهد افتاد.

**پس چه چیزی برای برج خطرناک است؟**

پاسخ در همین فصل.

## ۱۲-۱ فیزیک چیست؟

فرض بر این است که ساخته‌های بشری به رغم نیروهایی که به آنها وارد می‌شوند، پایدارند. برای مثال، یک ساختمان به رغم نیروی گرانشی و نیروی باد باید پایدار بماند. یک پل نیز با وجود نیروی گرانشی که آن را به سمت پایین می‌کشد و تکانهای مکرری که از طرف اتومبیلها و کامیونها بر پل وارد می‌شوند، باید پایدار بماند.



**شکل ۱۲-۱** یک تخته سنگ در توازن. اگرچه سرپا بودن آن نامطمئن به نظر می‌رسد، اما در تعادل ایستایی است.

یکی از مطالب مورد توجه در فیزیک این است که به رغم نیروهایی که به جسمی وارد می‌شوند چه چیزی جسم را پایدار نگه می‌دارد. در این فصل دو وجه اصلی پایداری را بررسی می‌کنیم: *تعادل* نیروها و گشتاور نیروهای وارد بر یک جسم صلب و *کشسانی* جسمهای غیر صلب، خاصیتی که بر چگونگی تغییر شکل آنها حاکم است. وقتی این فیزیک به درستی انجام گیرد، منجر به چاپ مقاله‌های بی‌شمار در مجله‌های فیزیک و مهندسی می‌شود و وقتی به درستی انجام نگیرد، به چاپ مقاله‌های بی‌شمار در روزنامه‌ها و مجله‌های حقوقی می‌انجامد.

## ۱۲-۲ تعادل

این اشیا را در نظر بگیرید: (۱) کتابی که روی میز ساکن است، (۲) یک قرص هاکی که روی سطح بدون اصطکاکی با سرعت ثابت می‌لغزد، (۳) پره‌های در حال چرخش یک پنکهٔ سقفی و (۴) چرخ دوچرخه‌ای که در امتداد یک مسیر مستقیم با تندی ثابت حرکت می‌کند. برای هر یک از این چهار شیء

۱- اندازه حرکت خطی $\vec{P}$ مرکز جرم ثابت است.

۲- اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ نسبت به مرکز جرم یا نسبت به هر نقطهٔ دیگر نیز ثابت است.

می‌گوییم که چنین اشیایی در حال *تعادل*‌اند. بنابراین، دو شرط تعادل عبارت‌اند از

$$\vec{P} = \text{ثابت} \quad \text{و} \quad \vec{L} = \text{ثابت} \qquad (۱۲-۱)$$

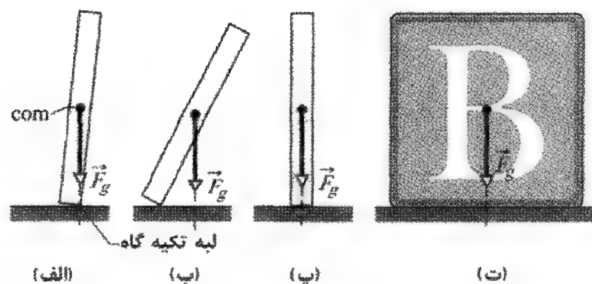
در این فصل حالتهایی را در نظر می‌گیریم که در آنها مقدارهای ثابت معادلهٔ ۱۲-۱ صفرند؛ یعنی عمدتاً توجه ما به اشیایی است که در دستگاه مرجعی که آنها را مشاهده می‌کنیم به هیچ وجه حرکت نمی‌کنند- نه انتقالی و نه چرخشی. چنین اشیایی در **تعادل ایستایی** هستند. از چهار شیئی که در ابتدای بخش نام بردیم فقط یکی- کتاب ساکن روی میز- در تعادل ایستا است.

تخته سنگ متوازنی که در شکل ۱۲-۱ دیده می‌شود، مثالی دیگر از شیئی است که دست کم فعلاً، در حال تعادل ایستایی است.ساختارهای بی‌شمار دیگری نظیر کلیساها، خانه‌ها، قفسه‌های پرنده‌ها و مغازه‌های ساندویچ فروشی که مدتها ساکن می‌مانند همین خاصیت را دارند.

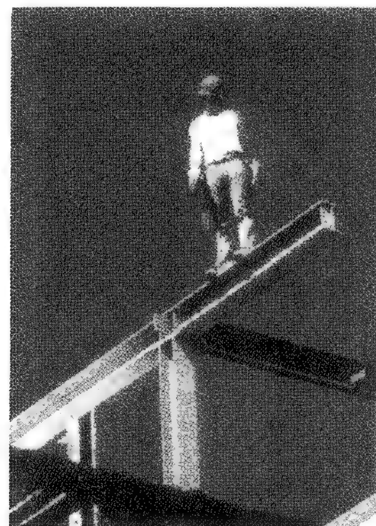
همان‌طور که در بخش ۸-۶ بحث کردیم، هرگاه جسمی براثر نیرو کمی از حال تعادل جابه‌جا شود ولی دوباره به حالت تعادل ایستایی خود برگردد، می‌گوییم این جسم در تعادل ایستایی *پایدار* است. تیله‌ای که در ته یک ظرف نیمکره‌ای شکل قرار دارد مثالی از این نوع تعادل است. ولی، اگر نیروی اندکی بتواند جسم را جابه‌جا و آن را از حال تعادل خارج کند، جسم در حال تعادل ایستایی *ناپایدار* است.

برای مثال، فرض کنید یک تختهٔ دومینو را مطابق شکل ۱۲-۲ الف در حال توازن قرار دهیم به طوری که مرکز جرم آن به طور قائم بالاتر از قاعدهٔ اتکای آن قرار داشته باشد. گشتاور نیروی ناشی از نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر دومینو نسبت به قاعدهٔ اتکا صفر است، چون خط اثر $\vec{F}_g$ از قاعده می‌گذرد. بنابراین، دومینو در حال تعادل است. البته، حتی نیروی اندک ناشی از یک آشفتگی تصادفی هم می‌تواند تعادل را به هم بزند. وقتی خط اثر $\vec{F}_g$ به طرف لبهٔ قاعدهٔ اتکا حرکت کند (مانند شکل ۱۲-۲ ب)، گشتاور نیروی ناشی از $\vec{F}_g$ باعث افزایش چرخش دومینو می‌شود. بنابراین، دومینو در شکل ۱۲-۲ الف در حال تعادل ایستایی ناپایدار است.

دومینو در شکل ۱۲-۲ پ خیلی هم ناپایدار نیست. برای واژگون کردن این دومینو، باید با نیرویی آن را چرخاند تا از وضعیت توازن شکل ۱۲-۲ الف دور شود، وضعیتی که در آن مرکز جرم بالای لبهٔ قاعدهٔ اتکا قرار دارد. یک نیروی کوچک ممکن است باعث واژگونی دومینو نشود ولی یک تلنگر شدید انگشت به دومینو مسلماً آن را واژگون می‌کند. (اگر ما زنجیره‌ای از چنین دومینوهای ایستاده ترتیب دهیم یک تلنگر انگشت به اولین دومینو می‌تواند باعث واژگونی همهٔ زنجیره شود.)




**شکل ۱۲-۲** (الف) یک دومینو در حالی که مرکز جرم آن در راستای قائم روی لبهٔ قاعدهٔ اتکا و بالاتر از لبه است در حال توازن قرار دارد. نیروی گرانشی، $\vec{F}_g$ وارد بر دومینو از لبهٔ قاعده می‌گذرد. (ب) اگر دومینو اندکی از سمتگیری متوازن بچرخد، آنگاه $\vec{F}_g$ گشتاور نیرویی را سبب می‌شود که چرخش را افزایش می‌دهد. (پ) یک دومینو که روی قاعدهٔ باریکش در حالت ایستاده قرار دارد نسبت به حالت (الف) در تعادل پایدارتری قرار دارد. (ت) یک قطعهٔ مربع شکل حتی در تعادل پایدارتری قرار دارد.



**شکل ۱۲-۳** یک کارگر ساختمانی روی یک تیر آهن در حال تعادل ایستایی قرار دارد اما وقتی موازی تیر آهن باشد نسبت به وقتی که عمود بر تیر آهن باشد در تعادل پایدارتری است.

یک قطعهٔ مربع شکل مخصوص بازی بچه‌ها در شکل ۱۲-۲ت حتی در تعادل پایدارتری قرار دارد، چون مرکز جرم باید بیشتر حرکت کند تا از بالای لبهٔ قاعده بگذرد. یک تلنگر انگشت ممکن است قطعه را سرنگون نکند. (به همین دلیل است که شما هیچ وقت شاهد سرنگون شدن زنجیره‌ای از قطعه‌های مربع شکل نبوده‌اید.) کارگر شکل ۱۲-۳، هم مانند دومینو و هم مانند قطعهٔ مربع شکل است: اگر موازی با تیرآهن قرار گیرد، وضع بدن پهن و او پایدار است؛ در حالت عمود بر تیر آهن، وضع بدن باریک و او ناپایدار است (و شانس او دستخوش وزش باد است).

تحلیل تعادل ایستایی در کارهای مهندسی بسیار مهم است. مهندس طراح باید همهٔ نیروها و گشتاور نیروهایی را که ممکن است به سازه‌ای وارد شوند تمیز دهد و شناسایی کند و با طراحی خوب و به کاربردن مصالح مناسب، مطمئن باشد که ساختمان می‌تواند در زیر بارها پایدار بماند. چنین تحلیلی لازم است تا مطمئن شویم که مثلاً پل بر اثر بار ترافیکی و فشار باد فرو نخواهد ریخت، و اینکه چرخهای هواپیما حتی در فرود ناگهانی تاب تحمل خواهند داشت.

## ۱۲-۳ شرطهای لازم برای تعادل

در حرکت انتقالی یک جسم، قانون دوم نیوتون در شکل اندازه حرکت یعنی معادلهٔ ۹-۲۷ برقرار است

$$\vec{F}_{\text{net}}=\frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (۱۲\text{-}۲)$$

اگر جسم در تعادل انتقالی باشد، یعنی وقتی که $\vec{P}$ ثابت است، آن وقت $d\vec{p}/dt=0$ و باید داشته باشیم

$$\vec{F}_{\text{net}}=0 \quad \text{(موازنهٔ نیروها)} \qquad (۱۲\text{-}۳)$$

در حرکت چرخشی یک جسم، قانون دوم نیوتون در شکل اندازه حرکت زاویه‌ای آن یعنی معادلهٔ ۱۱-۲۹ برقرار است

$$\vec{\tau}_{\text{net}}=\frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (۱۲\text{-}۴)$$

وقتی جسم در تعادل چرخشی باشد، یعنی وقتی که $\vec{L}$ ثابت باشد، آن وقت $d\vec{L}/dt=0$ و باید داشته باشیم

$$\vec{\tau}_{\text{net}}=0 \quad \text{(موازنهٔ گشتاور نیروها)} \qquad (۱۲\text{-}۵)$$

به این ترتیب دو شرط لازم برای آنکه جسمی در حال تعادل است عبارت‌اند از

> ۱- جمع‌برداری همهٔ نیروهای خارجی که به جسم وارد می‌شوند باید برابر صفر باشد.
> ۲- جمع‌برداری همهٔ گشتاور نیروهای خارجی وارد بر جسم که نسبت به هر نقطهٔ ممکن اندازه‌گیری شوند نیز باید برابر صفر باشد.

واضح است که این شرطها برای تعادل ایستایی برقرارند. آنها برای تعادل کلیتری که در آن $\vec{P}$ و $\vec{L}$ ثابت‌اند ولی صفر نیستند نیز برقرارند.

معادله‌های ۱۲-۳ و ۱۲-۵ که معادله‌های برداری‌اند، هـ ـک با سه معادلهٔ مؤلفه‌ای مستقل مربوط به سه محور ... معادل‌اند.

| موازنهٔ نیروها | موازنهٔ گشتا... |
|---|---|
| $F_{\text{net},x}=0$ | $=0$ |
| $F_{\text{net},y}=0$ | |
| $F_{\text{net},y}=0$ (۱۲-۶) | |

برای ساده کردن مطلب فقط حالتهایی را د... آنها نیروی وارد به جسم در صفحهٔ $xy$ و... معناست که تنها گشتاور نیروهایی می‌توانن...

بتوانند باعث چرخش حول محوری موازی با محور $z$ شوند. با این فرض، یکی از معادله‌های نیرو و دو تا معادله‌های گشتاور نیرو از معادلهٔ ۱۲-۶ حذف می‌شوند، داریم

$$F_{\mathrm{net},x}=0 \quad \text{(موازنهٔ نیروها)} \qquad (۱۲-۷)$$

$$F_{\mathrm{net},y}=0 \quad \text{(موازنهٔ نیروها)} \qquad (۱۲-۸)$$

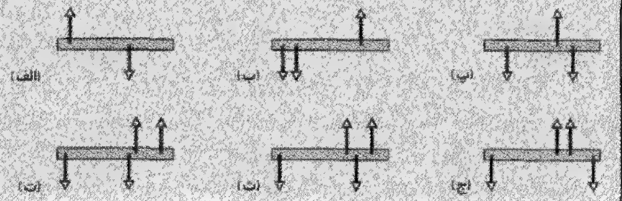
$$\tau_{\mathrm{net},z}=0 \quad \text{(موازنهٔ گشتاور نیروها)} \qquad (۱۲-۹)$$

در اینجا، $\tau_{\mathrm{net},z}$ گشتاور نیروی خالصی است که نیروهای خارجی نسبت به محور $z$ یا هر محور دیگری موازی محور $z$ ایجاد می‌کنند.

یک قرص هاکی که با سرعت ثابت روی یخ می‌لغزد، در معادله‌های ۱۲-۷ ، ۱۲-۸ و ۱۲-۹ صدق می‌کند و در نتیجه در حال تعادل است *اما نه در حال تعادل ایستایی*. برای تعادل ایستایی اندازه حرکت خطی $\vec{P}$ قرص نه تنها باید ثابت باشد بلکه باید برابر صفر نیز باشد؛ قرص باید روی یخ ساکن باشد. به این ترتیب شرط دیگر تعادل ایستایی عبارت است از

☜ ۳- اندازه حرکت خطی $\vec{P}$ جسم باید صفر باشد.

✓ ***نکتهٔ وارسی ۱*** در شکل دید از بالای شش میلهٔ یکنواخت که دو نیرو یا بیشتر به طور عمود به آنها وارد می‌شوند نشان داده شده است. اگر بزرگی نیروها به طور مناسبی اختیار شوند (اما غیر از صفر) در کدام یک از وضعیتها میله در حال تعادل ایستایی است؟

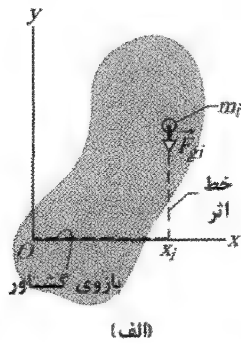


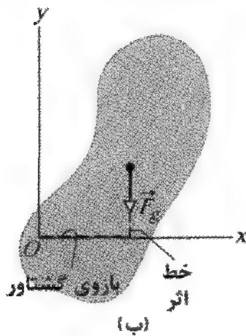

## ۱۲-۴ گرانیگاه

نیروی گرانشی وارد بر یک جسم گسترده، برابر با جمع‌برداری تمام نیروهای گرانشی وارد به هر یک از عنصرهای (اتمهای) جسم است. می‌توانیم بگوییم

☜ نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ در عمل بر یک نقطه که آن را گرانیگاه (cog) می‌نامیم به جسم وارد می‌شود.

اینجا «در عمل» بدان معناست که اگر تمام نیروهای اعمال شده به تک تک عنصرها حذف و به جای آنها نیروی $\vec{F}_g$ به گرانیگاه جسم وارد شود، نیروی خالص و گشتاور نیروی خالص (نسبت به هر نقطه) وارد به جسم تغییر نمی‌کند.




شکل ۱۲-۴ (الف) یک عنصر به جرم $m_i$ در یک جسم گسترده. نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد به این عنصر دارای بازوی گشتاور $x_i$ نسبت به مبداءO دستگاه مختصات است. (ب) گفته می‌شود که نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ روی جسم به گرانیگاه (cog) جسم وارد می‌شود. اینجا $\vec{F}_g$ دارای بازوی گشتاور $x_{\mathrm{cog}}$ نسبت به مبداء $O$ است.

تا اینجا، فرض کردیم که نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ به مرکز جرم (com) جسم وارد می‌شود. این فرض معادل این است که بگوییم گرانیگاه در مرکز جرم قرار دارد. یادآوری می‌کنیم که، برای جسمی به جرم $M$ ، نیروی $\vec{F}_g$ برابر با $Mg$ است که $\vec{g}$ شتاب در وقتی است که جسم به طور آزاد سقوط می‌کند. برای اثبات آن، در زیر نشان می‌دهیم که

☜ اگر $\vec{g}$ برای تمام عنصرهای جسم یکسان باشد، آنگاه گرانیگاه (cog) به مرکز جرم (com) جسم منطبق است.

این تقریباً برای هر جسمی صادق است، چون $\vec{g}$ روی سطح زمین تغییر ناچیزی دارد و بزرگی آن نسبت به ارتفاع فقط به مقدار اندکی تغییر می‌کند. بنابراین، برای اجسامی شبیه موش و گوزن این فرض که نیروی گرانشی به مرکز جرم جسم وارد می‌شود قابل قبول است. پس از اثبات زیر می‌توان این فرض را به حساب آورد.

### *اثبات*

ابتدا، هریک از عنصرهای جسم را در نظر می‌گیریم. شکل ۱۲-۴ الف جسم گسترده‌ای به جرم $M$ و یکی از عنصرهایش به جرم $m_i$ را نشان می‌دهد. نیروی گرانشی $\vec{F}_{gi}$ که به هر عنصری مانند این وارد می‌شود برابر با $m_i g_i$ است. زیر نویس در $\vec{g}_i$ شتاب

گرانشی در *محل* عنصر $i$ است (که می‌تواند برای سایر عنصرها فرق کند).

در شکل ۱۲-۴ الف، هر نیروی $\vec{F}_{gi}$ گشتاور نیروی $\tau_i$ را با بازوی گشتاور $x_i$ نسبت به مبداء $O$ روی عنصر وارد می‌کند. با به کار بردن معادلهٔ ۱۰-۴۱ $(\tau = r_\perp F)$ می‌توانیم گشتاور نیرو را به صورت زیر بنویسیم

$$\tau_i = x_i F_{gi} \qquad (۱۲-۱۰)$$

به این ترتیب، نیروی خالص وارد شده به تمام عنصرهای جسم عبارت است از

$$\tau_{\text{net}} = \sum \tau i = \sum x_i F_{gi} \qquad (۱۲-۱۱)$$

حال، کل جسم را در نظر می‌گیریم. شکل ۱۲-۴ ب نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر گرانیگاه جسم را نشان می‌دهد. این نیرو، گشتاور نیروی τ را نسبت به نقطهٔ $O$، با بازوی گشتاور $x_{\text{cog}}$، ایجاد می‌کند. معادلهٔ ۱۰-۴۱ را دوباره به کار می‌بریم، گشتاور نیرو را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\tau = x_{\text{cog}} F_g \qquad (۱۲-۱۲)$$

نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر جسم برابر است با جمع نیروهای گرانشی $\vec{F}_{gi}$ روی همهٔ عنصرهای جسم، پس می‌توانیم $\sum F_{gi}$ را به جای $\vec{F}_{gi}$ در رابطهٔ ۱۲-۱۲ قرار دهیم و بنویسیم

$$\tau = x_{\text{cog}} \sum F_{gi} \qquad (۱۲-۱۳)$$

اکنون یادآوری می‌کنیم که گشتاور نیروی ناشی از نیروی $\vec{F}_g$ بر گرانیگاه برابر است با گشتاور نیروی خالصی که بر اثر تمام نیروهای $\vec{F}_{gi}$ بر تمام عنصرهای جسم وارد می‌شود. (این امر ناشی از نحوهٔ تعریف ما از گرانیگاه است.) بنابراین، τ در معادلهٔ ۱۲-۱۳ با $\tau_{\text{net}}$ در رابطهٔ ۱۲-۱۱ برابر است. از برابر قرار دادن اینها، می‌توان نوشت

$$x_{\text{cog}} \sum F_{gi} = \sum x_i F_{gi}$$

با قراردادن $m_i g_i$ به جای $F_{gi}$ به دست می‌دهد

$$x_{\text{cog}} \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i . \qquad (۱۲-۱۴)$$

در اینجا یک **نکتهٔ کلیدی** وجود دارد: وقتی شتاب $g_i$ در تمام مکانهای عنصرها یکسان باشد، می‌توان $g_i$ را از دو طرف رابطه حذف کرد و نوشت

$$x_{\text{cog}} \sum m_i = \sum x_i m_i \qquad (۱۲-۱۵)$$

مجموع $\sum m_i$، یعنی مجموع جرمهای تمام عنصرها، جرم $M$ جسم است. بنابراین، می‌توان معادلهٔ ۱۲-۱۵ را به صورت زیر نوشت

$$x_{\text{cog}} = \frac{1}{M} \sum x_i m_i . \qquad (۱۲-۱۶)$$

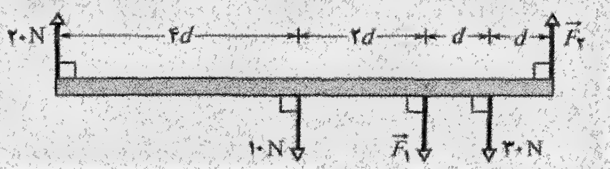
سمت راست این معادله مختصهٔ $x_{\text{com}}$ مرکز جرم جسم را به دست می‌دهد (معادلهٔ ۹-۴). اکنون چیزی که می‌خواستیم ثابت شد

$$x_{\text{cog}} = x_{\text{com}} \qquad (۱۲-۱۷)$$

## ۱۲-۵ مثالهایی دربارهٔ تعادل ایستایی

در این بخش، چهار مسئلهٔ نمونهٔ مربوط به تعادل ایستایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در هر یک از این مسئله‌ها دستگاهی شامل یک یا چند جسم را انتخاب می‌کنیم و معادله‌های تعادل (معادله‌های ۱۲-۷، ۱۲-۸ و ۱۲-۹) را دربارهٔ آنها به کار می‌بریم. همهٔ نیروهای وارد در تعادل در صفحهٔ $xy$ قرار دارند، یعنی گشتاور نیروها موازی محور $z$ هستند. به این ترتیب، در به کار بردن معادلهٔ ۱۲-۹، یعنی معادلهٔ مربوط به موازنهٔ گشتاورهای نیرو، محوری را که گشتاور نیرو نسبت به آن محاسبه می‌شود موازی محور $z$ انتخاب می‌کنیم. اگر چه معادلهٔ ۱۲-۹ برای هر محوری که چنین انتخاب شده باشد صادق است، اما خواهیم دید که برخی انتخابها باعث حذف یک یا تعداد بیشتری نیروی نامعلوم در جمله‌ها می‌شوند و به کاربردن معادلهٔ ۱۲-۹ را ساده‌تر می‌کنند.

✔ ***نکتهٔ وارسی ۲*** شکل دید از بالای یک میلهٔ یکنواخت در حال تعادل ایستایی را نشان می‌دهد. (الف) آیا می‌توان با استفاده از معادلهٔ مربوط به موازنهٔ نیروها، بزرگی نیروهای مجهول $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را بدست آورید؟ (ب) اگر بخواهیم با استفاده از معادلهٔ توازن گشتاور نیروها بزرگی نیروی $\vec{F}_2$ را به دست آوریم، محور چرخش را باید کجا انتخاب کنیم تا $\vec{F}_1$ از معادله حذف شود؟ (پ) بزرگی نیروی $\vec{F}_2$ برابر 65N به دست می‌آید، در این صورت بزرگی نیروی $\vec{F}_1$ چقدر است؟



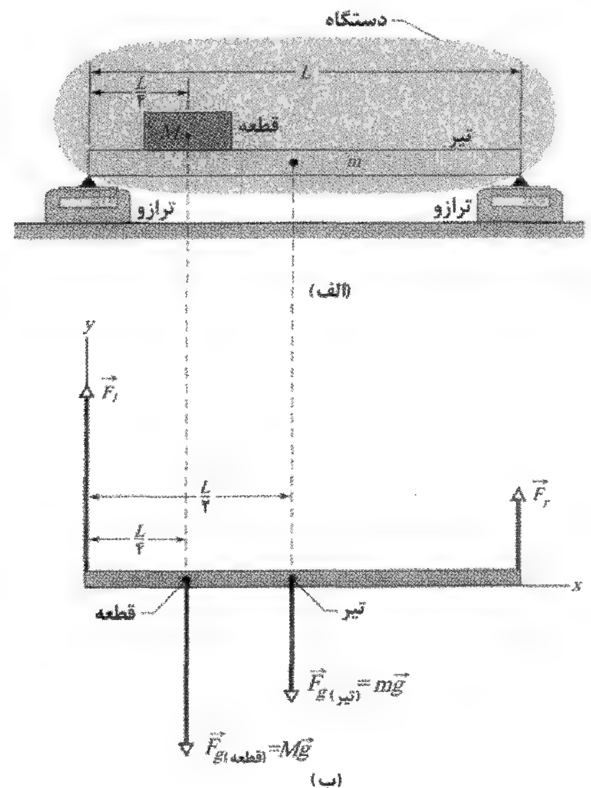

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۱ مهارت خود را تقویت کنید**

در شکل ۱۲-۵ الف، تیر یکنواختی به طول $L$ و جرم ۱/۸kg روی دو ترازو در حال سکون است. قطعهٔ یکنواختی با جرم $M$=۲/۷kg روی تیر قرار دارد که مرکز آن به فاصلهٔ $\frac{L}{4}$ از انتهای سمت چپ تیر واقع است. ترازوها چه عددی را نشان می‌دهند؟

**نکته‌های کلیدی** اولین قدمها در حل هر مسئله در مورد تعادل ایستایی از این قرارند: دستگاه مشخصی را برای تحلیل تعریف کنید و سپس نمودار جسم- آزاد نیروهایی را که به دستگاه وارد می‌شوند رسم کنید و تمام نیروها را روی نمودار نشان دهید. در اینجا، تیر و قطعه را با هم به عنوان دستگاه انتخاب می‌کنیم. پس از آن نیروهای وارد به دستگاه را روی نمودار شکل ۱۲-۵ ب نشان می‌دهیم. (انتخاب دستگاه به تجربه نیاز دارد و اغلب

بیش از یک انتخاب خوب وجود دارد؛ به قسمت ۲ تدبیرهای حل مسئلهٔ ۱ در زیر نگاه کنید.) چون دستگاه در حالت تعادل ایستایی است، معادله‌های تعادل نیروها (معادله‌های ۱۲-۷ و ۱۲-۸) و معادلهٔ تعادل گشتاور نیروها (معادلهٔ ۱۲-۹) را می‌توان به کار برد.

***محاسبه‌ها:*** نیروی عمودی وارد بر تیر از طرف ترازوها $\vec{F}_l$ در سمت چپ و $\vec{F}_r$ در سمت راست هستند. بزرگی این نیروها همان مقدارهایی هستند که ترازوها نشان می‌دهند و ما می‌خواهیم آنها را به دست آوریم. نیروی گرانشی $F_{g\,(\text{تیر})}$ به مرکز جرم تیر وارد می‌شود و برابر با $m\vec{g}$ است. به همین ترتیب نیروی گرانشی $\vec{F}_{g\,(\text{قطعه})}$ به مرکز جرم قطعه وارد می‌شود و برابر $M\vec{g}$ است اما، برای ساده کردن شکل ۱۲-۵ ب، قطعه به صورت نقطه و در محدودهٔ تیر نشان داده شده است و مبداء $\vec{F}_{g\,(\text{قطعه})}$ به مرکز جرم قطعه وارد می‌شود و برابر با $\vec{M}_g$ است. اما، برای ساده کردن شکل ۱۲-۵ ب، قطعه به صورت نقطه و در محدودهٔ تیر نشان داده شده است و مبداء $\vec{F}_{g\,(\text{قطعه})}$ از این نقطه رسم شده است. (این جابه‌جایی بردار $\vec{F}_{g\,(\text{قطعه})}$ در امتداد خط اثرش، گشتاور نیروی ناشی از $\vec{F}_{g\,(\text{قطعه})}$ را نسبت به هر محوری عمود به شکل تغییر نمی‌دهد.)




**شکل ۱۲-۵** (الف) تیری به جرم $m$ که قطعه‌ای به جرم $M$ روی آن قرار دارد. نمودار جسم- آزاد، نیروهای وارد بر دستگاه تیر- قطعه را نشان می‌دهد.

نیروها مؤلفهٔ $x$ ندارند، در نتیجه معادلهٔ ۱۲-۷ $(F_{\text{net},x}=0)$ هیچ اطلاعاتی به دست نمی‌دهد. برای مؤلفه‌های $y$ از معادلهٔ ۱۲-۸ $(F_{\text{net},y}=0)$ استفاده می‌کنیم

$$F_l+F_r-Mg-mg=0 \qquad (۱۲\text{-}۱۸)$$

این معادله شامل دو نیروی مجهول $F_l$ و $F_r$ است، در نتیجه باید از معادلهٔ ۱۲-۹، یعنی معادلهٔ مربوط به موازنهٔ گشتاور نیروها نیز استفاده کرد. این معادله را می‌توانیم برای هر محور عمود بر صفحهٔ شکل ۱۲-۵ به کار ببریم. محوری را که از انتهای چپ تیر عبور می‌کند به عنوان محور چرخش انتخاب می‌کنیم. همچنین برای علامت گشتاور نیروها از این قاعدهٔ کلی استفاده می‌کنیم: اگر گشتاور نیرو موجب چرخش ساعتگرد جسم ساکن حول محور چرخش شود، گشتاور نیرو منفی است. ولی اگر چرخش پادساعتگرد باشد، گشتاور مثبت است. سرانجام، گشتاور نیرو را به شکل $r_\perp F$ می‌نویسیم که بازوی گشتاور $r_\perp$، برای $F_l$ برابر با صفر، برای $M\vec{g}$ برابر با $L/4$، برای $m\vec{g}$ برابر با $L/2$ و برای $\vec{F}_r$ برابر با $L$ است.

اکنون می‌توانیم معادلهٔ موازنه $(\tau_{\text{net},z}=0)$ را به صورت زیر بنویسیم

$$(0)(F_l)-(L/4)(Mg)-(L/2)(mg)+(L)(F_r)=0$$

که به دست می‌دهد

$$F_r=\frac{1}{4}Mg+\frac{1}{2}mg$$
$$=\frac{1}{4}(2/7\text{kg})(9/8\text{m/s}^2)+\frac{1}{2}(1/8\text{kg})(9/8\text{m/s}^2)$$
$$=15/44\text{N}\approx15\text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

حال، با حل معادلهٔ ۱۲-۱۸ برای $F_l$ و قراردادن این نتیجه، داریم

$$F_l=(M+m)g-F_r$$
$$=(2/7\text{kg}+1/8\text{kg})(9/8\text{m/s}^2)-15/44\text{N}$$
$$=28/66\text{N}=29\text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

به راهبرد حل این مسئله توجه کنید: وقتی معادلهٔ مربوط به توازن مؤلفه‌های نیرو را نوشتیم، با دو مجهول مواجه شدیم. اگر معادلهٔ مربوط به توازن گشتاور نیروها را نسبت به یک محور اختیاری نوشته بودیم باز هم با همان دو مجهول مواجه می‌شدیم. ولی، چون ما محوری را انتخاب کردیم که از نقطهٔ اثر یکی از نیروهای مجهول، در اینجا $\vec{F}_l$، می‌گذشت با مشکلی مواجه نشدیم. این انتخاب یکی از نیروهای مجهول را از معادلهٔ گشتاور نیرو حذف می‌کند و امکان می‌دهد که بزرگی نیروی دیگر $\vec{F}_r$ را به‌دست آوریم. سپس با استفاده از معادلهٔ موازنهٔ مؤلفه‌های نیرو بزرگی نیروی مجهول باقیمانده را به دست می‌آوریم.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۲

در شکل ۱۲-۶ الف نردبانی به طول $L=12\text{m}$ و جرم $m=54\text{kg}$ به دیوار صافی (بدون اصطکاک) تکیه دارد. انتهای بالایی نردبان به فاصلهٔ $h=9/3$ از سطح پیاده رو (پیاده رو اصطکاک دارد) واقع است. مرکز جرم نردبان در فاصلهٔ $L/3$ از

انتهای پایین نردبان قرار دارد. یک مأمور آتش نشانی به جرم $M=72\,\text{kg}$ از نردبان آن قدر بالا می‌رود تا وقتی که مرکز جرم او در $L/2$ از انتهای پایینی نردبان قرار می‌گیرد. در این حالت، بزرگی نیروهایی که از طرف دیوار و پیاده‌رو بر نردبان وارد می‌شوند چقدر است؟

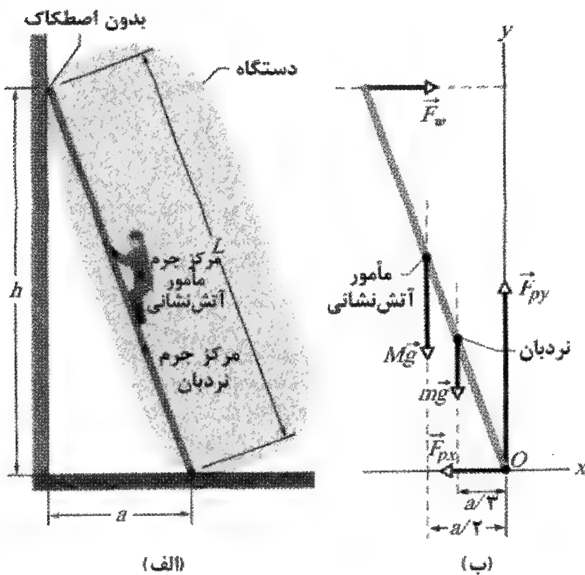
**نکته‌های کلیدی** ابتدا، دستگاه را به صورت مأمور آتش نشانی و نردبان با هم انتخاب می‌کنیم و سپس نمودار جسم - آزاد شکل ۱۲-۶ ب را رسم می‌کنیم. چون دستگاه در حالت تعادل است معادله‌های تعادل (معادله‌های ۱۲-۷ تا ۱۲-۹) را می‌توان بر آن اعمال کرد.

***محاسبه‌ها:*** در شکل ۱۲-۶ ب مأمور آتش نشانی به وسیلهٔ نقطه‌ای در محدودهٔ نردبان و نیروی گرانشی وارد بر او با $M\vec{g}$ نشان داده شده است. نقطه اثر این نیرو جابه جا شده است تا انتهای آن روی نقطه قرار گیرد. (با این جابه‌جایی گشتاور نیروی حاصل از $M\vec{g}$ نسبت به هر محور عمود بر صفحه تغییر نمی‌کند.)

تنها نیروی وارد بر نردبان توسط دیوار، نیروی افقی $\vec{F}_W$ است (در راستای دیوار بدون اصطکاک، نمی‌تواند نیروی اصطکاک وجود داشته باشد). نیروی وارد بر نردبان توسط پیاده‌رو $\vec{F}_P$ است که دارای مؤلفهٔ افقی $\vec{F}_{Px}$ یعنی نیروی اصطکاک ایستایی و مؤلفهٔ قائم $F_{py}$ است که نیروی عمودی است.

برای اعمال معادله‌های تعادل با معادلهٔ ۱۲-۹ $(\tau_{\text{net},z}=0)$ شروع می‌کنیم. برای انتخاب محور برای محاسبهٔ گشتاورهای نیرو نسبت به آن توجه داریم که در دو انتهای نردبان نیروهای مجهول ($\vec{F}_w$ و $\vec{F}_p$) وجود دارند. برای حذف مثلاً $\vec{F}_p$ در این محاسبه محور را در نقطهٔ $O$ و عمود بر صفحهٔ شکل انتخاب می‌کنیم. همچنین مبداء دستگاه مختصات $xy$ را نیز در نقطهٔ $O$ در نظر می‌گیریم. گشتاور نیرو نسبت به $O$ را می‌توانیم از معادله‌های ۱۰-۳۹ تا ۱۰-۴۱ به دست آوریم، اما در اینجا معادلهٔ ۱۰-۴۱ $(\tau=r_{\perp}F)$ برای به کاربردن ساده‌ترین است.

برای به دست آوردن بازوی گشتاور $r_{\perp}$ مربوط به نیروی $\vec{F}_w$، خط اثر این بردار را رسم می‌کنیم (خط چین افقی در شکل ۱۲-۶ ب). آنگاه، $r_{\perp}$ فاصلهٔ عمودی میان $O$ و خط اثر است. در شکل ۱۲-۶ ب $r_{\perp}$ در راستای محور $y$ بوده و برابر با ارتفاع $h$ است. به همین ترتیب، خطهای اثر $M\vec{g}$ و $m\vec{g}$ را رسم می‌کنیم و می‌بینیم که بازوی گشتاور آنها در امتداد محور $x$ واقع‌اند. برای فاصلهٔ $a$ نشان داده شده در شکل ۱۲-۶ الف بازوی گشتاورها به ترتیب عبارت‌اند از $a/2$ (مأمور آتش نشانی در وسط نردبان است) و $a/3$ (مرکز جرم نردبان در فاصلهٔ یک سوم از پای نردبان قرار دارد.) بازوهای گشتاور برای $\vec{F}_{px}$ و $\vec{F}_{py}$ صفرند.




**شکل ۱۲-۶** (الف) یک مأمور آتش نشانی تا وسط نردبانی که به دیوار بدون اصطکاک تکیه دارد بالا می‌رود. پیاده رو بدون اصطکاک نیست. (ب) نمودار جسم- آزاد، نیروهایی را که به دستگاه *مأمور آتش نشانی- نردبان* وارد می‌شوند نشان می‌دهد، مبداء دستگاه مختصات را در محلی که نیروی مجهول $\vec{F}_p$ (که مؤلفه‌های $\vec{F}_{px}$ و $\vec{F}_{py}$ آن نشان داده شده) وارد می‌شود انتخاب می‌کنیم.

اکنون با نوشتن رابطهٔ گشتاور نیرو به شکل $r_{\perp}F$، معادلهٔ موازنه $(\tau_{\text{net},z}=0)$ به صورت زیر در می‌آید

$$-(h)(F_w)+(a/2)(Mg)+(a/3)(mg)+(0)(F_{px})+(0)(F_{py})=0 \quad (۱۲-۱۹)$$

(قانون خودمان را یادآوری می‌کنیم: گشتاور نیروی مثبت مربوط به چرخش در جهت پادساعتگرد و گشتاور نیروی منفی مربوط به چرخش ساعتگرد است.)

با به کار بردن قضیهٔ فیثاغورس، در می‌یابیم که

$$a=\sqrt{L^2-h^2}=7/58\,\text{m}$$

سپس معادلهٔ ۱۲-۱۹ به دست می‌دهد

$$F_w=\frac{ga(M/2+m/3)}{h}=\frac{(9/8\,\text{m/s}^2)(7/58\,m)(72/2\,\text{kg}+45/3\,\text{kg})}{9/3\,\text{m}}=407\,\text{N}\approx 410\,\text{N} \quad \text{(پاسخ)}$$

اکنون لازم است که معادله‌های موازنهٔ نیرو را به کار بریم. معادلهٔ $F_{\text{net},x}=0$، به دست می‌دهد

$$F_w-F_{px}=0 \quad (۱۲-۲۰)$$

پس

$$F_w=F_{px}=410\,\text{N} \quad \text{(پاسخ)}$$

معادلهٔ $F_{\text{net},y}=0$، به دست می‌دهد

$$F_{py}-Mg-mg=0 \quad (۱۲-۲۱)$$

در نتیجه

$$F_{py}=(M+m)g=(72\,\text{kg}+45\,\text{kg})(9/8\,\text{m/s}^2)=1146/6\,\text{N}\approx 1100\,\text{N} \quad \text{(پاسخ)}$$

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۳**

شکل ۱۲-۷ الف گاوصندوقی به جرم $M=۴۳۰\text{kg}$ را نشان می‌دهد که به وسیلهٔ طنابی از بازوی متحرکی به اضلاع $a=۱/۹\text{m}$ و $b=۲/۵\text{m}$، آویزان شده است. این بازو شامل یک تیر با لولا و یک کابل افقی است. تیر یکنواخت دارای جرم $m=۸۵\text{kg}$ و جرم کابل و طناب قابل چشمپوشی است.

(الف) کشش $T_c$ در کابل چقدر است؟ به عبارت دیگر، بزرگی نیروی $\vec{T}_c$ که از طرف کابل به تیر وارد می‌شود، چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** دستگاه در اینجا فقط شامل تیر است و نیروهای وارد برآن در نمودار جسم- آزاد شکل ۱۲-۷ ب نشان داده شده‌اند. نیروی از طرف کابل برابر $T_c$ است. نیروی گرانشی وارد بر تیر به مرکز جرم تیر (در مرکز تیر) وارد می‌شود و با $m\vec{g}$ نشان داده شده است. مؤلفهٔ قائم نیروی وارد بر تیر از طرف لولا برابر با $\vec{F}_v$ و مؤلفهٔ افقی نیروی وارد بر تیر از طرف لولا برابر با $\vec{F}_h$ است. نیروی نگهدارندهٔ گاو صندوق توسط طناب $\vec{T}_r$ است. چون تیر، طناب و گاو صندوق ساکن هستند، بزرگی $\vec{T}_r$ برابر وزن گاو صندوق است: $T_r=Mg$.
مبداء $O$ دستگاه مختصات $xy$ را در محل لولا در نظر می‌گیریم.
چون دستگاه در حال تعادل ایستایی است، می‌توان معادله‌های تعادل را بر آن اعمال کرد.

***محاسبه‌ها:*** ابتدا با معادلهٔ ۱۲-۹ ($\tau_{\text{net},z}=۰$) شروع می‌کنیم.
توجه کنید که در اینجا بزرگی نیروی $\vec{T}_c$ مورد نظر است نه نیروی $\vec{F}_h$ و $\vec{F}_v$ که در نقطهٔ $O$ بر لولا وارد می‌شوند. برای حذف $\vec{F}_h$ و $\vec{F}_v$ از محاسبهٔ گشتاور نیرو باید گشتاور نیروها را نسبت به محوری که عمود بر صفحه است و از نقطهٔ $O$ می‌گذرد به دست آوریم. در این صورت، بازوی گشتاور نیروی $\vec{F}_h$ و $\vec{F}_v$ صفر خواهد شد. خط اثر $\vec{T}_c$ ، $\vec{T}_r$ و $m\vec{g}$ در شکل ۱۲-۷ ب به صورت خط‌چین نشان داده شده‌اند و بازوهای گشتاور مربوط به آنها به ترتیب عبارت‌اند از $a$ ، $b$ و $b/۲$.

با نوشتن گشتاور نیروها به شکل $r_\perp F$ و به کاربردن قانون مربوط به علامت گشتاورهای نیرو، معادلهٔ $\tau_{\text{net},z}=۰$ به این صورت در می‌آید

$$(a)(T_c)-(b)(T_r)-\left(\frac{۱}{۲}b\right)(mg)=۰$$

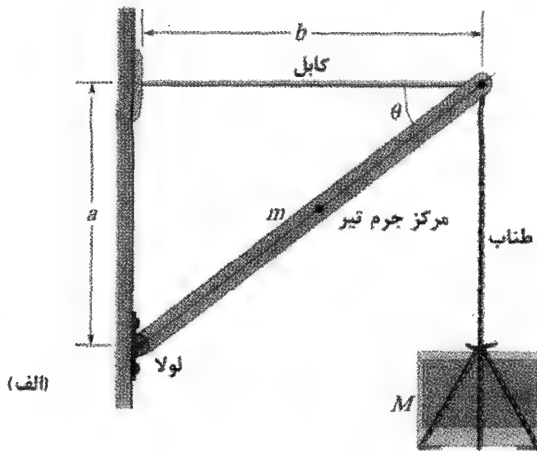
با قراردادن $Mg$ به جای $\vec{T}_r$ و حل آن برای $\vec{T}_c$ در می‌یابیم که

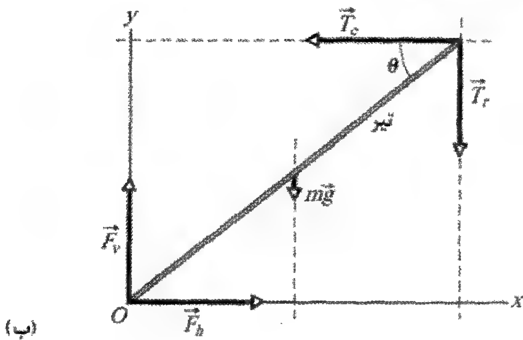
$$T_c=\frac{gb(M+\frac{۱}{۲}m)}{a}$$

$$=\frac{(۹/۸\text{m/s}^۲)(۲/۵\text{m})(۴۳۰\text{kg}+۸۵/۲\text{kg})}{۱/۹\text{m}}$$

$$=۶۰۹۳\text{N}\approx ۶۱۰۰\text{N}$$ (پاسخ)

(ب) بزرگی $F$ نیروی خالص وارد بر تیر از طرف لولا را به دست آورید.




**شکل ۱۲-۷** (الف) گاو صندوق سنگینی از یک بازوی متحرک شامل یک کابل فولادی افقی و یک تیر یکنواخت، آویزان است. (ب) نمودار جسم- آزاد برای تیر.

**نکتهٔ کلیدی** اکنون می‌خواهیم $\vec{F}_h$ و $\vec{F}_v$ را به دست آوریم تا از ترکیب آنها $F$ را پیدا کنیم. چون $\vec{T}_c$ را می‌دانیم، معادله‌های موازنهٔ نیرو را برای تیر به کار می‌بریم.

***محاسبه‌ها:*** برای موازنهٔ تیر در راستای افقی، رابطهٔ $F_{\text{net},x}=۰$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$F_h-T_c=۰$$

و در نتیجه

$$F_h=T_c=۶۰۹۳\text{N}$$

برای موازنهٔ قائم، رابطهٔ $F_{\text{net},y}=۰$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$F_v-mg-T_r=۰$$

با قراردادن $Mg$ به جای $T_r$ و حل معادله برای $F_v$، داریم

$$F_v=(m+M)g=(۸۵\text{kg}+۴۳۰\text{kg})(۹/۸\text{m/s}^۲)$$
$$=۵۰۴۷\text{N}$$

حال از قضیه فیثاغورس می‌توان نوشت

$$F=\sqrt{F_h^۲+F_v^۲}$$
$$=\sqrt{(۶۰۹۳\text{N})^۲+(۵۰۴۷\text{N})^۲}\approx ۷۹۰۰\text{N}$$ (پاسخ)

توجه کنید که $F$ به طور قابل توجهی از مجموع وزنهای گاوصندوق و تیر یعنی ۵۰۰۰N، یا کشش در سیم افقی یعنی ۶۱۰۰N بزرگتر است.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۴

فرض می‌کنیم که برج پیزا یک استوانه توخالی یکنواخت به شعاع $R=۹/۸\text{m}$ و ارتفاع $h=۶۰\text{m}$ باشد. مرکز جرم آن در ارتفاع $h/۲$ در راستای محور مرکزی استوانه واقع است. در شکل ۱۲-۸ الف، یک استوانه قائم دیده می‌شود. در شکل ۱۲-۸ ب، استوانه به اندازهٔ $\theta=۵/۵^\circ$ به طرف راست (به طرف دیوار جنوبی برج) کج شده، که مرکز جرم را به اندازهٔ $d$ جابه‌جا کرده است. فرض می‌کنیم که زمین فقط دو نیرو بر برج وارد می‌کند. یک نیروی عمودی $\vec{F}_{NL}$ به دیوار چپ (شمالی) و یک نیروی عمودی $\vec{F}_{NR}$ بر دیوار راست (جنوبی). به علت کج شدن چند درصد بزرگی نیروی $F_{NR}$ افزایش می‌یابد؟

**نکتهٔ کلیدی** چون برج هنوز ایستاده است، آن در حال تعادل است و بنابراین مجموع گشتاور نیروهای محاسبه شده نسبت به هر نقطه‌ای باید صفر باشد.

***محاسبه‌ها:*** چون می‌خواهیم $F_{NR}$ وارد بر سمت راست را محاسبه کنیم و $F_{NL}$ وارد بر طرف چپ را نمی‌دانیم یا نمی‌خواهیم، نقطه اتکایی در طرف چپ برای محاسبهٔ گشتاورها در نظر می‌گیریم. نیروهای وارد بر برج ایستاده در شکل ۱۲-۸ پ نشان داده شده‌اند. نیروی گرانشی $m\vec{g}$ که بر مرکز جرم وارد می‌شود، دارای خط اثر قائم و بازوی گشتاور $R$ (فاصلهٔ عمودی از نقطه اتکا تا خط اثر) است. گشتاور مربوط به این نیرو نسبت به نقطهٔ اتکا چرخش ساعتگرد ایجاد می‌کند و بنابراین، منفی است. نیروی عمودی $\vec{F}_{NR}$ وارد بر دیوار جنوبی دارای خط اثر عمودی و بازوی گشتاور آن $۲R$ است. گشتاور مربوط به این نیرو نسبت به نقطهٔ اتکا چرخش پادساعتگرد ایجاد می‌کند و بنابراین، مثبت است. اکنون می‌توان معادله تعادل گشتاور $(\tau_{\text{net},z}=۰)$ را به صورت زیر نوشت

$$-(R)(mg)+(۲R)(F_{NR})=۰$$

که از آن خواهیم داشت

$$F_{NR}=\frac{۱}{۲}mg \qquad (۱۲\text{-}۲۰)$$

این نتیجه را می‌توان حدس زد: با مرکز جرم واقع در محور مرکزی (خط تقارن استوانه)، طرف راست نیمی از وزن استوانه را تحمل می‌کند.

در شکل ۱۲-۸ ب، مرکز جرم به اندازهٔ فاصلهٔ زیر به سمت راست جابه‌جا شده است

$$d=\frac{۱}{۲}h\tan\theta$$

تنها تغییر در تعادل معادلهٔ گشتاورها این است که بازوی گشتاور برای نیروی گرانشی اکنون $R+d$ است و نیروی عمودی در سمت راست بزرگی جدید $F'_{NR}$ را دارد (شکل ۱۲-۸ ت). بنابراین، داریم

$$(-R+d)(mg)+(۲R)(F'_{NR})=۰$$

که به دست می‌دهد

$$F'_{NR}=\frac{(R+d)}{۲R}mg \qquad (۱۲\text{-}۲۱)$$

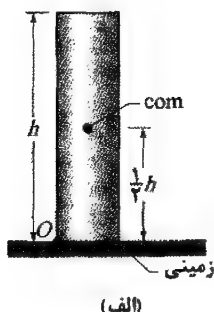
با تقسیم معادلهٔ ۱۲-۲۱ بر معادلهٔ ۱۲-۲۰ و سپس با قرار دادن $d$، خواهیم داشت

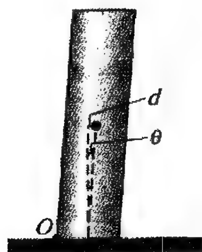
$$\frac{F'_{NR}}{F_{NR}}=\frac{R+d}{R}=۱+\frac{d}{R}=۱+\frac{۰/۵h\tan\theta}{R}$$

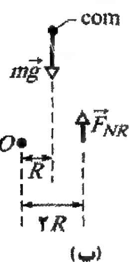
با قرار دادن مقدارهای $h=۶۰\text{m}$، $R=۹/۸\text{m}$ و $\theta=۵/۵^\circ$ خواهیم داشت

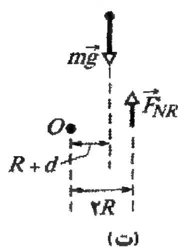
$$\frac{F'_{NR}}{F_{NR}}=۱/۲۹$$

بنابراین، مدل سادهٔ ما پیش‌بینی می‌کند که، هر چند کج شدگی کوچک است، نیروی عمودی وارد بر قسمت جنوبی برج به اندازهٔ ۳۰٪ بیشتر می‌شود. خطر برای برج در این است که نیرو باعث شود که دیوار جنوبی کج شده به طرف بیرون بترکد.




**شکل ۱۲-۸** ساخت مدل استوانه از برج پیزا: (الف) ایستاده و (ب) کج، با مرکز جرم جابه‌جا شده به طرف راست. نیروها و بازوهای گشتاور برای پیدا کردن گشتاورها نسبت به نقطه اتکا در نقطهٔ $O$ برای استوانه (پ) ایستاده و (ت) کج.

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱: مسائل تعادل ایستایی*

در اینجا فهرستی از مرحله‌های مختلف برای حل مسئله‌های مربوط به تعادل ایستایی بیان می‌شود:

۱- *نموداری* از مسئله را رسم کنید.

۲- *دستگاهی* که می‌خواهید قانونهای تعادل را برای آن به کار ببرید مشخص کنید و منحنی بسته‌ای را به دور آن بکشید تا کاملاً برای شما مشخص باشد. در برخی وضعیتها شما

می‌توانید یک جسم تنها را به عنوان دستگاه انتخاب کنید؛ آن جسم، جسمی است که می‌خواهید در حال تعادل باشد. در سایر وضعیتها، شما می‌توانید جسمهای دیگری *اگر* مسئله را ساده‌تر می‌کنند در دستگاه خود منظور کنید. برای مثال، فرض کنید در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۲ شما فقط نردبان را به عنوان دستگاه خود انتخاب کنید. آن وقت در شکل ۱۲-۶ ب، شما باید نیروهای نامعلوم دیگری را هم که توسط دستها و پاهای مأمور آتش‌نشانی به نردبان وارد می‌شوند به حساب آورید. این نیروهای نامعلوم اضافی، محاسبه‌های مربوط به تعادل را پیچیده‌تر می‌کنند. دستگاه در شکل ۱۲-۶ چنان انتخاب شده است که شامل مأمور آتش‌نشانی نیز باشد، بنابراین آن نیروها، *نیروهای داخلی* دستگاه به حساب می‌آیند و برای حل مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۲ نیازی به یافتن آنها نیست.

۳- *نمودار جسم- آزاد دستگاه را رسم کنید.* تمام نیروهای وارد بر دستگاه را نشان دهید؛ آنها را به وضوح مشخص کنید و مطمئن شوید که نقطهٔ اثر و خط اثر آنها به درستی نشان داده شده باشند.

۴- *محورهای $x$ و $y$* دستگاه مختصات را رسم کنید، آنها را به گونه‌ای انتخاب کنید که حداقل یکی از محورها با یک یا چند نیروی نامعلوم موازی باشد. نیروهایی را که در امتداد یکی از محورها نیستند به مؤلفه‌هایشان تجربه کنید. در تمام مسائل نمونه منطقی است که محور $x$ را افقی و محور $y$ را قائم در نظر بگیریم.

۵- با به کار بردن نمادها دو *معادلهٔ موازنهٔ نیروها* را بنویسید.

۶- یک یا چند محور چرخش عمود بر صفحهٔ شکل را انتخاب کنید و *معادلهٔ موازنهٔ گشتاور نیروها* را برای هر یک از محورها بنویسید. اگر محوری را انتخاب کنید که از خط اثر نیروی مجهول در معادله بگذرد معادله ساده خواهد شد، چون نیروی مجهول در معادله ظاهر نمی‌شود.

۷- معادله‌ها را به صورت جبری برای مجهولها *حل* کنید. بعضی از دانشجویان در این مرحله ترجیح می‌دهند که مقدارهای عددی را به همراه یکای آنها در هر یک از معادله‌های مستقل، بخصوص وقتی شامل عملیات جبری هستند، قرار دهند. ولی افراد با تجربه در حل مسائل، روش حل جبری را ترجیح می‌دهند که بستگی پاسخ را به متغیرهای متفاوت نشان می‌دهد.

۸- سرانجام *عددها* با یکای مربوط را در حلهای جبری *قرار دهید* و مقدارهای عددی مجهولها را به دست آورید.

۹- به جوابهای خود نگاه کنید - آیا دارای مفهوم هستند؟ آیا آشکارا خیلی بزرگ یا خیلی کوچک نیستند؟ آیا علامت آنها صحیح است؟ آیا یکاهای آنها مناسب‌اند؟

## ۱۲-۶ ساختارهای نامعین

در مسئله‌های این فصل، فقط سه معادلهٔ مستقل در اختیار داریم، معمولاً دو معادله برای موازنهٔ نیروها و یکی هم معادلهٔ موازنهٔ گشتاور نیرو نسبت به یک محور معلوم. به این ترتیب اگر مسئله‌ای بیش از سه مجهول داشته باشد نمی‌توانیم آن را حل کنیم.

یافتن چنین مسئله‌هایی ساده است. برای مثال در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۲، می‌توانستیم فرض کنیم که بین دیوار و انتهای بالایی نردبان اصطکاک وجود دارد. در این صورت، یک نیروی اصطکاک قائم در محل تماس نردبان و دیوار می‌داشتیم که تعداد نیروهای مجهول را به چهار می‌رساند و فقط با سه معادله نمی‌توانستیم این مسئله را حل کنیم.

همچنین یک اتومبیل با بار غیر یکنواخت را در نظر بگیرید. نیروهای وارد روی چهار چرخ که متفاوت‌اند، کدام اند؟ بازهم نمی‌توانیم آنها را به دست آوریم چون فقط سه معادلهٔ مستقل داریم. به همین ترتیب، مسئلهٔ مربوط به تعادل یک میز با سه پایه را می‌توان حل کرد. ولی مسئلهٔ میزی با چهارپایه را نمی‌توان حل کرد. مسائل مشابهی که در آن تعداد مجهولها بیشتر از تعداد معادله‌ها باشند، **نا معین** نامیده می‌شوند.

با این حال، در دنیای واقعی باز هم برای مسئله‌های نامعین راه‌حلهایی وجود دارند. اگر چرخهای اتومبیلی را روی چهار ترازوی کفه‌ای قرار دهیم، هر ترازو عددی را نشان می‌دهد که مجموع این عددها برابر وزن اتومبیل است. پس چه چیزی مانع تلاش ما برای حل معادله‌ها برای هر یک از چرخهاست؟

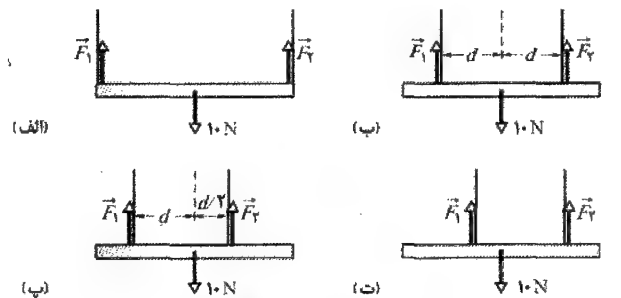
مسئله این است که ما فرض کردیم، بدون اینکه زیاد بر آن تأکید کنیم، جسمهایی که برای آنها معادله‌های تعادل ایستایی را به کار می‌بریم، کاملاً صلب‌اند. با این فرض، منظور ما این است که آنها بر اثر وارد آمدن نیرو تغییر شکل نمی‌دهند. چنین اجسامی مطلقاً وجود ندارند. برای مثال، لاستیک چرخهای اتومبیل به راحتی تغییر شکل می‌دهد تا اینکه اتومبیل در وضعیت تعادل ایستایی قرار گیرد.

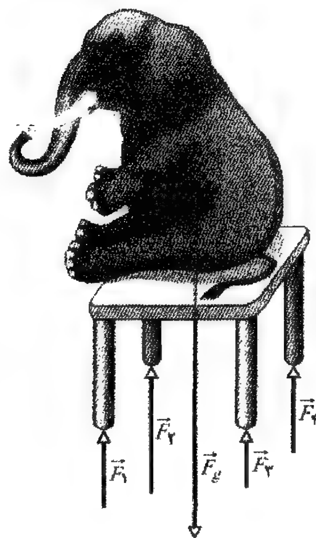
همهٔ ما از میزهای لق رستورانها خاطره‌ای داریم که با قراردادن مقداری کاغذ تا شده زیر یکی از پایه‌ها آن را محکم می‌کنیم. ولی اگر فیل بزرگی روی این میز بنشیند، شما می‌توانید مطمئن باشید که اگر میز واژگون نشود حتماً مانند لاستیکهای اتومبیل تغییر شکل می‌دهد. همهٔ پایه‌های میز با زمین تماس پیدا می‌کنند، تمام نیروهایی که به پایه‌ها به سمت بالا وارد می‌شوند مطابق شکل ۱۲-۹ معین (و متفاوت) هستند و میز دیگر لق نمی‌زند. اما چگونه می‌توانیم مقدار نیروهایی را که به پایه‌های میز وارد می‌شوند به دست آوریم؟

برای چنین مسئله‌های تعادل نامعین، باید از معادله‌های تعادل با استفاده از اطلاعاتی اضافی دربارهٔ *کشسانی* بهره بگیریم، که شاخه‌ای از فیزیک و مهندسی است که شرح

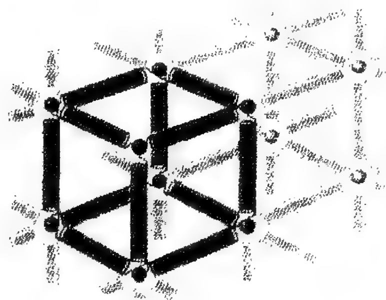
می‌دهد وقتی نیروهایی به جسمهای واقعی وارد شوند چگونه تغییر شکل می‌دهند. بخش بعدی مقدمه‌ای برای بیان این مطلب است.

✔ **نکتهٔ وارسی ۳** می‌خواهیم یک میلهٔ یکنواخت افقی به وزن $10\,N$ را به وسیلهٔ دو سیم که نیروهای به طرف بالای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را به آن وارد می‌کنند بیاویزیم. شکلها چهار آرایش را برای این سیمها نشان می‌دهند. کدام آرایشها، در صورت وجود، نامعین هستند (به طوری که نمی‌توانیم آنها را برای مقدارهای عددی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ حل کنیم)؟



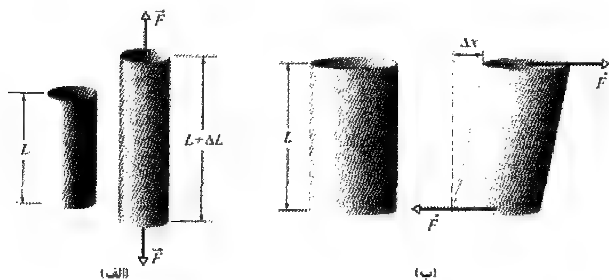

**شکل ۱۲-۹** میزی دارای ساختار نامعین است و چهار نیرویی که به پایه‌های میز وارد می‌شوند از نظر بزرگی متفاوت‌اند و ما نمی‌توانیم فقط از قانونهای تعادل ایستایی آنها را به دست آوریم.

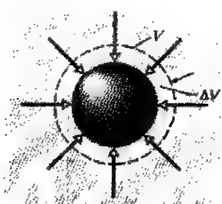


**شکل ۱۲-۱۰** اتمهای یک جسم صلب فلزی روی یک شبکهٔ سه بعدی تکرار شده‌اند. فنرها بیانگر نیروهای بین اتمی‌اند.

## ۱۲-۷ کشسانی

وقتی تعداد زیادی از اتمها در کنار هم قرار می‌گیرند تا فلز صلبی مانند یک میخ آهنی را تشکیل دهند، آنها در یک شبکهٔ سه بعدی در موضعهای تعادل و به صورت آرایشی تکراری قرار می‌گیرند که در آن هر اتم دارای فاصلهٔ تعادلی مشخصی از نزدیکترین مجاورهای خود است. اتمها به وسیلهٔ نیروهای بین اتمی که در شکل ۱۲-۱۰ به وسیلهٔ فنرهایی نشان داده شده‌اند، در کنار هم قرار می‌گیرند. شبکه به طور قابل ملاحظه‌ای صلب است و می‌توان به صورت دیگری چنین گفت که «فنرهای بین اتمی» بینهایت سفت‌اند. به این دلیل است که خیلی از جسمهای معمولی مانند نردبان، میز، و قاشق فلزی را کاملاً صلب احساس می‌کنیم. البته بعضی از جسمهای معمولی مانند شیلنگ آبیاری یا دستکش لاستیکی وجود دارند که به هیچ عنوان یک جسم صلب را تداعی نمی‌کنند. اتمهایی که چنین جسمهایی را تشکیل می‌دهند یک شبکهٔ صلب مانند آنچه در شکل ۱۲-۱۰ نشان داده شده تشکیل نمی‌دهند، اما در امتداد زنجیره‌های مولکولی انعطاف‌پذیری، ردیف می‌شوند و هر زنجیره به زنجیرهٔ مجاور به طور ضعیفی پیوند دارد.




**شکل ۱۲-۱۱** (الف) استوانه‌ای تحت تأثیر *تنش کششی* قرار گرفته و به اندازهٔ $\Delta L$ کشیده شده است. (ب) استوانه تحت تأثیر *تنش برشی* قرار گرفته و به اندازهٔ $\Delta x$ تغییر شکل داده است، تا اندازه‌ای شبیه بسته‌ای کارت که همین طور تغییر شکل می‌دهند. (پ) کرهٔ توپری که در مایعی تحت تأثیر *تنش هیدرولیکی* قرار گیرد حجمش به اندازهٔ $\Delta V$ کاهش پیدا می‌کند. همهٔ تغییر شکلها به طور اغراق‌آمیزی بزرگ نشان داده شده‌اند.

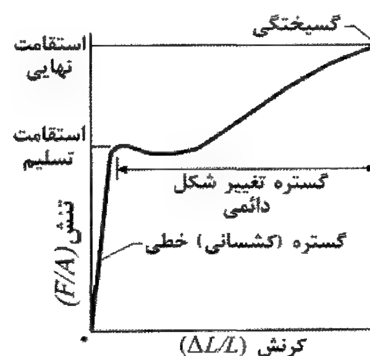
همهٔ جسمهای «صلب» واقعی تا حدی **کشسان** هستند، به این معنی که با کشیدن، هل دادن، پیچاندن و متراکم کردن می‌توان ابعاد آنها را کمی تغییر داد. برای اینکه احساسی از مرتبهٔ بزرگی این تغییرات به دست آید یک میلهٔ فولادی قائم به

طول 1m و قطر 1cm را در نظر می‌گیریم. اگر وزنه‌ای را از یک انتهای این میله آویزان کنیم، میله کشیده خواهد شد، اما فقط به اندازهٔ تقریباً ۰/۵mm یا ۰/۰۵٪. علاوه بر این، وقتی وزنه را از میله جدا کنیم، میله به طول اصلی‌اش بر می‌گردد.




**شکل ۱۲-۱۲** نمونهٔ آزمون که برای تعیین منحنی تنش- کرنش مطابق شکل ۱۲-۱۳، کار می‌رود. تغییری که در طول $L$ رخ می‌دهد به وسیلهٔ آزمون تنش کششی- کرنشی اندازه‌گیری می‌شود.

اگر دو وزنه را از میله آویزان کنیم، میله به صورت دائم کشیده می‌شود و وقتی وزنه‌ها را از میله جدا کنیم، میله به طول اولی خود بر نمی‌گردد. اگر سه وزنه به میله آویزان کنیم میله می‌شکند. درست قبل از گسیختگی، افزایش طول میله کمتر از ۰/۲٪ است. اگر چه تغییر شکلهایی به این اندازه کوچک به نظر می‌رسند، اما در کارهای مهندسی مهم‌اند. (اینکه بال هواپیما با وجود تحمل فشار در جای خود می‌ماند مسلماً مهم است.)




**شکل ۱۲-۱۳** منحنی تنش - کرنش برای نمونهٔ آزمون فولادی نظیر شکل ۱۲-۱۲. وقتی که تنش برابر با استقامت تسلیم ماده باشد نمونه تغییر شکل دائمی می‌دهد. وقتی که تنش به استقامت نهایی برسد، گسیختگی رخ می‌دهد.

شکل ۱۲-۱۱ سه روش را نشان می‌دهد که ابعاد جسم صلبی می‌تواند بر اثر اعمال نیروهایی تغییر کند. در شکل ۱۲-۱۱ الف استوانه‌ای کشیده شده است. در شکل ۱۲-۱۱ ب استوانه به وسیلهٔ نیرویی که عمود بر محور آن است تغییر شکل داده است، مانند اینکه یک نفر بسته‌ای از کارتها یا یک کتاب را تغییر شکل بدهد. در شکل ۱۲-۱۱ پ یک جسم صلب درمایعی قرار دارد و از همه طرف به طور یکنواخت تحت فشار زیادی فشرده شده است. چیزی که در این سه نوع تغییر شکل اشتراک دارد **تنش** یا نیروی عامل تغییر شکل دهنده بر واحد سطح است که **کرنش** یا واحد تغییر شکل را ایجاد می‌کند. در شکل ۱۲-۱۱ در (الف) *تنش کششی* (وابسته به کشیدگی) ، در (ب) *تنش برشی* و در (پ) *تنش هیدرولیکی* نشان داده شده‌اند.

در این سه حالت شکل ۱۲-۱۱، تنشها و کرنشها دارای شکلهای متفاوت‌اند، اما در گسترهٔ بهره‌وری مهندسی- تنش و کرنش با یکدیگر متناسب‌اند. ثابت تناسب **مدول کشسانی** نامیده می‌شود. بنابراین

$$\text{تنش} = \text{مدول} \times \text{کرنش} \qquad (۲۲-۱۲)$$

در یک آزمون استاندارد، تنش کششی در استوانهٔ آزمون به آهستگی از صفر تا وقتی که استوانه بشکند افزایش می‌یابد (همانند شکل ۱۲-۱۲) و کرنش با دقت اندازه‌گیری و تغییرات آن رسم می‌شود. نتیجهٔ حاصل نمودار تنش برحسب کرنش مشابه شکل ۱۲-۱۳ است. برای گسترهٔ وسیعی از تنشهای به کار برده شده، رابطهٔ تنش - کرنش خطی است و وقتی تنش برداشته شود نمونه ابعاد اصلی خود را باز می‌یابد؛ و در این گستره است که معادلهٔ ۱۲-۲۲ به کار می‌رود. اگر تنش بیش از **استقامت تسلیم** $S_y$ نمونه افزیش یابد، نمونه تغییر شکل دائمی می‌دهد. اگر تنشی بازهم افزایش یابد، نمونه سرانجام در تنشی که **استقامت نهایی** $S_u$ خوانده می‌شود، از هم خواهد گسیخت.

## کشش و تراکم

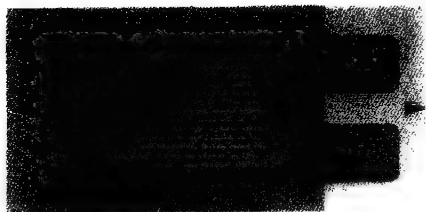
در کشش یا تراکم ساده، تنش وارد بر یک جسم به صورت $F/A$ تعریف می‌شود، که در آن $F$ بزرگی نیرویی است که به طور عمود بر سطح $A$ جسم وارد می‌شود. پس کرنش یا واحد تغییر شکل یک کمیت بدون بعد $\Delta L/L$ است، یعنی تغییر نسبی (یا گاهی درصد تغییر) در طول نمونه است. اگر نمونه میلهٔ درازی باشد و تنش از استقامت تسلیم تجاوز نکند، آنگاه وقتی تنش به میله وارد شود نه تنها همهٔ میله بلکه هر قسمت از آن کرنش یکسانی خواهد داشت. چون کرنش بدون بعد است، مدول در معادلهٔ ۱۲-۲۲ دارای همان ابعاد مشابه تنش، یعنی نیرو بر واحد سطح است.

مدول برای تنشهای کششی و تراکمی، **مدول یانگ** نامیده می‌شود و در کارهای مهندسی آن را با $E$ نشان می‌دهند. در نتیجه، معادلهٔ ۱۲-۲۲ به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{F}{A}=E\frac{\Delta L}{L} \qquad (۲۳-۱۲)$$

کرنش $\Delta L/L$ در نمونه اغلب به راحتی *با کرنش سنج* (شکل ۱۲-۱۴) اندازه‌گیری می‌شود. این وسیلهٔ ساده و مفید که می‌تواند مستقیماً به وسیلهٔ چسب به دستگاه مورد نظر متصل شود بر پایهٔ این اصل کار می‌کند که خاصیت الکتریکی وسیلهٔ مورد سنجش بستگی به کرنشی که در آن حاصل می‌شود دارد.

اگر چه مدول یانگ مربوط به یک جسم ممکن است تقریباً برای کشش و تراکم یکسان باشد، اما استقامت نهایی جسم برای دو نوع تنش ممکن است متفاوت باشد. برای مثال، بتون از نظر فشردگی بسیار مقاوم است ولی برای کشش بسیار ضعیف است، یعنی اینکه تقریباً هیچ وقت برای این منظور به کار نمی‌رود.



**شکل ۱۲-۱۴** یک کرنش‌سنج با ابعاد کلی ۹/۸ mm در ۴/۸ mm. وسیلهٔ سنجش با چسب به جسمی که کرنش آن باید اندازه‌گیری شود چسبانده می‌شود؛ وسیلهٔ سنجش همان کرنش جسم را تحمل می‌کند. مقاومت الکتریکی وسیلهٔ مورد سنجش با کرنش تغییر می‌کند و امکان می‌دهد تا کرنشهایی تا حدود ۳٪ اندازه گیری شوند.

جدول ۱۲-۱، مدول یانگ و دیگر خواص کشسانی برخی از مواد را که در مهندسی حائز اهمیت‌اند نشان می‌دهد.

**جدول ۱۲-۱**

برخی خواص کشسانی مواد که در مهندسی از اهمیت برخوردارند.

| ماده | چگالی $\rho$ $(kg/m^3)$ | مدول یانگ $E$ $(10^9\ N/m^2)$ | استقامت نهایی $S_u$ $(10^6\ N/m^2)$ | استقامت و تسلیم $(10^6 N/m^2)$ |
|---|---|---|---|---|
| فولاد[1] | ۷۸۶۰ | ۲۰۰ | ۴۰۰ | ۲۵۰ |
| آلومینیوم | ۲۷۱۰ | ۷۰ | ۱۱۰ | ۹۵ |
| شیشه | ۲۱۹۰ | ۶۵ | [2]۵۰ | – |
| بتون[3] | ۲۳۲۰ | ۳۰ | [2]۴۰ | – |
| چوب [4] | ۵۲۵ | ۱۳ | [2]۵۰ | – |
| استخوان | ۱۹۰۰ | [2]۹ | [2]۱۷۰ | – |
| پلی‌استایرن | ۱۰۵۰ | ۳ | ۴۸ | – |

۱- فولاد ساختمانی (ASTM-A36)　۲- تحت تراکم

۳- استقامت بالا　۴- صنوبر داگلاس

### *برش*

در حالت برش نیز تنش نیرو بر یکای سطح است، اما بردار نیرو به جای اینکه عمود بر سطح باشد در خود سطح قرار دارد. کرنش نسبت بدون بعد $\Delta x/L$ با مقدارهای تعریف شده مطابق شکل ۱۲-۱۱ ب است. مدول متناظر این حالت که در کارهای مهندسی با نماد $G$ نمایش داده می‌شود، **مدول برشی** نام دارد. برای برش معادلهٔ ۱۲-۲۲ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{F}{A}=G\frac{\Delta x}{L} \qquad (۱۲-۲۴)$$

تنشهای برشی در تاب برداشتن یک میله گردان که تحت بار، چرخش می‌کند و شکستن استخوان وقتی که خم می‌شود، نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

### *تنش هیدرولیکی*

در شکل ۱۲-۱۱ پ، تنش عبارت است از فشار $p$ شاره وارد بر جسم، و در فصل ۱۴ خواهیم دید که فشار نیرو بر واحد سطح است. کرنش $\Delta V/V$ است، که در آن $V$ حجم اولیهٔ نمونه و $\Delta V$ مقدار مطلق تغییر حجم است. مدول متناظر که با نماد $B$ نشان داده می‌شود. **مدول کپه‌ای (مدول حجمی) ماده** نام دارد. در این حالت گفته می‌شود که جسم تحت *تراکم هیدرولیکی* است و فشار را می‌توان *تنش هیدرولیکی* نامید. برای این وضعیت معادلهٔ ۱۲-۲۲ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$p=B\frac{\Delta V}{V} \qquad (۱۲-۲۵)$$

مدول کپه‌ای برای آب $2/2\times10^9\ N/m^2$ و برای فولاد $1/6\times10^{11}\ N/m^2$ است. در کف اقیانوس آرام در عمق متوسط ۴۰۰۰m فشار آب برابر $4/0\times10^7\ N/m^2$ است. تراکم نسبی $\Delta V/V$ حجم آب در این فشار برابر ۱/۸٪ است که برای فولاد فقط تقریباً ۰/۰۲۵٪ است. به طور کلی، اجسام صلب- با شبکهٔ اتمی صلبشان- کمتر از مایعات که اتمها و مولکولهای آنها با اتمها و مولکولهای مجاور پیوند ضعیفتری دارند تراکم پذیرند.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۵**

انتهای یک میلهٔ فولادی دارای شعاع $R=9/5\,mm$ و طول $L=81\ cm$ در گیره قرار دارد. نیروی $F=6/2\times10^4\ N$ عمود بر وجه انتهای میله (به طور یکنواخت در سطح) بر انتهای دیگر وارد می‌شود. تنش در میله، افزایش طول میله و کرنش میله چقدرند؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) تنش عبارت است از نسبت بزرگی $F$ نیروی عمود بر مساحت $A$. این نسبت طرف چپ معادلهٔ ۱۲-۲۳ است. (۲) تغییر طول $\Delta L$ توسط معادلهٔ ۱۲-۲۳ $(F/A=E\Delta L/L)$ به تنش و مدول یانگ مرتبط است. (۳) کرنش عبارت است از نسبت تغییر طول به طول اولیهٔ $L$.

***محاسبه‌ها:*** برای پیدا کردن تنش، می‌نویسیم

$$\text{تنش}=\frac{F}{A}=\frac{F}{\pi R^2}=\frac{6/2\times10^4 N}{(\pi)(9/5\times10^{-3}m)^2}$$

$$=2/2\times10^8\ N/m^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

استقامت تسلیم برای فولاد ساختمانی $2/5\times10^{11} N/m^2$ است، در نتیجه، این میله به طور خطرناکی به استقامت تسلیم خود نزدیک است.

مقدار مدول یانگ را برای فولاد در جدول ۱۲-۱ پیدا می‌کنیم. بنابراین، از معادلهٔ ۱۲-۲۳ تغییر طول پیدا می‌شود

$$\Delta L=\frac{(F/A)L}{E}=\frac{(2/2\times10^8\ N/m^2)(0/81m)}{2/0\times10^{11}N/m^2}$$

$$=8/9\times10^{-4}\ m=0/89\,mm \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای کرنش داریم

$$\frac{\Delta L}{L}=\frac{8/9\times10^{-4}\ m}{0/81\ m}$$

$$=1/1\times10^{-3}=\%0/11 \qquad \text{(پاسخ)}$$

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۶**

میزی دارای سه پایه هر یک به طول $۱/۰۰\,\text{m}$ است وچهارمین پایه به اندازهٔ $d=۰/۵۰\,\text{mm}$ بلندتر است، لذا میز کمی لق می‌زند. استوانهٔ فولادی سنگینی که جرم آن $M=۲۹۰\,\text{kg}$ است روی میز (که جرمش خیلی کمتر از $M$ است) قرار داده می‌شود. لذا پایه‌های میز متراکم می‌شوند و میز دیگر لق نمی‌زند. پایه‌های میز استوانه‌های چوبی و مساحت سطح مقطع آنها برابر $A=۱/۰\,\text{cm}^۲$ است. مدول یانگ چوب برابر $E=۱/۳\times۱۰^{۱۰}\,\text{N/m}^۲$ است. کف اتاق به هریک از پایه‌ها چه نیرویی وارد می‌کند؟

**نکته‌های کلیدی** میز و استوانهٔ فولادی را دستگاه در نظر می‌گیریم. در این صورت وضعیت دستگاه مشابه وضعیت دستگاه در شکل ۱۲-۹ است با این تفاوت که اکنون استوانهٔ فولادی روی میز قرار دارد. اگر سطح میز تراز باقی بماند، پایه‌ها باید به سه طریق زیر متراکم شوند: هر یک از سه پایه کوتاه باید به مقدار یکسانی متراکم شوند (که آن را $\Delta L_۳$ می‌نامیم) و به این ترتیب نیروی یکسان $F_۳$ به آنها وارد می‌شود. تنها پایهٔ بلند باید به مقدار بزرگتر $\Delta L_۴$ متراکم شود، پس بزرگی نیروی $F_۴$ وارد بر آن باید بزرگتر باشد. به عبارت دیگر برای تراز بودن سطح میز باید داشته باشیم

$$\Delta L_۴=\Delta L_۳+d \tag{۱۲-۲۶}$$

از معادلهٔ ۱۲-۲۳ می‌توانیم رابطهٔ تغییر در طول با نیرویی که باعث این تغییر می‌شود را به صورت $\Delta L = FL/AE$ بنویسیم که در آن $L$ طول اولیهٔ پایه است. با استفاده از این رابطه $\Delta L_۴$ و $\Delta L_۳$ را در معادلهٔ ۱۲-۲۶ قرار می‌دهیم. توجه کنید که می‌توانیم بگوییم طول اولیهٔ $L$ تقریباً برای تمام پایه‌ها یکسان است.

***محاسبه‌ها:*** پس داریم

$$\frac{F_۴L}{AE}=\frac{F_۳L}{AE}+d \tag{۱۲-۲۷}$$

این معادله را نمی‌توانیم حل کنیم چون دو مجهول $F_۴$ و $F_۳$ در آن وجود دارد.

برای به دست آوردن دومین معادله که شامل $F_۴$ و $F_۳$ باشد، می‌توانیم از محور قائم $y$ استفاده کنیم و معادلهٔ موازنهٔ نیروهای قائم $(F_{\text{net},y}=۰)$ را به صورت زیر بنویسیم

$$۳F_۳+F_۴-Mg=۰ \tag{۱۲-۲۸}$$

که در این رابطه $Mg$ برابر با بزرگی نیروی گرانشی وارد بر دستگاه است. (نیروی $\vec{F}_۳$ به سه پایه وارد می‌شود.) برای حل همزمان معادله‌های ۱۲-۲۷ و ۱۲-۲۸ برای تعیین مثلاً $F_۳$، ابتدا از معادلهٔ ۱۲-۲۸ استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم $F_۴=Mg-۳F_۳$. از معادلهٔ ۱۲-۲۷ و انجام کمی عملیات جبری به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}F_۳&=\frac{Mg}{۴}-\frac{dAE}{۴L}\\&=\frac{(۲۹۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)}{۴}\\&\quad-\frac{(۵/۰\times۱۰^{-۴}\,\text{m})(۱۰^{-۴}\,\text{m}^۲)(۱/۳\times۱۰^{۱۰}\,\text{N/m}^۲)}{(۴)(۱/۰۰\,\text{m})}\\&=۵۴۸\,\text{N}\approx۵/۵\times۱۰^۲\,\text{N}\end{aligned}$$ (پاسخ)

اکنون، از معادلهٔ ۱۲-۲۸ داریم

$$\begin{aligned}F_۴&=Mg-۳F_۳=(۲۹۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)-۳(۳۴۸\,\text{N})\\&\approx۱/۲\,\text{N}\end{aligned}$$ (پاسخ)

می‌توان نشان داد که برای رسیدن به پیکربندی تعادل، سه تا پایهٔ کوچکتر هر کدام به اندازهٔ $۰/۴۲\,\text{mm}$ و پایهٔ بلند به اندازهٔ $۰/۹۲\,\text{mm}$ متراکم می‌شوند.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**تعادل ایستایی** جسم صلب در حال سکون را می‌گویند در حال **تعادل ایستایی** است، برای چنین جسمی، جمع برداری نیروهای خارجی وارد بر آن برابر صفر است

$$\vec{F}_{\text{net}}=۰ \quad \text{(موازنهٔ نیروها)} \tag{۱۲-۳}$$

اگر همهٔ نیروها در صفحهٔ $xy$ واقع باشند، این معادلهٔ برداری هم‌ارز دو معادلهٔ مؤلفه‌ای زیر است

$$F_{\text{net},x}=۰ \;\text{ و }\; F_{\text{net},y}=۰ \quad \text{(موازنهٔ نیروها)} \tag{۱۲-۷ و ۱۲-۸}$$

تعادل ایستایی همچنین بیانگر این است که جمع برداری همهٔ گشتاور نیروهای خارجی که به جسم نسبت به هر محوری وارد می‌شود برابر صفر است، یعنی

$$\vec{\tau}_{\text{net}}=۰ \quad \text{(موازنهٔ گشتاورهای نیروها)} \tag{۱۲-۵}$$

اگر نیروها در صفحهٔ $xy$ واقع باشند، همهٔ بردارهای گشتاور نیرو، موازی محور $z$ اند و معادلهٔ ۱۲-۵ هم ارز با یک معادلهٔ مؤلفه‌ای زیر است

$$\tau_{\text{net}}=۰ \quad \text{(موازنهٔ گشتاور نیرو)} \tag{۱۲-۹}$$

**گرانیگاه** نیروی گرانشی به هر یک از اجزای جسم به صورت مجزا وارد می‌شود. اثر خالص همهٔ این نیروهای مجزا را می‌توان معادل نیروی گرانشی کل $\vec{F}_g$ فرض کرد که بر نقطهٔ مشخص که گرانیگاه نامیده می‌شود اثر می‌کند. اگر شتاب گرانشی $\vec{g}$ برای همهٔ عنصرهای جسم یکسان باشد، گرانیگاه در مرکز جرم جسم قرار دارد.

**مدولهای کشسانی** برای بیان رفتار کشسانی (تغییر شکل) جسمها وقتی تحت تأثیر نیروهایی که به آنها وارد می‌شوند قرار می‌گیرند، سه مدول کشسانی به کار می‌روند. **کرنش** (تغییر نسبی طول) به طور خطی با **تنش** (نیرو بر واحد سطح) رابطه دارد که در هر حالت به وسیلهٔ یک مدول یا ضریب تناسب به‌هم مربوط می‌شوند. رابطهٔ کلی عبارت است از

$$\text{تنش} = \text{مدول} \times \text{کرنش} \tag{۱۲-۲۲}$$

**کشش و تراکم** وقتی جسمی تحت تأثیر کشش یا تراکم قرار گیرد، معادلهٔ ۱۲-۲۲ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{F}{A}=E\frac{\Delta L}{L} \qquad (۱۲-۲۳)$$

که در آن $\Delta L/L$ کرنش کششی یا تراکمی جسم، $F$ بزرگی نیروی واردهٔ $\vec{F}$ است که باعث کرنش می‌شود، $A$ مساحت سطح مقطعی است که $\vec{F}$ (مطابق شکل ۱۲-۱۱ الف، عمود بر $A$) به آن وارد می‌شود و $E$ **مدول یانگ** جسم است. تنش برابر است با $F/A$.

**برش** وقتی جسمی تحت تاثیر تنش برشی قرار گیرد، معادلهٔ ۱۲-۲۲ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{F}{A}=G\frac{\Delta x}{L} \qquad (۱۲-۲۴)$$

که در آن $\Delta L/L$ کرنش برشی جسم، $\Delta x$ جابه‌جایی یک انتهای جسم در راستای نیروی وارد شدهٔ $\vec{F}$ (مطابق شکل ۱۲-۱۱ ب)، و $G$ **مدول برشی** جسم است. تنش برابر است با $F/A$.

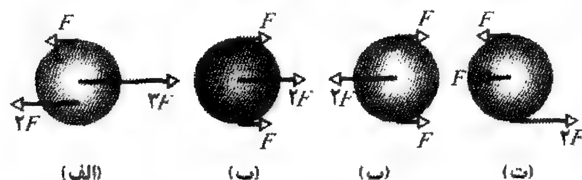
**تنش هیدرولیکی** وقتی جسمی تحت تأثیر *تراکم هیدرولیکی* ناشی از تنش شاره‌ای که آن را احاطه کرده است قرار گیرد، معادلهٔ ۱۲-۲۲ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$p=B\frac{\Delta V}{V} \qquad (۱۲-۲۵)$$

که در آن $p$ فشار (تنش هیدرولیکی) ناشی از شاره روی جسم، $\Delta V/V$ (کرنش) قدر مطلق تغییر نسبی حجم جسم ناشی از فشار و $B$ **مدول کپه‌ای** جسم است.

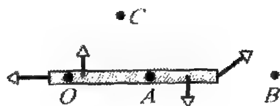
## پرسشها

۱- شکل ۱۲-۱۵ چهار دید از بالا از قرصهای یکنواخت در حال چرخش را نشان می‌دهد که روی کف اتاق بدون اصطکاکی از یک طرف به طرف دیگر می‌لغزند. سه نیرو با بزرگیهای $F$ و $۲F$ و $۳F$ به کناره، به مرکز، یا وسط کناره و مرکز وارد می‌شوند. بردارهای نیرو به همراه قرصها می‌چرخند و در لحظه‌هایی که در شکل ۱۲-۱۵ نشان داده شده است جهت آنها به سمت چپ یا راست است. کدامیک از قرصها در حال تعادل‌اند؟



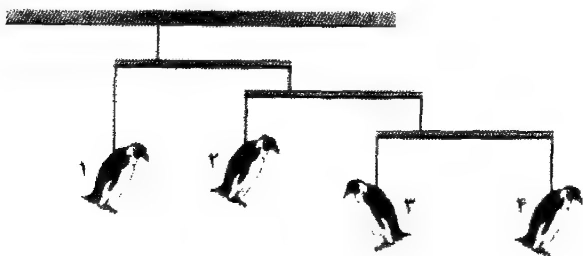

**شکل ۱۲-۱۵** پرسش ۱

۲- شکل ۱۲-۱۶ دید از بالای یک چوب یکنواخت را نشان می‌دهد که چهار نیرو به آن وارد می‌شوند. فرض کنید محوری که از $O$ می‌گذرد محور چرخش باشد، گشتاور این نیروها را نسبت به این محور حساب و معلوم کنید که گشتاورهای نیرو موازنه دارند. اگر به جای محور انتخابی محور چرخش از (الف) نقطهٔ $A$، (ب) نقطهٔ $B$، یا (پ) نقطه $C$ بگذرد، آیا گشتاورهای نیرو موازنه خواهند داشت؟ (ت) فرض کنید به دست آوریم که گشتاور نیروها نسبت به نقطهٔ $O$ موازنه ندارند، آیا نقطهٔ دیگری وجود دارد که گشتاورهای نیرو نسبت به آن موازنه داشته باشند؟



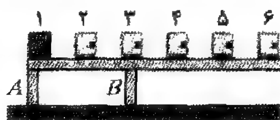

**شکل ۱۲-۱۶** پرسش ۲

۳- شکل ۱۲-۱۷، پنگوئنهای اسباب‌بازی را که می‌توانند حرکت کنند نشان می‌دهد که از سقف آویزان شده‌اند. هر میله دارای جرم ناچیز و افقی است و طرف راست میلهٔ افقی سه برابر طرف چپ آن از نقطهٔ آویز است. پنگوئن ۱ دارای جرم $m_1=۴۸\,kg$ است. جرم پنگوئنهای (الف) ۲، (ب) ۳ و (پ) ۴ چقدر است؟




**شکل ۱۲-۱۷** پرسش ۳

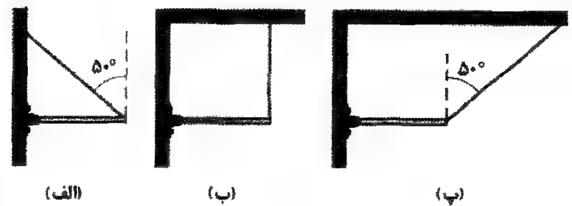
۴- در شکل ۱۲-۱۸ تیر صلبی روی دو پایهٔ متصل به زمین قرار دارد. گاو صندوق کوچک ولی سنگینی را با هر بار در یکی از شش وضعیت نشان داده شده قرار می‌دهیم. فرض کنید که جرم تیر در مقایسه با جرم گاوصندوق قابل چشمپوشی است. (الف) وضعیتها را بنابر نیرویی که از طرف گاو صندوق به پایهٔ $A$ وارد می‌شود از بیشترین تا کمترین تراکم و از کمترین تا بیشترین کشش مرتب کنید و مشخص کنید که کجا این نیرو صفر است. (ب) آنها را بنابر نیروی وارد به پایهٔ $B$ مرتب کنید.




**شکل ۱۲-۱۸** پرسش ۴

۵- شکل ۱۲-۱۹ سه وضعیت میله افقی یکسانی را نشان می‌دهد که یک سر آن به دیوار لولا شده و سر دیگر آن به ریسمانی متصل است. بدون محاسبه، وضعیتها را بنابر بزرگی

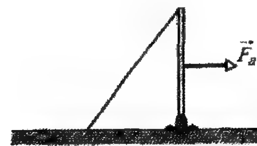
حالتهای زیر مرتب کنید. (الف) نیرویی که ریسمان به میله وارد می‌کند، (ب) نیروی قائمی که لولا به میله وارد می‌کند و (پ) نیروی افقی که لولا به میله وارد می‌کند.




شکل ۱۲-۱۹ پرسش۵

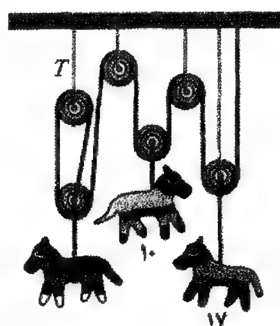
۶- نردبانی به دیوار بدون اصطکاکی تکیه دارد ولی به خاطر اصطکاک میان نردبان و کف زمین نمی‌افتد. فرض کنید پای نردبان را به سمت دیوار جابه‌جا می‌کنید. مشخص کنید که کمیتهای زیر (از لحاظ بزرگی) بزرگتر می‌شوند یا کوچکتر یا یکسان باقی می‌مانند: (الف) نیروی عمودی که از طرف زمین به نردبان وارد می‌شود، (ب) نیرویی که دیوار به نردبان وارد می‌کند، (پ) نیروی اصطکاک ایستایی که از طرف زمین به نردبان وارد می‌شود و (ت) مقدار بیشینهٔ $f_{s,\max}$ نیروی اصطکاک ایستایی.

۷- در شکل ۱۲-۲۰، انتهای پایینی یک میلهٔ قائم لولا شده و انتهای بالایی آن به کابلی متصل است. همان طور که نشان داده شده یک نیروی افقی $\vec{F}_a$ بر میله وارد می‌شود. وقتی که نقطهٔ اثر نیروی وارد شده به بالای میله حرکت کند، آیا کشش در کابل افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان باقی می‌ماند؟



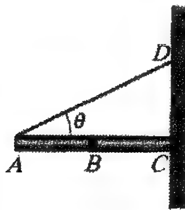

شکل ۱۲-۲۰ پرسش ۷

۸- سه تا اسب چوبی با مجموعه‌ای (ساکن) از قرقره‌ها و ریسمانهای بدون جرم که در شکل ۱۲-۲۱ دیده می‌شوند، آویزان هستند. یک ریسمان دراز از سقف در سمت راست تا قرقرهٔ پایینی در سمت چپ ادامه دارد. قرقره‌ها از سقف و اسبهای چوبی از قرقره‌ها به وسیلهٔ چند ریسمان کوتاهتر آویزان شده‌اند. وزن دو تا از اسبهای چوبی برحسب نیوتون داده شده‌اند. (الف) وزن اسب چوبی سوم چقدر است؟ (راهنمایی: وقتی ریسمان دور قرقره نیم دور می‌پیچد، با نیروی خالصی که دو برابر کشش در ریسمان است، آن را می‌کشد.) (ب) کشش در ریسمان کوتاهی که با $T$ مشخص شده چقدر است؟



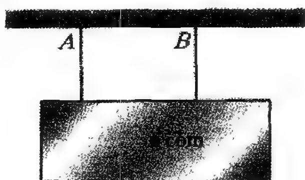

شکل ۱۲-۲۱ پرسش ۸

۹- در شکل ۱۲-۲۲، میلهٔ ساکن $AC$ به جرم $5\,\text{kg}$ به وسیلهٔ طناب و اصطکاکی که بین میله و دیوار وجود دارد به دیوار تکیه دارد. میله یکنواخت و طول آن $1\,\text{m}$ و زاویهٔ $\theta = 30^\circ$ است. (الف) اگر بخواهیم بزرگی نیروی $\vec{T}$ را که از طرف ریسمان بر میله وارد می‌شود فقط از یک معادله به دست آوریم، محور چرخش را در کدام نقطه باید اختیار کنیم؟ با انتخاب این محور و مثبت در نظر گرفتن گشتاور نیرو در جهت پادساعتگرد، علامت (ب) گشتاور نیروی $\tau_w$ ناشی از وزن میله و (پ) گشتاور نیروی $\tau_r$ ناشی از کشیدن میله توسط طناب، چیست؟ (ت) آیا $\tau_r$ از $\tau_w$ بزرگتر است یا کوچکتر یا با آن مساوی است؟




شکل ۱۲-۲۲ پرسش ۹

۱۰- شکل ۱۲-۲۳ یک قطعه افقی را نشان می‌دهد که با دو سیم $A$ و $B$ آویخته شده است، دو سیم به جز در طول اولیه مشابه‌اند. مرکز جرم قطعه به سیم $B$ نزدیکتر از سیم $A$ است. (الف) با اندازه‌گیری گشتاور نیروها نسبت به مرکز جرم قطعه معین کنید گشتاور نیروی ناشی از $A$ بیشتر از، کمتر از یا مساوی گشتاور نیروی ناشی از $B$ است. (ب) کدام سیم نیروی بیشتری به قطعه وارد می‌کند؟ (پ) اگر سیمها حالا دارای طول یکسان باشند، کدامیک در ابتدا کوتاهتر بوده است (قبل از اینکه قطعه آویخته شود)؟




شکل ۱۲-۲۳ پرسش ۱۰

## مسئله‌ها

GO مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس).

SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها

WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

•-••• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.

اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

## بخش ۱۲-۴ گرانیگاه

•۱- چون $g$ در پهنهٔ بیشتر ساختارها مقدار بسیار کمی تغییر می‌کند، گرانیگاه ساختار اصولاً بر مرکز جرم آن منطبق است. اینجا در یک مثال ساختگی تغییرات $g$ خیلی زیاد است. شکل ۱۲-۲۴ آرایشی از ۶ ذره را نشان می‌دهد که هر یک دارای جرم $m$ است و در گوشه‌های یک ساختار با جرم ناچیز قرار دارند. فاصلهٔ میان ذره‌های مجاور در امتداد اضلاع برابر ۲/۰۰m است. جدول زیر مقدار $g\,(m/s^2)$ را در محل هر یک از ذره‌ها نشان می‌دهد. با به کار بردن دستگاه مختصات نشان داده شده، مطلوب است تعیین (الف) مختصهٔ $x$ مرکز جرم و (ب) مختصهٔ $y$ مرکز جرم دستگاه شش- ذره. سپس تعیین (پ) مختصهٔ $x$ مرکز گرانش و (ت) مختصهٔ $y$ گرانیگاه دستگاه شش- ذره.

شکل ۱۲-۲۴ مسئلهٔ ۱

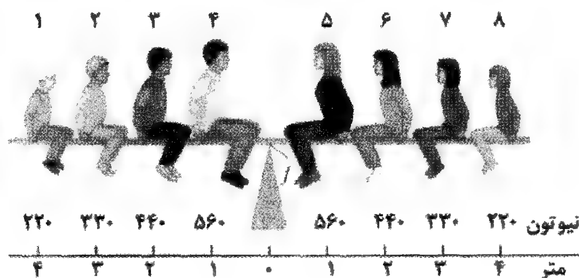
| ذره | $g$ | ذره | $g$ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۸/۰۰ | ۴ | ۷/۴۰ |
| ۲ | ۷/۸۰ | ۵ | ۷/۶۰ |
| ۳ | ۷/۶۰ | ۶ | ۷/۸۰ |

## بخش ۱۲-۵ مثالهایی دربارهٔ تعادل ایستایی

•۲- زه کمانی را از وسط آنقدر می‌کشیم تا کشش زه آن برابر نیروی وارده شود. زاویهٔ بین دو نیمهٔ زه چقدر است؟

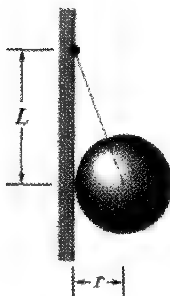
•۳- طنابی با جرم ناچیز را بین دو پایه که ۳/۴۴ mm از هم فاصله دارند به طور افقی می‌کشیم. وقتی جسمی به وزن ۳۱۶۰N از وسط طناب آویزان شود، مشاهده می‌کنیم که طناب به اندازهٔ ۳۵/۰cm پایین کشیده می‌شود. کشش در طناب چقدر است؟ ILW

•۴- هشت عضو یک خانواده، که وزنهایشان برحسب نیوتون در شکل ۱۲-۲۵ مشخص شده است، روی یک الاکلنگ به حال تعادل نشسته‌اند. شمارهٔ شخصی که بیشترین گشتاور نیرو را نسبت به محور چرخش در نقطهٔ اتکای $f$ در جهت (الف) خارج صفحهٔ کتاب، و (ب) داخل صفحهٔ کتاب ایجاد می‌کند چیست؟




شکل ۱۲-۲۵ مسئلهٔ ۴

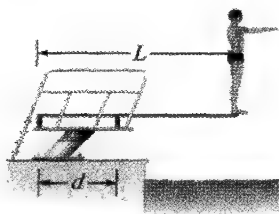
•۵- در شکل ۱۲-۲۶ کرهٔ یکنواختی به جرم $m=0/85\,kg$ و شعاع $r=4/2\,cm$ به وسیلهٔ طنابی به جرم ناچیز به دیوار بدون اصطکاکی در فاصلهٔ $L=8/0\,cm$ بالاتر از مرکز کره، متصل است. مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش در طناب و (ب) نیروی وارد بر کره از طرف دیوار. SSM WWW




شکل ۱۲-۲۶ مسئلهٔ ۵

•۶- فاصلهٔ دو محور چرخهای جلو و عقب اتومبیلی به جرم ۱۳۶۰kg برابر ۳/۰۵m است. گرانیگاه اتومبیل در فاصلهٔ ۱/۷۸m پشت محور جلو قرار دارد. اگر اتومبیل روی سطح زمینی افقی قرار داشته باشد، مطلوب است بزرگی نیروی وارد از طرف زمین به (الف) هر یک از چرخهای جلو (با فرض یکسان بودن) و (ب) هر یک از چرخهای عقب (با فرض یکسان بودن).

•۷- شیرجه رونده‌ای به وزن ۵۸۰N در انتهای تخته شیرجه‌ای به طول $L=4/5\,m$ و جرم ناچیز ایستاده است (شکل ۱۲-۲۷). تخته شیرجه به دو پایه به فاصلهٔ $d=1/5\,m$ از یکدیگر، متصل شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین) نیروی وارد بر تخته از پایه چپ و (پ) بزرگی و (ت) جهت (بالا یا پایین) نیروی وارد بر تخته از پایهٔ راست چقدر است؟ (ث) کدام پایهٔ (چپ یا راست) تحت کشش است و (ج) کدام پایه متراکم می‌شود؟ SSM




شکل ۱۲-۲۷ مسئلهٔ ۷

•۸- چوب بستی به جرم ۶۰kg و طول ۵/۰m به وسیلهٔ دو کابل قائم که به دو انتهای آن بسته شده در وضعیت افقی قرار دارد. شیشه پاک‌کنی به جرم ۸۰kg در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۱/۵ m از یک انتهای چوب بست ایستاده است. نیروی کشش در (الف) کابل نزدیکتر و (ب) در کابل دورتر چقدر است؟

•۹- یک کارگر شیشه پاک‌کن به جرم ۷۵kg از نردبانی به جرم ۱۰kg و طول ۵/۰m استفاده می‌کند. او سر پایین نردبان

را به فاصلهٔ $2/5\ m$ از دیوار قرار می‌دهد و سربالایی آن را به یک شیشهٔ ترک خورده تکیه می‌دهد و از نردبان بالا می‌رود. وقتی او به اندازهٔ $3/0\ m$ از نردبان بالا برود شیشه می‌شکند. با چشمپوشی از اصطکاک میان نردبان و شیشه و با این فرض که پایین نردبان نمی‌لغزد، وقتی شیشه در آستانه شکستن است مطلوب است (الف) بزرگی نیروی وارد به شیشه از طرف نردبان، (ب) بزرگی نیروی وارد بر نردبان از طرف زمین و (پ) زاویهٔ (نسبت به افق) نیرویی که بر نردبان وارد می‌شود.

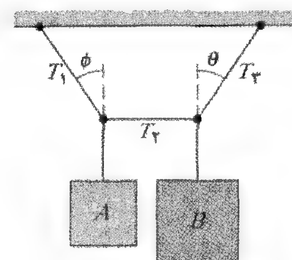
•۱۰- در شکل ۱۲-۲۸ مردی تلاش می‌کند تا اتومبیلش را از گل و لای کنار جاده بیرون بیاورد. او یک سرطنابی را به سپر جلوی اتومبیل و سر دیگر آن را به تیری که کنار جاده در فاصلهٔ $18\ m$ قرار دارد، محکم می‌بندد. سپس، طناب را از وسط با نیروی $550\ N$ به یک طرف می‌کشد و در نتیجه مرکز طناب از وضع قبلی خود به اندازهٔ $0/30\ m$ جابه جا می‌شود و اتومبیل کمی حرکت می‌کند. بزرگی نیرویی که طناب به اتومبیل وارد کرده چقدر است؟ (طناب یک کمی کش می‌آید.)




شکل ۱۲-۲۸ مسئلهٔ ۱۰

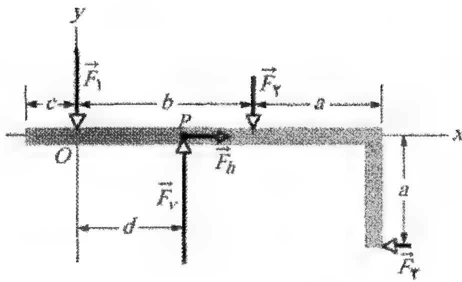
•۱۱- یک خط‌کش چوبی یک متری در نشانهٔ $50/0\ cm$ به طور افقی روی لبهٔ چاقویی در حال تعادل است. با قراردادن دو سکه $5/00\ g$ روی نشانهٔ $12/0\ cm$، مشاهده می‌کنیم که خط‌کش در نشانهٔ $45/5\ cm$ به حال تعادل در می‌آید. جرم خط‌کش چقدر است؟ SSM

•۱۲- دستگاه شکل ۱۲-۲۹ در حال تعادل است و ریسمان میانی کاملاً افقی است. مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش $T_1$، (ب) نیروی کشش $T_2$، (پ) نیروی کشش $T_3$ و (ت) زاویهٔ $\theta$.




شکل ۱۲-۲۹ مسئلهٔ ۱۲

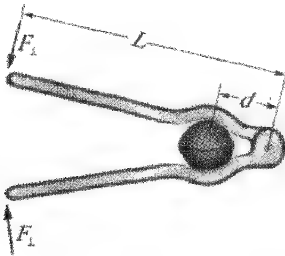
•۱۳- نیروهای $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ به ساختار شکل ۱۲-۳۰ که دید از بالای آن نشان داده شده است، وارد می‌شوند. می‌خواهیم با واردکردن یک نیروی چهارم با مؤلفه‌های $F_h$ و $F_v$ در نقطه‌ای مانند $P$ ساختار را به حال تعادل درآوریم. می‌دانیم که $a=2/0\ m$ ، $b=3/0\ m$، $c=1/0\ m$ و $F_1=20\ N$ و $F_2=10\ N$ و $F_3=5/0\ N$. مطلوب است تعیین (الف) $F_h$، (ب) $F_v$ و (پ) $d$
ILW




شکل ۱۲-۳۰ مسئلهٔ ۱۳

•۱۴- صندوق مکعب شکل یکنواختی که طول هر ضلعش $0/750\ m$ است $500\ N$ وزن دارد. این صندوق روی کف اتاق واقع است و مانع بسیار کوچکی در مقابلش قرار دارد. کمترین ارتفاع از کف اتاق که باید یک نیروی $350\ N$ به صندوق وارد شود تا آن صندوق روی نوک مانع در آستانهٔ بلند شدن قرار گیرد، چقدر است؟

•۱۵- برای شکستن گردویی کمترین نیرویی که باید به دو طرف پوستهٔ گردو وارد شود برابر $40\ N$ است. برای گردوشکن شکل ۱۲-۳۱ با $L=12\ cm$ و $d=2/6\ cm$، مؤلفه‌های نیروی $F_\perp$ (عمود بر دسته‌ها) مربوط به آن $40\ N$ چقدر است؟




شکل ۱۲-۳۱ مسئلهٔ ۱۵

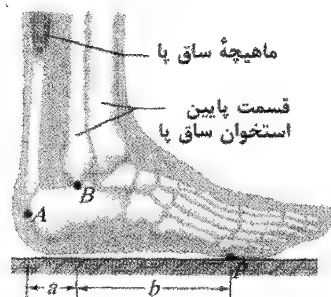
•۱۶- در شکل ۱۲-۳۲ یک چوب بست افقی به طول $2/00\ m$ و جرم یکنواخت $50/0\ kg$ به وسیلهٔ دو کابل از ساختمانی آویزان است. یک دو جین قوطی رنگ در نقطه‌های مختلف روی آن قرار دارند. جرم کل قوطیهای رنگ $75/0\ kg$ است. نیروی کشش در کابل سمت راست برابر $722\ N$ است. در چه فاصلهٔ افقی از این کابل مرکز جرم دستگاه قوطیهای رنگ قرار دارد؟



شکل ۱۲-۳۲ مسئلهٔ ۱۶

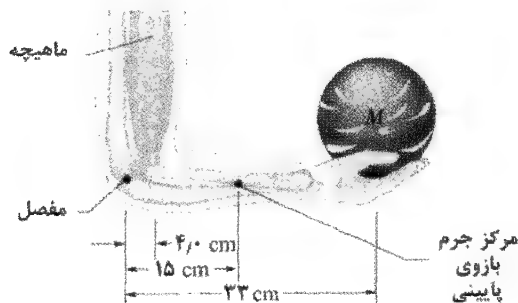
•۱۷- شکل ۱۲-۳۳ ساختار تشریحی ساق و کف پا را نشان می‌دهد که وقتی شخص روی پنجهٔ پا ایستاده است و پاشنهٔ پا را از زمین بلند می‌کند پا فقط در یک نقطه مانند P که در شکل نشان داده شده با زمین به طور مؤثر تماس دارد. فرض کنید فاصلهٔ $a=5/0\ cm$ ، فاصلهٔ $b=15\ cm$ و وزن شخص $W=900\ N$ باشد. مطلوب است تعیین نیروهایی که بر پا وارد

می‌شوند (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین) نیرو در نقطهٔ $A$ از ماهیچهٔ ساق پا و (پ) بزرگی و (ت) جهت (بالا یا پایین) نیرو در نقطهٔ $B$ از قسمت پایین استخوان ساق پا.



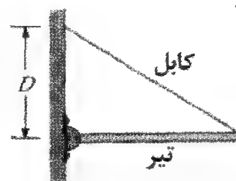

شکل ۱۲-۳۳ مسئلهٔ ۱۷

●۱۸- بازیکنی توپ بولینگ $(M=۷/۲\text{kg})$ را در کف دست خود نگهداشته است (شکل ۱۲-۳۴). قسمت بالایی بازوی او به طور قائم و قسمت پایینی بازو $(۱/۸\text{kg})$ به صورت افقی قرار دارد. بزرگی (الف) نیروی ماهیچه قسمت بالایی بازو وارد بر قسمت پایینی و (ب) نیروی بین استخوانها در نقطهٔ مفصل، چقدر است؟



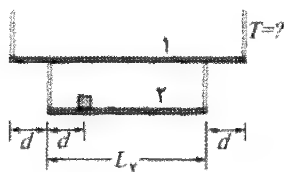

شکل ۱۲-۳۴ مسئلهٔ ۱۸

●۱۹- در شکل ۱۲-۳۵، تیر یکنواختی به وزن ۵۰۰N و طول ۳/۰m به طور افقی نگهداشته شده است. سمت چپ آن به دیوار لولا شده و سمت راست آن به وسیلهٔ کابلی که به فاصلهٔ $D$ بالای کابل به دیوار پیچ شده نگهداشته شده است. کمترین کششی که منجر به پاره شدن کابل می‌شود برابر ۱۲۰۰ N است. (الف) چه مقدار $D$ مربوط به این کشش است؟ (ب) برای جلوگیری از پاره‌شدن کابل، آیا $D$ باید از این مقدار افزایش یابد یا کاهش؟



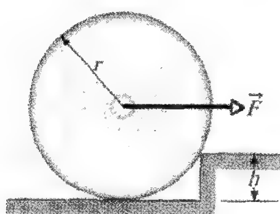

شکل ۱۲-۳۵ مسئلهٔ ۱۹

●۲۰- در شکل ۱۲-۳۶، چوب بست افقی ۲، با جرم یکنواخت $m_۲=۳۰/۰\text{kg}$ و طول $L_۲=۲/۰۰\text{m}$، از چوب بست افقی ۱، با جرم یکنواخت $m_۱=۵۰/۰\text{kg}$، آویزان است. یک جعبه میخ به جرم ۲۰/۰kg روی چوب بست ۲ و به فاصلهٔ $d=۰/۵۰۰\text{m}$ از انتهای سمت چپ قرار دارد. کشش $T$ در کابل نشان داده شده چقدر است؟



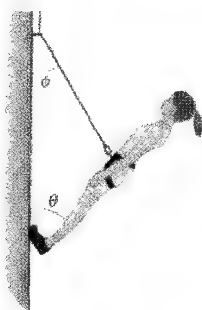

شکل ۱۲-۳۶ مسئلهٔ ۲۰

●●۲۱- در شکل ۱۲-۳۷، بزرگی نیروی $\vec{F}$ که در راستای افقی به محور چرخ وارد می‌شود چقدر باید باشد تا چرخ را از مانعی به ارتفاع $h=۳/۰۰\text{cm}$ بالا ببرد؟ شعاع چرخ برابر $r=۶/۰۰\text{cm}$ و جرم آن برابر $m=۰/۸۰۰\text{kg}$ است. SSM WWW



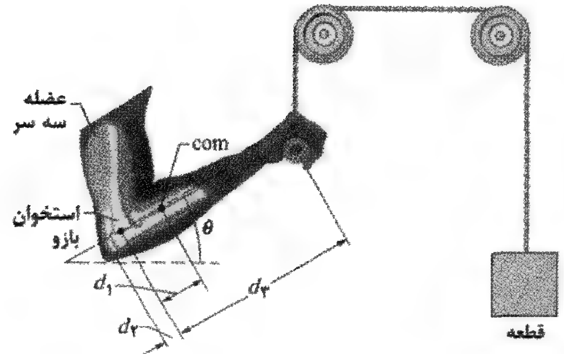

شکل ۱۲-۳۷ مسئلهٔ ۲۱

●●۲۲- در شکل ۱۲-۳۸، صخره‌نوردی به وزن ۵۳۳/۸ N توسط طنابی متصل به دستگاه مهار وی نگهداشته شده است؛ خط اثر نیروی طناب از مرکز جرم آن می‌گذرد. زاویه‌های نشان داده شده $\theta=۴۰/۰°$ ، $\phi=۳۰/۰°$ هستند. پاهای او در آستانهٔ لغزیدن روی دیوار قائم است، ضریب اصطکاک استاتیک بین کفشهای صخره‌نورد و دیوار چقدر است؟



شکل ۱۲-۳۸ مسئلهٔ ۲۲

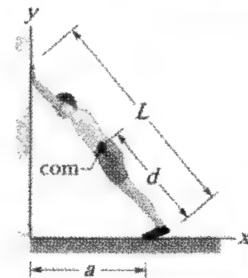
●●۲۳- در شکل ۱۲-۳۹، قطعه‌ای به جرم 15 kg از دستگاه قرقره‌ها بالا کشیده می‌شود. بازوی شخص به حالت قائم است امّا ساعد با افق زاویهٔ $\theta=۳۰°$ می‌سازد. ساعد و دست رویهم دارای جرم ۲/۰kg است و مرکز جرم به فاصلهٔ $d_۱=۱۵\text{ cm}$ از نقطهٔ تماس استخوان ساعد و استخوان بالای بازو (استخوان بازو) قرار دارد. عضلهٔ سه سر، ساعد را در فاصلهٔ $d_۲=۲/۵\text{cm}$ پشت نقطه تماس به طور عمود به سمت بالا می‌کشد. فاصلهٔ




**شکل ۱۲-۳۹** مسئلهٔ ۲۳

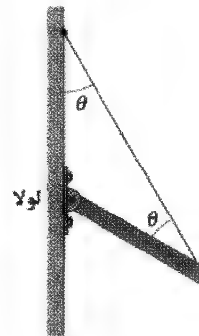
$d_۳$ برابر ۳۵ cm است. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین) نیروی وارد بر ساعد از طرف عضله سه سر و (پ) بزرگی و (ت) جهت (بالا یا پایین) نیروی وارد بر ساعد از طرف استخوان بازو.

**۲۴••**- در شکل ۱۲-۴۰، یخ‌نوردی به دیوار یخی که اصطکاک آن ناچیز است، تکیه داده است. فاصلهٔ $a$ برابر با ۰/۹۱۴m و فاصلهٔ $L$ برابر ۲/۱۰m است. مرکز جرم او $d=۰/۹۴۰$ m از نقطهٔ تماس با زمین فاصله دارد. اگر او در آستانهٔ لغزیدن باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین پاهای او و زمین چقدر است؟



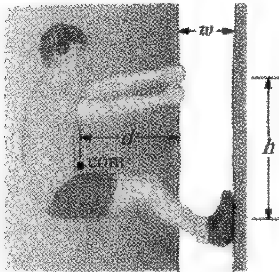

**شکل ۱۲-۴۰** مسئلهٔ ۲۴

**۲۵••**- در شکل ۱۲-۴۱، یک سر تیر یکنواختی به وزن ۲۲۲N به دیوار لولا شده است. سردیگر تیر به وسیلهٔ سیمی که با دیوار و همچنین تیر زاویهٔ $\theta=۳۰°$ می‌سازد نگهداشته شده است. مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش در سیم و مؤلفه‌های (ب) افقی و (پ) قائم نیروی وارد از لولا بر تیر.



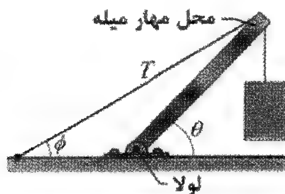

**شکل ۱۲-۴۱** مسئلهٔ ۲۵

**۲۶••**- در شکل ۱۲-۴۲، صخره نوردی به جرم ۵۵kg در حال صعود از پشت در امتداد یک شکاف است. او با دستهایش لبهٔ شکاف را می‌کشد و پاهایش را به دیوارهٔ مقابل می‌فشارد. پهنای شکاف $w=۰/۲۰$m و مرکز جرم صخره نورد در فاصلهٔ افقی $d=۰/۴۰$m از لبهٔ شکاف قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان دستهای او و صخره $\mu_۱=۰/۴۰$ و بین پاهای او و صخره $\mu_۲=۰/۴۰$ است. (الف) حداقل کشیدن افقی توسط دستها و فشار وارده توسط پاهای صخره‌نورد برای اینکه او را پایدار نگهدارند، چقدر است؟ (ب) برای کشیدن افقی قسمت (الف)، فاصلهٔ قائم $h$، میان دستها و پاهای او باید چقدر باشد؟ اگر صخره نورد با سنگی مرطوب مواجه شود، به طوری که $\mu_۱$ و $\mu_۲$ کاهش یابند، چه تغییری در (پ) پاسخ (الف) و (ت) در پاسخ (ب) ایجاد خواهد شد؟



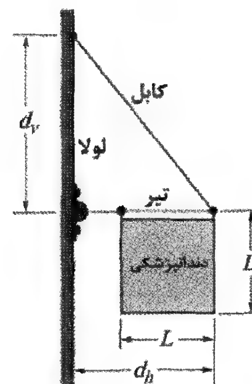

**شکل ۱۲-۴۲** مسئلهٔ ۲۶

**۲۷••**- دستگاه نشان داده شده در شکل ۱۲-۴۳ در حال تعادل است. یک قطعهٔ بتونی به جرم ۲۲۵kg از انتهای میلهٔ یکنواختی به جرم ۴۵/۰kg آویخته شده است. برای زاویه‌های $\phi=۳۰/۰°$ و $\theta=۴۵/۰°$، مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش $T$ در کابل و مؤلفه‌های (ب) افقی و (پ) قائم نیرویی که از طرف لولا به محل مهار میله وارد می‌شود. ILW



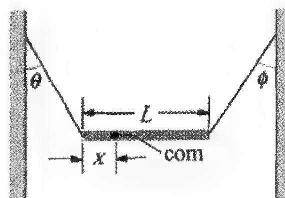

**شکل ۱۲-۴۳** مسئلهٔ ۲۷

**۲۸••**- در شکل ۱۲-۴۴، تابلو مربع شکل یکنواختی به جرم ۵۰/۰kg و به ضلع $L=۲/۰۰$m از یک میلهٔ افقی به طول $d_h=۳/۰۰$m و جرم ناچیز آویخته شده است. کابلی انتهای میله را به نقطه‌ای از دیوار وصل می‌کنند که به فاصلهٔ $d_v=۴/۰۰$m بالاتر از لولای اتصال میله و دیوار قرار دارد. (الف) نیروی کشش در کابل چقدر است؟ مطلوب است تعیین (ب) بزرگی و (پ) جهت (چپ یا راست) مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به میله از طرف دیوار و (ت) بزرگی و (ث) جهت (بالا یا پایین) مؤلفهٔ قائم این نیرو.



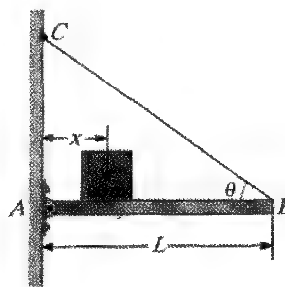

شکل ۱۲-۴۴ مسئلهٔ ۲۸

●●۲۹- میلهٔ نایکنواختی، همان‌طور که در شکل ۱۲-۴۵ نشان داده شده است، به وسیلهٔ دو ریسمان با جرم ناچیز آویخته شده است و به حالت افقی در حال سکون قرار دارد. زاویهٔ یکی از ریسمانها با امتداد قائم $\theta=36/9°$ و زاویهٔ ریسمان دیگر با امتداد قائم $\phi=53/1°$ است. اگر طول میلهٔ $L$ برابر $6/10\,m$ باشد، فاصلهٔ $x$ مرکز جرم را از انتهای سمت چپ میله حساب کنید.




شکل ۱۲-۴۵ مسئلهٔ ۲۹

●●۳۰- در شکل ۱۲-۴۶، فرض کنید طول $L$ میلهٔ یکنواخت $3/00\,m$ و وزن آن $200\,N$ است. همچنین فرض کنید وزن قطعه $W=300\,N$ و زاویهٔ $\theta=30/0°$ است. بیشینهٔ کششی که سیم می‌تواند تحمل کند $500\,N$ است. (الف) بیشترین فاصلهٔ $x$ قبل از پاره شدن سیم چقدر است؟ در حالتی که قطعه در این بیشترین فاصلهٔ $x$ قرار دارد، مؤلفه‌های (ب) افقی و (پ) قائم نیرویی که به وسیلهٔ لولا در $A$ به میله وارد می‌شود چقدر است؟



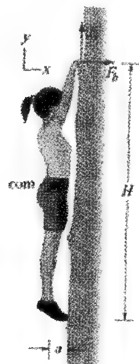

شکل ۱۲-۴۶ مسائل ۳۰ و ۳۲

●●۳۱- ارتفاع دری $2/1\,m$ در امتداد محور $y$ و به سمت بالا و پهنای $0/91\,m$ در امتداد محور $x$ از لولا به سمت خارج است. فاصلهٔ یک لولا تا بالای در $0/30\,m$ و فاصلهٔ لولای دیگر تا پایین در نیز $0/30\,m$ است، و در $27\,kg$ جرم دارد. برحسب نماد بردار یکه مطلوب است تعیین نیروی وارد بر در، در (الف) لولای بالایی و (ب) لولای پایینی.

●●۳۲- در شکل ۱۲-۴۶ میلهٔ باریک و افقی $AB$ با وزن ناچیز و طول $L$، در نقطهٔ $A$ به دیواری قائم لولا شده و در نقطهٔ $B$ به‌وسیلهٔ سیم نازک $BC$، که با افق زاویهٔ $\theta$ می‌سازد، نگهداشته شده است. قطعه‌ای به وزن $W$ می‌تواند در امتداد میله حرکت کند؛ مکان آن به وسیلهٔ فاصلهٔ مرکز جرم آن تا دیوار یعنی $x$ مشخص می‌شود. برحسب تابعی از $x$، مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش در سیم و مؤلفه‌های (ب) افقی و (پ) قائم نیرویی که به وسیلهٔ لولا در $A$ به میله وارد می‌شود.

●●۳۳- یک جعبهٔ مکعب شکل با شن پر شده است و $890\,N$ وزن دارد. می‌خواهیم با وارد کردن یک نیروی افقی به یکی از کناره‌های بالایی جعبه، آن را «بغلتانیم». (الف) کمینهٔ نیروی لازم چقدر است؟ (ب) کمینهٔ ضریب اصطکاک ایستایی لازم بین جعبه و کف اتاق چقدر است؟ (پ) آیا راه مؤثرتری برای غلتاندن جعبه وجود دارد؟ اگر وجود دارد، کمترین نیروی ممکن که باید برای غلتاندن جعبه مستقیماً به آن وارد کرد چقدر است؟ (راهنمایی: در یکی از حالتهایی که مکعب شروع به بلند شدن روی یک یال می‌کند، نیروی عمود در کجا واقع است؟) SSM WWW

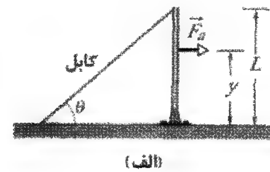
●●۳۴- شکل ۱۲-۴۷ صخره‌نوردی به جرم $70\,kg$ را نشان می‌دهد که توسط فقط مانعی با یک دست از لبهٔ یک برآمدگی افقی توخالی در یک دیوار صخره‌ای آویزان شده است (انگشتان او به سمت پایین فشار وارد می‌کنند.) پاهای او با دیوار صخره در فاصلهٔ $H=2/0\,m$ درست زیر انگشتان او قرار دارد ولی تکیه‌گاهی ندارد. مرکز جرم او در فاصلهٔ $a=0/20\,m$ از دیوار قرار دارد. فرض کنید نیروی حاصل از لبهٔ تکیه‌گاه انگشتان او به طور مساوی روی چهار انگشت تقسیم می‌شود. (الف) مؤلفهٔ افقی $F_h$ و (ب) مؤلفهٔ قائم $F_v$ نیروی وارد بر هر انگشت چقدر است؟

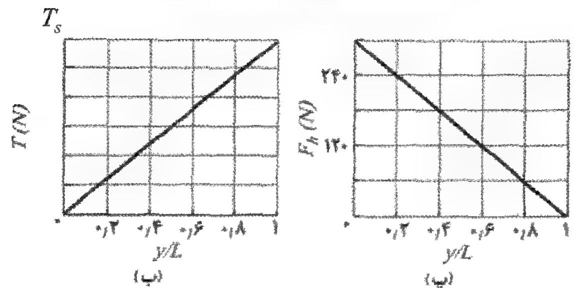



شکل ۱۲-۴۷ مسئلهٔ ۳۴

●●۳۵- شکل ۱۲-۴۸ الف یک تیر یکنواخت قائم به طول $L$ را نشان می‌دهد که در انتهای پایین آن لولا شده است. نیروی افقی

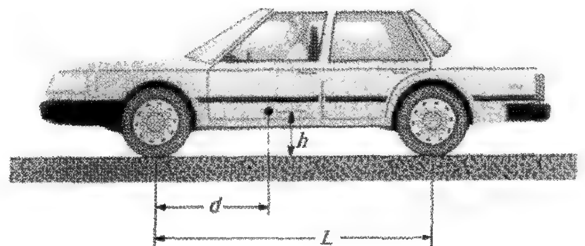
$F_a$ در فاصلهٔ $y$ از انتهای پایینی تیر بر آن وارد می‌شود. تیر به خاطر کابلی که به انتهای بالایی آن بسته شده و با افق زاویهٔ $\theta$ می‌سازد به صورت قائم باقی می‌ماند. شکل ۱۲-۴۸ ب نیروی کشش $T$ در کابل را برحسب تابعی از مکان نیروی وارد شده به صورت کسر $y/L$ از طول تیر نشان می‌دهد. مقیاس محور $T$ برحسب $T_s=۶۰۰\text{N}$ داده شده است. شکل ۱۲-۴۸ پ بزرگی $F_h$ نیروی افقی وارد از لولا به تیر را نیز به صورت تابعی از $y/L$ نشان می‌دهد. مطلوب است محاسبهٔ (الف) زاویهٔ $\theta$ و (ب) بزرگی نیروی $\vec{F}_a$.



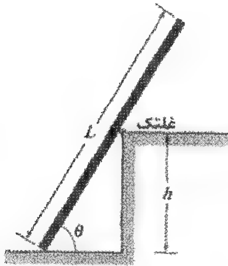

شکل ۱۲-۴۸ مسئله ۳۵

●●۳۶- در شکل ۱۲-۴۹، رانندهٔ اتومبیلی روی جادهٔ افقی مجبور به توقف اضطراری می‌شود و ترمز می‌گیرد و هر چهار چرخ قفل می‌شوند و در امتداد جاده سر می‌خورند. ضریب اصطکاک جنبشی بین لاستیک و جاده برابر ۰/۴۰ است. فاصلهٔ دو محور جلو و عقب اتومبیل $L=۴/۲\text{m}$ است و مرکز جرم آن به فاصلهٔ $d=۱/۸\text{m}$ پشت محور جلویی و به ارتفاع $h=۰/۷۵\text{m}$ از سطح جاده قرار دارد. وزن اتومبیل ۱۱ kN است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) شتاب کاهشی ترمز اتومبیل، (ب) نیروی عمود وارد بر هر چرخ عقب، (پ) نیروی عمود وارد بر هر چرخ جلو و (ت) نیروی ترمز روی هر چرخ عقب و روی هر چرخ جلو. (راهنمایی: اگر چه اتومبیل در تعادل انتقالی نیست اما در تعادل چرخشی است.)



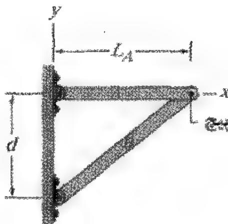

شکل ۱۲-۴۹ مسئلهٔ ۳۶

●●۳۷- در شکل ۱۲-۵۰، یک الوار یکنواخت به طول $L$ برابر $۶/۱۰\text{m}$ و وزن ۴۴۵N از یک سر روی زمین و از سر دیگر روی غلتک بدون اصطکاکی واقع در بالای دیواری به ارتفاع $h=۳/۰۵\text{m}$ به حال سکون قرار دارد. الوار به ازای تمام مقدارهای $\theta\geq ۷۰^\circ$ در حال تعادل می‌ماند، و به ازای $\theta<۷۰^\circ$ می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی میان الوار و زمین را به دست آورید.




شکل ۱۲-۵۰ مسئلهٔ ۳۷

●●۳۸- در شکل ۱۲-۵۱، دو تیر یکنواخت $B$ و $A$، از یک سو به دیوار لولا شده‌اند و سر دیگر آنها با پیچ سفت نشده به هم متصل شده است (گشتاوری از یکی بر دیگری وجود ندارد). تیر $A$ دارای طول $L_A=۲/۴۰\text{m}$ و جرم ۵۴/۰kg و تیر $B$ دارای جرم ۶۸/۰kg است. فاصلهٔ میان دولولا $d=۱/۸\text{m}$ است. برحسب نماد بردار یکه مطلوب است نیروی وارد بر (الف) تیر $A$ از طرف لولا، (ب) تیر $A$ از طرف پیچ، (پ) تیر $B$ از طرف لولا و (ت) تیر $B$ از طرف پیچ.

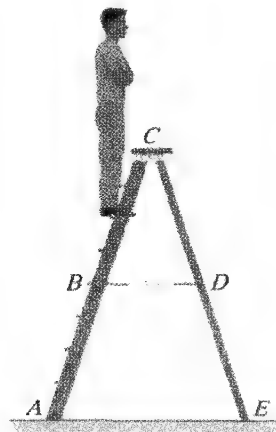



شکل ۱۲-۵۱ مسئلهٔ۳۸

●●●۳۹- صندوق مکعب شکلی به ضلع ۱/۲ m محتوی ماشین آلات است به طوری که مرکز جرم صندوق و محتویاتش ۰/۳۰m بالاتر از مرکز هندسی صندوق واقع است. این صندوق روی یک سطح شیبدار، که با افق زاویهٔ $\theta$ می‌سازد، قرار دارد. وقتی $\theta$ به تدریج از صفر افزایش یابد، به زاویه‌ای می‌رسیم که صندوق شروع به لغزیدن می‌کند یا واژگون می‌شود. هرگاه ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s$ بین صندوق و سطح شیبدار ۰/۶۰ باشد، (الف)صندوق واژگون می‌شود یا می‌لغزد؟ اگر $\mu_s=۰/۷۰$ باشد، (پ) صندوق واژگون می‌شود یا می‌لغزد؟ (ت) در چه زاویه‌ای این عمل رخ می‌دهد؟ (راهنمایی: در شروع واژگون شدن صندوق نیروی عمودی به کجا وارد می‌شود؟)

●●●۴۰- در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۲، ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s$ بین نردبان و محل اتکا را ۰/۵۳ بگیرید. برای در آستانهٔ لغزش قرار گرفتن تا چه فاصله‌ای (برحسب درصد) آتش‌نشان باید روی نردبان قرار گیرد؟

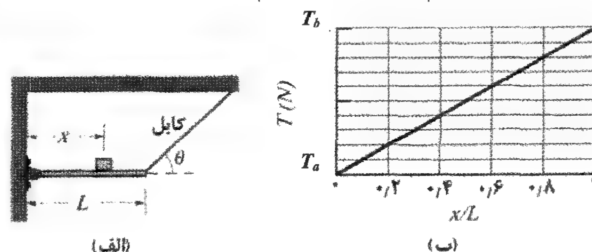
●●●۴۱- برای نردبان دو طرفهٔ نشان داده شده در شکل ۱۲-۵۲، طولهای $AC$ و $CE$ هر یک از ۲/۴۴m است و در نقطهٔ $C$ به هم لولا شده‌اند. میلهٔ نگهدارندهٔ $BD$ به طول ۰/۷۶۲m به وسط نردبان وصل شده است. مردی به وزن ۸۵۴N در طول نردبان




**شکل ۱۲-۵۲** مسئلهٔ ۴۱

به اندازهٔ ۱/۸۰m بالا می‌رود. با فرض اینکه کف اتاق بدون اصطکاک و وزن نردبان قابل چشمپوشی است، تعیین کنید (الف) نیروی کشش در میلهٔ نگهدارنده، و نیروهایی را که به وسیلهٔ کف اتاق به نردبان در (ب)$A$، و (پ) $E$ وارد می‌شوند. (راهنمایی: هنگام به کاربردن شرطهای تعادل، قسمتهای مختلف نردبان را به طور مجزا در نظر بگیرید.)

●●●۴۲- شکل ۱۲-۵۳ الف یک تیر یکنواخت افقی به جرم $m_b$ و طول $L$ را نشان می‌دهد که در سمت چپ به دیوار لولا شده و در سمت راست به وسیلهٔ کابلی که با افق زاویهٔ $\theta$ می‌سازد، نگهداشته شده است. بسته‌ای به جرم $m_p$ در فاصلهٔ $x$ از انتهای سمت چپ تیر روی آن قرار دارد. جرم کل برابر $m_b+m_p=$ ۶۱/۲۲kg است. شکل ۱۲-۵۳ ب نیروی کشش $T$ در کابل را برحسب تابعی از مکان بسته به صورت کسر $x/L$ طول تیر، به دست می‌دهد. مقیاس محور $T$ با $T_a=$ ۵۰۰N و $T_b=$ ۷۰۰N مشخص شده است. مطلوب است تعیین (الف) زاویهٔ $\theta$، (ب) جرم $m_b$ و (پ) جرم $m_p$.

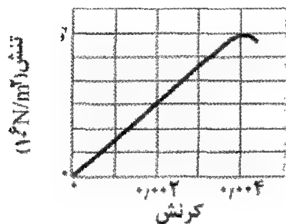



**شکل ۱۲-۵۳** مسئلهٔ ۴۲

### بخش ۱۲-۷ کشسانی

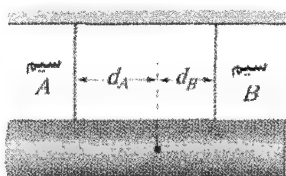
●۴۳- یک میلهٔ آلومینیومی افقی به قطر ۴/۸cm به اندازهٔ ۳/۵cm از دیوار بیرون آمده است. جسمی به جرم ۱۲۰۰kg به انتهای میله آویخته می‌شود. مدول برشی آلومینیوم $3/0\times10^{10}$ N/m² است. از وزن میله چشمپوشی کنید. مطلوب است تعیین (الف) تنش برشی وارد بر میله و (ب) انحراف قائم انتهای میله. **SSM ILW**

●۴۴- شکل ۱۲-۵۴، منحنی تغییرات تنش- کرنش را برای ماده‌ای نشان می‌دهد. مقیاس محور تنش با $s=$ ۳۰۰ بایکای $10^6$ N/m² مشخص شده است. (الف) مدول یانگ و (ب) استقامت تسلیم تقریبی این ماده چقدر است؟



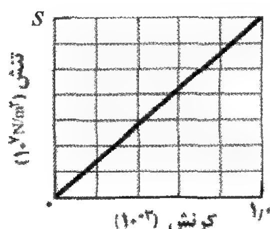

**شکل ۱۲-۵۴** مسئلهٔ ۴۴

●●●۴۵- در شکل ۱۲-۵۵ کندهٔ یکنواخت درختی به جرم ۱۰۳kg به وسیلهٔ دو سیم فولادی $A$ و $B$، هر یک به شعاع ۱/۲۰mm آویزان است. در ابتدا، طول سیم $A$، ۲/۵m و ۲/۰۰mm کوتاهتر از سیم $B$ است. در این موقع کندهٔ درخت افقی است. بزرگی نیروهایی که به وسیلهٔ (الف) سیم $A$ و (ب) سیم $B$ به کندهٔ درخت وارد می‌شود، چقدر است؟ (پ) نسبت $d_A/d_B$ چقدر است؟



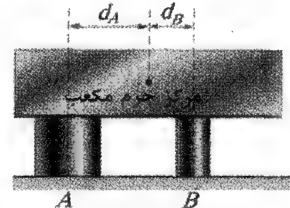

**شکل ۱۲-۵۵** مسئلهٔ ۴۵

●●۴۶- شکل ۱۲-۵۶ نمودار تنش برحسب کرنش را برای یک سیم آلومینیومی نشان می‌دهد که از دو طرف توسط دستگاه کشش در دو جهت مختلف کشیده شده است. مقیاس محور تنش با $s=$ ۷/۰ بایکای $10^7$ N/m² مشخص شده است. سیم دارای طول اولیهٔ ۰/۸۰۰m و مساحت سطح مقطع اولیهٔ آن $2/00\times10^{-6}$m² است. دستگاه برای ایجاد کرنش $1/00\times10^{-3}$ در میله چقدر کار روی آن انجام می‌دهد؟



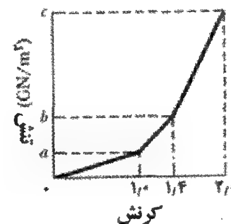

**شکل ۱۲-۵۶** مسئلهٔ ۴۶

●●۴۷- در شکل ۱۲-۵۷، مکعبی از سرب به طور افقی روی استوانه‌های $A$ و $B$ قرار دارد. میان مساحت سطحهای بالایی استوانه‌ها رابطهٔ $A_A = ۲A_B$ برقرار است. مدولهای یانگ استوانه‌ها به وسیلهٔ رابطهٔ $E_A = ۲E_B$ به هم مربوطاند. استوانه‌ها قبل از آنکه مکعب روی آنها قرار داده شود طولهای یکسانی دارند. چه کسری از جرم مکعب به وسیلهٔ (الف) استوانهٔ $A$، و (ب) استوانهٔ $B$ تحمل می‌شود؟ فاصلهٔ افقی مرکز جرم مکعب و محور مرکزی استوانه‌های $A$ و $B$ به ترتیب $d_A$ و $d_B$ است. (پ) نسبت $d_A/d_B$ چقدر است؟



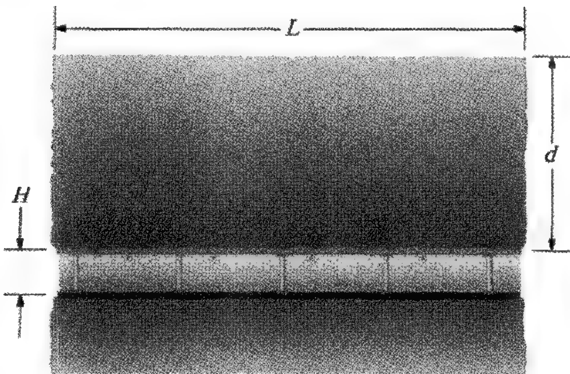
شکل ۱۲-۵۷ مسئلهٔ ۴۷

●●۴۸- شکل ۱۲-۵۸ نمودار تقریبی تنش برحسب کرنش یک تار عنکبوت را نشان می‌دهد که در کرنش ۲/۰۰ تار پاره می‌شود. محور عمودی با $a = ۰/۱۲ \mathrm{GN/m^2}$، $b = ۰/۳۰ \mathrm{GN/m^2}$ و $c = ۰/۸۰ \mathrm{GN/m^2}$ مشخص شده است. فرض کنید طول اولیهٔ تار ۰/۸۰cm، مساحت مقطع اولیهٔ آن $۸/۰ \times ۱۰^{-۱۲} \mathrm{m^2}$ و (در ضمن کشیده شدن) حجم آن ثابت است. همچنین فرض کنید که هرگاه یک تار، حشره‌ای در حال پرواز را بگیرد، انرژی جنبشی حشره موجب کشیده شدن تار می‌شود. (الف) برای در آستانهٔ پاره شدن قرار گرفتن تار چقدر انرژی جنبشی لازم است؟ انرژی جنبشی (ب) یک حشرهٔ میوه‌خوار به جرم ۶/۰۰mg و تندی ۱/۷۰m/s و (پ) زنبور وزوز کننده به جرم ۰/۳۸۸g و تندی ۰/۴۲۰m/s چقدر است؟ آیا (ت) حشرهٔ میوه‌خوار و (ث) زنبور وزوز کننده تار را پاره می‌کنند؟



شکل ۱۲-۵۸ مسئلهٔ ۴۸

●●۴۹- تونلی به طول $L = ۱۵۰ \mathrm{m}$، ارتفاع $H = ۷/۲ \mathrm{m}$ و پهنای ۵/۸m (با سقف مسطح) در عمق $d = ۶۰ \mathrm{m}$ زیرزمین ساخته شده است. (به شکل ۱۲-۵۹ نگاه کنید.) تمام سقف تونل به وسیلهٔ ستونهای فولادی مربع شکلی با مساحت سطح مقطع $۹۶۰ \mathrm{cm^2}$ نگهداشته می‌شود. جرم $۱ \mathrm{cm^3}$ مادهٔ زمین برابر ۲/۸g است. (الف) وزن کلی که ستونها باید تحمل کنند، چقدر است؟ (ب) چند ستون مورد نیاز است تا اینکه تنش تراکمی وارده به هر ستون به اندازهٔ نصف استقامت نهایی باقی بماند؟

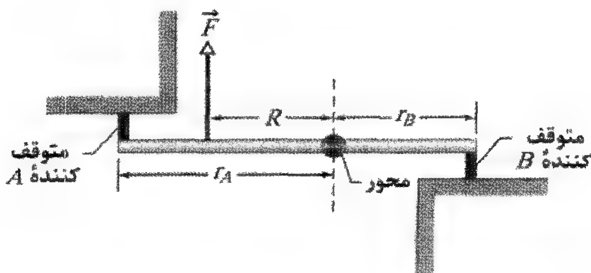


شکل ۱۲-۵۹ مسئلهٔ ۴۹

●●●۵۰- شکل ۱۲-۶۰ حشره‌ای را در وسط تار عنکبوت نشان می‌دهد. تار تحت تنش $۸/۲۰ \times ۱۰^{۸} \mathrm{N/m^2}$ و کرنش ۲/۰۰ پاره می‌شود. تار در ابتدا افقی و طول آن ۲/۰۰cm و مقطع آن $۸/۰۰ \times ۱۰^{-۱۲} \mathrm{m^2}$ بوده است. وقتی تار بر اثر وزن حشره کشیده می‌شود، حجم آن ثابت می‌ماند. اگر وزن حشره آن را در آستانهٔ پاره شدن قرار دهد، جرم حشره چقدر است؟ (اگر حشره‌ای مانند زنبور وزوز کننده در تار گرفتار شود، تار عنکبوت پاره می‌شود).


شکل ۱۲-۶۰ مسئلهٔ ۵۰

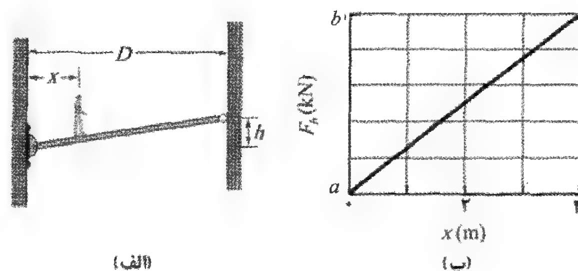
●●●۵۱- شکل ۱۲-۶۱ دید از بالای یک میلهٔ صلب است که حول محور قائمی می‌چرخد تا اینکه متوقف کننده‌های لاستیکی مشابه $A$ و $B$ که در فاصله‌های $r_A = ۷/۰ \mathrm{cm}$ و $r_B = ۴/۰ \mathrm{cm}$ از محور واقع‌اند به دیوارهای صلبی فشرده شوند. در ابتدا متوقف کننده‌ها بدون فشرده شدن با دیوار تماس دارند. وقتی نیروی $\vec{F}$ با بزرگی ۲۲۰N عمود بر میله و به فاصلهٔ $R = ۵/۰ \mathrm{cm}$ از محور به آن وارد شود، مطلوب است تعیین بزرگی نیرویی که (الف) متوقف کنندهٔ $A$ و (ب) متوقف کنندهٔ $B$ را فشرده می‌کند.



شکل ۱۲-۶۱ مسئلهٔ ۵۱

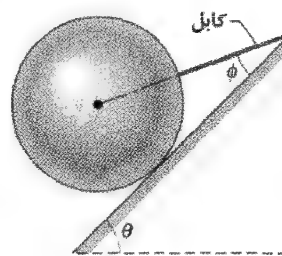
## مسئله‌های اضافی

۵۲- شکل ۱۲-۶۲ الف سطح شیبدار یکنواختی را میان دو ساختمان نشان می‌دهد که در مواقع لزوم از آن استفاده می‌کنند. سطح شیبدار در سمت چپ به دیوار ساختمان لولا شده است و در سمت راست غلتکی وجود دارد که می‌تواند روی دیوار ساختمان بغلتد. هیچ نیروی قائمی از طرف ساختمان به غلتک وارد نمی‌شود، فقط یک نیروی افقی اعمال می‌شود که بزرگی آن برابر $F_h$ است. فاصلهٔ افقی میان دو ساختمان برابر $D=۴/۰۰\text{m}$ است. سطح شیبدار می‌تواند تا ارتفاع $h=۰/۴۹۰\text{m}$ بالا برود. مردی از سمت چپ روی سطح شیبدار قدم می‌زند. شکل ۱۲-۶۲ ب، $F_h$ را برحسب تابعی از فاصلهٔ افقی $x$ از دیوار نشان می‌دهد. مقیاس محور $F_h$ با $a=۲۰\text{kN}$ و $b=۲۵\text{kN}$ مشخص شده است. (الف) جرم سطح شیبدار و (ب) جرم مرد چقدر است؟



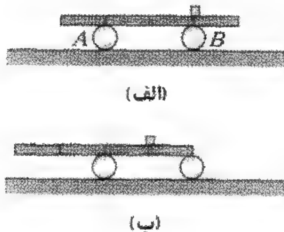

شکل ۱۲-۶۲ مسئلهٔ ۵۲

۵۳- در شکل ۱۲-۶۳ کره‌ای به جرم $۱۰\text{kg}$ روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی که با افق زاویهٔ $\theta=۴۵°$ می‌سازد، قرار دارد. زاویهٔ $\phi$ برابر $۲۵°$ است. نیروی کشش در کابل را به دست آورید.



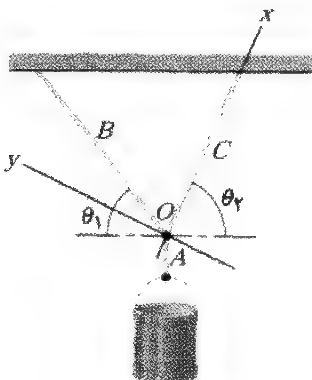

شکل ۱۲-۶۳ مسئلهٔ ۵۳

۵۴- در شکل ۱۲-۶۴ الف، تیر یکنواختی به جرم $۴۰/۰\text{kg}$ روی دو غلتک قرار دارد و مرکز آن از دو غلتک به یک فاصله است. خطهای قائم روی تیر آن را به طولهای مساوی تقسیم می‌کند. دو تا از خطها در بالای غلتکها قرار دارند؛ بسته‌ای به جرم $۱۰/۰\text{kg}$ در بالای غلتک $B$ واقع است. بزرگی نیروهایی که از طرف (الف) غلتک $A$ و (ب) $B$ بر تیر وارد می‌شوند چقدرند؟ سپس تیر به سمت چپ حرکت داده می‌شود تا انتهای سمت راست آن درست در بالای $B$ قرار گیرد (شکل ۱۲-۶۴ ب). حالا بزرگی نیروهایی که از طرف (پ) غلتک $A$ و (ت) غلتک $B$ بر تیر وارد می‌شوند چقدرند؟ سپس تیر به راست حرکت داده می‌شود. فرض کنید طول تیر برابر $۰/۸۰۰\text{m}$ است. (پ) در چه فاصلهٔ افقی میان بسته و غلتک $B$ تیر در آستانهٔ جدایی از غلتک $A$ قرار می‌گیرد؟



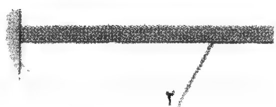

شکل ۱۲-۶۴ مسئلهٔ ۵۴

۵۵- در شکل ۱۲-۶۵ یک بشکهٔ بنایی به جرم $۸۱۷\ \text{kg}$ به کابل $A$ آویخته شده که آن هم در نقطه $O$ به دو کابل دیگر $B$ و $C$ که با افق زاویه‌های $\theta_1=۵۱/۰°$ و $\theta_2=۶۶/۰°$ می‌سازند، متصل است. مطلوب است تعیین نیروی کشش در (الف) کابل $A$، (ب)کابل $B$ و (پ) کابل $C$. (راهنمایی: برای پرهیز از حل دو معادلهٔ دو مجهولی، وضعیت محورها را مطابق شکل اختیار کنید.) **SSM**




شکل ۱۲-۶۵ مسئلهٔ ۵۵

۵۶- در شکل ۱۲-۶۶، بسته‌ای به جرم $m$ از ریسمان کوتاهی آویزان است. این ریسمان از طریق ریسمانهای ۱ و ۲ به سقف متصل است. ریسمان ۱ با افق زاویهٔ $\phi=۴۰°$ می‌سازد؛ زاویهٔ ریسمان ۲ برابر $\theta$ است. (الف) برای چه مقدار نیروی $\theta$ کشش در ریسمان ۲ کمینه است؟ (ب) نیروی کشش کمینه در ریسما ۲ برحسب $mg$ چقدر است؟



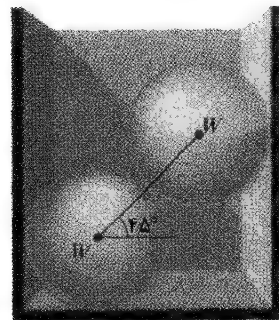

شکل ۱۲-۶۶ مسئلهٔ ۵۶

۵۷- نیروی $\vec{F}$ در شکل ۱۲-۶۷ می‌تواند قطعه‌ای به جرم ۶/۴kg و قرقره‌های با جرم ناچیز را در حال تعادل نگهدارد. اصطکاک قابل ملاحظه‌ای وجود ندارد. نیروی کشش $T$ وارد به کابل بالایی را به دست آورید. (راهنمایی: وقتی کابل نیم‌دور روی قرقره پیچیده شود، بزرگی نیروی خالص وارد بر قرقره دو برابر نیروی کشش در کابل است.) HLW



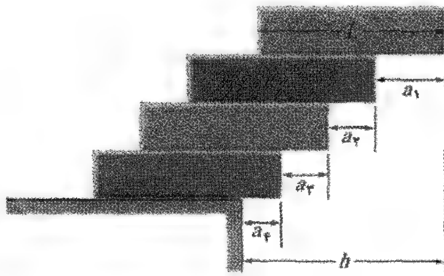

شکل ۱۲-۶۷ مسئلهٔ ۵۷

۵۸- در شکل ۱۲-۶۸، دو کرهٔ مشابه یکنواخت و بدون اصطکاک، هر یک به جرم $m$، داخل یک مکعب مستطیل شکل صلب به حالت سکون قرار دارند. خط وصل کنندهٔ مرکز کره‌ها با افق زاویهٔ °۴۵ می‌سازد. مطلوب است تعیین بزرگی نیروهای وارد بر کره از طرف (الف) کف مکعب، (ب) سمت چپ مکعب، (پ) سمت راست مکعب و (ت) به یکدیگر. (راهنمایی: نیروی وارد از یک کره بر دیگری روی خط مرکز به مرکز آنها قرار دارد.)




شکل ۱۲-۶۸ مسئلهٔ ۵۸

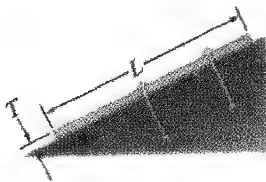
۵۹- چهار آجر مشابه یکنواخت که طول هر یک $L$ است، طوری روی یکدیگر قرار گرفته‌اند (شکل ۱۲-۶۹) که قسمتی از هر آجر از لبهٔ آجر زیری جلوتر است. مطلوب است، برحسب $L$، تعیین مقدارهای بیشینهٔ (الف) $a_1$، (ب) $a_2$، (پ) $a_3$، (ت) $a_4$ و (ث) $h$، به طوری که مجموعه در حال تعادل باشد.




شکل ۱۲-۶۹ مسئلهٔ ۵۹

۶۰- یک صخره نورد به جرم ۹۵ kg پس از سقوط متوجه می‌شود که از انتهای طنابی آویزان است که ۱۵ m طول و ۹/۶ mm قطر دارد و ۲/۸ cm کشیده شده است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) تنش و (ب) کرنش و (پ) مدول یانگ در طناب.

۶۱- در شکل ۱۲-۷۰، قطعهٔ مستطیل شکلی از یک تخته سنگ روی صخرهٔ شیبداری با زاویهٔ $\theta$=°۲۶ قرار دارد. قطعه دارای طول $L$=۴۳m، ضخامت $T$=۲/۵m و پهنای $W$=۱۲m است و ۱/۰cm³ آن ۳/۲g جرم دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و صخرهٔ زیری ۰/۳۹ است. (الف) مؤلفهٔ نیروی گرانشی قطعه را که موازی صخرهٔ شیبدار وارد می‌شود حساب کنید. (ب) بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر قطعه را حساب کنید. با مقایسهٔ (الف) و (ب) مشاهده می‌کنید که تخته سنگ در خطر لغزیدن است و برای جلوگیری از آن تنها این شانس وجود دارد که یک برآمدگی بین تخته سنگ و صخرهٔ زیر آن وجود داشته باشد. (پ) برای محکم کردن تخته سنگ، آن را با پیچهایی عمود بر صخرهٔ شیبدار، پیچ می‌کنیم. (دو پیچ نشان داده شده است) اگر هر پیچ سطح مقطعی برابر ۶/۴cm² داشته باشد و با تنش برشی $۳/۶\times۱۰^۸$ N/m² بشکنند، کمترین تعداد پیچ مورد نیاز چند عدد است؟ فرض کنید پیچها در نیروی عمودی اثری ندارند. SSM

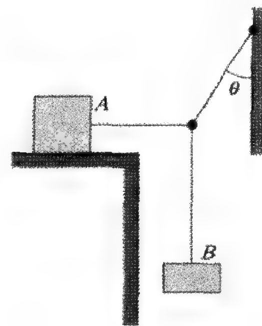



شکل ۱۲-۷۰ مسئلهٔ ۶۱

۶۲- نردبان یکنواختی که طول آن ۵/۰m و وزن آن ۴۰۰N است به دیوار بدون اصطکاکی تکیه دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان زمین و پای نردبان ۰/۴۶ است. بیشترین فاصله‌ای که پای نردبان می‌تواند از دیوار داشته باشد تا نلغزد، چقدر است؟

۶۳- در شکل ۱۲-۷۱، قطعهٔ $A$ (با جرم ۱۰kg) در حال تعادل است، ولی هر جرم اضافی که به جسم $B$ (با جرم ۵kg) افزوده شود قطعه شروع به لغزیدن می‌کند. برای زاویهٔ $\theta$=°۳۰ ،

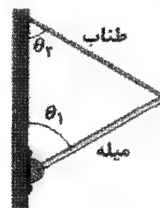
ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم $A$ و سطح زیرین آن، چقدر است؟ SSM



**شکل ۱۲-۷۱** مسئلهٔ ۶۳

۶۴- یک بالابر معدن به وسیلهٔ یک کابل فولادی به قطر ۲/۵cm نگهداشته شده است. جرم کل اتاقک بالابر و محتویاتش رویهم ۶۷۰kg است. وقتی که بالابر (الف) با کابل ۱۲m و (ب) با کابل ۳۶۲m آویزان است، کابل چه مقدار کش می‌آید. (از جرم کابل چشمپوشی کنید.)

۶۵- در شکل ۱۲-۷۲ میلهٔ یکنواختی به جرم $m$ در انتهای پایین آن به دیوار ساختمانی لولا شده و انتهای بالایی به وسیلهٔ طنابی متصل به دیوار نگهداشته شده است. اگر $\theta_1 = ۶۰°$ باشد، مقدار زاویهٔ $\theta_2$ باید چقدر باشد تا نیروی کشش در طناب برابر $mg/۲$ شود؟ SSM

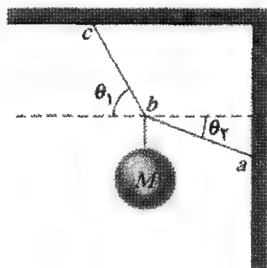


**شکل ۱۲-۷۲** مسئلهٔ ۶۵

۶۶- مردی به جرم ۷۳kg روی پلی به طول $L$ ایستاده است. او در فاصلهٔ $L/۴$ از یک انتها قرار دارد. پل یکنواخت است و ۲/۷ kN وزن دارد. بزرگی نیروهای قائم وارد بر پل به وسیلهٔ تکیه‌گاههای آن، (الف) در انتهای دورتر و (ب) انتهای نزدیکتر چقدر است؟

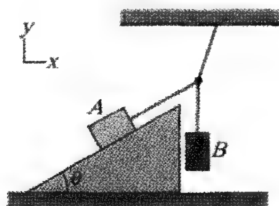
۶۷- یک تاب موقتی از یک حلقه در انتهای طنابی درست شده و سر دیگر طناب به شاخهٔ درختی بسته شده است. بچه‌ای وقتی طناب قائم است داخل حلقه می‌نشیند و پدرش با یک نیروی افقی او را به یک سمت می‌کشد. درست قبل از رها کردن بچه از حال سکون، طناب با قائم زاویه ۱۵° می‌سازد و نیروی کشش در طناب برابر ۲۸۰N است. (الف) وزن بچه چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی (افقی) پدر روی بچه درست قبل از رهاکردن او، چقدر است؟ (پ) اگر نیروی بیشینهٔ افقی که پدر می‌تواند به بچه وارد کند ۹۳ N باشد، بیشینهٔ زاویه‌ای که طناب می‌تواند، در وقتی پدر بچه را افقی می‌کشد، با قائم بسازد چقدر است؟

۶۸- دستگاه شکل ۱۲-۷۳ در حال تعادل است. زاویه‌ها عبارت‌اند از $\theta_1 = ۶۰°$ و $\theta_2 = ۲۰°$ و گلوله دارای جرم $M = ۲/۰\text{kg}$ است. کشش در (الف) ریسمان $ab$ و (ب) ریسمان $bc$ چقدر است؟



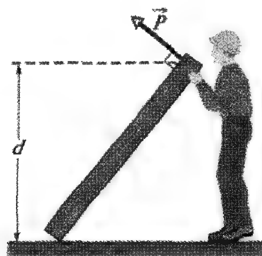
**شکل ۱۲-۷۳** مسئلهٔ ۶۸

۶۹- شکل ۱۲-۷۴ آرایش ساکنی از دو جعبه و سه ریسمان را نشان می‌دهد. جعبهٔ $A$ دارای جرم ۱۱/۰kg است و روی سطح شیبداری با زاویهٔ $\theta = ۳۰/۰°$ قرار دارد؛ جعبهٔ $B$ دارای جرم ۷/۰۰kg و از ریسمان آویزان است. ریسمانی که به جعبهٔ $A$ متصل است موازی سطح شیبدار است و سطح اصطکاک ندارد. (الف) نیروی کشش در ریسمان بالایی و (ب) زاویه‌ای که با افق می‌سازد چقدر است؟



**شکل ۱۲-۷۴** مسئلهٔ ۶۹

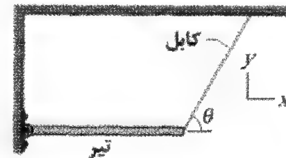
۷۰- یک کارگر ساختمانی می‌خواهد تیری یکنواخت را از زمین بلند کند و آن را به وضعیت قائم درآورد. طول تیر برابر $d = ۲/۵\text{m}$ و وزن آن ۵۰۰N است. در لحظه معینی کارگر با وارد کردن نیروی $\vec{P}$ عمود بر تیر آن را به طور لحظه‌ای ساکن نگه‌می‌دارد در حالی که به ترتیب نشان داده شده در شکل ۱۲-۷۵ سر تیر در فاصلهٔ $d = ۱/۵۰\text{m}$ بالای کف قرار دارد. (الف) بزرگی $P$ چقدر است؟ (ب) بزرگی نیرویی (خالص) که از طرف کف به تیر وارد می‌شود چقدر است؟ (ب) برای آنکه در این لحظه تیر نلغزد، کمینهٔ مقدار ضریب اصطکاک ایستایی میان تیر و کف باید چقدر باشد؟



**شکل ۱۲-۷۵** مسئلهٔ ۷۰

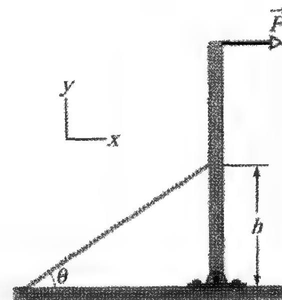
۷۱- مکعب مسی صلبی دارای ضلعی به طول ۸۵/۵ cm است. چه مقدار تنش باید به آن وارد شود تا ضلع مکعب به ۸۵ cm کاهش یابد؟ مدول کپه‌ای مس برابر $1/4\times10^{11}\,N/m^2$ است.

۷۲- یک تیر یکنواخت به طول ۵/۰m دارای جرم ۵۳ kg است. در شکل ۱۲-۷۶، تیر به وسیلهٔ لولا و کابلی با زاویهٔ $\theta=60°$ به طور افقی نگهداشته شده است. برحسب نماد بردار یکه، نیروی وارد به تیر از طرف لولا چقدر است؟



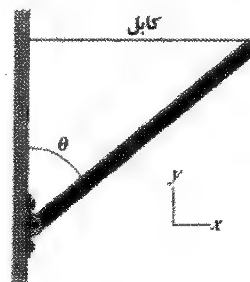

شکل ۱۲-۷۶ مسئلهٔ ۷۲

۷۳- در شکل ۱۲-۷۷ میلهٔ یکنواختی به وزن ۶۰N و طول ۳/۲m در انتهای پایین لولا شده است و یک نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۵۰N به انتهای بالایی آن وارد می‌شود. یک کابل که با زمین زاویهٔ $\theta=25°$ می‌سازد و در ارتفاع $h=2/0\,m$ به تیر متصل است آن را به صورت قائم نگهداشته است. مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش در کابل و (ب) نیروی وارد بر تیر از طرف لولا برحسب نماد بردار یکه.



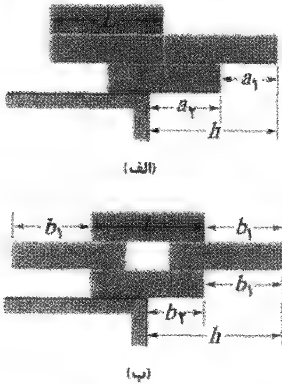

شکل ۱۲-۷۷ مسئلهٔ ۷۳

۷۴- در شکل ۱۲-۷۸، تیر یکنواختی به طول ۱۲/۰m به وسیلهٔ یک کابل افقی و لولا در زاویهٔ $\theta=50/0°$ نگهداشته شده است. کشش در کابل ۴۰۰N است. بر حسب نماد بردار یکه، (الف) نیروی گرانشی روی تیر و (ب) نیروی وارد به تیر از طرف لولا، چقدر است؟




شکل ۱۲-۷۸ مسئلهٔ ۷۴

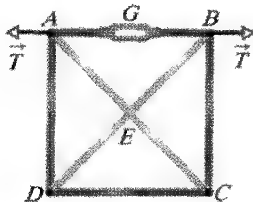
۷۵- چهار آجر مشابهٔ یکنواخت هر یک به طول $L$، همان طور که در شکل ۱۲-۷۹ نشان داده شده است، به دو روش روی میز، روی یکدیگر چیده شده‌اند (با مسئلهٔ ۵۹ مقایسه کنید). می‌خواهیم مقدار جلو رفتگی $h$ در هر دو آرایش بیشینه باشد. فاصله‌های بهینهٔ $a_1$، $a_2$، $b_1$ و $b_2$ را به دست آورید و برای دو آرایش، $h$ را حساب کنید.




شکل ۱۲-۷۹ مسئلهٔ ۷۵

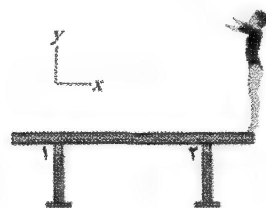
۷۶- ترازویی از میلهٔ صلبی با جرم ناچیز و کفه‌هایی که از دو سر میله آویزان هستند ساخته شده است. میله روی نقطه‌ای که خارج از مرکز میله قرار دارد، واقع است و می‌تواند آزادانه حول آن بچرخد. این ترازو با قرار دادن وزنه‌های نا مساوی در کفه‌ها، به حال تعادل در می‌آید. هرگاه جرم نامعلوم $m$ را در کفهٔ سمت چپ بگذاریم، برای حفظ تعادل باید جرم $m_1$ در کفهٔ سمت راست قرار داده شود و به همین ترتیب وقتی جرم $m$ را در کفهٔ سمت راست می‌گذاریم، برای حفظ تعادل باید جرم $m_2$ در کفهٔ سمت چپ قرار داده شود. نشان دهید که $m=\sqrt{m_1 m_2}$.

۷۷- قاب مربعی شکل صلب ۱۲-۸۰ شامل چهار ضلع به صورت میله‌های $AB$، $BC$، $CD$ و $DA$ و دو قطر به صورت میله‌های $AC$ و $BD$ است که در $E$ آزادانه از کنار هم گذشته‌اند. به وسیلهٔ پیچ تنظیم $G$، میلهٔ $AB$ تحت کشش است به طوری که دو انتهای آن تحت تأثیر نیروهای افقی به طرف خارج $\vec{T}$ با بزرگی ۵۳۵ N قرار می‌گیرند. (الف) کدامیک از میله‌های دیگر تحت کشش قرار می‌گیرد؟ مطلوب است تعیین (ب) نیروهایی که باعث کشش در آن میله‌ها می‌شوند و (پ) نیروهایی که موجب تراکم در سایر میله‌ها می‌شوند. (راهنمایی: بررسی تقارن شکل می‌تواند این مسئله را به طور قابل ملاحظه‌ای ساده کند.)



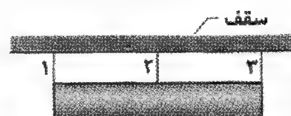

شکل ۱۲-۸۰ مسئلهٔ ۷۷

۷۸- یک ورزشکار ژیمناستیک به جرم $46/0\,kg$ در انتهای یک تیر موازنهٔ یکنواخت به صورتی که در شکل ۱۲-۸۱ نشان داده شده، ایستاده است. تیر $5/00\,m$ طول دارد و دارای جرم $250\,kg$ (صرفنظر از جرم دو پایه) است. هر پایه به فاصلهٔ $0/540\,m$ از هر انتهای تیر قرار دارد. برحسب نماد بردار یکه، نیروی وارد به تیر از طرف (الف) پایهٔ ۱ و (ب) پایهٔ ۲ چقدر است؟



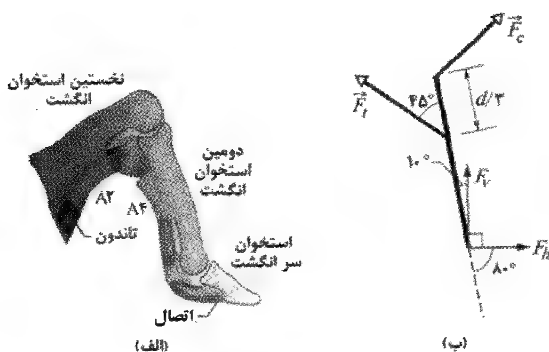
**شکل ۱۲-۸۱** مسئلهٔ ۷۸

۷۹- شکل ۱۲-۸۲ یک استوانهٔ افقی به جرم $300\,kg$ را نشان می‌دهد. سه سیم فولادی که به سقف متصل‌اند استوانه را نگهداشته‌اند. سیمهای ۱ و ۳ به دو انتهای استوانه وصل‌اند، و سیم ۲ به مرکز آن متصل است. هر سیم دارای مساحت سطح مقطع $1/00 \times 10^{-6}\,m^2$ است. در ابتدا (قبل از اینکه استوانه در این وضعیت قرارگیرد)، سیمهای ۱ و ۳ دارای طول $2/0000\,m$ و سیم ۲ به اندازهٔ $6/00\,mm$ درازتر بوده است. حالا سه سیم کشیده شده‌اند. نیروی کشش در (الف) سیم ۱ و (ب) سیم ۲ چقدر است؟



**شکل ۱۲-۸۲** مسئلهٔ ۷۹

۸۰- شکل ۱۲-۸۳ الف اجزای یک انگشت صخره‌نورد شکل ۱۲-۴۷ را که با یک دست از لبه آویزان است نشان می‌دهد. تاندونی که از عضله‌ها در ساعد می‌گذرد به استخوان انتهایی انگشت متصل است. در طول مسیر تاندون از میان چند غلاف راهنما که زردپی نامیده می‌شوند می‌گذرد. زردپی $A_2$ به اولین استخوان انگشت متصل است؛ زردپی $A_4$ به استخوان دوم انگشت وصل است، برای کشیدن انگشت به کف دست عضله‌های ساعد نظیر ریسمانهای خیمه شب بازی که عروسک را می‌کشند تاندون را از زردپی می‌کشند. در شکل ۱۲-۸۳ ب نمودار ساده شدهٔ استخوان دوم انگشت با طول $d$ آمده است. کشش $\vec{F}_t$ تاندون روی استخوان در نقطه‌ای اثر می‌کند که تاندون در فاصلهٔ $d/3$ در امتداد استخوان وارد زردپی $A_4$ می‌شود. اگر مؤلفه‌های نیروی وارد بر هر چهار انگشت صخره‌نورد در شکل ۱۲-۴۷ برابر $F_h = 13/4\,N$ و $F_v = 162/2\,N$ باشد، بزرگی $\vec{F}_t$ چقدر است؟ این نتیجه قابل تحمل است، ولی اگر صخره‌نورد فقط با یک یا دو انگشت خود را نگهدارد، زردپیهای $A_2$ و $A_4$ پاره می‌شوند، چیزی که صخره‌نوردان از آن رنج می‌برند.



**شکل ۱۲-۸۳** مسئلهٔ ۸۰

۸۱- مکعب یکنواختی به ضلع $8/0\,m$ روی سطحی افقی در حال سکون است. ضریب اصطکاک ایستایی میان مکعب و سطح برابر $\mu$ است. مکعب به وسیلهٔ نیروی افقی $\vec{P}$ که بر یکی از وجه‌های قائم آن عمود است کشیده می‌شود. نقطه اثر این نیرو $7/0\,cm$ بالاتر از سطح و از دو یال قائم به یک فاصله است. بزرگی $\vec{P}$ به تدریج افزایش می‌یابد، برای چه مقدارهایی از $\mu$ سرانجام مکعب (الف) شروع به سرخوردن و (ب) شروع به بلندشدن می‌کند؟ (*راهنمایی:* در حالتی که مکعب شروع به بلندشدن روی یک یال می‌کند، نیروی عمود در کجا واقع است؟) SSM

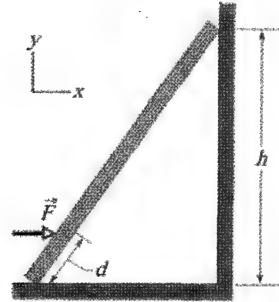
۸۲- یک میلهٔ استوانه‌ای از آلومینیوم با طول اولیهٔ $0/8000\,m$ و شعاع $1000/0\,\mu m$ از یک انتها بسته شده است و به وسیلهٔ دستگاه کشش از انتهای دیگر میله موازی با محور استوانه کشیده می‌شود. با فرض اینکه چگالی میله (جرم در واحد حجم) تغییر نکند، مطلوب است تعیین بزرگی نیرویی که دستگاه باید وارد کند تا شعاع به $999/9\,\mu m$ کاهش یابد. (از استقامت تسلیم تجاوز نشده است.)

۸۳- سه نفر تیری به طول $L$ را حمل می‌کنند. یکی سر تیر را گرفته است و دو نفر دیگر تیر را روی قطعه چوبی گذاشته‌اند به طوری که وزن تیر به طور مساوی میان هر سه نفر تقسیم شده است. قطعه چوب در چه فاصله‌ای از سر آزاد تیر قرار دارد؟ (از جرم قطعه چوب چشمپوشی کنید.)

۸۴- دریچه‌ای مربعی به ضلع $0/91\,m$ و جرم $11\,kg$ در سقفی قرار دارد و در طول یک ضلع لولا شده و دستگیره در ضلع مقابل واقع است. اگر گرانیگاه دریچه $10\,cm$ به سمت لولا از مرکز دریچه قرار داشته باشد، بزرگی نیروهای وارد شده به وسیلهٔ دریچه روی (الف) دستگیره و (ب) لولا چقدر است؟

۸۵- نردبان یکنواختی دارای طول $10\,m$ و وزن $200\,N$ است. در شکل ۱۲-۸۴ نردبان در ارتفاع $h = 8/0\,m$ بالای زمین به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه دارد. نیروی افقی $\vec{F}$ در فاصلهٔ $d = 2/0\,m$ از پای نردبان (در امتداد نردبان اندازه‌گیری شده است) به آن وارد می‌شود. (الف) اگر $F = 50\,N$ باشد، نیرویی که زمین به نردبان وارد می‌کند، برحسب نماد بردار یکه، چقدر

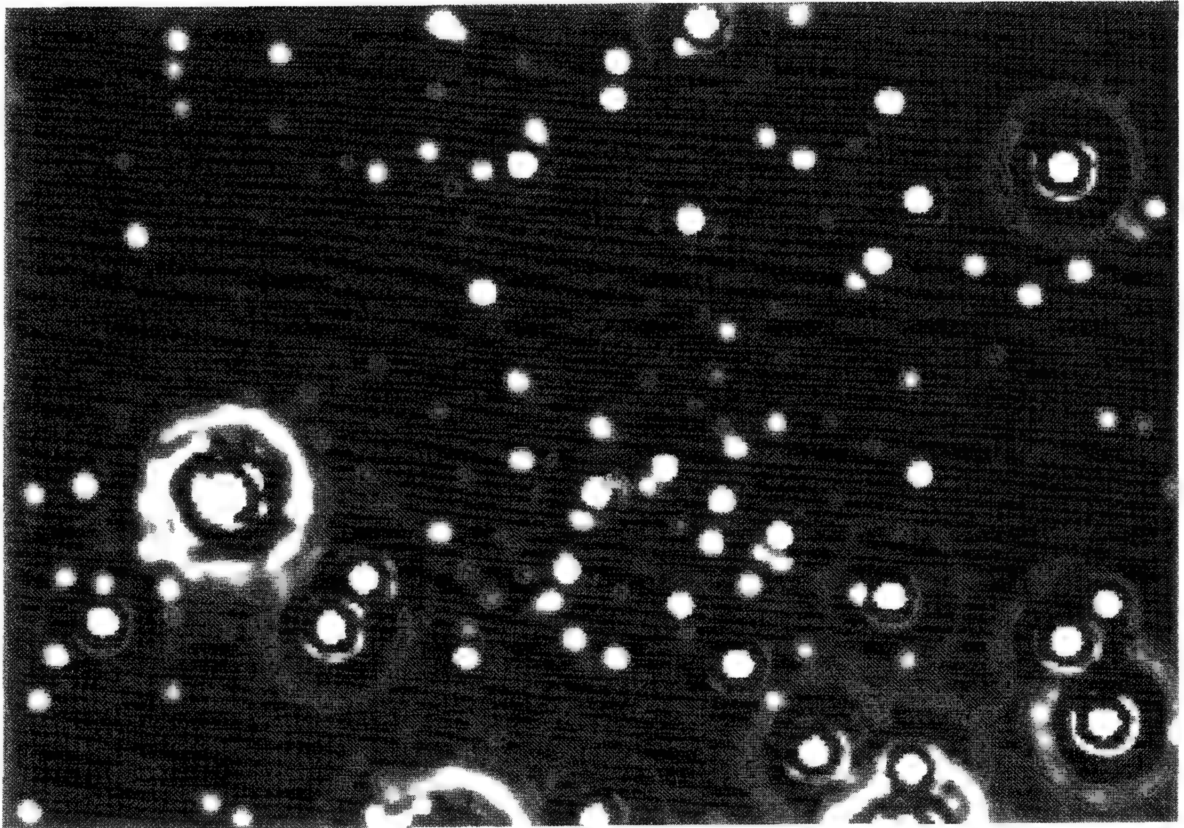
است؟ (ب) اگر $F=150\,\text{N}$ باشد، نیرویی که زمین به نردبان وارد می‌کند چقدر است؟ (پ) فرض کنید که ضریب اصطکاک ایستایی میان نردبان و زمین برابر ۰/۳۸ باشد؛ به ازای چه مقدار کمینه‌ای از نیروی $F$ پای نردبان درست شروع به حرکت به سمت دیوار می‌کند. **SSM**




**شکل ۱۲-۸۴** مسئلهٔ ۸۵

۸۶- اگر تیر (با سطح مقطع مربع) شکل ۱۲-۷ الف از چوب صنوبر باشد، ضخامت تیر چقدر باید باشد تا تنش تراکمی وارد به آن برابر با $\frac{1}{6}$ استقامت نهایی باقی بماند. (به مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۳ نگاه کنید.)

# ۱۳ گرانش



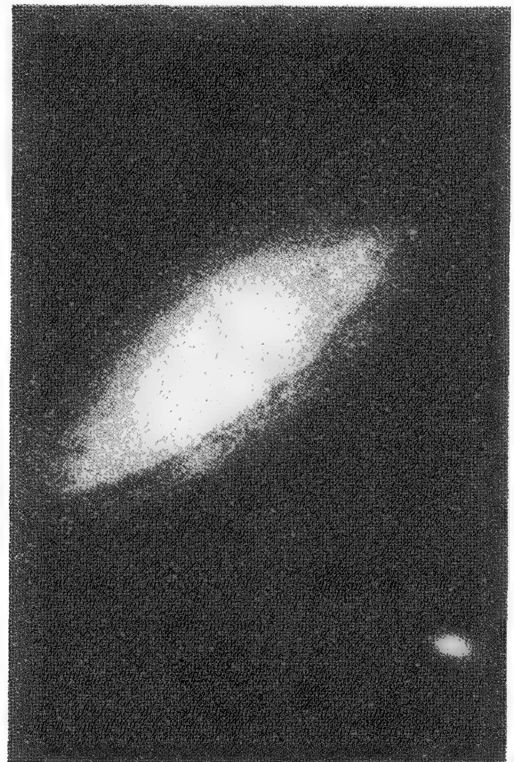
**چه هیولایی در مرکز کهکشان ما قرار دارد؟**

پاسخ در همین فصل.

این تصویری از ستاره‌های نزدیک مرکز کهکشان راه شیری است، که با علامت بعلاوهٔ کوچک نشان داده شده است. توجه کنید که هیچ چیزی در مرکز این کهکشان دیده نمی‌شود ولی اندکی در خارج این مرکز (در مکان 8:00) دایرهٔ کوچکی وجود دارد. این دایره تصویر ستاره‌ای به نام S۲ است. دایره‌های دیگر نیز تصویرهای ستاره‌ها هستند. (هاله‌های اطراف آنها با روش پردازش تصویر به طور مصنوعی ایجاد شده‌اند). بیشتر ستاره‌های کهکشان ما آنقدر آهسته حرکت می‌کنند که واقعاً نمی‌توان حرکت آنها را نسبت به دیگری حتی در مشاهده‌های طولانی مدت دید. با این وجود، S۲ بسیار متفاوت است، یعنی می‌توان حرکت آن را دید. در واقع، این ستاره آنقدر سریع حرکت می‌کند که می‌تواند تنها در مدت ۱۵/۲ سال یک دور کامل را به دور مرکز کهکشان طی کند. در مرکز کهکشان باید چیز عظیمی وجود داشته باشد ولی هنوز هیچ چیزی در آنجا مشاهده نشده است.

## ۱۳-۱ فیزیک چیست؟

یکی از هدفهای فیزیک از دیرباز درک نیروی گرانشی است، نیرویی که شما را روی زمین ، ماه را در مدارش به دور زمین و زمین را در مدارش به دور خورشید نگه می‌دارد. این نیرو حتی در کل کهکشان راه شیری نیز وجود دارد و باعث نگهداشتن میلیاردها میلیارد ستاره در کهکشان و مولکولها و ذره‌های غبار بیشماری در بین ستاره‌ها می‌شود. ما تا حدودی در نزدیکی لبهٔ این مجموعهٔ قرص مانند از ستاره‌ها و سایر مواد واقع هستیم که $۲/۶\times ۱۰^{۴}$ سال نوری ($۲/۵\times ۱۰^{۲۰}$ m) از مرکز کهکشان فاصله دارند، و ما به آهستگی دور آن حرکت می‌کنیم.



**شکل ۱۳-۱** کهکشان امرأة المسلسله که در فاصلهٔ $۲/۳ \times ۱۰^{۶}$ سال نوری از ما قرار دارد و با چشم غیر مسلح به زحمت دیده می‌شود، خیلی شبیه کهکشان راه شیری خودمان است.

نیروی گرانشی به درون فضای بین کهکشانی نیز می‌رسد و باعث نگهداشتن کهکشانهای گروه محلی به یکدیگر می‌شود؛ که علاوه بر کهکشان راه شیری، کهکشان امرأة المسلسله (زن به زنجیر بسته) (شکل ۱۳-۱) به فاصلهٔ $۲/۳\times ۱۰^{۶}$ سال نوری از زمین، به علاوهٔ چندین کهکشان کوتولهٔ نزدیکتر مانند کهکشان «ابر ماژلانی بزرگ» را نیز شامل می‌شود. گروه محلی بخشی از ابرخوشهٔ محلی است که با نیروی گرانشی به طرف یک ناحیهٔ فوق العاده ثقیل از فضا به نام ربایندهٔ بزرگ کشیده می‌شود. این ناحیه به نظر می‌رسد که حدود $۳/۰\times ۱۰^{۸}$ سال نوری از زمین دور است و در نقطهٔ مقابل زمین در کهکشان راه شیری قرار دارد. نیروی گرانشی حتی به دورترها هم می‌رسد زیرا تمام کیهان در حال انبساط را به هم نگه می‌دارد.

این نیرو همچنین مسؤول بسیاری از ساختارهای مرموز جهان یعنی *سیاهچاله‌ها* است. وقتی ستاره‌ای که در مقایسه با خورشید ما بسیار بزرگتر است سوختش تمام می‌شود، نیروی گرانشی بین ذراتش می‌تواند باعث شود که ستاره در خودش برمبد و در نتیجه یک سیاهچاله تشکیل شود. نیروی گرانشی در سطح چنین ستارهٔ رمبیده‌ای آن چنان قوی است که هیچ ذره و نوری نمی‌تواند از سطح آن فرار کند (به همین دلیل به آن «سیاهچاله» می‌گویند). هر ستاره‌ای که به سیاهچاله خیلی نزدیک شود با یک نیروی گرانشی قوی به دام آن می‌افتد و به داخل سیاهچاله کشیده می‌شود. این به دام انداختنها باعث ایجاد یک *سیاهچالهٔ ابرسنگین* می‌شود. این هیولاهای مرموز معمولاً در جهان ظاهر می‌شوند.

اگرچه نیروی گرانشی هنوز کاملاً شناخته شده نیست ولی نقطهٔ شروع درک ما از گرانش در *قانون گرانش* ایزاک نیوتون نهفته است.

## ۱۳-۲ قانون گرانش نیوتون

فیزیکدانان دوست دارند که پدیده‌های به ظاهر نامربوط را مطالعه کنند تا نشان دهند که وقتی پدیده‌ها به دقت بررسی شوند می‌توان رابطه‌ای را بین آنها به دست آورد. این بررسیها برای رسیدن به وحدت در طی قرنها ادامه داشته است. در سال ۱۶۶۵/۱۰۴۴، ایزاک نیوتون ۲۳ ساله با نشان دادن اینکه نیرویی که ماه را روی مدارش نگه می‌دارد، همان نیرویی است که افتادن سیب از درخت را سبب می‌شود سهمی بنیادی در گسترش فیزیک به عهده داشت. این موضوع امروزه چنان بدیهی به نظر می‌رسد که برای ما آسان نیست که بفهمیم پیشینیان، چگونه باور داشتند که حرکتهای جسمهای زمینی و آسمانی متفاوت‌اند و از قانونهای متفاوتی پیروی می‌کنند.

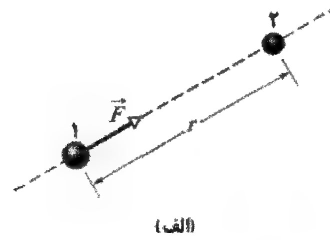
نیوتون نتیجه گرفت که زمین نه تنها سیب و ماه را جذب می‌کند بلکه هر جسمی در جهان که دارای جرم است جسم دیگر را جذب می‌کند؛ این تمایل جسمها به حرکت به سوی یکدیگر را **گرانش** می‌نامند. این نتیجه‌گیری نیوتون برای ما کمتر محسوس است زیرا نیروی آشنای جاذبهٔ زمین برای جسمهای روی زمین چنان بزرگ است که بر نیروی جاذبهٔ یک جسم روی جسم دیگر غلبه دارد. برای مثال زمین یک سیب را با نیرویی حدود ۰/۸N جذب می‌کند. شما نیز به یک سیب کنار خود نیروی جاذبه وارد می‌کنید (سیب نیز شما را جذب می‌کند) ولی در اینجا نیروی جاذبه از وزن یک ذرهٔ غبار هم کمتر است.

نیوتون یک *قانون نیرو* ارائه کرد که **قانون گرانش نیوتون** نام دارد و می‌گوید: هر ذره‌ای هر ذرهٔ دیگر را با یک **نیروی گرانشی** جذب می‌کند که بزرگی آن برابر است با

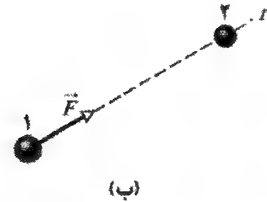
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(قانون گرانش نیوتون)} \qquad (۱-۱۳)$$

که در آن $m_1$ و $m_2$ جرمهای دو ذره، $r$ فاصلهٔ بین آنها و $G$ **ثابت گرانشی** است که مقدار آن برابر است با

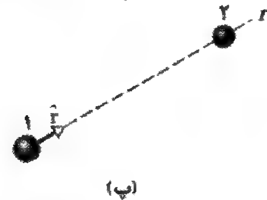
$$G = 6/67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \qquad (۲-۱۳)$$
$$= 6/67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2}$$



(الف)



(ب)



(پ)

**شکل ۱۳-۲** (الف) نیروی گرانش $\vec{F}$ که از ذرهٔ ۲ به ذرهٔ ۱ وارد می‌شود یک نیروی جاذبه است زیرا ذرهٔ ۱ جذب ذرهٔ ۲ می‌شود. (ب) نیروی $F$ درجهت محور مختصات شعاعی $r$ از ذرهٔ ۱ به ذرهٔ ۲ وارد می‌شود. (پ) $F$ در جهت بردار یکهٔ $r$ در طول محور $r$ است.

در شکل ۱۳-۲ الف، $F$ نیروی گرانشی وارد شده به ذرهٔ ۱ (جرم $m_1$) ناشی از ذرهٔ ۲ (جرم $m_2$) است. این نیرو در جهت ذرهٔ ۲ است و به آن *نیروی جاذبه* گفته می‌شود زیرا ذرهٔ ۱ به طرف ذرهٔ ۲ جذب می‌شود. بزرگی نیرو با معادلهٔ ۱۳-۱ داده می‌شود.

می‌توان نیروی $\vec{F}$ را به صورتی تعریف کرد که در جهت مثبت یک محور $r$ باشد و به طور شعاعی از طرف ذرهٔ ۱ به ذرهٔ ۲ امتداد یابد، (شکل ۱۳-۲ ب). همچنین می‌توان نیروی $\vec{F}$ را با استفاده از بردار یکهٔ شعاعی $\hat{r}$ (بردار بدون بُعدی با بزرگی ۱) تعریف کرد به طوری که از طرف ذرهٔ ۱ در طول محور $r$ امتداد می‌یابد، (شکل ۱۳-۲ پ). بنابراین، از معادلهٔ ۱۳-۱ نیروی وارد بر ذرهٔ ۱ برابر است با

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \qquad (۳-۱۳)$$

نیروی گرانشی وارد بر ذرهٔ ۲ از طرف ذرهٔ ۱ دارای همان مقدار نیروی وارد بر ذرهٔ ۱ از طرف ذرهٔ ۲ ولی در جهت مخالف آن است. این دو نیرو یک جفت نیروی کنش و واکنش (قانون سوم نیوتون) را تشکیل می‌دهند و می‌توان بزرگی نیروی گرانشی بین دو ذره را به اندازهٔ داده شده توسط معادلهٔ ۱۳-۱ تعریف کرد. این نیروی بین جفت ذره توسط سایر جسمهای دیگر از بین نمی‌رود، حتی اگر بین دو ذره قرار گیرند. به عبارت دیگر هیچ جسمی نمی‌تواند به صورت حفاظتی مانع از وارد شدن نیروی گرانشی ناشی از ذره‌های دیگر به یک ذره شود.

شدت نیروی گرانشی یعنی دو ذره با جرمهای معین در فاصلهٔ مشخص با چه قدرتی یکدیگر را بسته به مقدار ثابت گرانش $G$ جذب می‌کنند. اگر به طور معجزه آسایی ناگهان $G$ ده برابر شود، نیروی جاذبهٔ زمین شما را به کف زمین می‌چسباند. اگر $G$ به اندازهٔ یک دهم شود، جاذبهٔ زمین آنقدر ضعیف خواهد شد که می‌توانید به سادگی به روی بام یک ساختمان پرش کنید.

اگرچه قانون گرانش نیوتون دقیقاً در مورد ذره‌ها به کار می‌رود ولی همچنین می‌توان آن را در مورد جسمهای واقعی که اندازهٔ آنها در مقایسه با فاصلهٔ بین آنها کوچک است نیز اعمال کرد. ماه و زمین آنقدر از هم فاصله دارند که با تقریب خوبی می‌توان آنها را به صورت ذره در نظر گرفت. آیا در مورد سیب و زمین هم این موضوع صادق است؟ در مورد سیب، با توجه به سطح گسترده و هموار زمین که زیر سیب تا افق ادامه دارد یقیناً نمی‌توان زمین را شبیه یک ذره در نظر گرفت.

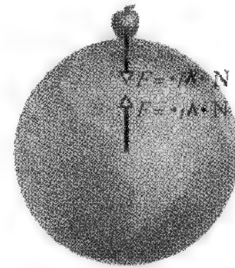
نیوتون مسئلهٔ سیب- زمین را با ارائهٔ یک قضیهٔ مهم به نام *قضیهٔ پوسته* حل کرد:

> پوستهٔ کروی یکنواختی از جسم می‌تواند ذره‌ای را که در خارج پوسته قرار دارد جذب کند به طوری که گویی همهٔ جرم پوسته در مرکز آن متمرکز شده است.

زمین را می‌توان به صورت دسته‌ای از پوسته‌ها در نظر گرفت که هر یک در داخل دیگری قرار دارند و هر پوسته یک ذرهٔ خارج پوستهٔ زمین را طوری جذب می‌کند که گویی همهٔ جرم پوسته در مرکز آن جمع شده است. بنابراین از نظر سیب، زمین مانند ذره‌ای رفتار می‌کند که همهٔ جرم آن در مرکز زمین قرار دارد و جرم آن برابر جرم زمین است.

فرض کنید که مطابق شکل ۱۳-۳ زمین سیبی را با نیرویی به بزرگی $0/80\,\mathrm{N}$ به طرف پایین بکشد. در این صورت سیب نیز باید زمین را با نیرویی به بزرگی $0/80\,\mathrm{N}$ به طرف بالا بکشد که به مرکز کرهٔ زمین وارد می‌شود. اگر چه این دو نیرو از لحاظ بزرگی با هم برابرند اما وقتی سیب را رها کنیم باعث ایجاد شتابهای متفاوتی می‌شوند. شتاب سیب حدود $9/8\,\mathrm{m/s^2}$

است که همان شتاب جسم در حال سقوط در نزدیکی سطح زمین است. شتاب زمین که از نظر چارچوب مرجع سیب اندازه گرفته می‌شود و به مرکز جرم دستگاه سیب و زمین وارد می‌شود تنها حدود $1\times10^{-25}\ m/s^2$ است.



**شکل ۱۳-۳** سیب با همان نیرویی که زمین آن را به سمت پایین می‌کشد کرهٔ زمین را به سمت بالا می‌کشد.

✔ ***نکتهٔ وارسی ۱*** ذره‌ای را به ترتیب در خارج چهار جسم هر یک به جرم $m$ قرار می‌دهیم: (۱) یک کرهٔ بزرگ توپر و یکنواخت، (۲) پوستهٔ کروی یکنواخت و بزرگ، (۳) کره کوچک توپر و یکنواخت و (۴) پوستهٔ کروی کوچک. در هر حالت فاصلهٔ بین ذره و مرکز جرم جسم برابر $d$ است. این جسمها را برحسب بزرگی نیروی گرانشی که هر یک بر ذره وارد می‌کنند، از بزرگترین نیرو، به ترتیب بنویسید.

## ۱۳-۳ گرانش و اصل بر هم نهی

یک دسته ذره داده شده‌اند، می‌توانیم نیروی گرانشی خالص (یا برایند) وارد بر هر کدام از سوی ذره‌های دیگر را با استفاده از **اصل برهم نهی** به دست آوریم. این یک اصل کلی است که بیان می‌کند اثر خالص برابر مجموع اثرهای مجزاست. در اینجا این اصل به این مفهوم است که می‌توان ابتدا نیروی وارد بر ذرهٔ موردنظر از طرف ذره‌های دیگر را به نوبت محاسبه و سپس نیروی برایند را مطابق معمول با جمع کردن نیروها به طریق برداری معین کرد.

برای $n$ ذرهٔ برهم کنش کننده می‌توان اصل برهم نهی را برای نیروهای گرانشی وارد بر ذرهٔ ۱ به صورت زیر نوشت

$$\vec{F}_{1,net} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + ... + \vec{F}_{1n} \qquad (۱۳-۴)$$

در اینجا $\vec{F}_{1,net}$ نیروی خالص وارد بر ذرهٔ ۱ است. مثلاً $\vec{F}_{13}$ نیرویی است که ذرهٔ ۳ به ذرهٔ ۱ وارد می‌کند. این معادله را می‌توان به طور فشرده‌تر به صورت جمع برداری نوشت

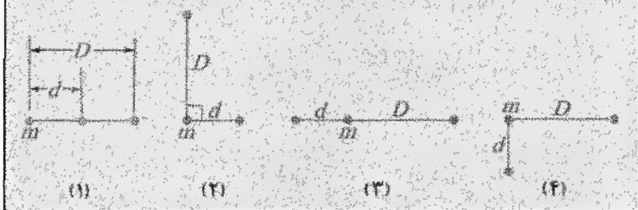
$$\vec{F}_{1,net} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i} \qquad (۱۳-۵)$$

اکنون می‌خواهیم ببینیم که نیروی گرانشی وارد بر یک ذره از طرف یک جسم واقعی (گسترده) چگونه است. برای تعیین این نیرو جسم را به قسمتهای بسیار کوچکی که بتوان آنها را ذره فرض کرد تقسیم می‌کنیم و سپس با استفاده از معادلهٔ ۱۳-۵، جمع برداری نیروهای وارد بر ذره از طرف همهٔ قسمتها را به دست می‌آوریم. در حالت حدی می‌توان جسم گسترده را به قسمتهای دیفرانسیلی هر یک به جرم $dm$ تقسیم کرد که هر یک نیروی دیفرانسیلی $d\vec{F}$ را بر ذره وارد می‌کنند. در این حالت حدی مجموع معادلهٔ ۱۳-۵ به انتگرال تبدیل می‌شود و خواهیم داشت

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F} \qquad (۱۳-۶)$$

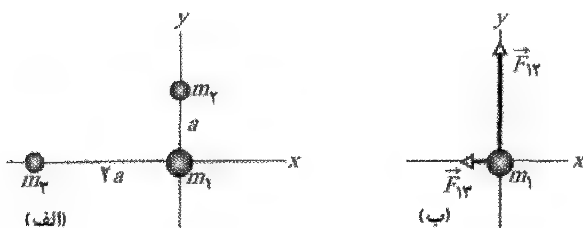
که در آن انتگرال روی کل جسم گسترده گرفته می‌شود و در اینجا دیگر شاخص «net» را حذف کرده‌ایم. اگر جسم گسترده به صورت کرهٔ یکنواخت یا پوستهٔ کروی باشد، می‌توانیم با فرض اینکه جرم کل جسم در مرکز جسم متمرکز شده است از انتگرالگیری معادلهٔ ۱۳-۶ پرهیز کنیم و معادلهٔ ۱۳-۱ را به کار ببریم.

✔ ***نکتهٔ وارسی ۲*** شکل چهار آرایش از سه ذره با جرمهای برابر را نشان می‌دهد. (الف) این آرایشها را برحسب بزرگی نیروی گرانشی خالصی که بر ذرهٔ $m$ وارد می‌شود مرتب کنید. بزرگترین نیرو را اول قرار دهید. (ب) در آرایش ۲، آیا راستای نیروی خالص به خط با طول $d$ نزدیکتر است یا به خط با طول $D$؟




### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳-۱

شکل ۱۳-۴ الف آرایشی از سه ذره را نشان می‌دهد که در آن جرم ذرهٔ ۱ برابر $m_1 = 6.0\ kg$ و جرم ذره‌های ۲ و ۳ $m_2 = m_3 = 4.0\ kg$ و فاصلهٔ $a = 2.0\ cm$ است. نیروی گرانشی خالص $\vec{F}_{1,net}$ که از سوی ذره‌های دیگر بر ذرهٔ ۱ وارد می‌شود چقدر است؟




**شکل ۱۳-۴** (الف) آرایشی از سه ذره. (ب) نیروهایی که از طرف ذره‌های دیگر به ذرهٔ $m_1$ وارد می‌شوند.

**نکتهٔ کلیدی** (۱) از آنجا که با ذره‌ها سروکار داریم می‌توان بزرگی نیروی گرانشی ناشی از دو ذرهٔ دیگر بر ذرهٔ ۱ را با استفاده از معادلهٔ ۱۳-۱ $(F = G\frac{m_1 m_2}{r^2})$ حساب کرد. (۲) جهت هر نیروی گرانشی وارد بر ذره ۱ به طرف ذره‌ای است که مسبب آن است. (۳) چون نیروها در راستای یک محور نیستند، نمی‌توان بزرگی آنها، یا مؤلفه‌های آنها را برای به دست آوردن نیروی خالص به سادگی جمع یا تفریق کرد. در عوض آنها را به طور برداری جمع می‌کنیم.

***محاسبه‌ها:*** از معادلهٔ ۱۳-۱، بزرگی نیروی $\vec{F}_{12}$ وارد بر ذرهٔ ۱ از طرف ذرهٔ ۲ برابر است با

$$F_{12} = \frac{Gm_1 m_2}{a^2}$$
$$= \frac{(6/67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\cdot s^2})(6/0\ \mathrm{kg})(4/0\ \mathrm{kg})}{(0/020\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 4/00\times10^{-6}\ \mathrm{N}$$

به همین ترتیب بزرگی نیروی $\vec{F}_{13}$ که از طرف ذرهٔ ۳ به ذرهٔ ۱ وارد می‌شود برابر است با

$$F_{13} = \frac{Gm_1 m_3}{(2a)^2}$$
$$= \frac{(6/67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\cdot s^2})(6/0\ \mathrm{kg})(4/0\ \mathrm{kg})}{(0/04\mathrm{m})^2}$$
$$= 1/00\times10^{-6}\ \mathrm{N}$$

نیروی $\vec{F}_{12}$ در جهت مثبت محور $y$ (شکل ۱۳-۴ ب) قرار دارد و تنها دارای مؤلفهٔ $y$ برابر $F_{12}$ است. به همین ترتیب، $\vec{F}_{13}$ در جهت منفی محور $x$ واقع است و تنها دارای مؤلفهٔ $x$ برابر $-F_{13}$ است.

برای به دست آوردن نیروی خالص $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$ وارد بر ذرهٔ ۱ باید آنها را به صورت برداری جمع کنیم. می‌توان این کار را با یک ماشین حساب ویژهٔ محاسبه‌های برداری انجام داد. به هر حال، در اینجا توجه کنید که $-F_{13}$ و $F_{12}$ در واقع مؤلفه‌های $x$ و $y$ نیروی $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$ هستند. بنابراین، می‌توان از معادلهٔ ۳-۶ استفاده کرد و ابتدا بزرگی و سپس جهت $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$ را به دست آورد. این بزرگی برابر است با

$$\vec{F}_{1,\mathrm{net}} = \sqrt{(F_{12})^2 + (-F_{13})^2}$$
$$= \sqrt{(4/00\times10^{-6}\ \mathrm{N})^2 + (-1/00\times10^{-6}\ \mathrm{N})^2}$$
$$= 4/1\times10^{-6}\mathrm{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

معادلهٔ ۳-۶ نسبت به جهت مثبت محور $x$، جهت $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$ را به صورت زیر به دست می‌دهد

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{12}}{-F_{13}} = \tan^{-1}\frac{4/00\times10^{-6}\ \mathrm{N}}{-1/00\times10^{-6}\ \mathrm{N}} = -76°$$

آیا این پاسخ قابل قبول است؟ خیر، زیرا راستای $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$ باید بین راستاهای $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{13}$ باشد. با توجه به فصل ۳ (تدبیر حل مسئلهٔ ۳) ماشین حساب فقط یکی از دو پاسخ ممکن را برای تابع $\tan^{-1}$ به دست می‌دهد. در می‌یابیم که پاسخ دیگر را می‌توان با افزودن $180°$ به آن به دست آورد< یعنی

$$-76° + 180° = 104° \qquad \text{(پاسخ)}$$

که زاویه‌ای قابل قبول برای $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$ است.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳-۲ مهارت خود را تقویت کنید

شکل ۱۳-۵ الف آرایشی از پنج ذره دارای جرمهای $m_1 = 8/0\ \mathrm{kg}$ و $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 2/0\ \mathrm{kg}$ را نشان می‌دهد که در آن $a = 2/0\ \mathrm{cm}$ و $\theta = 30°$ است. نیروی گرانشی خالص $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$ وارد بر ذرهٔ ۱ از طرف ذره‌های دیگر چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) چون ذره مورد بحث است، بزرگی نیروی گرانشی وارد بر ذرهٔ ۱ از طرف ذره‌های دیگر با معادلهٔ ۱۳-۱ $(F = Gm_1 m_2/r^2)$ داده می‌شود. (۲) جهت نیروی گرانشی وارد بر ذرهٔ ۱ به طرف ذره‌ای است که نیرو بر آن وارد می‌کند. (۳) برای حذف محاسبه‌های غیرضروری می‌توان از تقارن استفاده کرد.

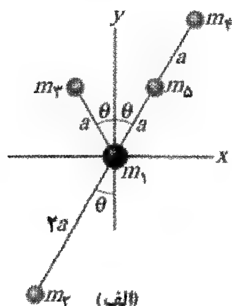
***محاسبه‌ها:*** برای محاسبهٔ بزرگی نیروهای وارد بر ذرهٔ ۱، ابتدا توجه کنید که ذره‌های ۲ و ۴ دارای جرمهای برابرند و فاصلهٔ آنها از ذرهٔ ۱ یکسان و مساوی است با $r = 2a$. بنابراین، از معادلهٔ ۱۳-۱ خواهیم داشت

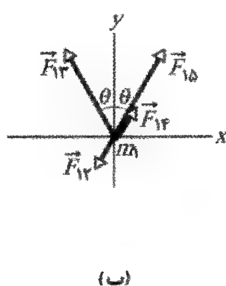
$$F_{12} = F_{14} = \frac{Gm_1 m_2}{(2a)^2} \qquad (۱۳\text{-}۷)$$

به همین ترتیب از آنجا که ذره‌های ۳ و ۵ جرمهای یکسانی دارند و فاصلهٔ هر دو از ذرهٔ ۱ برابر $r = a$ است، خواهیم داشت

$$F_{13} = F_{15} = \frac{Gm_1 m_3}{a^2} \qquad (۱۳\text{-}۸)$$

اکنون، می‌توان داده‌های معلوم را در این دو معادله قرار داد و بزرگی این نیروها را به دست آورد. سپس، جهت نیروها را می‌توان روی نمودار جسم- آزاد شکل ۱۳-۵ ب نشان داد و نیروی خالص را با یکی از دو روش به دست آورد. یا (۱) با تجزیهٔ بردارها به مؤلفه‌های $x$ و $y$ و پیداکردن مؤلفه‌های خالص $x$ و $y$ و سپس ترکیب آنها به طور برداری یا (۲) با جمع کردن بردارها مستقیماً با ماشین حسابی که قادر به محاسبه‌های برداری باشد.




**شکل ۱۳-۵** (الف) آرایشی از پنج ذره. (ب) نمودار نیروهایی که از طرف چهار ذرهٔ دیگر به به ذره‌ای به جرم $m$ وارد می‌شوند.

البته، بجای آنها می‌توان از تقارن مسئله هم استفاده کرد. ابتدا توجه کنید که $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{14}$ دارای بزرگیهای برابر ولی در جهتهای مخالف‌اند: بنابراین، این نیروها یکدیگر را خنثی می‌کنند. بررسی شکل ۱۳-۵ ب و معادلهٔ ۱۳-۸ نشان می‌دهد که مؤلفه‌های $x$ نیروهای $\vec{F}_{13}$ و $\vec{F}_{15}$ نیز با هم خنثی می‌شوند. مؤلفه‌های $y$ این نیروها دارای بزرگی برابرند و هر دو در جهت مثبت محور $y$ اثر می‌کنند. بنابراین، $\vec{F}_{1,\text{net}}$ در همان جهت اثر می‌کند و بزرگی آن دو برابر مؤلفهٔ $y$ نیروی $\vec{F}_{13}$ است

$$\vec{F}_{1,net} = 2F_{13}\cos\theta = 2\frac{Gm_1m_3}{a^2}\cos\theta$$
$$= 2\frac{(6/67\times10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(8/0\ \text{kg})(2/0\ \text{kg})}{(0/020\ \text{m})^2}\cos 30°$$
$$= 4/6\times10^{-6}\ \text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که وجود ذرهٔ ۵ نمی‌تواند در راستای خط بین ذره‌های ۱ و ۴ نیروی گرانشی وارد به ذرهٔ ۱ از طرف ذرهٔ ۴ را تغییر دهد.

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱: ترسیم بردارهای نیروی گرانشی*

وقتی نموداری از ذره‌ها دارید، مانند شکل ۱۳-۴ الف و می‌خواهید نیروی گرانشی خالص وارد بر یکی از آنها را پیدا کنید، معمولاً باید نمودار جسم آزادی رسم کنید که فقط ذرهٔ موردنظر و نیروهای وارد بر آن را *به تنهایی* مانند شکل ۱۳-۴ ب نشان دهد. در ضمن اگر برهم نهی بردارهای نیرو را روی نمودار اختیار می‌کنید مطمئن شوید که انتهای بردارها (ترجیحاً) یا سر بردارهای نیرو به ذره‌ای که نیروها به آن وارد می‌شوند وصل شود. اگر این بردارها را در جای دیگری رسم کنید دچار اشتباه خواهید شد و این اشتباه در صورتی که بردارها را روی ذره‌های به وجود آورنده نیروهای وارد بر ذرهٔ موردنظر رسم کنید حتمی خواهد بود.

### *تدبیر ۲: ساده‌سازی مجموع نیروها به کمک تقارن*

در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳-۲ از تقارن برای این وضعیت استفاده کردیم: با در نظر گرفتن اینکه ذره‌های ۲ و ۴ نسبت به ذره ۱ به طور متقارن قرار گرفته‌اند، و بنابراین $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{14}$ حذف می‌شوند، از محاسبهٔ آنها خودداری کردیم. با توجه به اینکه مؤلفه‌های $x$ نیروهای $\vec{F}_{13}$ و $\vec{F}_{15}$ حذف می‌شوند و اینکه مؤلفهٔ $y$ آنها یکسان هستند و با هم جمع می‌شوند، مقداری کار صرفه‌جویی می‌شود. در مسائل مرتبط با تقارن می‌توانید مقداری از کار را صرفه‌جویی کنید و جلوی ورود خطا را با شناسایی محاسبه‌های غیرضروری بگیرید. این شناساییها فقط با تمرین زیاد به صورت مهارت حاصل می‌شود.

## ۱۳-۴ گرانش در نزدیکی سطح زمین

فرض کنید که زمین به صورت کرهٔ یکنواختی به جرم $M$ باشد. در این صورت، بزرگی نیروی گرانشی که از زمین به ذره‌ای به جرم $m$ وارد می‌شود که در خارج زمین است و به فاصلهٔ $r$ از مرکز زمین قرار دارد از رابطهٔ ۱۳-۱ به این صورت داده می‌شود

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \qquad (۱۳\text{-}۹)$$

اگر ذره را رها کنیم، در نتیجهٔ نیروی گرانشی $\vec{F}$ ، با شتابی که می‌توان آنرا **شتاب گرانشی** $a_g$ نامید به طرف زمین سقوط می‌کند. بنابر قانون دوم نیوتون بزرگیهای F و $a_g$ با رابطهٔ زیر به هم مربوط‌اند

$$F = ma_g \qquad (۱۳\text{-}۱۰)$$

اکنون، با قراردادن $F$ از معادلهٔ ۱۳-۹ در معادلهٔ ۱۳-۱۰ و حل آن برای $a_g$ خواهیم داشت

$$a_g = \frac{GM}{r^2} \qquad (۱۳\text{-}۱۱)$$

جدول ۱۳-۱ مقدارهای $a_g$ محاسبه شده را برای ارتفاعهای مختلف در بالای سطح زمین نشان می‌دهد. دقت کنید که $a_g$ حتی در ارتفاع ۴۰۰km نیز حائز اهمیت است.

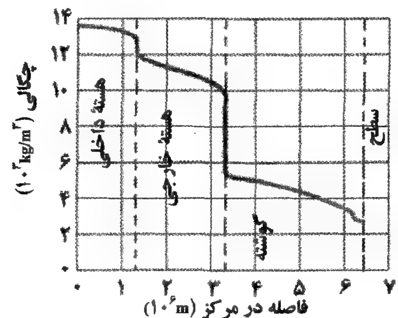
**جدول ۱۳-۱**

تغییرات $a_g$ با ارتفاع

| نمونهٔ ارتفاع | $a_g$ [m/s²] | ارتفاع [km] |
|---|---|---|
| سطح متوسط زمین | ۹/۸۳ | ۰ |
| قلهٔ اورست | ۹/۸۰ | ۸/۸ |
| بالاترین صعود بالون سرنشین‌دار | ۹/۷۱ | ۳۶/۶ |
| مدار شاتل فضایی | ۸/۷۰ | ۴۰۰ |
| ماهوارهٔ مخابراتی | ۰/۲۲۵ | ۳۵۷۰۰ |

در بخش ۵-۴، فرض کردیم که زمین را می‌توان با چشمپوشی از چرخش آن به صورت یک چارچوب لخت در نظر گرفت. این ساده سازی به ما اجازه می‌دهد که فرض کنیم شتاب سقوط آزاد $g$ یک ذره برابر همان شتاب گرانشی ذره است (که اکنون آن را $a_g$ نامیدیم). به علاوه، فرض کردیم که $g$ دارای مقدار ثابت ۹/۸m/s² در هر نقطه‌ای از سطح زمین است. اما مقدار $g$ اندازه گرفته شده در یک نقطهٔ معین با $a_g$ محاسبه شده از معادلهٔ ۱۳-۱۱ به سه دلیل متفاوت است زیرا: (۱) جرم زمین به طور یکنواخت توزیع نشده است، (۲) زمین یک کرهٔ کامل نیست و (۳) زمین می‌چرخد. علاوه بر اینها، از آنجا که $g$ با $a_g$ متفاوت است، به همین سه دلیل گفته شده وزن mg یک ذره با بزرگی نیروی گرانشی وارد بر ذره که با معادلهٔ ۱۳-۹ داده می‌شود تفاوت دارد. اکنون می‌خواهیم این دلیلها را بررسی کنیم.

**۱- *جرم زمین به طور یکنواخت توزیع نشده است.*** چگالی (جرم واحد حجم) زمین به طور شعاعی به صورت شکل ۱۳-۶ تغییر می‌کند و چگالی پوسته (قسمت بیرونی) از ناحیه‌ای به ناحیهٔ دیگر در سطح زمین فرق می‌کند. بنابراین، $g$ از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر در سطح زمین متفاوت خواهد بود.




**شکل ۱۳-۶** نمودار چگالی زمین برحسب تابعی از فاصله تا مرکز زمین. محدوده‌های هستهٔ جامد داخلی و محدوده هستهٔ عمدتاً مایع خارجی و گوشتهٔ جامد در شکل نشان داده شده‌اند ولی پوستهٔ زمین آنقدر نازک است که نمی‌توان آن را در این شکل نشان داد.

**۲- *زمین یک کرهٔ کامل نیست.*** زمین تقریباً شکلی بیضیوار دارد که در قطبها پخت و در استوا برآمده است. شعاع استوایی زمین ۲۱ کیلومتر بزرگتر از شعاع قطبی آن است. بنابراین، یک نقطه واقع در قطبها نسبت به نقطهٔ واقع در استوا به هستهٔ چگال زمین نزدیکتر است. این یک دلیل برای این است که شتاب سقوط آزاد $g$ وقتی از سطح دریا از استوا به طرف قطبها برویم افزایش می‌یابد.

**۳- *زمین در حال چرخش است.*** محور چرخش زمین از قطبهای شمال و جنوب زمین می‌گذرد. جسمی که در سطح زمین در هر کجا به غیر از قطبها قرار گیرد باید در دایره‌ای حول محور بچرخد و در نتیجه دارای یک شتاب مرکزگرا می‌شود که جهت آن به سمت مرکز دایره است. این شتاب مرکزگرا باعث نیروی خالص مرکزگرایی می‌شود که جهت آن نیز به طرف مرکز دایره است.

برای اینکه ببینیم چرخش زمین چگونه باعث اختلاف بین $g$ و $a_g$ می‌شود وضعیت ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که در آن صندوقی به جرم $m$ روی ترازویی در استوا قرار دارد. شکل ۱۳-۷ الف این وضعیت را نشان می‌دهد که از نقطه‌ای در بالای قطب شمال در فضا دیده می‌شود.

شکل ۱۳-۷ ب، نمودار جسم-آزاد برای صندوق است که نشان دهندهٔ دو نیرویی است که برصندوق وارد می‌شود، هر دو نیرو در راستای شعاعی محور $r$ هستند که از مرکز زمین می‌گذرند. نیروی عمودی $\vec{F}_N$ که از طرف ترازو بر صندوق وارد می‌شود، به طرف خارج و در جهت مثبت محور $r$ است. نیروی گرانشی که با هم ارز خود $m\vec{a}_g$ نشان داده شده و به طرف داخل زمین است. چون در حین چرخش زمین، صندوق روی دایره‌ای حول مرکز زمین حرکت می‌کند، دارای یک شتاب مرکزگرای $\vec{a}$ به طرف مرکز زمین است. از معادلهٔ ۱۰-۲۳ ($a_r = \omega^2 r$) می‌دانیم که این شتاب مرکزگرا برابر $\omega^2 R$ است که در آن $\omega$ تندی زاویه‌ای زمین و $R$ شعاع دایره است (تقریباً برابر شعاع زمین). بنابراین، می‌توان قانون دوم نیوتون را برای نیروهایی که در راستای محور $r$ وارد می‌شوند (یعنی $F_r = ma_r$) به صورت زیر نوشت

$$F_N - ma_g = m(-\omega^2 R) \qquad (۱۲\text{-}۱۳)$$

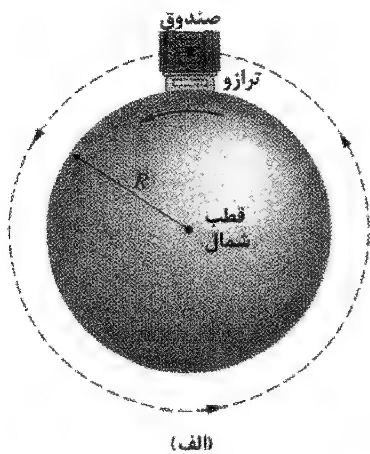
بزرگی نیروی عمودی $F_N$ برابر وزن $mg$ است که ترازو نشان می‌دهد. اگر بجای $F_N$ مقدار $mg$ را قرار دهیم معادلهٔ ۱۳-۱۲ به صورت زیر نوشته می‌شود

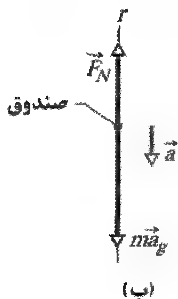
$$mg = ma_g - m(\omega^2 R) \qquad (۱۳\text{-}۱۳)$$

این معادله حاکی از آن است که

(وزن اندازه‌گیری شده) = (بزرگی نیروی گرانشی) - (حاصلضرب جرم در شتاب مرکزگرا)

بنابراین، به دلیل چرخش زمین وزن اندازه‌گیری شده کوچکتر از بزرگی نیروی گرانشی وارد بر صندوق است.




**شکل ۱۳-۷** (الف) صندوقی روی ترازوی واقع در استوای زمین، که در راستای محور چرخش از بالای قطب شمال دیده می‌شود. (ب) نمودار جسم- آزاد برای صندوق با محور شعاعی $r$ که از مرکز زمین می‌گذرد. نیروی گرانشی وارد بر صندوق با مقدار هم ارز یعنی $m\vec{a}_g$ نشان داده شده است. نیروی عمودی وارد بر صندوق از طرف ترازو برابر $\vec{F}_N$ است. به دلیل چرخش زمین صندوق یک شتاب مرکزگرای $\vec{a}$ دارد که جهت آن به سمت مرکز زمین است.

برای یافتن رابطهٔ میان $g$ و $a_g$ می‌توان $m$ را از معادلهٔ ۱۳-۱۳ حذف کرد و آن را به این صورت نوشت

$$g = a_g - \omega^2 R \qquad (۱۳-۱۴)$$

این حاکی از آن است که

(شتاب مرکزگرا) − (شتاب گرانشی) = (شتاب سقوط آزاد)

بنابراین، به دلیل چرخش زمین، شتاب سقوط آزاد اندازه‌گیری شده کوچکتر از شتاب گرانشی است.

تفاوت بین شتابهای $g$ و $a_g$ برابر $\omega^2 R$ است و در استوا بیشترین مقدار را دارد (زیرا شعاع دایرهٔ طی شده توسط صندوق در آنجا بیشترین مقدار را دارد). برای پیداکردن این تفاوت می‌توان از معادلهٔ ۵-۱۰ $(\omega = \Delta\theta/\Delta t)$ و شعاع زمین $R = ۶/۳۷ \times ۱۰^۶$ m استفاده کرد. برای یک دور چرخش زمین $\theta$ برابر $۲\pi$ رادیان و زمان تناوب $\Delta t$ حدود ۲۴ ساعت است. با استفاده از این مقدارها (و تبدیل ساعت به ثانیه) درمی‌یابیم که $g$ تنها به اندازهٔ حدود $۰/۰۳۴\,\mathrm{m/s^2}$ کمتر از $a_g$ است (که در مقایسه با $۹/۸\,\mathrm{m/s^2}$ کوچک است). بنابراین، چشمپوشی از تفاوت بین شتاب $g$ و $a_g$ در بیشتر وقتها توجیه پذیر است. به همین ترتیب، چشمپوشی از تفاوت بین وزن و بزرگی نیروی گرانشی نیز اغلب قابل توجیه است.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳-۳

(الف) فضانوردی با قد $h$ برابر $۱/۷۰$ m به صورت ایستاده در یک شاتل فضایی، که در مداری به فاصلهٔ $r = ۶/۷۷ \times ۱۰^۶$m از مرکز زمین، به دور آن می‌گردد، به طور «راست قد» شناور است. اختلاف شتاب گرانشی بین سر و پای فضانورد چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توان زمین را به صورت کرهٔ یکنواختی به جرم $M_E$ فرض کرد. در این صورت از معادلهٔ ۱۳-۱۱ شتاب گرانشی در هر فاصلهٔ $r$ از مرکز زمین برابر است با

$$a_g = \frac{GM_E}{r^2} \qquad (۱۳-۱۵)$$

این معادله را به سادگی می‌توان دوباره به کار برد، یکی به ازای $r = ۶/۷۷ \times ۱۰^۶$m برای پا و دیگری به ازای $R = ۶/۷۷ \times ۱۰^۶\,\mathrm{m} + ۱/۷۰\,\mathrm{m}$ برای سر شخص. ولی ماشین حساب ممکن است هر دو مقدار $a_g$ را برای هر دو حالت یکسان به دست دهد و بنابراین، اختلاف آن صفر خواهد بود زیرا $h$ بسیار کوچکتر از $r$ است. رویکرد دیگری می‌تواند به ما کمک کند: از آنجا که میان $r$ مربوط به محل پا و محل سر فضانورد تغییر دیفرانسیلی $dr$ وجود دارد از معادلهٔ ۱۳-۱۵ نسبت به $r$ دیفرانسیل می‌گیریم.

***محاسبه‌ها:*** با دیفرانسیل‌گیری خواهیم داشت

$$da_g = -۲\frac{GM_E}{r^3}dr \qquad (۱۳-۱۶)$$

که در آن $da_g$ تغییر دیفرانسیلی شتاب گرانشی ناشی از تغییر دیفرانسیلی $r$ یعنی $dr$ است. برای فضانورد $dr=h$ و $r = ۶/۷۷ \times ۱۰^۶$ m است. با قراردادن داده‌ها در معادلهٔ ۱۳-۱۶ خواهیم داشت

$$da_g = -۲\frac{(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m^3/kg\cdot s^2})(۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\,\mathrm{kg})}{(۶/۷۷\times ۱۰^۶\,\mathrm{m})^3}(۱/۷۰\,\mathrm{m})$$

$$= -۴/۳۷\times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{m/s^2} \qquad \text{(پاسخ)}$$

که در آن مقدار $M_E$ را از پیوست ج گرفته‌ایم. این نتیجه بدین معناست که شتاب گرانشی پاهای فضانورد به طرف زمین اندکی بیشتر از شتاب گرانشی سر او است. این اختلاف شتاب تمایل دارد که قد فضانورد را بکشد اما اختلاف بقدری ناچیز است که این کشیدگی قابل ملاحظه نیست.

(ب) اکنون اگر فضانورد به همین صورت راست قد و در مداری به شعاع $r = ۶/۷۷ \times ۱۰^۶$ m در نزدیکی سیاهچاله‌ای به جرم $M_h = ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۱}$ kg (۱۰ برابر جرم خورشید ما) در گردش باشد، اختلاف شتاب گرانشی بین محل پاها و محل سر او چقدر است؟ سیاهچاله دارای یک سطح ریاضی به شعاع $R_h = ۲/۹۵ \times ۱۰^۴$ m (به نام *افق رویداد*) است. هیچ چیز حتی نور نمی‌تواند از سطح آن یا هر جایی درون آن فرار کند. توجه کنید که فضانورد کاملاً در خارج از این سطح (در $r = ۲۲۹R_h$) قرار دارد.

***محاسبه‌ها:*** در اینجا نیز دوباره تغییر دیفرانسیلی $dr$ در $r$ بین پاها و سر فضانورد وجود دارد، بنابراین، باز هم می‌توان از معادلهٔ ۱۳-۱۶ استفاده کرد. اما در اینجا با قراردادن $M_h = ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۱}$ kg به جای $M_E$ خواهیم داشت

$$da_g = -۲\frac{(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m^3/kg\cdot s^2})(۱/۹۹\times ۱۰^{۳۱}\,\mathrm{kg})}{(۶/۷۷\times ۱۰^۶\,\mathrm{m})^3}(۱/۷۰\,\mathrm{m})$$

$$= -۱۴/۵\,\mathrm{m/s^2}$$

این نتیجه به این معناست که شتاب گرانشی به سمت سیاهچاله در محل پای فضانورد به نحو قابل ملاحظه‌ای از شتاب گرانشی در محل سر او بزرگتر است. در این حالت تمایل به کشیدگی قد در فضانورد چشمگیر ولی رنج‌آور است. هر چه فضانورد به سیاهچاله نزدیکتر شود، تمایل به کشیدگی قد بیشتر می‌شود.

## ۱۳-۵ گرانش در داخل زمین

قضیهٔ پوستهٔ نیوتون را می‌توان در حالی که در آن یک ذره در داخل یک پوستهٔ یکنواخت قرار دارد نیز به کار برد و نشان داد که:

☜ یک پوستهٔ مادی یکنواخت هیچ نیروی گرانشی *خالصی* به ذره‌ای که داخل آن قرار گرفته باشد وارد نمی‌کند.

*هشدار:* این عبارت بدین معنا نیست که نیروهای گرانشی وارد بر ذره از طرف اجزای مختلف پوسته به طور سحرآمیزی ناپدید می‌شوند، بلکه بدین معناست که جمع برداری نیروهای وارد بر ذره از طرف همهٔ اجزا برابر صفر است.

اگر جرم زمین به طور یکنواخت توزیع شده بود نیروی گرانشی وارد بر یک ذره در سطح زمین بیشینه بود و با بالا رفتن ذره و دورشدن از سیاره کاهش می‌یافت. اگر ذره به طرف داخل زمین حرکت کند، مثلاً درون یک چاه معدن عمیق، نیروی گرانشی به دو علت تغییر می‌کند. (۱) از آنجا که ذره به مرکز زمین نزدیکتر می‌شود نیروی گرانشی افزایش می‌یابد. (۲) چون پوستهٔ ضخیم مادی که در خارج مکان شعاعی ذره قرار گرفته هیچ نیروی خالصی بر ذره وارد نمی‌کند بنابراین، نیروی گرانشی باید کاهش یابد.

برای زمین یکنواخت، عامل دوم مؤثرتر است و نیروی وارد بر ذره با نزدیک شدن ذره به مرکز زمین رفته رفته به صفر کاهش می‌یابد. بهر حال، برای زمین واقعی (غیر یکنواخت) نیروی وارد بر ذره با پایین رفتن ذره در عمل افزایش می‌یابد. این نیرو در یک عمق معین به بیشینهٔ مقدار خود می‌رسد و سپس با پایین رفتن ذره شروع به کاهش می‌کند.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳-۴

در داستان علمی تخیلی قدیمی از *قطب تا قطب* اثر جورج گریفیث[1]، سه کاشف تلاش می‌کنند تا با یک کپسول از میان تونلی که به طور طبیعی (و البته تخیلی) ایجاد شده مستقیماً از قطب جنوب به قطب شمال سفر کنند، (شکل ۱۳-۸). به روایت این داستان وقتی این کپسول به مرکز زمین نزدیک می‌شود نیروی گرانشی وارد بر کاشفان به طور خطرناکی زیاد می‌شود و سپس دقیقاً در مرکز زمین به طور ناگهانی و فقط برای لحظه‌ای این نیرو از بین می‌رود. در نتیجه کپسول به داخل نیمهٔ دوم تونل حرکت می‌کند و به قطب شمال می‌رسد.

بیان گریفیث را با یافتن نیروی گرانشی وارد بر کپسولی به جرم $m$ وقتی به فاصلهٔ $r$ از مرکز زمین می‌رسد بررسی کنید. فرض کنید که زمین به صورت کره‌ای یکنواخت با چگالی $\rho$ (جرم واحد حجم) باشد.

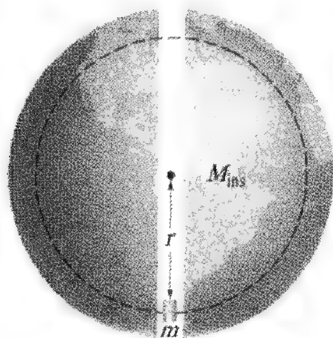
**نکته‌های کلیدی** قضیهٔ پوستهٔ نیوتون سه نکته را در اختیار ما می‌گذارد:

۱. وقتی کپسول در شعاع $r$ از مرکز زمین قرار دارد آن قسمتی از زمین که در خارج کره‌ای به شعاع $r$ قرار دارد نمی‌تواند هیچ نیروی گرانشی خالصی به کپسول وارد کند.

۲. آن قسمت از زمین که در داخل کره قرار دارد *می‌تواند* نیروی گرانشی خالصی به کپسول وارد کند.

۳. جرم این کرهٔ $M_{ins}$ را می‌توان مانند جرم ذره‌ای در نظر گرفت که در مرکز زمین قرار دارد.

***محاسبه‌ها:*** هر سه نکته بیانگر این است که می‌توان معادلهٔ ۱۳-۱ را برای بزرگی نیروی گرانشی وارد بر ذره به این صورت نوشت




**شکل ۱۳-۸** کپسولی به جرم $m$ از حالت سکون به داخل تونلی که قطبهای شمال و جنوب را به هم وصل می‌کند رها می‌شود. وقتی کپسول در فاصلهٔ $r$ از مرکز زمین قرار گیرد، آن قسمت از زمین که در برگیرندهٔ کره‌ای با همان شعاع است دارای جرم $M_{ins}$ است

$$F = \frac{GmM_{ins}}{r^2} \qquad (۱۳-۱۷)$$

برای تعیین جرم $M_{ins}$ بر حسب شعاع $r$ توجه کنید که حجم مربوط به این جرم یعنی $V_{ins}$ برابر $(۴/۳)(\pi r^3)$ است. بنابراین، به دلیل اینکه زمین را با چگالی یکنواخت فرض می‌کنیم، چگالی $\rho_{ins} = M_{ins}/V_{ins}$ برابر چگالی $\rho$ زمین است. بنابراین، خواهیم داشت

$$M_{ins} = \rho V_{ins} = \rho \frac{4\pi r^3}{3} \qquad (۱۳-۱۸)$$

پس از قراردادن این عبارت در معادلهٔ ۱۳-۱۷ و ساده کردن آن خواهیم داشت

$$F = \frac{4\pi Gm\rho}{3} r \qquad \text{(پاسخ)} \qquad (۱۳-۱۹)$$

این معادله نشان می‌دهد که بزرگی نیروی $F$ به طور خطی به فاصلهٔ $r$ از مرکز زمین بستگی دارد. بنابراین، وقتی $r$ کاهش می‌یابد، $F$ نیز کم می‌شود (بر خلاف توجیه گریفیث) تا اینکه در مرکز زمین به صفر می‌رسد. تنها نکته‌ای که گریفیت به درستی دریافت صفر بودن نیرو در مرکز زمین است.

معادلهٔ ۱۳-۱۹ را می‌توان برحسب بردار نیروی $\vec{F}$ و بردار مکان کپسول $\vec{r}$ در امتداد محور شعاعی که از مرکز زمین می‌گذرد نیز نوشت. اگر کمیت ثابت $\frac{4\pi Gm\rho}{3}$ را با $K$ نشان دهیم، در نتیجه معادلهٔ ۱۳-۱۹ به صورت زیر خواهد شد

$$\vec{F} = -K\vec{r} \qquad (۱۳-۲۰)$$

که در آن یک علامت منفی وارد کرده‌ایم تا نشان دهد که جهتهای $\vec{F}$ و $\vec{r}$ مخالف هم هستند. معادلهٔ ۱۳-۲۰ به شکل قانون هوک (معادلهٔ ۷-۲۰ یعنی $\vec{F} = -K\vec{d}$) است. بنابراین، در شرایط آرمانی این داستان، کپسول می‌تواند مانند یک جسم متصل به فنر حول مرکز زمین نوسان کند. وقتی کپسول از قطب جنوب به طرف مرکز زمین سقوط کند (همانند گفتهٔ گریفیث) از مرکز به طرف قطب شمال حرکت می‌کند و دوباره برمی‌گردد و این چرخه را تا ابد ادامه می‌دهد.

1. George Griffith

## ۱۳-۶ انرژی پتانسیل گرانشی

در بخش ۸-۴ دربارهٔ انرژی پتانسیل گرانشی یک دستگاه ذره-زمین بحث کردیم. در آنجا ذره را در نزدیکی سطح زمین در نظر گرفتیم به طوری که بتوان نیروی گرانش را ثابت فرض کرد. سپس یک پیکربندی مرجع در دستگاه را انتخاب کردیم که دارای انرژی پتانسیل گرانشی صفر باشد. در این پیکربندی، اغلب ذره روی سطح زمین قرار دارد. برای ذره‌هایی که در سطح زمین قرار ندارند، انرژی پتانسیل گرانشی با کم شدن فاصلهٔ بین ذره و زمین کاهش می‌یابد.

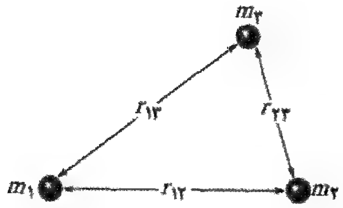
در اینجا موضوع را گسترش می‌دهیم و انرژی پتانسیل گرانشی $U$ بین دو ذره به جرمهای $m$ و $M$ را که به فاصلهٔ $r$ از هم قرار دارند در نظر می‌گیریم. باز هم یک پیکربندی مرجع با مقدار $U$ برابر صفر اختیار می‌کنیم. اما، برای ساده شدن معادله‌ها، حالا فاصلهٔ جدایی $r$ در پیکربندی مرجع آنقدر بزرگ است که می‌توان تقریباً آن را *بینهایت* فرض کرد. مانند قبل، انرژی پتانسیل گرانشی با کم شدن فاصلهٔ ذره‌ها کاهش می‌یابد. از آنجا که برای $r=\infty$ ، $U=0$ است در نتیجه انرژی پتانسیل برای هر فاصلهٔ متناهی منفی است و هر چه ذره‌ها به هم نزدیکتر شوند این مقدار رفته رفته منفی‌تر می‌شود.

با این واقعیتهایی که در ذهن داریم و بعداً ثابت خواهد شد، انرژی پتانسیل گرانشی یک دستگاه دو ذره‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$U=-\frac{GMm}{r} \quad \text{(انرژی پتانسیل گرانشی)} \qquad (۱۳-۲۱)$$

توجه کنید که $U(r)$ وقتی $r$ به بینهایت میل می‌کند به صفر نزدیک می‌شود و اینکه برای هر مقدار محدودی از $r$ مقدار $U(r)$ منفی است.

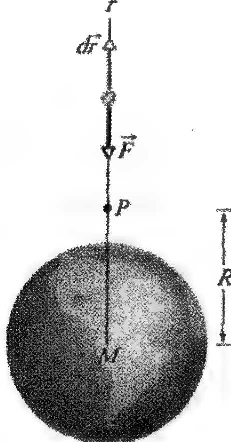
انرژی پتانسیل داده شده از معادلهٔ ۱۳-۲۱ مخصوص دستگاههای دو ذره‌ای است و نه هر ذره به تنهایی. هیچ راهی برای تقسیم این انرژی و گفتن اینکه چه مقدار از آن به یک ذره و چه مقدار به ذرهٔ دیگر تعلق دارد وجود ندارد. در هر حال اگر $M>>m$ باشد مثلاً برای زمین (با جرم M) و یک توپ بیسبال (به جرم m) معمولاً از «انرژی پتانسیل توپ بیسبال صحبت می‌کنیم.» از آنجا که وقتی توپ بیسبال در نزدیکی زمین حرکت می‌کند انرژی پتانسیل دستگاه توپ بیسبال- زمین تقریباً به طور کامل به صورت تغییر در انرژی جنبشی توپ بیسبال ظاهر می‌شود، در نتیجه می‌توان از زمین صرفنظر کرد. زیرا تغییرات انرژی جنبشی زمین آنقدر کوچک است که نمی‌توان آنرا اندازه گرفت. به همین ترتیب در بخش ۱۳-۸ از «انرژی پتانسیل یک ماهوارهٔ مصنوعی» در مدار زمین صحبت خواهیم کرد زیرا جرم ماهواره بسیار کوچکتر از جرم زمین است. وقتی از انرژی پتانسیل جسمهایی که جرم آنها قابل مقایسه است صحبت می‌کنیم در هر صورت باید مواظب باشیم که آنها را به صورت یک دستگاه در نظر بگیریم.




**شکل ۱۳-۹** دستگاهی شامل سه ذره. انرژی پتانسیل گرانشی *این دستگاه* برابر مجموع انرژیهای پتانسیل هر سه جفت ذره است.

اگر دستگاه شامل بیش از دو ذره باشد، هر جفت ذره را به طور جداگانه در نظر می‌گیریم و انرژی پتانسیل گرانشی آن جفت را از معادلهٔ ۱۳-۲۱ به دست می‌آوریم به طوری که فرض می‌کنیم دیگر ذره‌ها وجود ندارند و سرانجام جمع جبری آنها انرژی پتانسیل کل است. مثلاً کاربرد معادلهٔ ۱۳-۲۱ دربارهٔ هر یک از سه جفت ذرهٔ موجود در شکل ۱۳-۹، انرژی پتانسیل دستگاه به صورت زیر خواهد بود

$$U=-\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}}+\frac{Gm_1m_3}{r_{13}}+\frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right) \qquad (۱۳-۲۲)$$




**شکل ۱۳-۱۰** یک توپ بیسبال که مستقیماً به طرف بالای سطح زمین پرتاب شده است از نقطهٔ $P$ در فاصلهٔ شعاعی $R$ از مرکز زمین می‌گذرد. نیروی گرانشی وارد بر توپ $\vec{F}$ و بردار جابه‌جایی دیفرانسیلی $d\vec{r}$ نشان داده شده‌اند، که هر دو در راستای محور شعاعی $r$ هستند.

### *اثبات معادلهٔ ۱۳-۲۱*

فرض کنید توپ بیسبالی را به طرف بالای زمین در طول مسیر شکل ۱۳-۱۰ پرتاب کنیم. می‌خواهیم عبارتی برای انرژی پتانسیل گرانشی $U$ توپ در نقطهٔ $P$ در مسیر حرکت توپ و در فاصلهٔ شعاعی $R$ از مرکز زمین پیدا کنیم. برای این کار، ابتدا کار $W$ انجام شده روی توپ توسط نیروی گرانشی را در حین حرکت توپ از نقطهٔ $P$ به فاصلهٔ زیادی (بینهایت) از زمین به دست می‌آوریم. از آنجا که نیروی گرانشی $\vec{F}(r)$ یک نیروی متغیر است (بزرگی آن به $r$ بستگی دارد)، باید از روشهای

بخش ۷-۸ برای محاسبهٔ کار استفاده کنیم. به شکل برداری می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$W = \int_R^\infty \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} \qquad (۲۳-۱۳)$$

این انتگرال شامل حاصلضرب نرده‌ای (یا نقطه‌ای) نیروی $\vec{F}(r)$ و بردار جابه‌جایی دیفرانسیلی $d\vec{r}$ در طول مسیر توپ است. این حاصلضرب را به صورت زیر می‌توان بسط داد

$$\vec{F}(r).d\vec{r} = F(r)dr\cos\phi \qquad (۲۴-۱۳)$$

که $\phi$ زاویهٔ بین بردارهای $\vec{F}(r)$ و $d\vec{r}$ است. با قراردادن $\phi$ برابر ۱۸۰° و از معادلهٔ ۱۳-۱ به جای F(r)، معادلهٔ ۱۳-۲۴ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2}dr$$

که $M$ جرم زمین و $m$ جرم توپ است.
با قراردادن این در معادلهٔ ۱۳-۲۳ و انتگرالگیری نتیجه می‌شود

$$W = -GMm\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_R^\infty$$

$$= 0 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R} \qquad (۲۵-۱۳)$$

که $W$ کار لازم برای حرکت دادن توپ از نقطهٔ $P$ (در فاصلهٔ R) تا بینهایت است. معادلهٔ ۸-۱ ($\Delta U = -W$) حاکی از آن است که می‌توان کار را بر حسب انرژی پتانسیل نیز به صورت زیر نوشت

$$U_\infty - U = -W$$

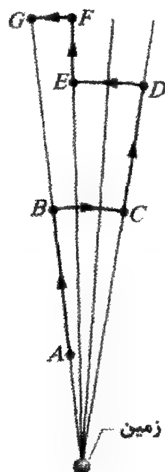
از آنجا که انرژی پتانسیل در بینهایت ($U_\infty$) برابر صفر و انرژی پتانسیل در نقطهٔ $P$ برابر $U$ است و $W$ با معادلهٔ ۱۳-۲۵ داده می‌شود، این معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$U = W = -\frac{GMm}{R}$$

با تبدیل $R$ به $r$ معادلهٔ ۱۳-۲۱ به دست می‌آید که می‌خواستیم آن را ثابت کنیم.

### *ناوابستگی به مسیر*

در شکل ۱۳-۱۱ توپ بیسبالی از نقطهٔ $A$ به نقطهٔ G در طول مسیری شامل سه طول شعاعی و سه کمان دایره‌ای (به مرکز زمین) حرکت می‌کند. می‌خواهیم $W$ کار کل انجام شده توسط نیروی گرانشی زمین $\vec{F}$ روی توپ را وقتی از $A$ به $G$ حرکت می‌کند به دست آوریم.کار انجام شده در طول هر کمان دایره‌ای برابر صفر است، زیرا نیروی $\vec{F}$ در هر نقطه بر کمان عمود است. بنابراین، $W$ فقط برابر کارهای انجام شده توسط $\vec{F}$ در طول سه مسیر شعاعی است.




**شکل ۱۳-۱۱** توپ بیسبالی در نزدیکی زمین از نقطهٔ $A$ تا نقطهٔ $G$ در طول مسیری شامل خطهای شعاعی و کمانهای دایره‌ای حرکت می‌کند.

اکنون فرض کنید که طول این کمانها به سمت صفر میل کند. در این صورت توپ مستقیماً فقط در طول یک مسیر شعاعی از $A$ تا G حرکت می‌کند. آیا این عمل مقدار $W$ را تغییر می‌دهد؟ خیر، زیرا در طول کمانها هیچ کاری انجام نمی‌شود و حذف این کمانها تأثیری در کار انجام شده ندارد. بنابراین، با آنکه مسیر کاملاً متفاوت است، ولی کار انجام شده توسط $\vec{F}$ تغییر نمی‌کند.

چنین نتیجه‌ای به طور کلی در بخش ۸-۳ مورد بحث قرار گرفت. در اینجا نکته‌ای وجود دارد: نیروی گرانشی یک نیروی پایستار است. بنابراین، کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی ذره‌ای که از نقطهٔ اولیهٔ $i$ به نقطهٔ نهایی $f$ حرکت می‌کند مستقل از مسیر انتخابی بین نقطه‌هاست. از معادلهٔ ۸-۱، $\Delta U$ تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی از نقطهٔ $i$ تا نقطهٔ $f$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\Delta U = U_f - U_i = -W \qquad (۲۶-۱۳)$$

از آنجا که کار $W$ انجام شده توسط نیروی پایستار به مسیر طی شده بستگی ندارد، $\Delta U$ تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی نیز *مستقل* از مسیر طی شده است.

### *انرژی پتانسیل و نیرو*

در ضمن اثبات معادلهٔ ۱۳-۲۱ تابع انرژی پتانسیل $U(r)$ را از تابع نیروی $\vec{F}(r)$ به دست آوردیم. از راه دیگری نیز می‌توان این کار را انجام داد، یعنی، با استفاده از تابع انرژی پتانسیل می‌توانیم تابع نیرو را به دست آوریم. با استفاده از معادلهٔ ۸-۲۲ ($F(x) = \frac{-dU(x)}{dx}$)، می‌توان نوشت

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

$$= -\frac{GMm}{r^2} \qquad (۲۷-۱۳)$$

این همان قانون گرانش نیوتون (معادلهٔ ۱۳–۱) است. علامت منفی بر آن دلالت دارد که نیروی وارده بر جرم $m$ به طور شعاعی به طرف داخل یعنی به طرف جرم $M$ است.

## تندی فرار

اگر پرتابه‌ای را به طرف بالا پرتاب کنیم، معمولاً تندی آن کاهش می‌یابد، یک لحظه ساکن می‌شود و دوباره به زمین برمی‌گردد. با وجود این، تندی اولیهٔ کمینه‌ای وجود دارد که به ازای آن جسم برای همیشه به طرف بالا حرکت می‌کند و از لحاظ نظری در بینهایت به حالت سکون می‌رسد. این تندی اولیهٔ کمینه را **تندی فرار** *(از زمین)* می‌نامند.

پرتابه‌ای را به جرم $m$ در نظر بگیرید که سطح یک سیاره (یا هر جسم یا دستگاه فضایی دیگری) را با تندی فرار $U$ ترک می‌کند. این پرتابه دارای انرژی جنبشی $K$ برابر با $\frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل $U$ است که از رابطهٔ ۱۳–۲۱ به صورت زیر داده می‌شود

$$U = -\frac{GMm}{R}$$

که در آن $M$ جرم سیاره و $R$ شعاع آن است.

وقتی پرتابه به بینهایت می‌رسد متوقف می‌شود و در نتیجه هیچ انرژی جنبشی نخواهد داشت. این جسم هیچ انرژی پتانسیلی نیز ندارد زیرا فاصلهٔ بینهایت بین دو جسم پیکربندی انرژی پتانسیل صفر است. بنابراین، انرژی کل در بینهایت برابر صفر است. با استفاده از اصل پایستگی انرژی، انرژی کل در سطح سیاره نیز باید برابر صفر باشد و در نتیجه

$$K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0$$

و خواهیم داشت

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (۱۳\text{–}۲۸)$$

توجه کنید که $v$ بستگی به جهت پرتاب جسم از سیاره ندارد. با وجود این، اگر پرتابه از سکوی پرتاب در جهت چرخش سیاره به دور محورش پرتاب شود رسیدن به تندی فرار آسانتر است. برای مثال موشکهایی که به سمت مشرق از کیپ کاناورال[1] پرتاب می‌شوند از این مزیت برخوردارند که در جهت شرق دارای تندی ۱۵۰۰km/h ناشی از چرخش زمین هستند.

تندی فرار یک پرتابه از هر جسم سماوی را می‌توان با استفاده از معادلهٔ ۱۳–۲۸ معین کرد، به شرطی که در معادله جرم $M$ و شعاع $R$ آن جسم قرار داده شوند. جدول ۱۳–۲ برخی تندیهای فرار را نشان می‌دهد.

1. Cape Canaveral

**جدول ۱۳–۲**

برخی تندی‌های فرار

| جسم | جرم (kg) | شعاع (m) | تندی فرار (km/s) |
|---|---|---|---|
| سرس[a] | $۱/۱۷\times۱۰^{۲۱}$ | $۳/۸\times۱۰^{۵}$ | ۰/۶۴ |
| ماه (قمر زمین) | $۷/۳۶\times۱۰^{۲۲}$ | $۱/۷۴\times۱۰^{۶}$ | ۲/۳۸ |
| زمین | $۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}$ | $۶/۳۷\times۱۰^{۶}$ | ۱۱/۲ |
| مشتری | $۱/۹۰\times۱۰^{۲۷}$ | $۷/۱۵\times۱۰^{۷}$ | ۵۹/۵ |
| خورشید | $۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}$ | $۶/۹۶\times۱۰^{۸}$ | ۶۱۸ |
| شعرای یمانی[b] | $۲\times۱۰^{۳۰}$ | $۱\times۱۰^{۷}$ | ۵۲۰۰ |
| ستاره نوترونی[c] | $۲\times۱۰^{۳۰}$ | $۱\times۱۰^{۴}$ | $۲\times۱۰^{۵}$ |

a پرجرمترین جسم نجومی
b یک *کوتولهٔ سفید* (ستاره‌ای در مرحلهٔ نهایی تکوین) که همراه ستارهٔ درخشان شعرای یمانی است.
c هستهٔ رمبیدهٔ یک ستاره که بعد از انفجار ستاره در یک رویداد *ابرنواختری* باقی می‌ماند.

**✓ نکتهٔ وارسی ۳** توپی به جرم $m$ را از کره‌ای به جرم $M$ دور می‌کنیم. (الف) آیا انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه توپ–کره افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (ب) آیا کار انجام شده توسط نیروی گرانشی بین توپ و کره مثبت است یا منفی؟

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳–۵

سیارکی که مستقیماً به طرف زمین در حرکت است، در فاصلهٔ ۱۰ برابر شعاع زمین از مرکز زمین دارای تندی ۱۲km/s نسبت به زمین است. با چشمپوشی از اثرهای جو زمین بر سیارک، تندی نهایی سیارک $v_f$ را در لحظهٔ رسیدن به سطح زمین به‌دست آورید.

**نکته کلیدی** چون از اثرهای جو روی سیارک چشمپوشی شده است، انرژی مکانیکی دستگاه سیارک– زمین در حین سقوط پایسته است. بنابراین، انرژی مکانیکی نهایی (وقتی سیارک به سطح زمین می‌رسد) برابر انرژی مکانیکی اولیه است. با انرژی جنبشی $K$ و انرژی پتانسیل گرانشی $U$، می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$K_f + U_f = K_i + U_i \qquad (۱۳\text{–}۲۹)$$

همچنین اگر دستگاه را منزوی فرض کنیم در حین سقوط اندازه حرکت خطی دستگاه پایسته می‌ماند. بنابراین، تغییر اندازه حرکت سیارک و زمین باید از لحاظ مقدار برابر ولی با علامت مخالف باشند. اما از آنجا که جرم زمین بسیار بزرگتر از جرم سیارک است، تغییر سرعت زمین نسبت به تغییر سرعت سیارک قابل چشمپوشی است. بنابراین، تغییر در انرژی جنبشی نیز قابل چشمپوشی است. در نتیجه، از تغییر در انرژی جنبشی زمین نیز می‌توان صرفنظر کرد. پس می‌توان انرژی جنبشی‌های

معادلهٔ ۱۳-۲۹ را برابر انرژی جنبشی سیارک به تنهایی فرض کرد.

***محاسبه‌ها:*** فرض کنیم $m$ نشان دهندهٔ جرم سیارک و $M$ جرم کرهٔ زمین $(5/98\times10^{24}kg)$ باشد. سیارک در ابتدا در فاصلهٔ $10R_E$ و سرانجام در فاصلهٔ $R_E$ قرار دارد که $R_E$ شعاع زمین $(6/37\times10^{6}m)$ است. با قراردادن معادلهٔ ۱۳-۲۱ به جای $U$ و $\frac{1}{2}mv^2$ به جای $K$ می‌توان معادلهٔ ۱۳-۲۹ را به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{GMm}{R_E}=\frac{1}{2}mv_i^2-\frac{GMm}{10R_E}$$

با مرتب کردن و قراردادن مقدارهای معلوم خواهیم داشت

$$v_f^2=v_i^2+\frac{2GM}{R_E}\left(1-\frac{1}{10}\right)$$

$$=(12\times10^3 m/s)^2$$

$$+\frac{2(6/67\times10^{-11}m^3/kg\cdot s^2)(5/98\times10^{24})}{6/37\times10^6 m}0/9$$

$$=2/567\times10^8 m^2/s^2$$

و

$$v_f=1/60\times10^4 m/s=16km/s \qquad \text{(پاسخ)}$$

با این تندی، سیارک نباید چنان بزرگ باشد که بتواند هنگام برخورد با زمین صدمهٔ زیادی وارد کند. اگر سیارک فقط ۵ متر پهنا داشته باشد، بر اثر برخورد آن با زمین می‌تواند انرژیی تقریباً به اندازهٔ انفجار هسته‌ای در هیروشیما آزاد کند. می‌دانیم که حدود ۵۰۰ میلیون سیارکهایی با این اندازه در نزدیکی مدار زمین وجود دارند در سال ۱۹۹۴/۱۳۷۳ یکی از آنها ناگهان به جو زمین وارد شد در ۲۰ کیلومتری بالای اقیانوس آرام جنوبی منفجر شد (به طوری که شش ماهوارهٔ نظامی از یک انفجار هسته‌ای هشدار دادند). برخورد سیارکی به قطر 500m به زمین (که ممکن است یک میلیون از آنها در نزدیکی مدار زمین وجود داشته باشند) می‌تواند کاملاً تمدن نوین را پایان دهد و تقریباً حیات انسان را نابود سازد.

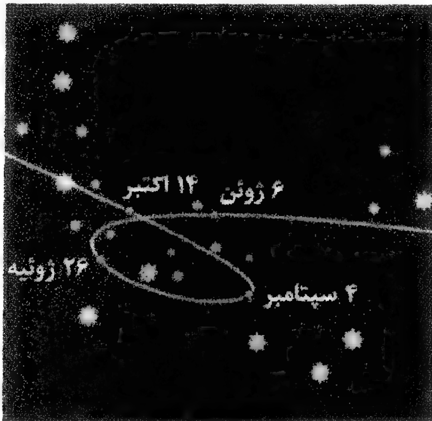
## ۱۳-۷ سیاره‌ها و قمرها: قانونهای کپلر

حرکت سیاره‌ها که به ظاهر در برابر زمینهٔ ستاره‌ها عجیب به نظر می‌رسد از سپیده دم تاریخ به صورت معمایی بوده است. حرکت «حلقه به حلقهٔ» مریخ که در شکل ۱۳-۱۲ نشان داده شده است به ویژه ناشناخته بود. یوهانس کپلر[1] (۱۰۰۹-۱۶۳۰/۹۵۰-۱۵۷۱) پس از عمری مطالعه قانونهایی تجربی برای این حرکتها تدوین کرد. تیکو براهه[2] (۹۸۰-۱۶۰۱/۹۲۵-۱۵۴۶) آخرین اخترشناس بزرگی است که مشاهده‌های خود را بدون تلسکوپ انجام داده است. او اطلاعات وسیعی را گردآوری کرد به طوری که کپلر را قادر ساخت تا سه قانون حرکت سیاره‌ای را که اکنون به نام کپلر شناخته می‌شود به دست آورد. بعدها نیوتون (۱۱۰۶-۱۰۲۱/۱۷۲۷-۱۶۴۲) نشان داد که قانون گرانش او به قانونهای کپلر منجر می‌شود.

در این بخش هر سه قانون کپلر را بررسی خواهیم کرد. اگر چه در اینجا این قانونها دربارهٔ سیاره‌هایی به کار برده می‌شوند که دور خورشید می‌گردند، ولی این قانونها دربارهٔ قمرهای طبیعی و مصنوعی که دور زمین یا هر جسم سنگین دیگری می‌گردند نیز به خوبی صدق می‌کنند.

> **۱- قانون مدارها:** همهٔ سیاره‌ها در مدارهای بیضی شکلی که خورشید در یکی از کانونهای آن قرار دارد حرکت می‌کنند.

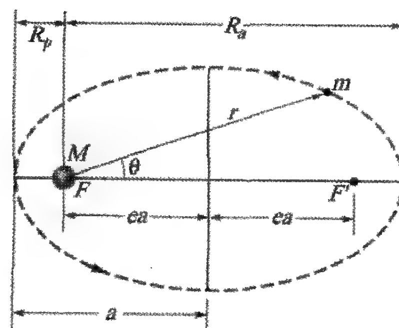
شکل ۱۳-۱۳ سیاره‌ای به جرم $m$ را نشان می‌دهد که در چنین مداری به دور خورشید که جرم آن $M$ است حرکت می‌کند. فرض می‌کنیم که $M\gg m$، به طوری که مرکز جرم دستگاه سیاره- خورشید تقریباً در مرکز خورشید قرار دارد.




**شکل ۱۳-۱۲** مسیر سیارهٔ مریخ در پهنهٔ صورت فلکی جُدی در حین حرکت در سال ۱۹۷۱/۱۳۵۰. در نمودار، مکان مریخ در چهار روز انتخاب شده نشان داده شده است. مریخ و زمین، هر دو در مدارهایی به دور خورشید می‌گردند و ما مکان مریخ را نسبت به زمین می‌بینیم. بعضی وقتها یک حلقهٔ ظاهری در مسیر حرکت مریخ دیده می‌شود.

مدار شکل ۱۳-۱۳ با داشتن **نیم قطر بزرگ** $a$ بیضی و **خروج از مرکز بیضی** $e$ توصیف می‌شود، خروج از مرکز به این معناست که مقدار $ea$ برابر فاصلهٔ مرکز بیضی تا هر یک از دو کانون $F$ و $F'$ آن است. *خروج از مرکز صفر متناظر با دایره است*، که در آن دو کانون به یک نقطهٔ مرکزی تبدیل می‌شوند. خروج از مرکز مدارهای سیاره‌ای بزرگ نیست، به طوری که در ترسیم مدارها، آنها را به صورت دایره نشان می‌دهند. خروج از مرکز بیضی در شکل ۱۳-۱۳ که برای روشنی بیشتر به طور اغراق آمیزی نشان داده شده برابر ۰/۷۴ است. خروج از مرکز مدار زمین فقط برابر ۰/۰۱۶ است.

1. Johannes Kepler
2. Tycho Brahe




**شکل ۱۳-۱۳** سیاره‌ای به جرم $m$ روی مداری بیضی شکل به دور خورشید می‌گردد. خورشید با جرم $M$ در یک کانون $F$ بیضی قرار دارد. کانون دیگر $F'$ است، که در فضای تهی قرار دارد. هر کانون در فاصلهٔ ea از مرکز بیضی قرار دارد که e خروج از مرکز بیضی است. نیم قطر بزرگ a بیضی، فاصلهٔ حضیض (نزدیکترین فاصلهٔ سیاره تا خورشید) $R_p$ و فاصلهٔ اوج (دورترین فاصله از خورشید) $R_a$ نیز نشان داده شده‌اند.

> **۲- قانون مساحتها:** خط وصل کنندهٔ هر سیاره و خورشید در صفحهٔ مدار سیاره در زمانهای مساوی مساحتهای مساوی را جارو می‌کند، یعنی آهنگ $\frac{dA}{dt}$ که با آن مساحت $A$ جارو می‌شود مقداری ثابت است.

این قانون دوم از لحاظ کیفی حاکی از آن است که سیاره در دورترین فاصله از خورشید با کمترین تندی و در نزدیکترین فاصله از خورشید با بیشترین تندی حرکت می‌کند. معلوم شده است که قانون دوم کپلر کاملاً معادل با قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای است و اکنون این موضوع را ثابت می‌کنیم.

مساحت مثلث هاشور خورده در شکل ۱۳-۱۴ الف با تقریب خوبی برابر مساحت جارو شده در زمان $\Delta t$ توسط خطی است که خورشید و سیاره را که به فاصلهٔ $r$ از هم قرار دارند به هم وصل می‌کند. $\Delta A$ تقریباً برابر مساحت مثلثی با قاعدهٔ $r\Delta\theta$ و ارتفاع $r$ است. از آنجا که مساحت مثلث برابر نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاع است در نتیجه $\Delta A \approx \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$. مقدار $\Delta A$ وقتی $\Delta t$ (و نیز $\Delta\theta$) به سمت صفر میل کند دقیقتر می‌شود. بنابراین، آهنگ لحظه‌ای جاروشدن مساحت برابر است با

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega \qquad (۱۳-۳۰)$$

که در آن $\omega$ تندی زاویه‌ای چرخش خط وصل کنندهٔ خورشید و سیاره است.

شکل ۱۳-۱۴ ب اندازه حرکت خطی $\vec{P}$ سیاره و مؤلفه‌های شعاعی و عمودی $\vec{P}$ را نشان می‌دهد. از معادلهٔ ۱۱-۲۰ $(L = rP_\perp)$ بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ سیاره به دور خورشید با حاصلضرب $r$ و $P_\perp$ ، مؤلفهٔ $P$ عمود بر $r$، داده می‌شود، برای سیاره‌ای به جرم $m$ داریم

$$L = rP_\perp = (r)(mv_\perp) = (r)(m\omega r) = mr^2\omega \qquad (۱۳-۳۱)$$

که در اینجا به جای $v_\perp$ مقدار معادل آن یعنی $\omega r$ را قرار داده‌ایم. (معادلهٔ ۱۰-۱۸). با حذف $r^2\omega$ بین معادله‌های ۱۳-۳۰ و ۱۳-۳۱ نتیجه می‌گیریم که

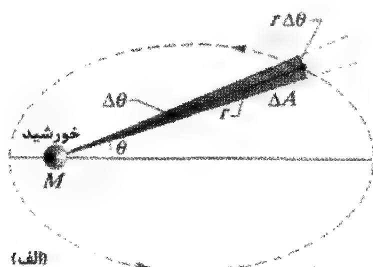
$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \qquad (۱۳-۳۲)$$

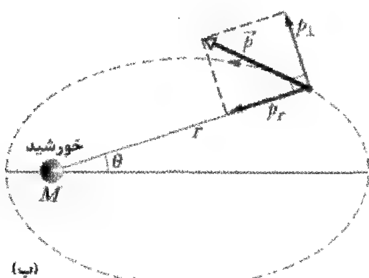
اگر $\frac{dA}{dt}$ آن طور که کپلر می‌گوید ثابت باشد معادلهٔ ۱۳-۳۲ نشان می‌دهد که $L$ نیز باید ثابت باشد، یعنی اندازه حرکت زاویه‌ای پایسته است. به این ترتیب قانون دوم کپلر در واقع هم ارز با قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای است.

> **۳- قانون دوره‌های تناوب:** مربع دورهٔ تناوب هر سیاره با مکعب نیم قطر بزرگ مدار آن متناسب است.

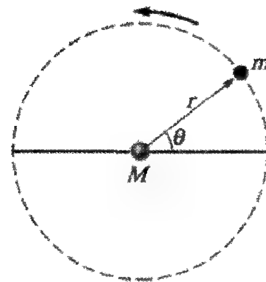
برای اثبات این موضوع مدار دایره شکلی با شعاع $r$ را در نظر بگیرید که در شکل ۱۳-۱۵ نشان داده شده است. (شعاع دایره معادل با نیم قطر یک بیضی است). استفاده از قانون دوم نیوتون $(F = ma)$ در مورد سیاره‌ای که در شکل ۱۳-۱۵ در حال گردش است به دست می‌دهد

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)(\omega^2 r) \qquad (۱۳-۳۳)$$




**شکل ۱۳-۱۴** (الف) در زمان $\Delta t$ ، خط وصل کنندهٔ سیاره و خورشید $r$ ، به اندازهٔ زاویهٔ $\Delta\theta$ حرکت می‌کند و یک مساحت $\Delta A$ (هاشور خورده) را جارو می‌کند. (ب) اندازه حرکت خطی $\vec{P}$ سیاره و مؤلفه‌های $\vec{P}$ .




**شکل ۱۳-۱۵** سیاره‌ای به جرم $m$ در مداری دایره‌ای شکل به شعاع $r$ به دور خورشید حرکت می‌کند.

**جدول ۱۳-۳**

قانون دوره‌های تناوب کپلر برای منظومهٔ شمسی (خورشیدی)

| سیاره | نیم قطر بزرگ $a(10^{10}\ m)$ | زمان تناوب $T(y)$ | $T^2/a^3$ $(10^{-34}\ y^2/m^3)$ |
|---|---|---|---|
| عطارد | ۵/۷۹ | ۰/۲۴۱ | ۲/۹۹ |
| زهره | ۱۰/۸ | ۰/۶۱۵ | ۳/۰۰ |
| زمین | ۱۵/۰ | ۱/۰۰ | ۲/۹۶ |
| مریخ | ۲۲/۸ | ۱/۸۸ | ۲/۹۸ |
| مشتری | ۷۷/۸ | ۱۱/۹ | ۳/۰۱ |
| کیوان (زحل) | ۱۴۳ | ۲۹/۵ | ۲/۹۸ |
| اورانوس | ۲۸۷ | ۸۴/۰ | ۲/۹۸ |
| نپتون | ۴۵۰ | ۱۶۵ | ۲/۹۹ |
| پلوتو | ۵۹۰ | ۲۴۸ | ۲/۹۹ |

در اینجا، بزرگی نیروی $F$ را از معادلهٔ ۱۳-۱ قرار داده‌ایم و از معادلهٔ ۱۰-۲۳ برای قرار دادن $\omega^2 r$ به جای شتاب مرکزگرا استفاده کرده‌ایم. اکنون اگر از معادلهٔ ۱۰-۲۰ استفاده کنیم و به جای $\omega$، $\frac{2\pi}{T}$ را قرار دهیم که $T$ دورهٔ تناوب حرکت است، قانون سوم کپلر را به دست می‌آوریم

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \quad \text{(قانون دورهٔ تناوبها)} \quad (۱۳-۳۴)$$

کمیت داخل پرانتز ثابتی است که فقط به جرم $M$ جسم مرکزی که سیاره به دور آن می‌گردد بستگی دارد.

معادلهٔ ۱۳-۳۴ همچنین برای مدارهای بیضوی نیز برقرار است، به شرطی که به جای $r$ مقدار $a$، یعنی نیم قطر بزرگ بیضی را قرار دهیم. این قانون پیش‌بینی می‌کند که نسبت $T^2/a^3$ اساساً برای هر مدار سیاره‌ای که به دور جسم پر جرمی می‌گردد برابر است. جدول ۱۳-۳ نشان می‌دهد که برای مدارهای سیاره‌های منظومهٔ شمسی این قانون تا چه حد برقرار است.

> **✔ نکتهٔ وارسی ۴** ماهوارهٔ ۱ در یک مدار دایره‌ای معین به دور سیاره‌ای می‌گردد، در حالی که ماهوارهٔ ۲ در مدار دایره‌ای بزرگتری قرار دارد. کدامیک از ماهواره‌ها (الف) دارای دورهٔ تناوب طولانیتر و (ب) تندی بیشتری است؟

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳-۶

دنباله‌دار هالی خورشید را با دورهٔ تناوب ۷۶ سال دور می‌زند و در سال ۱۹۸۶/۱۳۶۵ به نزدیکترین فاصلهٔ خود از خورشید یعنی به *فاصلهٔ حضیض آن* $R_p$ برابر $8/9\times10^{10}$ m رسید. جدول ۱۳-۳ نشان می‌دهد که این فاصله بین فاصلهٔ مدارهای عطارد و زهره قرار دارد.

(الف) بیشترین فاصلهٔ این ستارهٔ دنباله‌دار از خورشید که *فاصلهٔ اوج* $R_a$ نامیده می‌شود چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** از شکل ۱۳-۱۳ می‌توان دید که $R_a + R_p = 2a$، که در آن $a$ نیم قطر بزرگ مدار است. بنابراین، با پیداکردن $a$ می‌توان $R_a$ را به دست آورد. می‌توان از طریق قانون دورهٔ تناوبها (معادلهٔ ۱۳-۳۴) با قراردادن نیم قطر بزرگ $a$ به جای $r$ مقدار $a$ را به دورهٔ تناوب مربوط کرد.

***محاسبه‌ها:*** با انجام این کار و سپس حل آن بر حسب $a$ خواهیم داشت

$$a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \quad (۱۳-۳۵)$$

اگر جرم $M$ خورشید را برابر $1/99\times10^{30}$ kg و دورهٔ تناوب $T$ دنباله‌دار را ۷۶ سال یا $2/4\times10^9$ s در معادلهٔ ۱۳-۳۵ قرار دهیم، به دست می‌آوریم که $a = 2/7\times10^{12}$m است. اکنون داریم

$$\begin{aligned} R_a &= 2a - R_p \\ &= (2)(2/7\times10^{12}\text{m}) - 8/9\times10^{10}\text{m} \\ &= 5/3\times10^{12}\text{m} \end{aligned} \quad \text{(پاسخ)}$$

جدول ۱۳-۳ نشان می‌دهد که این مقدار اندکی کمتر از نیم قطر بزرگ مدار پلوتو است. بنابراین دنباله‌دار بیشتر از پلوتو از خورشید دور نمی‌شود.

(ب) خروج از مرکز $e$ مدار دنباله‌دار هالی چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توان $e$، $a$ و $R_p$ را از طریق شکل ۱۳-۱۳ به هم مربوط کرد، می‌بینیم که $ea = a - R_p$.

***محاسبه‌ها:*** داریم

$$\begin{aligned} e &= \frac{a-R_p}{a} = 1 - \frac{R_p}{a} \\ &= 1 - \frac{8/9\times10^{10}\text{ m}}{2/7\times10^{12}\text{m}} = 0/97 \end{aligned} \quad \text{(پاسخ)}$$

این مقدار حاکی از آن است که با خروج از مرکز نزدیک به واحد، این مدار باید یک بیضی بلند و کشیده باشد.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳-۷**

حال به داستانی که در ابتدای فصل شروع کردیم برمی‌گردیم. شکل ۱۳-۱۶ مدار مشاهده شده از ستارهٔ S۲ را نشان می‌دهد به طوری که این ستاره به دور یک جسم مرموز و نامرئی به نام ساجیتاریوس $A^*$ [1] ($A$ استار تلفظ می‌شود) دوران می‌کند که در مرکز کهکشان راه شیری قرار دارد. S۲ به دور ساجیتاریوس $A^*$ با دورهٔ تناوب $T = ۱۵/۲\text{y}$ و با نیم قطر بزرگ $a = ۵/۵۰$ سال نوری (برابر $۱/۴۲ \times ۱۰^{۱۴}\text{m}$) می‌گردد. جرم $M$ ساجیتاریوس چقدر است؟ ساجیتاریوس $A^*$ چیست؟

**نکتهٔ کلیدی** دورهٔ تناوب $T$ و نیم قطر بزرگ $a$ مدار بنابر قانون دورهٔ تناوب کپلر به جرم $M$ ساجیتاریوس $A^*$ بستگی دارند از معادلهٔ ۱۳-۳۴ با قراردادن $a$ به جای شعاع $r$ در مدار دایره‌ای داریم

$$T^۲ = \left(\frac{۴\pi^۲}{GM}\right)a^۳ \qquad (۱۳-۳۶)$$

***محاسبه‌ها:*** با حل معادلهٔ ۱۳-۳۶ برای $M$ و قراردادن داده‌های مسئله داریم

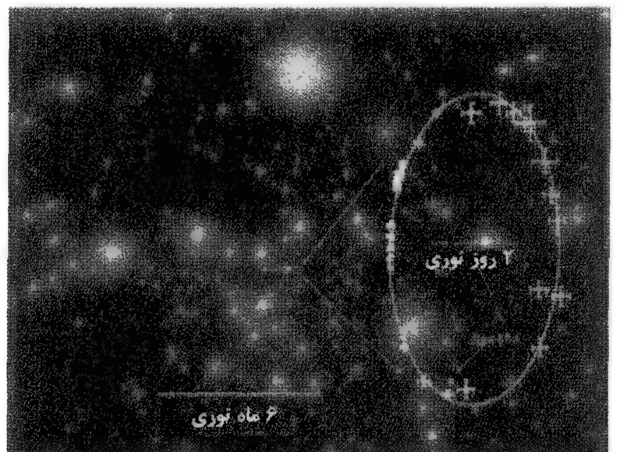
$$M = \frac{۴\pi^۲ a^۳}{GT^۲}$$

$$= \frac{۴\pi^۲(۱/۴۲\times۱۰^{۱۴}\text{m})^۳}{(۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\ \text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{kg}^۲)[(۱۵/۲\text{y})(۳/۱۶\times۱۰^۷\ \text{s/y})]^۲}$$

$$= ۷/۳۵\times۱۰^{۳۶}\text{kg} \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای اینکه نشان دهیم ساجیتاریوس $A^*$ چه می‌تواند باشد، این جرم را به جرم خورشیدمان تقسیم کنیم. ($M_{sun} = ۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}\ \text{kg}$)، در نتیجه خواهیم داشت

$$M = (۳/۷\times۱۰^۶)M_{sun}$$




**شکل ۱۳-۱۶** مدار ستارهٔ S۲ به دور ساجیتاریوس $A^*$ (sgr $A^*$). مدار بیضوی کج به نظر می‌رسد زیرا ما آن را به طور مستقیم از بالای صفحهٔ مداری نمی‌بینیم. عدم قطعیت در مکان S۲ با بعلاوه نشان داده شده است.

[1] Sagittarius A*

یعنی ساجیتاریوس $A^*$ دارای جرمی به اندازهٔ ۳/۷ میلیون برابر خورشید است! ولی نمی‌تواند دیده شود. در نتیجه، جسم به شدت فشرده‌ای است. چنین جرم عظیمی در جسمی کوچک به نتیجهٔ قابل قبولی منجر می‌شود که این جسم یک سیاهچالهٔ /برجرمی است. در واقع، شواهدی وجود دارد که یک سیاهچالهٔ ابرجرمی در مرکز بیشتر کهکشانها پنهان شده است. (فیلمهایی دربارهٔ ستاره‌هایی که به دور ساجیتاریوس $A^*$ می‌گردند در وب موجود است؛ عبارت «blank hole galactic center» را جستجو کنید.

## ۱۳-۸ ماهواره‌ها: مدارها و انرژی

وقتی ماهواره‌ای در مسیری بیضوی در مدار زمین قرار گیرد، هم تندی که ایجاد کنندهٔ انرژی جنبشی $K$ است و هم فاصلهٔ آن از مرکز زمین که مشخص کنندهٔ انرژی پتانسیل $U$ است با دورهٔ تناوب معینی افت و خیز پیدا می‌کنند. اما انرژی مکانیکی $E$ ماهواره ثابت می‌ماند. (زیرا جرم ماهواره بسیار کوچکتر از جرم زمین است و می‌توان $U$ و $E$ را برای دستگاه زمین- ماهواره فقط به ماهواره نسبت داد.)

انرژی پتانسیل این دستگاه با رابطهٔ ۱۳-۲۱ داده می‌شود

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

(که در فاصلهٔ جدایی بینهایت $U = ۰$). در اینجا $r$ شعاع مدار ماهواره است که فعلاً فرض می‌کنیم به صورت دایره است و $M$ و $m$ به ترتیب جرم زمین و جرم ماهواره‌اند.

برای پیداکردن انرژی جنبشی ماهواره در مداری دایره‌ای، قانون دوم نیوتون $(F = \text{ma})$ را به این صورت می‌نویسیم

$$\frac{GMm}{r^۲} = m\frac{v^۲}{r} \qquad (۱۳-۳۷)$$

که در آن $\frac{v^۲}{r}$ شتاب مرکزگرای ماهواره است. بنابراین، از معادلهٔ ۱۳-۳۷ انرژی جنبشی ماهواره برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{GMm}{۲r} \qquad (۱۳-۳۸)$$

که مقدار انرژی جنبشی ماهواره را در مداری دایره‌ای نشان می‌دهد و برابر است با

$$K = -\frac{U}{۲} \qquad \text{(برای مدار دایره‌ای)} \qquad (۱۳-۳۹)$$

انرژی مکانیکی کل ماهوارهٔ در حال گردش برابر است با

$$E = K + U = \frac{GMm}{۲r} - \frac{GMm}{r}$$

یا

$$E = -\frac{GMm}{۲r} \qquad \text{(مدار دایره‌ای)} \qquad (۱۳-۴۰)$$

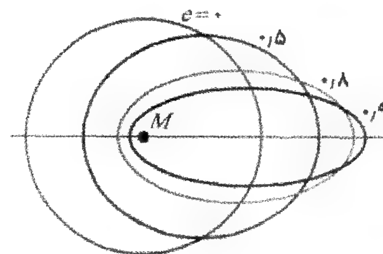
این معادله بر آن دلالت دارد که انرژی کل $E$ برای ماهواره در مدار دایره‌ای برابر منفی انرژی جنبشی $K$ است

$$E = -K \qquad \text{(مدار دایره‌ای)} \qquad (۱۳-۴۱)$$

برای ماهواره‌ای که در مدار بیضوی با نیم قطر بزرگ $a$ حرکت می‌کند می‌توان به جای $r$ مقدار $a$ را در معادلهٔ ۱۳-۴۰ قرار داد تا انرژی مکانیکی به دست آید

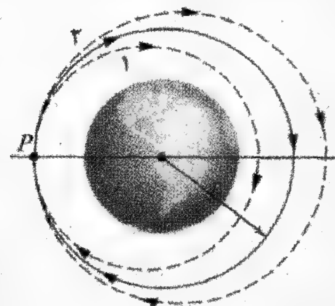
$$E = -\frac{GMm}{۲a} \quad \text{(مدار بیضوی)} \qquad (۱۳\text{-}۴۲)$$

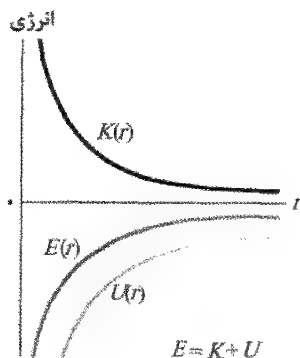
معادلهٔ ۱۳-۴۲ حاکی از آن است که انرژی کل ماهوارهٔ در حال گردش فقط به نیم قطر بزرگ مدار آن بستگی دارد و نه به خروج از مرکز $e$. برای مثال در شکل ۱۳-۱۷ چهار مدار را با نیم قطر بزرگ برابر نشان داده‌ایم. در هر چهار مدار یک ماهواره دارای انرژی مکانیکی کل یکسانی است. شکل ۱۳-۱۸ تغییرات $K$، $U$ و $E$ را برحسب $r$ برای ماهواره‌ای که در مدار دایره‌ای شکل به دور جسم مرکزی پر جرمی می‌گردد نشان می‌دهد.




**شکل ۱۳-۱۷** چهار مدار با خروج از مرکزهای متفاوت $e$ حول جسمی به جرم $M$. هر چهار مدار دارای نیم قطر بزرگ $a$ هستند و در نتیجه انرژی مکانیکی کل آنها برابر $E$ است.

**✔ نکتهٔ وارسی ۵** در شکل یک شاتل فضایی نشان داده شده است که در ابتدا در مداری دایره‌ای به شعاع $r$ به دور زمین می‌گردد. خلبان در نقطهٔ $P$ برای کاهش دادن انرژی جنبشی $K$ و انرژی مکانیکی شاتل، در مدتی کوتاه، یک موتور کنترل کنندهٔ حرکت به جلو را روشن می‌کند. (الف) شاتل کدامیک از مدارهای بیضوی نشان داده شده در شکل را طی می‌کند؟ (ب) آیا دورهٔ تناوب مداری شاتل نسبت به مدار دایره‌ای (زمانی که شاتل به نقطهٔ $P$ باز می‌گردد) بعد از آن بزرگتر می‌شود، کوچکتر می‌شود یا تغییر نمی‌کند؟




**شکل ۱۳-۱۸** تغییر انرژی جنبشی $K$، انرژی پتانسیل $U$ و انرژی کل $E$ با شعاع $r$ برای ماهواره‌ای در مدار دایره‌ای. برای هر مقدار $r$، مقدارهای $U$ و $E$ منفی‌اند، مقدار $K$ مثبت است و به ازای $r \to \infty$، $E \to -K$، هر سه منحنی انرژی به مقدار صفر میل می‌کنند.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳-۸

فضانوردی برای شوخی توپ بولینگی به جرم $m = ۷/۲۰\ \text{kg}$ را در ارتفاع $h = ۳۵۰\ \text{km}$ به درون یک مدار دایره‌ای حول زمین رها می‌کند. (الف) انرژی مکانیکی $E$ توپ در مدارش چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** می‌توان $E$ را از انرژی مداری با استفاده از رابطهٔ ۱۳-۴۰ $(E = -GMm/۲r)$ به دست آورد، در صورتی که ابتدا شعاع مداری $r$ را پیدا کنیم.

***محاسبه‌ها:*** این شعاع مداری برابر است با

$$r = R + h = ۶۳۷۰\ \text{km} + ۳۵۰\ \text{km} = ۶/۷۲ \times ۱۰^{۶}\ \text{m}$$

که در آن $R$ شعاع زمین است. بنابراین، انرژی مکانیکی از رابطهٔ ۱۳-۴۰ برابر است با

$$E = -\frac{GMm}{۲r}$$

$$= -\frac{(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\ \text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{kg}^۲)(۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\ \text{kg})(۷/۲۰\ \text{kg})}{(۲)(۶/۷۲\times ۱۰^{۶}\ \text{m})}$$

$$= -۲/۱۴\times ۱۰^{۸}\ \text{J} = -۲۱۴\ \text{MJ} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) انرژی مکانیکی $E_۰$ توپ در سکوی پرتاب در کیپ کاناورال چقدر است؟ از آنجا تا رسیدن به مدار تغییر انرژی مکانیکی توپ $\Delta E$ چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** در سکوی پرتاب توپ در مدار قرار *ندارد* و در نتیجه معادله ۱۳-۴۰ را *نمی‌توان* به کار برد. بلکه باید $E_۰ = K_۰ + U_۰$ را به دست آوریم که $K_۰$ انرژی جنبشی توپ و $U_۰$ انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه توپ- زمین است.

***محاسبه‌ها:*** برای یافتن $U_۰$ با استفاده از معادلهٔ ۱۳-۲۱ می‌توان نوشت

$$U_\circ = -\frac{GMm}{R}$$

$$= -\frac{(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})(۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\ \mathrm{kg})(۷/۲۰\ \mathrm{kg})}{۶/۳۷\times ۱۰^{۶}\ \mathrm{m}}$$

$$= -۴/۵۱\times ۱۰^{۸}\ \mathrm{J} = -۴۵۱\ \mathrm{MJ}$$

انرژی جنبشی $K_\circ$ توپ ناشی از حرکت توپ بر اثر چرخش زمین است. می‌توان نشان داد که $K_\circ$ کمتر از ۱MJ است به طوری که نسبت به $U_\circ$ قابل چشمپوشی است. بنابراین، انرژی مکانیکی توپ در سکوی پرتاب برابر است با

$$E_\circ = K_\circ + U_\circ \approx ۰ - ۴۵۱\ \mathrm{MJ} = -۴۵۱\ \mathrm{MJ}$$ (پاسخ)

*افزایش* انرژی مکانیکی توپ از سکوی پرتاب تا مدار برابر است با

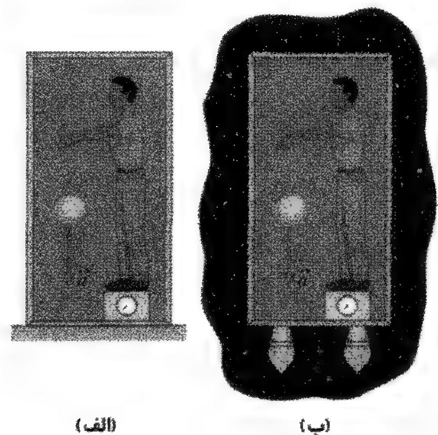
$$\Delta E = E - E_\circ = (-۲۱۴\ \mathrm{MJ}) - (-۴۵۱\ \mathrm{MJ}) = ۲۳۷\ \mathrm{MJ}$$ (پاسخ)

این مقدار انرژی را فقط با چند دلار می‌توان از شرکتهای خدمات عمومی خریداری کرد. هزینهٔ زیاد قراردادن جسمی در مدار زمین مربوط به انرژی مکانیکی مورد نیاز آنها نیست.

## ۱۳-۹ اینشتین و گرانش

### *اصل هم ارزی*

آلبرت اینشتین گفته بود که: «... من در ادارهٔ ثبت اختراعات در برن بودم که ناگهان فکری به خاطرم رسید: «اگر کسی به طور آزاد سقوط کند وزن خود را احساس نخواهد کرد.» ناگهان یکه خوردم. این فکر ساده احساس عمیقی در من ایجاد کرد و من را به سوی نظریهٔ گرانش رهنمون ساخت.»




شکل ۱۳-۱۹ (الف) فیزیکدانی در اتاقکی که روی زمین ساکن است جسمی را مشاهده می‌کند که با شتاب $a = ۹/۸\ \mathrm{m/s^2}$ سقوط می‌کند. (ب) اگر او و اتاقک در فضای تهی با شتاب $۹/۸\ \mathrm{m/s^2}$ حرکت کنند، جسم با همان شتاب نسبت به او سقوط می‌کند. فیزیکدانی که داخل اتاقک است با انجام آزمایش در داخل اتاقک نمی‌تواند دریابد که در کدام وضعیت قرار دارد. برای مثال ترازویی که روی آن ایستاده در هر دو حالت یک وزن را نشان می‌دهد.

بدین ترتیب اینشتین می‌گوید که چگونه **نظریهٔ نسبیت عام** او شکل گرفته است. اصل موضوع بنیادی این نظریه در مورد گرانش (جذب جسمها به طرف یکدیگر) *اصل هم ارزی* نام دارد و بیان می‌کند که گرانش و شتاب هم ارز یکدیگرند. اگر فیزیکدانی را در اتاقک کوچکی حبس کنیم، نظیر شکل ۱۳-۱۹، او قادر نخواهد بود که بگوید آیا اتاقک روی زمین ساکن است (و فقط نیروی گرانشی به آن وارد می‌شود)، مانند شکل ۱۳-۱۹ الف، یا در فضای بین ستاره‌ای با شتاب $۹/۸\ \mathrm{m/s^2}$ حرکت می‌کند (و فقط نیرویی که عامل ایجاد شتاب است به آن وارد می‌شود)، مثل شکل ۱۳-۱۹ ب. در هر وضعیت او احساس یکسانی خواهد داشت و در هر دو حالت ترازو وزن یکسانی برای او نشان می‌دهد. به علاوه اگر او جسمی را که نسبت به خودش سقوط می‌کند تماشا کند در هر دو حالت جسم شتاب یکسانی نسبت به او خواهد داشت.

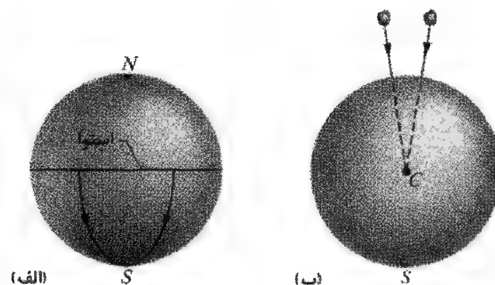
### *خمیدگی فضا*

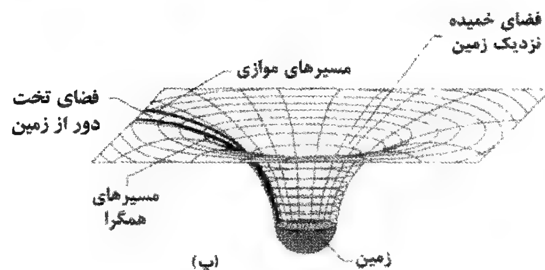
تا اینجا گرانش را به صورت نیروی میان جرمها توصیف کردیم. اما، اینشتین نشان داد که به جای آن می‌توان گرانش را ناشی از خمیدگی فضای ایجاد شده توسط جرمها در نظر گرفت. (به طوری که بعداً در این کتاب بحث می‌کنیم فضا و زمان به هم مربوط‌اند. در نتیجه خمیدگی که اینشتین از آن صحبت می‌کند واقعاً خمیدگی *فضا زمان* یعنی ترکیب چهار بعدی عالم است.)

تصور اینکه فضا (مثل خلأ) چگونه می‌تواند خمیدگی داشته باشد دشوار است. با یک مقایسه می‌توان آن را توضیح داد. فرض کنید از مداری در پیرامون زمین مسابقه‌ای را که در آن دو قایق در استوای زمین با فاصلهٔ ۲۰km از هم قرار دارند و به طرف قطب جنوب حرکت می‌کنند تماشا می‌کنیم. (شکل ۱۳-۲۰ الف). از نظر قایقرانها این قایقها در طول مسیرهایی مسطح و موازی حرکت می‌کنند. ولی با گذشت زمان قایقها به طرف هم کشیده می‌شوند و در نزدیکی قطب جنوب به هم می‌رسند. قایقرانهای درون قایقها این کشش به سوی یکدیگر را می‌توانند ناشی از نیروی وارد به قایقها تعبیر کنند. اما به سادگی می‌توان دریافت که کشیده‌شدن قایقها به طرف هم بر اثر خمیدگی سطح زمین است. ما این را می‌توانیم ببینیم زیرا از «خارج» سطح زمین به آن نگاه می‌کنیم.

شکل ۱۳-۲۰ ب آزمایش مشابهی را نشان می‌دهد. دو سیب با فاصلهٔ افقی از هم از ارتفاع یکسانی در بالای زمین به پایین می‌افتند. اگر چه سیبها به نظر می‌رسند که باید در طول مسیرهایی موازی حرکت کنند ولی در واقع به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند زیرا هر دو به سمت مرکز زمین سقوط می‌کنند. می‌توان حرکت سیبها را بر حسب نیروی گرانشی وارد بر سیبها از طرف زمین توجیه کرد. همچنین می‌توان این حرکت را برحسب خمیدگی فضای نزدیک زمین به خاطر جرم زمین نیز

بیان کرد. این بار نمی‌توان خمیدگی را مشاهده کرد زیرا در «خارج» فضای خمیده نیستیم، در حالی که در مثال قایقها ما در «خارج» زمین خمیده قرار داشتیم. با وجود این می‌توان این خمیدگی را با نموداری نظیر شکل ۱۳-۲۰ پ نشان داد. در این شکل سیبها در امتداد سطح خمیده‌ای حرکت می‌کند که به دلیل جرم زمین ایجاد شده است.

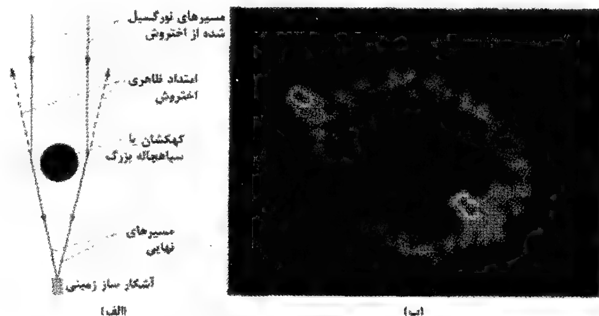



**شکل ۱۳-۲۰** (الف) دو جسم که در امتداد خطهای نصف النهار مختلف به طرف قطب جنوب حرکت می‌کنند سرانجام به هم می‌رسند، زیرا سطح زمین دارای خمیدگی است. (ب) دو جسمی که در نزدیکی زمین سقوط آزاد می‌کنند روی خطهایی حرکت می‌کنند که امتداد آنها در مرکز زمین به هم می‌رسند، زیرا فضای نزدیک زمین خمیده است. (پ) در نقطه‌های دور از زمین (و دور از هر جرم دیگری) فضا تخت است و مسیرهای موازی، موازی باقی می‌مانند. در نزدیکی زمین مسیرهای موازی شروع به همگراشدن می‌کنند زیرا فضا توسط جرم زمین خمیده شده است.

وقتی نور از نزدیکی زمین می‌گذرد، مسیر نور به دلیل خمیدگی فضای آنجا خم می‌شود، اثری که آن را *همگرایی گرانشی* می‌نامند. وقتی نور از کنار ساختاری با جرم بیشتر عبور کند، مانند یک کهکشان یا یک سیاهچاله که جرم زیادی دارد مسیر آن خمیدگی بیشتری پیدا می‌کند. اگر این ساختار بین ما و یک اختروش (یک چشمهٔ نور بسیار درخشان و بسیار دور) باشد نور گسیل شده از اختروش می‌تواند به دور این ساختار پر جرم خمیده شود و به ما برسد (شکل ۱۳-۲۱ الف). بنابراین، به دلیل این که به نظر می‌آید نوری که به ما می‌رسد از جهتهای اندک مختلفی از آسمان می‌آید، ما همان اختروش را در همهٔ جهتهای مختلف می‌بینیم. در بعضی حالتها اختروشهایی را می‌بینیم که با هم آمیخته‌اند و کمان درخشان بزرگی را تشکیل می‌دهند که *حلقهٔ اینشتین* نامیده می‌شود، (شکل ۱۳-۲۱ ب).

آیا می‌توان گرانش را به خمیدگی فضا زمان ناشی از جرمها یا نیروی بین جرمها نسبت داد؟ یا می‌توان آن را به عملکرد یک نوع ذرهٔ بنیادی به نام *گراویتون* نسبت داد، که در بعضی نظریه‌های فیزیک نوین پیش‌بینی می‌کنند؟ اینها موضوعهایی است که دقیقاً نمی‌دانیم.




**شکل ۱۳-۲۱** (الف) نور گسیل شده از اختروش دور دست در نزدیکی کهکشان یا یک سیاهچالهٔ بزرگ مسیرهای خمیده‌ای را می‌پیماید زیرا جرم کهکشان یا سیاهچاله فضای اطراف آن را خمیده می‌کند. نور موقع دیده شدن، به نظر می‌رسد که از امتدادهای مسیرهای پایانی (خط چینها در شکل) آمده است. (ب) حلقهٔ اینشتین که به *MG* ۱۱۳۱+۰۴۵۶ معروف است روی صفحهٔ رایانهٔ یک تلسکوپ. چشمهٔ نور (در واقع موجهای رادیویی که صورتی از نور نامرئی هستند) در فاصله‌ای دوردست و در پشت کهکشان بزرگ و نامرئی به وجود آورندهٔ حلقه قرار دارد. جزئی از چشمه به صورت دو نقطهٔ روشن روی حلقه دیده می‌شوند.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**قانون گرانش** هر ذره‌ای در عالم ذره‌های دیگر را با **نیروی گرانشی** جذب می‌کند که بزرگی آن عبارت است از

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{(قانون گرانش نیوتون)} \qquad (۱۳-۱)$$

که در آن $m_1$ و $m_2$ جرمهای ذره‌ها (قانون گرانش نیوتون)، $r$ فاصلهٔ بین آنها و $G(=6/67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})$ *ثابت گرانش* است.

**رفتار گرانشی پوسته‌های کروی یکنواخت** معادلهٔ ۱۳-۱ فقط برای ذره‌ها برقرار است. نیروی گرانشی بین جسمهای گسترده (غیر نقطه‌ای) را به طور کلی باید با جمع کردن (انتگرالگیری) نیروهای مجزا که بر ذره‌های مجزای درون جسمها وارد می‌شود به دست آورد. اما، اگر جسم به صورت پوستهٔ کروی یکنواخت یا به صورت توپر با تقارن کروی باشد، نیروی گرانشی خالص وارد بر یک جسم *خارجی* را می‌توان محاسبه کرد در صورتی که همهٔ جرم پوسته یا جسم در مرکز آن قرار داشته باشد.

**اصل برهم نهی** نیروهای گرانشی از *اصل برهم نهی* پیروی می‌کنند؛ یعنی اگر $n$ ذره بر هم کنش کنند نیروی خالص $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$

وارد بر ذرهٔ معین ۱ برابر جمع نیروهایی است که از طرف همهٔ ذره‌های دیگر بر آن وارد می‌شود

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i} \qquad (۵-۱۳)$$

که در آن جمع یک جمع برداری روی نیروهای $\vec{F}_{1i}$ است که از طرف ذره‌های ۲ و ۳ و ... و $n$ بر ذرهٔ ۱ وارد می‌شود. نیروی گرانشی $\vec{F}_1$ وارد بر یک ذره از طرف جسم گسترده را می‌توان با تقسیم جسم به اجزای دیفرانسیلی به جرم $dm$ به دست آورد به طوری که هر جزء یک نیروی دیفرانسیلی $d\vec{F}$ را بر ذره وارد می‌کند و در نتیجه با انتگرالگیری می‌توان جمع همهٔ نیروها را پیدا کرد

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F} \qquad (۶-۱۳)$$

**شتاب گرانشی** *شتاب گرانشی* $a_g$ یک ذره (به جرم $m$) فقط از نیروی گرانشی وارد بر ذره ناشی می‌شود. وقتی این ذره در فاصلهٔ $r$ از مرکز یک جسم کروی یکنواخت به جرم $M$ قرار داشته باشد، بزرگی $F$ نیروی گرانشی وارد بر ذره با رابطهٔ ۱۳-۱ داده می‌شود. بنابراین، با استفاده از قانون دوم نیوتون، داریم

$$F = ma_g \qquad (۱۰-۱۳)$$

که به دست می‌دهد

$$a_g = \frac{GM}{r^2} \qquad (۱۱-۱۳)$$

**شتاب سقوط آزاد و وزن** از آنجا که جرم زمین به طور یکنواخت توزیع نشده است، و چون زمین یک کرهٔ کامل نیست و به دور خود می‌چرخد، شتاب سقوط آزاد واقعی $\vec{g}$ ذره در نزدیکی زمین اندکی با شتاب گرانشی $\vec{a}_g$ فرق می‌کند و وزن ذره (برابر $mg$) با نیروی گرانشی که به ذره اثر می‌کند، به طوری که با معادلهٔ ۱۳-۱ محاسبه کردیم، تفاوت خواهد داشت.

**گرانش درون یک پوستهٔ کروی** پوستهٔ یکنواختی از ماده هیچ نیروی گرانشی خالصی به ذره‌ای که درون آن قرار دارد وارد نمی‌کند. این بدان معناست که اگر ذره‌ای درون کرهٔ توپر یکنواختی در فاصلهٔ $r$ از مرکز آن قرار داشته باشد، نیروی گرانشی وارد بر ذره فقط ناشی از جرم $M_{\text{ins}}$ است که درون کره‌ای به شعاع $r$ قرار دارد. این جرم با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$M_{\text{ins}} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (۱۸-۱۳)$$

که $\rho$ چگالی کره است.

**انرژی پتانسیل گرانشی** انرژی پتانسیل گرانشی $U(r)$ دستگاهی شامل دو ذره با جرمهای $M$ و $m$ و فاصلهٔ جدایی $r$ برابر منفی کار انجام شده توسط نیروی گرانشی وارد از هر ذره بر ذره دیگر است، در صورتی که فاصلهٔ بین ذره‌ها از بینهایت (فاصله‌های دور) تا $r$ تغییر کند. این انرژی برابر است با

$$U = -\frac{GMm}{r} \qquad \text{(انرژی پتانسیل گرانشی)} \qquad (۲۱-۱۳)$$

**انرژی پتانسیل یک دستگاه** اگر دستگاهی شامل بیش از دو ذره باشد، انرژی پتانسیل گرانشی کل آن $U$ برابر است با مجموع انرژیهای پتانسیل مربوط به همهٔ جفت ذره‌ها. به طور مثال، برای سه ذره با جرمهای $m_1$ و $m_2$ و $m_3$ داریم

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right) \qquad (۲۲-۱۳)$$

**تندی فرار** یک شیء وقتی می‌تواند از تأثیر نیروی جاذبهٔ یک جسم نجومی به جرم $M$ و شعاع $R$ فرار کند (یعنی به فاصلهٔ بینهایت برسد) که تندی آن در نزدیکی سطح جسم، دست کم برابر تندی فرار داده شده با رابطهٔ زیر باشد

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (۲۸-۱۳)$$

**قانونهای کپلر** جاذبهٔ گرانشی باعث نگهداشتن اجزای منظومهٔ شمسی به یکدیگر می‌شود و امکان می‌دهد که ماهواره‌ها چه طبیعی و چه مصنوعی به دور زمین بگردند. چنین حرکتهایی بر اساس سه قانون کپلر برای حرکت سیاره‌ای رفتار می‌کنند، که تمام اینها نتیجه‌های مستقیمی از قانونهای حرکت و گرانش نیوتون هستند:

۱. ***قانون مدارها.*** همهٔ سیاره‌ها در مدارهای بیضی شکل حرکت می‌کنند که خورشید در یکی از کانونهای آن قرار دارد.

۲. ***قانون مساحتها.*** خط وصل کنندهٔ بین هر سیاره و خورشید در بازه‌های زمانی یکسان مساحتهای یکسانی را جارو می‌کند (این عبارت همان پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای را بیان می‌کند.)

۳. ***قانون دوره‌های تناوب.*** توان دوم دورهٔ تناوب $T$ هر سیاره به دور خورشید متناسب با توان سوم نیم قطر بزرگ مدار آن $a$ است. برای مدارهای دایره‌ای با شعاع $r$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \qquad \text{(قانون دوره‌های تناوب)} \qquad (۳۴-۱۳)$$

که $M$ جرم جسم جذب کننده است که در حالت منظومهٔ شمسی همان خورشید است. برای سیاره‌هایی که مدارهای بیضوی دارند به جای $r$ باید نیم قطر بزرگ $a$ قرار داده شود.

**انرژی در حرکت سیاره‌ای** وقتی سیاره یا ماهواره‌ای به جرم $m$ در مداری دایره‌ای به شعاع $r$ حرکت کند، انرژی پتانسیل $U$ و انرژی جنبشی $K$ با رابطه‌های زیر داده می‌شوند

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{و} \quad K = \frac{GMm}{2r} \qquad (۲۱-۱۳ \text{ و } ۳۸-۱۳)$$

در این‌صورت انرژی مکانیکی $E=K+U$ برابر است با

$$E = -\frac{GMm}{2r} \qquad (۴۰-۱۳)$$

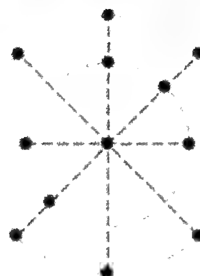
برای یک مدار بیضوی با نیم قطر بزرگ $a$، این انرژی برابر است با

$$E = -\frac{GMm}{2a} \qquad (۴۲-۱۳)$$

**دیدگاه اینشتین دربارهٔ گرانش** اینشتین نشان داد که گرانش و شتاب هم ارزند. این **اصل هم ارزی** باعث شد تا او به نظریهٔ گرانش (**نظریهٔ نسبیت عام**) برسد، نظریه‌ای که اثرهای گرانشی را بر حسب خمیدگی فضا توضیح می‌دهد.

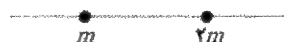
## پرسشها

۱- در شکل ۱۳-۲۲ یک ذرهٔ مرکزی با دو حلقهٔ دایره‌ای از ذره‌ها به شعاعهای $r$ و $R$ احاطه شده‌اند، $R>r$. جرم همهٔ ذره‌ها برابر $m$ است. بزرگی و جهت نیروی گرانشی خالص وارد بر ذرهٔ مرکزی ناشی از ذره‌های دیگر موجود در حلقه‌ها را به‌دست آورید.



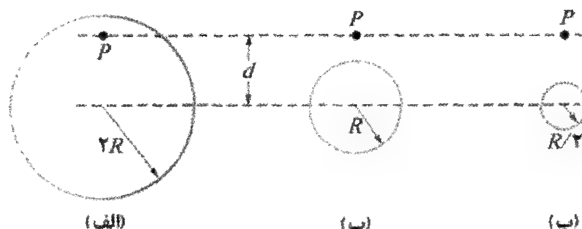
**شکل ۱۳-۲۲** پرسش ۱

۲- در شکل ۱۳-۲۳ دو ذره به جرمهای m و ۲m روی محوری قرار دارند. (الف) ذرهٔ سومی به جرم ۳m را در کجای محور باید قرار داد (غیر از بینهایت) به طوری که نیروی گرانشی خالص وارد بر آن از طرف دو ذره برابر صفر شود: در سمت چپ دو ذرهٔ اول، در سمت راست دو ذرهٔ اول، بین آنها، ولی در نزدیکی ذرهٔ سنگینتر یا بین آنها و نزدیک ذرهٔ سبکتر؟ (ب) اگر ذرهٔ سوم جرمی برابر ۱۶m داشته باشد، آیا پاسخ تغییر خواهد کرد؟ (ج) آیا در خارج محور (غیر از بینهایت) نقطه‌ای وجود دارد که در آن نیروی خالص وارد بر ذرهٔ سوم برابر صفر شود؟



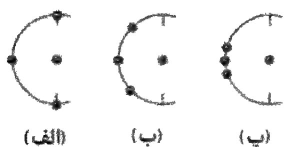

**شکل ۱۳-۲۳** پرسش ۲

۳- شکل ۱۳-۲۴ سه وضعیت را نشان می‌دهد که شامل یک ذرهٔ نقطه‌ای $P$ با جرم $m$ و یک پوستهٔ کروی است که جرم $M$ آن به طور یکنواخت توزیع شده است. شعاع پوسته‌ها داده شده است. وضعیتها را بر حسب بزرگی نیروی گرانشی وارد بر ذرهٔ $P$ از طرف پوسته‌ها مرتب کنید، بزرگترین را اول بنویسید.



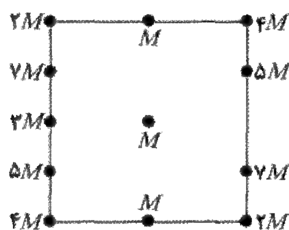

**شکل ۱۳-۲۴** پرسش ۳

۴- شکل ۱۳-۲۵ سه آرایش از ذره‌های مشابه را نشان می‌دهد که سه تای آنها روی دایره‌ای به شعاع ۰/۲۰ m و ذرهٔ چهارم در مرکز دایره قرار دارند. (الف) این آرایشها را بر حسب بزرگی نیروی گرانشی خالصی که بر ذرهٔ مرکزی از طرف سه ذرهٔ دیگر وارد می‌شود مرتب کنید. بزرگترین آنها را اول بنویسید. (ب) این ترتیب را بر حسب انرژی پتانسیل گرانشی یک دستگاه چهار ذره‌ای بنویسید. در اینجا کوچکترین منفی را آنها را در ابتدا بنویسید.



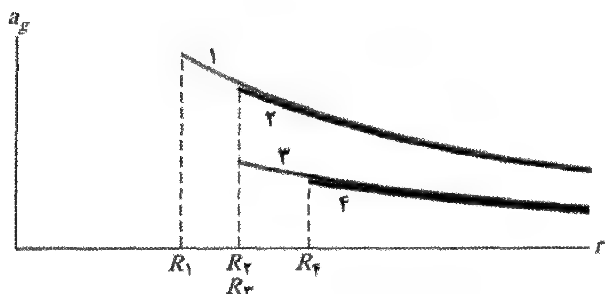

**شکل ۱۳-۲۵** پرسش ۴

۵- در شکل ۱۳-۲۶ یک ذرهٔ مرکزی به جرم $M$ با آرایشی مربعی از ذره‌های دیگر احاطه شده است. فاصلهٔ ذره‌های واقع روی محیط مربع برابر $d$ یا $\frac{d}{2}$ است. بزرگی و جهت نیروی گرانشی خالص وارد بر ذرهٔ مرکزی ناشی از ذره‌های دیگر چقدر است؟




**شکل ۱۳-۲۶** پرسش ۵

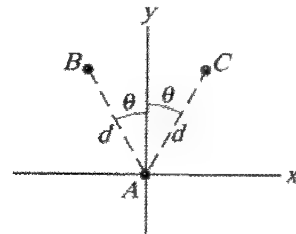
۶- شکل ۱۳-۲۷ شتاب گرانشی $a_g$ را برای چهار سیاره به صورت تابعی از فاصلهٔ شعاعی r از مرکز سیاره نشان می‌دهد، که از سطح هر سیاره (به شعاعهای $R_1$ ، $R_2$ ، $R_3$ و $R_4$) شروع می‌شوند. نمودار ۱ و ۲ به ازای $r \geq R_2$ و نمودار ۳ و ۴ به ازای $r \geq R_4$ روی هم منطبق می‌شوند. این چهار سیاره را برحسب (الف) جرم (ب) جرم واحد حجم از بزرگ به کوچک مرتب کنید.




**شکل ۱۳-۲۷** پرسش ۶

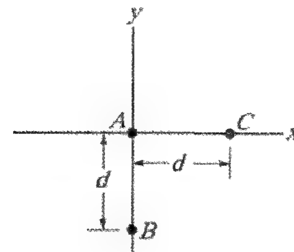
۷- شکل ۱۳-۲۸ سه ذره را نشان می‌دهد که در ابتدا در جای خود ساکن‌اند. ذره‌های $B$ و $C$ مشابه‌اند و به طور متقارن حول محور $y$ و در فاصلهٔ $d$ از ذرهٔ $A$ قرار دارند. (الف) نیروی

گرانشی خالص $\vec{F}_{net}$ وارد بر $A$ در چه جهتی است؟ (ب) اگر ذرهٔ $C$ را مستقیماً از مبدأ دور کنیم، آیا جهت $\vec{F}_{net}$ تغییر می‌کند؟ اگر چنین است چگونه و حد تغییر چقدر است؟




**شکل ۱۳-۲۸** پرسش ۷

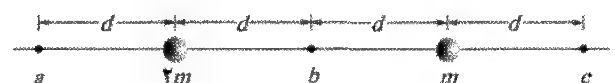
۸- در شکل ۱۳-۲۹ سه ذره در جای خود ثابت‌اند. جرم $B$ بزرگتر از جرم $C$ است. آیا یک ذرهٔ چهارم (ذرهٔ $D$) را می‌توان در جایی قرار داد که نیروی خالص گرانشی وارد بر ذرهٔ $A$ از طرف ذره‌های $B$، $C$ و $D$ برابر صفر شود؟ اگر چنین است در کدام ربع و نزدیک کدام محور باید قرار گیرد؟




**شکل ۱۳-۲۹** پرسش ۸

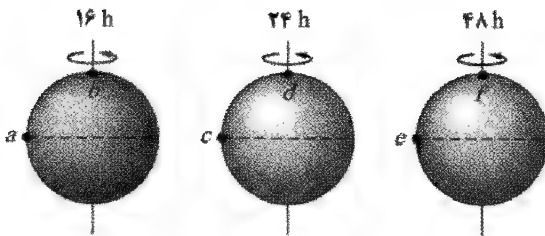
۹- چهار دستگاه ذره‌ها با جرم برابر در وارسی ۲ را برحسب قدر مطلق انرژی پتانسیل دستگاه از بزرگ به کوچک بنویسید.

۱۰- در شکل ۱۳-۳۰ ذره‌ای به جرم $m$ (که نشان داده نشده است) از فاصلهٔ بینهایت به یکی از سه مکان ممکن $a$ و $b$ و $c$ آورده می‌شود. دو ذره دیگر دارای جرم $m$ و $2m$ در مکان خود ثابت‌اند. سه مکان ممکن را برحسب کار انجام شده توسط نیروی گرانشی وارد بر ذرهٔ متحرک از طرف ذره‌های ممکن به ترتیب از بزرگ به کوچک مرتب کنید.



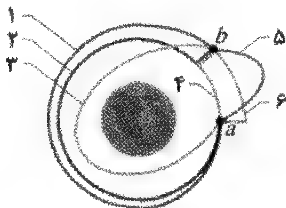

**شکل ۱۳-۳۰** پرسش ۱۰

۱۱- شکل ۱۳-۳۱ سه سیارهٔ کروی یکنواخت را نشان می‌دهد که اندازه و جرم یکسانی دارند. دورهٔ تناوب چرخش $T$ برای این سیاره‌ها داده شده و ۶ نقطه با حروف مشخص شده‌اند. سه نقطه روی استوای سیاره‌ها و سه نقطه روی قطب شمال قرار دارند. این نقطه‌ها را بر حسب شتاب سقوط آزاد $g$ در آنها به ترتیب از بزرگ به کوچک مرتب کنید.




**شکل ۱۳-۳۱** پرسش ۱۱

۱۲- شکل ۱۳-۳۲ شش مسیر را نشان می‌دهد که یک موشک باید آنها را در طی حرکت به دور ماه از نقطهٔ $a$ تا نقطهٔ $b$ بپیماید. این مسیرها را با توجه به (الف) تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه موشک- ماه و (ب) کار خالص انجام شده روی موشک توسط نیروی گرانشی ناشی از ماه، از بزرگ به کوچک مرتب کنید.




**شکل ۱۳-۳۲** پرسش ۱۲

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
•-•••: تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

### بخش ۱۳-۲ قانون گرانش نیوتون

•۱- فاصلهٔ بین یک ذرهٔ ۵/۲kg و یک ذرهٔ ۲/۴kg باید چقدر باشد تا نیروی جاذبهٔ گرانشی میان آنها $2/3 \times 10^{-12}$ N شود؟ **SSM**

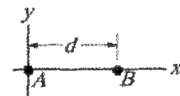
•۲- خورشید و زمین هر کدام یک نیروی گرانشی به ماه وارد می‌کنند. نسبت $F_{\text{خورشید}}/F_{\text{زمین}}$ این دو نیرو را به‌دست آورید. (فاصلهٔ متوسط خورشید- ماه را برابر فاصلهٔ خورشید- زمین در نظر بگیرید.)

•۳- جرم $M$، به دو قسمت $m$ و $M$-$m$ تقسیم می‌شود که این دو قسمت در یک فاصلهٔ معین از هم قرار می‌گیرند. به ازای چه نسبتی از $m/M$ بزرگی نیروی گرانشی میان دو قسمت بیشینه است؟ **ILW**

●۴- *اثر ماه.* برخی از مردم اعتقاد دارند که ماه فعالیتهای آنها را کنترل می‌کند. اگر ماه از مقابل شما در طرف دیگر زمین تا مستقیماً به بالای سر حرکت کند، چند درصد (الف) کشش گرانش ماه روی شما افزایش می‌یابد و (ب) وزن شما (روی ترازو) کاهش می‌یابد؟ فرض کنید که فاصلهٔ زمین- ماه (مرکز تا مرکز) $3/82\times10^{8}$ m و شعاع زمین $6/37\times10^{6}$ m است.

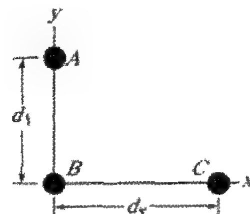
**بخش ۱۳-۳ گرانش و اصل برهم نهی**

●۵- *یک بعدی.* در شکل ۱۳-۳۳ دو ذرهٔ نقطه‌ای روی محور $x$ به فاصلهٔ $d$ از هم قرار دارند. جرم ذرهٔ $A$ برابر $m_A$ و جرم ذرهٔ $B$ برابر $3/00 m_A$ است. ذرهٔ سوم $C$ به جرم $75/0 m_A$ را روی محور $x$ و در نزدیکی ذرهٔ $A$ و $B$ قرار می‌دهیم. بر حسب فاصلهٔ $d$، در چه مختصهٔ $x$ باید ذرهٔ $C$ را قرار دهیم تا نیروی گرانشی وارد بر ذرهٔ $A$ از طرف ذرهٔ $B$ و ذرهٔ $C$ برابر صفر شود؟




**شکل ۱۳-۳۳** مسئلهٔ ۵

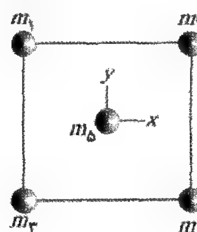
●۶- در شکل ۱۳-۳۴ سه کرهٔ ۵/۰۰ کیلوگرمی به فاصلهٔ $d_1=0/300$m و $d_2=0/400$m قرار دارند. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور $x$ها) نیروی گرانشی خالص بر کرهٔ $B$ از طرف کره‌های $A$ و $C$ چیست؟




**شکل ۱۳-۳۴** مسئلهٔ ۶

●۷- یک کاوشگر فضایی در چه فاصله‌ای از زمین در راستای خطی به طرف خورشید باید قرار گیرد تا گرانش خورشید که آن را می‌کشد با کشش زمین برابر شود؟ SSM WWW

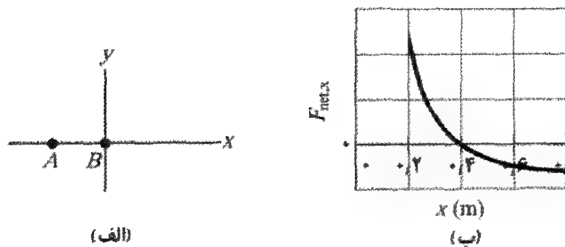
●۸- در شکل ۱۳-۳۵ چهار کره به جرمهای $m_1=5/00$g، $m_2=3/00$g، $m_3=1/00$g و $m_4=5/00$g در گوشه‌هایی مربعی به ضلع ۲۰/۰cm قرار دارند. نیروی گرانشی خالصی را که از آنها بر کرهٔ مرکزی به جرم $m_5=2/5$g وارد می‌شود برحسب بردارهای یکه به دست آورید.




**شکل ۱۳-۳۵** مسئلهٔ ۸

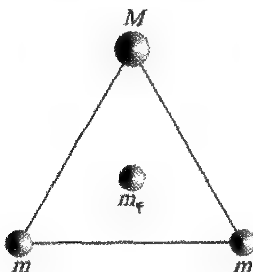
●۹- ***سیاهچالهٔ مینیاتوری.*** پس از مهبانگ و آغاز جهان، سیاهچاله‌های کوچک هنوز در سراسر جهان سرگردانند. اگر یکی از آنها با جرم $1\times10^{11}$ kg (و شعاع فقط $1\times10^{-16}$ m) به زمین نزدیک شود، در چه فاصله‌ای از سر شما کشش گرانشی وارد بر شما از طرف آن برابر با مقدار مربوط از طرف زمین می‌شود؟

●●۱۰- در شکل ۱۳-۳۶ الف، ذرهٔ $A$ در مکانی با $x=-2/0$ m روی محور $x$ و ذرهٔ $B$ به جرم ۱/۰kg در مبدأ قرار دارد. ذرهٔ $C$ (که نشان داده نشده) می‌تواند در طول محور $x$ بین ذرهٔ $B$ و $x=\infty$ حرکت کند. شکل ۱۳-۳۶ ب مؤلفهٔ $x$ نیروی گرانشی خالص وارد بر ذرهٔ $B$ از طرف ذره‌های $A$ و $C$ یعنی $F_{net,x}$ را بر حسب تابعی از مکان $x$ ذره نشان می‌دهد. این نمودار وقتی $x\to\infty$، در واقع به شکل مجانب به مقدار $-4/17\times10^{-10}$N و به طرف راست امتداد می‌یابد. جرم (الف) ذرهٔ $A$ و (ب) ذرهٔ $C$ چقدر است؟




**شکل ۱۳-۳۶** مسئلهٔ ۱۰

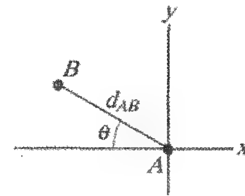
●●۱۱- به طوری که در شکل ۱۳-۳۷ می‌بینیم دو کره به جرمهای $m$ و کرهٔ سومی به جرم $M$ یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل داده‌اند و کرهٔ چهارم به جرم $m_4$ در مرکز این مثلث قرار دارد. نیروی خالص گرانشی وارد بر کرهٔ مرکزی برابر صفر است. (الف) $M$ را برحسب $m$ به دست آورید. (ب) اگر جرم $m_4$ را دو برابر کنیم، بزرگی نیروی گرانشی خالص وارد بر کرهٔ مرکزی چقدر خواهد شد؟




**شکل ۱۳-۳۷** مسئلهٔ ۱۱

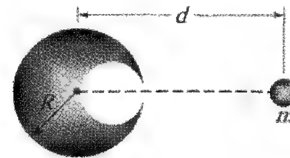
●●۱۲- سه ذرهٔ نقطه‌ای در مکانی در صفحهٔ $xy$ قرار دارند. دوتای آنها، ذرهٔ $A$ به جرم ۶/۰۰g و ذرهٔ $B$ به جرم ۱۲/۰g در شکل ۱۳-۳۸ با فاصلهٔ $d_{AB}=0/500$m و زاویهٔ $\theta=30°$ نشان داده شده‌اند. ذرهٔ $C$ که جرم آن ۸/۰۰g است نشان داده نشده است. نیروی گرانشی خالص وارد بر ذرهٔ $A$ از طرف

ذره‌های $B$ و $C$ برابر $۲/۷۷\times۱۰^{-۱۴}\text{N}$ و در زاویهٔ $-۱۶۳/۸^\circ$ نسبت به جهت مثبت محور $x$ قرار دارد. مختصات (الف) $x$ و (ب) $y$ ذرهٔ $C$ را به‌دست آورید.



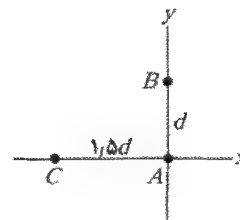

شکل ۱۳-۳۸ مسئلهٔ ۱۲

●●۱۳- شکل ۱۳-۳۹ حفره‌ای کروی را درون کره‌ای از سرب به شعاع $R=۴/۰۰\text{cm}$ نشان می‌دهد؛ سطح حفره از مرکز کره می‌گذرد و سمت راست آن با کره در تماس است. جرم کره پیش از ایجاد حفره $M=۲/۹۵\text{kg}$ بوده است. این کرهٔ سربی حفره‌دار با چه نیروی گرانشی می‌تواند کرهٔ کوچکی به جرم $m=۰/۴۳۱\text{kg}$ را که در فاصلهٔ $d=۹/۰۰\text{cm}$ از مرکز آن روی خط واصل مرکزهای کره‌ها و حفره قرار دارد جذب کند؟




شکل ۱۳-۳۹ مسئلهٔ ۱۳

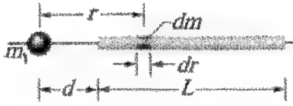
●●۱۴- *حالت دو بعدی.* در شکل ۱۳-۴۰ سه ذرهٔ نقطه‌ای در مکان خود در صفحهٔ $xy$ قرار دارند. جرم ذرهٔ $A$ برابر $m_A$ و جرم ذرهٔ $B$ برابر $۲/۰۰m_A$ و جرم ذرهٔ $C$ برابر $۳/۰۰m_A$ است. ذرهٔ چهارم $D$ با جرم $۴/۰۰m_A$ را در نزدیکی سه ذرهٔ دیگر قرار می‌دهیم. تعیین کنید که برحسب فاصلهٔ $d$ (الف) در چه مختصه‌ای از $x$ و (ب) در چه مختصه‌ای از $y$ باید ذرهٔ $D$ را قرار داد تا نیروی گرانشی خالص وارد بر ذرهٔ $A$ از طرف ذره‌های $B$، $C$ و $D$ برابر صفر شود؟




شکل ۱۳-۴۰ مسئلهٔ ۱۴

●●●۱۵- *حالت سه بعدی.* سه ذرهٔ نقطه‌ای در مکان خود در دستگاه مختصات $xyz$ قرار دارند. ذرهٔ $A$ که در مبدأ قرار دارد دارای جرم $m_A$ است. ذرهٔ $B$ به مختصات $xyz$ $(۲/۰۰d, ۱/۰۰d, ۲/۰۰d)$ دارای جرم $۲/۰۰m_A$ و ذرهٔ $C$ به مختصات $(-۱/۰۰d, ۲/۰۰d, -۳/۰۰d)$ دارای جرم $۳/۰۰m_A$ است. ذرهٔ چهارم $D$ با جرم $۴/۰۰m_A$ را در نزدیکی این ذره‌ها قرار می‌دهیم. تعیین کنید که بر حسب $d$ در چه مختصهٔ (الف) $x$، (ب) $y$ و (پ) $z$، ذرهٔ $D$ را باید قرار داد تا نیروی گرانشی خالص وارد بر ذرهٔ $A$ از طرف $B$، $C$ و $D$ برابر صفر شود؟

●●●۱۶- در شکل ۱۳-۴۱، ذره‌ای به جرم $m_1=۰/۶۷\text{kg}$ در فاصلهٔ $d=۲۳\text{cm}$ از یک طرف میله یکنواختی به طول $L=۳/۰\text{m}$ و جرم $M=۵/۰\text{kg}$ قرار دارد. بزرگی نیروی گرانشی $\vec{F}$ وارد بر ذره از طرف میله چقدر است؟




شکل ۱۳-۴۱ مسئلهٔ ۱۶

## بخش ۱۳-۴ گرانش در نزدیکی سطح زمین

●۱۷- در چه ارتفاعی بالای سطح زمین شتاب گرانشی برابر $۴/۹\text{m/s}^۲$ است؟ SSM

●۱۸- *ساختمان بلند مایلی.* در سال ۱۹۵۶/۱۳۳۵ فرانک لوید رایت[1] ساخت یک ساختمان به ارتفاع یک مایل را در شیکاگو پیشنهاد کرد. فرض کنید چنین ساختمانی ساخته شود. با چشم‌پوشی از چرخش زمین تغییر وزن خودتان که $۶۰۰\text{N}$ است را در صورتی که از سطح خیابان سوار بالابر شوید و به بام ساختمان بروید، حساب کنید.

●۱۹- (الف) اگر وزن جسمی روی سطح زمین $۱۰۰\text{N}$ باشد، وزن آن در سطح کرهٔ ماه چقدر خواهد بود؟ (ب) این جسم را در چند برابر شعاع زمین نسبت به مرکز زمین باید قرار دهیم تا وزن آن برابر همان مقدار وزن در کرهٔ ماه باشد؟

●۲۰- *کشش کوهها.* یک کوه بزرگ می‌تواند بر جهت «رو به پایین» امتداد شاقولی اندکی تأثیر گذارند. فرض کنید کوهی را به صورت کره‌ای به شعاع $R=۲/۰۰\text{km}$ و چگالی (جرم بر یکای حجم) $۲/۶\times۱۰^۳\ \text{kg/m}^۳$ مدل‌سازی کنیم. همچنین فرض کنید که شاقولی به طول $۰/۵۰\text{m}$ را در فاصلهٔ $۳R$ از مرکز کره آویزان کنیم و به گونه‌ای باشد که کره به طور افقی انتهای پایینی را بکشد. انتهای پایینی چقدر به طرف کره حرکت می‌کند؟

●●۲۱- یک مدل برای نوعی سیاره دارای هسته‌ای به شعاع $R$ و جرم $M$ است که اطراف آن با پوسته‌ای به شعاع داخلی $R$ و خارجی $۲R$ و جرم $۴M$ محصور شده است. اگر $M=۴/۱\times۱۰^{۲۴}\text{kg}$ و $R=۶/۰\times۱۰^۶\ \text{m}$ باشد، شتاب گرانشی یک ذره را در نقطه‌های (الف) $R$ و (ب) $۳R$ از مرکز سیاره به دست آورید.

●●۲۲- شعاع $R_h$ و جرم $M_h$ یک سیاهچاله با رابطهٔ $R_h=۲GM_h/c^۲$ به هم مربوط‌اند که در آن $c$ سرعت نور است. با فرض اینکه شتاب گرانشی $a_g$ یک جسم در فاصلهٔ

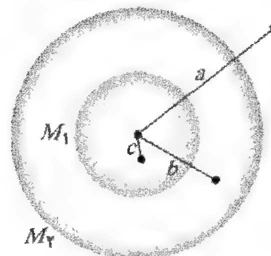
1. Frank Loyd Wright

$r_\circ = 1/001 R_h$ از مرکز یک سیاهچاله با رابطهٔ ۱۳-۱۱ داده شود (این معادله برای سیاهچاله‌های بزرگ است)، (الف) $a_g$ را در $r_\circ$ برحسب $M_h$ به دست آورید. (ب) آیا $a_g$ در $r_\circ$ با افزایش $M_h$ افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (پ) $a_g$ در $r_\circ$ برای یک سیاهچالهٔ بسیار بزرگ که جرمش $1/55\times10^{12}$ برابر جرم خورشیدی $1/99\times10^{30}$ kg است چقدر است؟ (ت) اگر فضانورد مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳-۳ در فاصلهٔ $r_\circ$ قرار گیرد به طوری که پاهایش به طرف سیاهچاله باشد، اختلاف شتاب گرانشی بین سر و پاهای او چقدر است؟ (ث) آیا تمایل به کشیدگی در فضانورد جدی است؟

•••۲۳- عقیده بر این است که ستاره‌های نوترونی معین (ستاره‌هایی با چگالی فوق العاده زیاد) حدود 1rev/s می‌چرخند. اگر شعاع چنین ستاره‌ای ۲۰ km باشد، کمینهٔ جرم آن برای اینکه مواد روی سطح آن در طی این چرخش سریع در جای خود باقی بمانند چقدر است؟ **ILW**

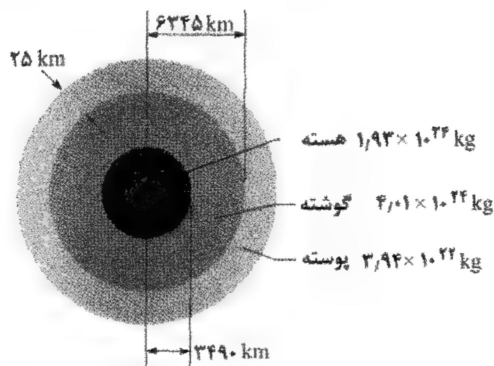
### بخش ۱۳-۵ گرانش داخل زمین

•۲۴- دو پوستهٔ کروی هم مرکز با جرمهای $M_1$ و $M_2$ را که به طور یکنواخت توزیع شده‌اند در شکل ۱۳-۴۲ نشان داده‌ایم. بزرگی نیروی گرانشی خالص وارد بر ذره‌ای به جرم $m$ ناشی از پوسته‌ها را، وقتی ذره به فاصلهٔ شعاعی (الف) $a$ (ب) $b$ و (ج) $c$ قرار گیرد به دست آورید.




**شکل ۱۳-۴۲** مسئلهٔ ۲۴

••۲۵- شکل ۱۳-۴۳ سطح مقطعی از درون کرهٔ زمین را نشان می‌دهد که در آن مقیاسها رعایت نشده‌اند. زمین به جای آنکه ساختاری یکنواخت داشته باشد به سه منطقهٔ *پوستهٔ خارجی*، *گوشته*، و *هستهٔ داخلی* تقسیم شده است. ابعاد و جرم این منطقه‌ها در شکل نشان داده شده است. زمین دارای جرم کل $5/98\times10^{24}$kg و شعاع ۶۳۷۰km است. از چرخش زمین صرفنظر کنید و زمین را کروی در نظر بگیرید. (الف) $a_g$ را در سطح زمین به دست آورید. (ب) چاه گمانه‌ای را در نظر بگیرید که از سطح زمین تا مرز پوسته- گوشته به عمق ۲۵ km حفر شده است. مقدار $a_g$ را در ته این چاه به دست آورید. (پ) فرض کنید زمین یک کرهٔ یکنواخت با همین جرم و اندازه باشد، در این صورت مقدار $a_g$ در عمق ۲۵/۰km چقدر است؟ (اندازه‌گیریهای دقیق $a_g$ با کاوه‌های حساسی از ساختار داخلی زمین صورت می‌گیرد، اگر چه تغییرات چگالی محلی ممکن است بر نتیجه‌های به دست آمده اثر بگذارند.)




**شکل ۱۳-۴۳** مسئلهٔ ۲۵

••۲۶- فرض کنید سیاره‌ای به صورت یک کرهٔ یکنواخت به شعاع $R$ داریم که (به نوعی) دارای یک تونل شعاعی باریک است که از مرکز آن می‌گذرد، (شکل ۱۳-۸). همچنین فرض کنید می‌توان سیبی را در راستای تونل یا خارج از کره قرار داد. اگر $F_R$ بزرگی نیروی گرانشی وارد بر سیب وقتی آن را در سطح سیاره قرار می‌دهیم باشد، در چه فاصله‌ای از سطح سیاره بزرگی نیروی گرانشی وارد بر سیب برابر $\frac{1}{2}F_R$ است، در صورتی که (الف) سیب را از سیاره دور کنیم، (ب) سیب را به داخل تونل ببریم؟

••۲۷- کرهٔ توپری به جرم $1/0\times10^4$ kg و شعاع ۱/۰m در دست است. بزرگی نیروی گرانشی وارد به ذره‌ای به جرم $m$ از طرف کره که در فاصلهٔ (الف) ۱/۵m (ب) ۰/۵m از مرکز کره قرار دارد، چقدر است؟ (پ) عبارتی کلی برای بزرگی نیروی گرانشی وارد بر ذره در فاصلهٔ $r \le 1/0$ m از مرکز کره بنویسید.

••۲۸- یک تپ اختر، ستارهٔ رومبیده‌ای با چگالی خیلی زیاد با جرم $M$ برابر خورشید ($1/98\times10^{30}$ kg) به شعاع $R$ فقط ۱۲km ، و دورهٔ تناوب چرخشی $T$ برابر با ۰/۰۴۱s را در نظر بگیرید. چند درصد، شتاب سقوط آزاد $g$ با شتاب گرانشی $a_g$ در استوای این ستاره کره‌ای شکل فرق می‌کند؟

### بخش ۱۳-۶ انرژی پتانسیل گرانشی

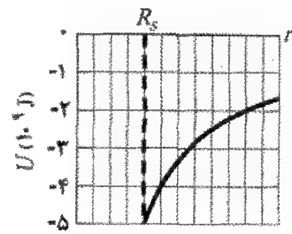
•۲۹- میانگین قطر مریخ و زمین به ترتیب برابر $6/9\times10^3$ km و $1/3\times10^4$ km است. جرم مریخ ۰/۱۱ برابر جرم زمین است. (الف) نسبت چگالی میانگین (جرم واحد حجم) مریخ نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) مقدار شتاب گرانشی روی مریخ چقدر است؟ (پ) تندی فرار در مریخ چقدر است؟ **SSM**

•۳۰- (الف) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه دو ذره‌ای مسئلهٔ ۱ را به دست آورید. اگر فاصله بین دو ذره را سه برابر کنیم چه مقدار کار (الف) توسط نیروی گرانشی بین ذره‌ها و (ب) توسط ما انجام می‌گیرد؟

•۳۱- انرژی لازم برای فرار از (الف) ماه و (ب) مشتری چند برابر انرژی لازم برای فرار از زمین است؟

•۳۲- شکل ۱۳-۴۴ تابع انرژی پتانسیل $U(r)$ پرتابه‌ای را به دست می‌دهد که به طرف خارج سطح یک سیاره به شعاع $R_s$ رسم شده است. اگر پرتابه به طور شعاعی از سطح به طرف بالا

با انرژی مکانیکی $-2/0\times10^{9}$ J پرتاب شود، (الف) انرژی جنبشی در شعاع $r=1/25R_s$ و (ب) *نقطهٔ بازگشت* (بخش ۸-۶ را ببینید) را برحسب $R_s$ به دست آورید.

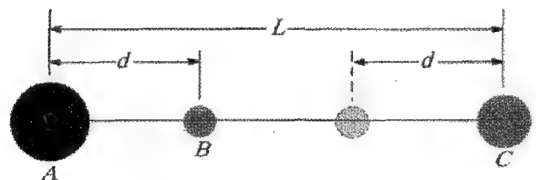



**شکل ۱۳-۴۴** مسائل ۳۲ و ۳۳

•۳۳- شکل ۱۳-۴۴ تابع انرژی پتانسیل $U(r)$ پرتابه‌ای را به طرف خارج سطح سیاره‌ای به شعاع $R_s$ نشان می‌دهد. کمترین انرژی جنبشی لازم برای پرتاب از سطح برای «فرار» پرتابه از سیاره چقدر است؟

•۳۴- در مسئلهٔ ۳ نسبت $m/M$ باید چقدر باشد تا انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه کمینه شود؟

••۳۵- مرکزهای سه کره در شکل ۱۳-۴۵ با جرمهای $m_A=80$ g و $m_B=10$ g و $m_C=20$ g روی یک خط راست قرار دارند و $L=12$ cm و $d=4/0$ cm است. اگر کرهٔ $B$ را در طول این خط آنقدر حرکت دهید تا فاصلهٔ مرکز آن از مرکز C برابر $d=4/0$ cm شود، چه مقدار کار روی $B$ (الف) توسط شما و (ب) توسط نیروی گرانشی خالص وارد بر $B$ بر اثر کره‌های $A$ و $C$ انجام می‌شود؟ GO




**شکل ۱۳-۴۵** مسئلهٔ ۳۵

••۳۶- پرتابه‌ای را به طور مستقیم از سطح زمین پرتاب می‌کنیم. از چرخش زمین صرفنظر کنید. چه مضربی از شعاع زمین $R_E$، فاصلهٔ شعاعی که پرتابه به آن می‌رسد را به دست می‌دهد، در صورتی که (الف) تندی اولیهٔ آن ۰/۵۰۰ برابر تندی فرار از زمین و (پ) انرژی جنبشی اولیه ۰/۵۰۰ برابر انرژی جنبشی لازم برای فرار از زمین باشد؟ (پ) کمترین انرژی مکانیکی اولیهٔ لازم در پرتاب باید چقدر باشد تا پرتابه از زمین فرار کند؟

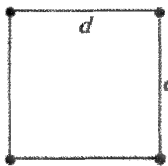
••۳۷- (الف) تندی فرار یک سیارک کروی به شعاع 500km که شتاب گرانشی آن در سطح برابر $3/0\,m/s^2$ است چقدر است؟ (ب) اگر ذره‌ای با تندی شعاعی 1000m/s سیاره را ترک کند تا چه مسافتی از سطح آن می‌تواند دور شود؟ (پ) اگر جسمی از ارتفاع 1000km بالای سطح به پایین بیفتد با چه سرعتی به سیاره برخورد می‌کند؟ SSM

••۳۸- زیرو یک سیارهٔ فرضی است که دارای جرم $5/0\times10^{23}$ kg، شعاع $3/0\times10^{6}$ m و بدون جو است. یک کاوشگر فضایی 10kg را به طور عمودی از سطح آن پرتاب می‌کنیم. (الف) اگر این کاوشگر با انرژی اولیهٔ $5/0\times10^{7}$ J پرتاب شود، انرژی جنبشی آن وقتی به فاصلهٔ $4/0\times10^{7}$ J از مرکز سیارهٔ زیرو می‌رسد چقدر است؟ (ب) اگر کاوشگر به بیشینهٔ فاصلهٔ $8/0\times10^{6}$ m از مرکز سیاره برسد، با چه انرژی جنبشی اولیه باید از سطح آن پرتاب شده باشد؟

••۳۹- دو ستارهٔ نوترونی به فاصلهٔ $1/0\times10^{10}$ m از یکدیگر قرار دارند. جرم هر یک از آنها برابر $1/0\times10^{30}$ kg و شعاع آنها برابر $1/0\times10^{5}$ m است. این دو ستاره در ابتدا نسبت به هم ساکن هستند. آنها نسبت به یک چارچوب ساکن با چه سرعتی در حال حرکت‌اند، وقتی (الف) فاصلهٔ آنها به نصف مقدار اولیه برسد و (ب) تقریباً با هم برخورد کنند؟ SSM

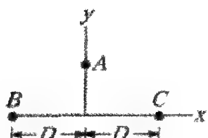
••۴۰- در عمق فضا، کرهٔ $A$ به جرم 20kg در مبداء محور $x$ و کرهٔ $B$ به جرم 10kg روی محور $x$ در $x=0/80$m قرار دارند. کرهٔ $B$ را از حالت سکون رها می‌کنیم در حالی که کرهٔ $A$ در مبدأ قرار دارد. (الف) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه شامل دو کره را دقیقاً وقتی کرهٔ $B$ رها می‌شود به دست آورید. (ب) انرژی جنبشی $B$ وقتی به اندازهٔ 0/20m به طرف $A$ حرکت کند چقدر است؟

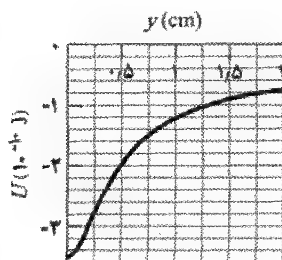
••۴۱- شکل ۱۳-۴۶ چهار ذره را نشان می‌دهد که جرم هریک 20/0g است و تشکیل مربعی به ضلع $d=0/600$m را داده‌اند. اگر $d$ را به 0/200m کاهش دهیم، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی این دستگاه چهار ذره‌ای را به دست آورید. GO




**شکل ۱۳-۴۶** مسئلهٔ ۴۱

••۴۲- شکل ۱۳-۴۷ الف ذرهٔ $A$ را نشان می‌دهد که می‌تواند در طول محور $y$ از فاصلهٔ بینهایت تا مبدأ حرکت کند. این مبدأ در وسط ذره‌های $B$ و $C$ قرار دارد که دارای جرمهای یکسان هستند و محور $y$ عمود منصف آنهاست. فاصلهٔ $D$ برابر 0/3057m است. شکل ۱۳-۴۷ ب انرژی پتانسیل $U$ این دستگاه سه ذره‌ای را به صورت تابعی از مکان ذرهٔ $A$ در طول محور $y$ نشان می‌دهد. این منحنی در واقع به سمت راست به‌صورت مجانب ادامه می‌یابد و در $y\to\infty$ به مقدار $-2/7\times10^{-11}$ J می‌رسد. (الف) جرم ذره‌های $B$ و $C$ و (ب) جرم ذرهٔ $A$ را به دست آورید.




**شکل ۱۳-۴۷** مسئلهٔ ۴۲

## بخش ۱۳-۱۷ سیاره‌ها و ماهواره‌ها: قانونهای کپلر

•۴۳- ماهوارهٔ مریخی فوبوس[1] در مداری تقریباً دایره‌ای به شعاع $۹/۴\times ۱۰^۶$m با دورهٔ تناوب ۷ ساعت و ۳۹ دقیقه حرکت می‌کند. جرم مریخ را با استفاده از این اطلاعات به دست آورید.

•۴۴- نخستین برخورد شناخته شده بین جرمهای فضایی و یک ماهوارهٔ در حال کار در سال ۱۹۹۶/۱۳۷۵ رخ داد. در ارتفاع ۷۰۰km یک ماهوارهٔ جاسوسی فرانسوی یک ساله با قطعه‌ای از موشک آریان که به مدت ۱۰ سال در مدار زمین بود برخورد کرد. بازوی پایدار کنندهٔ ماهواره از بین رفت و ماهواره از کنترل خارج شد. درست قبل از برخورد و بر حسب کیلومتر بر ساعت، تندی قطعهٔ موشک را نسبت به ماهواره به دست آورید، در صورتی که هر دو در مدارهای دایره‌ای بوده باشند و در صورتی که (الف) برخورد رودررو باشد و (ب) برخورد در مسیرهایی عمود بر هم رخ دهد.

•۴۵- خورشید که به فاصلهٔ $۲/۲\times ۱۰^{۲۰}$m از مرکز کهکشان راه شیری قرار دارد؛ در هر $۲/۵\times ۱۰^۸$ سال یک بار به دور آن می‌چرخد. با فرض این که هر ستارهٔ کهکشان راه شیری دارای جرمی برابر جرم خورشید به اندازهٔ $۲/۰\times ۱۰^{۳۰}$kg باشد و ستاره‌ها به طور یکنواخت در کره‌ای در اطراف مرکز کهکشان توزیع شده باشند و خورشید در لبهٔ این کره باشد، تعداد ستاره‌های درون این کهکشان را تخمین بزنید. **SSM WWW**

•۴۶- فاصلهٔ میانگین مریخ از خورشید ۱/۵۲ برابر زمین تا خورشید است. با استفاده از قانون دورهٔ تناوبهای کپلر محاسبه کنید که چند سال لازم است تا مریخ یک دور به دور خورشید بچرخد؛ جواب خود را با مقداری که در پیوست پ آمده است مقایسه کنید.

•۴۷- ماهواره‌ای که در مداری بیضوی حرکت می‌کند در ۳۶۰ کیلومتری بالای سطح زمین در دورترین نقطهٔ خود و در ۱۸۰ کیلومتری بالای آن در نزدیکترین نقطه قرار می‌گیرد. مطلوب است محاسبهٔ (الف) نیم قطر بزرگ و (ب) خروج از مرکز مدار. **SSM**

•۴۸- ماهواره‌ای در مداری دایره‌ای به دور زمین قرار دارد که شعاع آن نصف شعاع مدار ماه است. دوره تناوب گردش آن برحسب ماه قمری چقدر است؟ (یک ماه قمری برابر دورهٔ تناوب گردش ماه است)

•۴۹- (الف) یک ماهوارهٔ زمین باید چه سرعت خطی داشته باشد تا در مداری دایره‌ای در ارتفاع ۱۶۰km در بالای سطح زمین واقع باشد؟ (ب) دوره تناوب گردش چقدر است؟

•۵۰- مرکز خورشید در یکی از کانونهای مدار زمین قرار دارد. فاصلهٔ بین دو کانون (الف) بر حسب متر و (ب) بر حسب شعاع خورشید برابر $۶/۹۶\times ۱۰^۸$ m چقدر است؟ خروج از مرکز مدار زمین برابر ۰/۰۱۶۷ و نیم قطر بزرگ آن برابر $۱/۵۰\times ۱۰^{۱۱}$m است.

•۵۱- یک ستارهٔ دنباله‌دار که در آوریل سال ۵۷۴ توسط ستاره‌شناسان چینی در روزی که آن را روز وو- وو می‌نامند دیده شده بود و بار دیگر در ماه مه ۱۹۹۴ مشاهده شد. فرض کنید که این زمان بین مشاهده‌ها برابر دورهٔ تناوب آن ستاره دنباله‌دار باشد، و خروج از مرکز آن را ۰/۱۱ فرض کنید. (الف) نیم قطر بزرگ مدار دنباله‌دار و (ب) بیشترین فاصلهٔ آن از خورشید برحسب شعاع مداری میانگین $R_P$ پلوتو چقدر است؟

•۵۲- ماهواره‌ای درست در بالای نقطهٔ معینی از استوای زمین همراه با زمین (در حال چرخش) گردش می‌کند. ارتفاع مدار ماهواره (به نام *مدار همزمان با زمین*) از سطح زمین چقدر است؟

••۵۳- در سال ۱۶۱۰/۹۸۹ گالیله با استفاده از تلسکوپ توانست چهار قمر مهم را در اطراف مشتری کشف کند. شعاعهای مدار میانگین آنها $a$ و دورهٔ تناوبهای آنها $T$ به این صورت‌اند:

| نام | $a(10^8$ m) | $T$ (روز) |
|---|---|---|
| آیو | ۴/۲۲ | ۱/۷۷ |
| اروپا | ۶/۷۱ | ۳/۵۵ |
| گانیمد | ۱۰/۱ | ۷/۱۶ |
| کالیستو | ۱۸/۸ | ۱۶/۷ |

(الف) Log $a$ را (روی محور $y$) بر حسب Log $T$ (روی محور $x$) رسم کنید و نشان دهید که یک خط راست به دست می‌آید. (ب) شیب خط را اندازه بگیرید و آن را با مقداری که از قانون سوم کپلر به دست می‌آید مقایسه کنید. (ج) جرم مشتری را از محل تقاطع این خط با محور $y$ها به دست آورید.

••۵۴- در سال ۱۹۹۳/۱۳۷۲ سفینهٔ فضایی *گالیله* تصویری (شکل ۱۳-۴۸) از سیارک آیدا ۲۴۳ و قمر کوچکی که آن را دور می‌زند (و امروزه آن را داکتیل[2] می‌نامند) فرستاد که نخستین نمونهٔ تأیید شده از یک منظومهٔ سیارک- قمر است. در تصویر، قمر آن که دارای پهنای ۱/۵km است در فاصلهٔ ۱۰۰km از مرکز سیارک قرار دارد. درازای سیارک ۵۵km است. شکل مدار این قمر دقیقاً مشخص نیست، با فرض اینکه مدار دایره‌ای با دورهٔ تناوب ۲۷ ساعت باشد (الف) جرم سیارک چقدر است؟ (ب) حجم سیارک که از تصویرهای سفینهٔ *گالیله* اندازه گرفته می‌شود برابر $۱۴۱۰۰$km$^۳$ است. چگالی (جرم واحد حجم) سیارک را به دست آورید.

1. Phobos

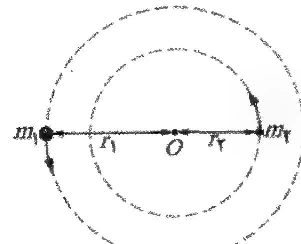
2. Dactyle



**شکل ۱۳–۴۸** مسئلهٔ ۵۴، قمر کوچکی (در سمت راست) به دور سیارک آیدا ۲۴۳ می‌گردد.

••۵۵– در یک سامانهٔ دو ستاره‌ای معین، هر ستاره جرمی برابر جرم خورشید دارد و آنها حول مرکز جرم دستگاه می‌گردند. فاصلهٔ بین آنها برابر فاصلهٔ بین زمین و خورشید است. دورهٔ تناوب گردش را بر حسب سال به دست آورید. ILW

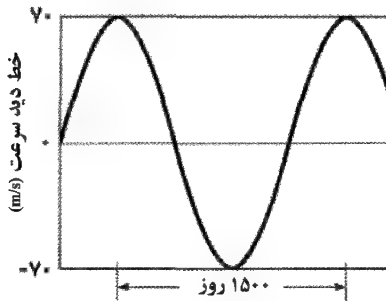
••۵۶– جستجوی یک *سیاهچاله*. مشاهده‌های نور از یک ستاره معین نشان می‌دهد که آن بخشی از یک سامانهٔ دو ستاره‌ای است. این ستاره مرئی دارای سرعت مداری $v = ۲۷۰\,km/s$ ، دورهٔ تناوب مداری، روز $T = ۰/۷$ و جرم تقریبی $m_۱ = ۶M_s$ است که $M_s$ جرم خورشید برابر با $۱/۹ \times ۱۰^{۳۰}\,kg$ است. فرض کنید که ستاره مرئی و ستارهٔ همراه آن تاریک و نامرئی باشند و هر دو در مداری دایره‌ای حرکت می‌کنند، (شکل ۱۳–۴۹). جرم تقریبی $m_۲$ ستارهٔ تاریک چه مضربی از $M_s$ است؟




**شکل ۱۳–۴۹** مسئلهٔ ۵۶

••۵۷– یک ماهوارهٔ ۲۰ کیلوگرمی در مداری دایره‌ای با دورهٔ تناوب ۲/۴h و شعاع $۸/۰ \times ۱۰^{۶}\,m$ به دور سیاره‌ای با جرم نامعلوم می‌گردد. اگر بزرگی شتاب گرانشی روی سطح سیاره برابر $۸/۰\,m/s^۲$ باشد، شعاع سیاره چقدر است؟

•••۵۸– گاهی می‌توان به وجود یک سیارهٔ نامرئی که به دور یک ستارهٔ دوردست می‌گردد از روی حرکت ستاره که ما می‌بینیم دست یافت. وقتی ستاره و سیاره به دور مرکز جرم سامانهٔ ستاره– سیاره می‌گردند، وقتی ستاره به طرف جلو می‌رود و از ما دور می‌شود آن را *خط دید سرعت* می‌نامند و این حرکتی است که می‌توان آن را آشکار کرد. شکل ۱۳–۵۰ نموداری از خط دید سرعت را برحسب زمان برای ستارهٔ هرکولیس[1] ۱۴ نشان می‌دهد. فرض کنید جرم این ستاره ۰/۹۰ جرم خورشید ما باشد. با فرض اینکه فقط یک سیاره به دور ستاره می‌گردد و این که نگاه ما در راستای صفحهٔ مدار است (الف) جرم سیاره را برحسب جرم مشتری $M_J$ و (ب) شعاع مداری سیاره را برحسب شعاع مداری زمین $r_E$ به دست آورید.




**شکل ۱۳–۵۰** مسئلهٔ ۵۸

•••۵۹– سه ستارهٔ مشابه به جرم $M$ مثلثی متساویَ الاضلاع را تشکیل می‌دهند که به دور مرکز مثلث می‌گردند، به طوری که ستاره‌ها در یک مسیر دایره‌ای مشترک به دور آن مرکز حرکت می‌کنند. طول ضلع مثلث برابر $L$ است. تندی ستاره‌ها چقدر است؟

## بخش ۱۳–۸ ماهواره‌ها: مدارها و انرژی

•۶۰– دو ماهوارهٔ زمینی $A$ و $B$ هر یک به جرم $m$ را به مداری دایره‌ای شکل به دور مرکز زمین پرتاب کرده‌ایم. ماهوارهٔ $A$ در مداری در ارتفاع $۶۳۷۰\,km$ و ماهوارهٔ $B$ در مداری در ارتفاع $۱۹۱۱۰\,km$ قرار دارد. شعاع زمین را $۶۳۷۰\,km$ در نظر بگیرید. (الف) نسبت انرژی پتانسیل ماهوارهٔ $B$ به انرژی پتانسیل ماهوارهٔ $A$ چقدر است؟ (ب) نسبت انرژی جنبشی ماهوارهٔ $B$ نسبت به $A$ چقدر است؟ (پ) اگر جرم هر ماهواره $۱۴/۶\,kg$ باشد، کدامیک از آنها دارای انرژی کل بیشتری است؟ (ت) به چه مقدار؟

•۶۱– سیارکی که جرم آن $۲/۰ \times ۱۰^{-۴}$ برابر جرم زمین است در مسیری دایره‌ای به دور خورشید در فاصله‌ای به اندازهٔ دو برابر فاصلهٔ زمین تا خورشید می‌گردد. (الف) دورهٔ تناوب گردش سیارک را برحسب سال محاسبه کنید. (ب) نسبت انرژی جنبشی سیارک به انرژی جنبشی زمین چقدر است؟ SSM WWW

•۶۲– ماهواره‌ای به دور سیاره‌ای با جرم نامعلوم در مسیری دایره‌ای به شعاع $۲/۰ \times ۱۰^{۷}\,m$ می‌گردد. بزرگی نیروی گرانشی وارد بر ماهواره از طرف سیاره برابر $F = ۸۰\,N$ است. (الف) انرژی جنبشی ماهواره در این مدار چقدر است؟ (ب) اگر شعاع مداری به $۳/۰ \times ۱۰^{۷}\,m$ افزایش یابد، مقدار $F$ چقدر خواهد شد؟

•۶۳– در چه ارتفاعی بالای سطح زمین انرژی لازم برای بالا بردن ماهواره‌ای به آن ارتفاع برابر انرژی جنبشی لازم برای آن ماهواره است تا در همان ارتفاع در مدار زمین قرار گیرد؟ (ب)

---
1. Herculis 14

در ارتفاعهای بالاتر آیا انرژی بالا بردن ماهواره بیشتر است یا انرژی جنبشی در مدار قرار دادن آن؟

●۶۴- در شکل ۱۳-۵۱ دو ماهوارهٔ $A$ و $B$ هر دو به جرم $m=125\,\text{kg}$ در مدار یکسانی به شعاع $r=7/87\times10^{6}\,\text{m}$ به دور زمین و در جهتهای مخالف می‌گردند و در نتیجه با هم برخورد می‌کنند. (الف) انرژی مکانیکی کل $E_A+E_B$ مربوط به سامانهٔ *زمین + دو ماهواره* را قبل از برخورد پیدا کنید. (ب) اگر این برخورد کاملاً ناکشسان باشد، به طوری که تکه‌های متلاشی شده به صورت یک جسم بی‌شکل و درهم پیچیده (به جرم $2m$) درآید، انرژی مکانیکی کل را بلافاصله بعد از برخورد به دست آورید. (پ) آیا بلافاصله بعد از برخورد، تکه‌های متلاشی شده مستقیماً به سمت مرکز زمین سقوط می‌کنند یا در مدار زمین به دور آن می‌گردند؟



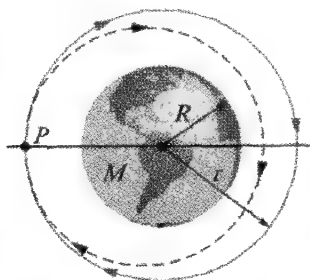

شکل ۱۳-۵۱ مسئلهٔ ۶۴

●●۶۵- ماهواره‌ای در مدار زمین به شعاع $r$ قرار دارد. مساحت $A$ محصور شده توسط مدار به $r^{2}$ بستگی دارد زیرا $A=\pi r^{2}$. تعیین کنید که کدامیک از ویژگیهای زیر ماهواره به $r$ بستگی دارد: (الف) دورهٔ تناوب و (ب) انرژی جنبشی (پ) اندازه حرکت زاویه‌ای و (ت) تندی.

●●۶۶- یک راه از بین بردن ماهواره‌ای در مدار زمین پرتاب یک دسته گلوله در همان مدار ولی در جهت مخالف حرکت آن است. فرض کنید ماهواره‌ای در مداری دایره‌ای $500\,\text{km}$ بالای سطح زمین با گلوله‌ای به جرم $4/0\,\text{g}$ برخورد کند. (الف) انرژی جنبشی این گلوله در چارچوب ماهواره بلافاصله پس از برخورد چقدر است؟ (ب) نسبت این انرژی جنبشی به انرژی جنبشی یک گلولهٔ به جرم $4/0\,\text{g}$ که از یک تفنگ نوین ارتشی با سرعت اولیهٔ $950\,\text{m/s}$ شلیک می‌شود چقدر است؟

●●●۶۷- (الف) تندی و (ب) دورهٔ تناوب یک ماهوارهٔ $220\,\text{kg}$ در یک مدار تقریباً دایره‌ای به فاصلهٔ $640\,\text{km}$ در بالای سطح زمین چقدر است؟ فرض کنید که ماهواره انرژی مکانیکی خود را با آهنگ میانگین $1/4\times10^{5}\,\text{J}$ در هر دور گردش از دست بدهد. با فرض این تقریب که مدار ماهواره به صورت دایره‌ای است که شعاع آن به تدریج کاهش می‌یابد، مطلوب است محاسبهٔ (پ) ارتفاع، (ت) تندی و (ث) دورهٔ تناوب در پایان ۱۵۰۰ دور. (ج) میانگین بزرگی نیروی کندکنندگی ماهواره چقدر است؟ آیا اندازه حرکت زاویه‌ای در اطراف مرکز زمین (چ) برای ماهواره و (ح) سامانهٔ ماهواره-زمین پایسته است؟ (فرض کنید که این سامانهٔ منزوی است).

●●●۶۸- دو سفینهٔ فضایی، هر یک به جرم $m=2000\,\text{kg}$، در مداری دایره‌ای به دور زمین، شکل ۱۳-۵۲، در ارتفاع $h$ برابر با $400\,\text{km}$ قرار دارند. ایگور، فرمانده یکی از آنها، به هر نقطهٔ ثابتی $90\,\text{s}$ بعد از پیکارد فرماندهٔ سفینهٔ دیگر می‌رسد. (الف) دورهٔ تناوب $T_0$ و (ب) تندی $v_0$ سفینه‌ها چقدر است؟ در نقطهٔ $P$ در شکل ۱۳-۵۲، پیکارد در یک لحظه به طرف جلو شلیک می‌کند، که موجب *کاهش* تندی او به اندازهٔ ٪۱/۰۰ می‌شود. پس از این شلیک، مدار او به صورت بیضی در می‌آید که با خطچین در شکل نشان داده شده است. (پ) انرژی جنبشی و (ت) انرژی پتانسیل سفینهٔ او بلافاصله بعد از شلیک چقدر است؟ در مدار بیضی جدید پیکارد (ث) انرژی کل $E$، (ج) نیم محور بزرگ $a$ و (چ) دورهٔ تناوب مداری $T$ چقدر است؟ (ح) ایگور چقدر از پیکار عقب می‌ماند تا به نقطهٔ $P$ برسد؟




شکل ۱۳-۵۲ مسئلهٔ ۶۸

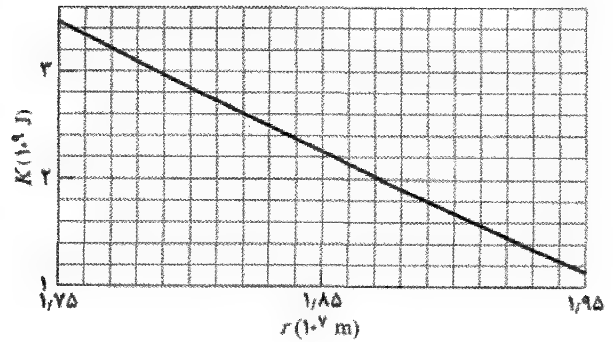
## بخش ۱۳-۹ اینشتین و گرانش

●۶۹- در شکل ۱۳-۱۹ ب ترازویی که فیزیکدان ۶۰ کیلوگرمی روی آن ایستاده مقدار $220\,\text{N}$ را نشان می‌دهد. اگر فیزیکدان جسمی را از ارتفاع ۲/۱ متری کف اتاقک از حالت سکون (نسبت به خودش) رها کند، چقدر طول می‌کشد تا جسم به کف اتاقک برسد؟

### مسئله‌های اضافی

۷۰- مسافر عجیبی که در داستان افسانه‌ای *شازده کوچولو* دربارهٔ آن صحبت می‌شود از سیاره‌ای آمده که «به زحمت از یک خانه بزرگتر است»! فرض کنید که جرم واحد حجم این سیاره حدود چگالی زمین باشد و سیاره چرخش قابل توجهی به دور خود نداشته باشد. (الف) شتاب سقوط آزاد را در روی سطح این سیاره به دست آورید. (ب) تندی فرار از این سیاره چقدر است؟

۷۱- شکل ۱۳-۵۳ نموداری از انرژی جنبشی $K$ یک سیارک را برحسب فاصلهٔ $r$ از مرکز زمین نشان می‌دهد. وقتی سیارک مستقیماً به طرف مرکز زمین سقوط کند (الف) جرم (تقریبی) سیارک چقدر است؟ (ب) تندی آن در $r=1/945\times10^{7}\,\text{m}$ چقدر خواهد بود؟




**شکل ۱۳-۵۳** مسئلهٔ ۷۱

۷۲- شعاع $R_h$ یک سیاهچاله برابر شعاع یک کرهٔ ریاضی به نام افق رویداد است که به مرکز سیاهچاله قرار دارد. اطلاعات مربوط به رویدادهای داخل افق رویداد نمی‌توانند به جهان خارج برسد. بنابر نظریهٔ نسبیت عام اینشتین $R_h = \frac{2GM}{c^2}$ که $M$ جرم سیاهچاله و $c$ سرعت نور است.

فرض کنید که می‌خواهید دربارهٔ سیاهچاله‌ای در نزدیکی آن در فاصلهٔ شعاعی $50R_h$ مطالعه کنید. اما، در وقتی که پاهایتان به طرف پایین (و چه به طرف بالا) به سمت سیاهچاله است نمی‌خواهید که بین سر و پاهایتان شتاب گرانشی بیش از $10 m/s^2$ باشد (الف) به صورت ضریبی از جرم خورشید $M_s$، حدی را برای جرم سیاهچاله که می‌توان آن را در یک شعاع معین تخمین زد پیدا کنید؟ (باید قد خود را داشته باشید.) (ب) آیا این حد یک حد بالا است (که می‌توانیم جرمهای کوچکتری را داشته باشیم) یا یک حد پایین است (که جرمهای بزرگتری نیز خواهیم داشت)؟

۷۳- کرهٔ $A$ به جرم $80 kg$ در مبداء مختصات $xy$ قرار دارد؛ کرهٔ $B$ به جرم $60 kg$ در مختصات $(0/25 m, 0)$ قرار دارد؛ کرهٔ $C$ به جرم $0/20 kg$ در ربع اول به فاصلهٔ $0/20 m$ از $A$ و $0/15 m$ از $B$ قرار دارد. برحسب بردارهای یکه نیروی گرانشی وارد بر کرهٔ $C$ را از طرف $A$ و $B$ به دست آورید.

۷۴- ماهواره‌ای در یک مدار بیضی شکل با دورهٔ تناوب $8/00 \times 10^4 s$ حول سیاره‌ای به جرم $7/00 \times 10^{24} kg$ می‌گردد. در نقطهٔ اوج در شعاع $4/5 \times 10^7 m$ تندی زاویه‌ای ماهواره برابر $7/158 \times 10^{-5} rad/s$ است. تندی زاویه‌ای آن را در نقطهٔ حضیض به دست آورید.

۷۵- در یک سفینهٔ شاتل به جرم $m = 3000 kg$ کاپیتان جینوی سیاره‌ای به جرم $M = 9/50 \times 10^{25} kg$ را در مداری دایره‌ای به شعاع $r = 4/20 \times 10^7 m$ دور می‌زند. (الف) دورهٔ تناوب گردش روی مدار چقدر است؟ (ب) تندی سفینهٔ شاتل چقدر است؟ جینوی به آهستگی موتور کنترل کنندهٔ حرکت به جلو را روشن می‌کند تا تندی شاتل به اندازهٔ ۲/۰۰٪ کاهش یابد. بعد از این عمل مطلوب است محاسبهٔ (پ) تندی شاتل (ت) انرژی جنبشی (ث) انرژی پتانسیل گرانشی و (ج) انرژی مکانیکی شاتل فضایی (چ) نیم قطر بزرگ مدار بیضوی در این حالت چقدر است؟ (ح) تفاوت بین دورهٔ تناوب مدار دایره‌ای اولیه و مدار بیضوی کنونی چقدر است؟ (خ) کدام مدار دورهٔ تناوب کوچکتری دارد؟ SSM

۷۶- یک ستارهٔ نوترونی نوعی می‌تواند دارای جرمی برابر جرم خورشید ولی به شعاع فقط $10 km$ باشد. (الف) شتاب گرانشی در سطح چنین ستاره‌ای چقدر است؟ (ب) اگر جسمی از ۱/۰ متری سطح این ستاره سقوط کند، سرعت آن چقدر خواهد بود؟ (فرض کنید که ستاره نمی‌چرخد.)

۷۷- چهار کرهٔ یکنواخت با جرمهای $m_A = 40 kg$، $m_B = 35 kg$، $m_C = 200 kg$ و $m_D = 50 kg$ دارای مختصات $(x,y)$ به ترتیب برابر $(0, 50 cm)$، $(0,0)$، $(-80 cm, 0)$ و $(40 cm, 0)$ هستند. نیروی گرانشی خالص وارد بر کرهٔ $B$ را از طرف کره‌های دیگر، با استفاده از بردارهای یکه، به دست آورید.

۷۸- (الف) در مسئلهٔ ۷۷ کرهٔ $A$ را برداریم و انرژی پتانسیل گرانشی سامانهٔ سه ذره‌ای باقیمانده را محاسبه کنید. (ب) اگر دوباره کرهٔ $A$ را سر جای خود برگردانیم، آیا انرژی پتانسیل سامانهٔ چهار ذره‌ای از مقدار آن در (الف) بیشتر خواهد شد یا کمتر؟ (پ) در قسمت (الف) کار انجام شده برای برداشتن کرهٔ $A$ مثبت است یا منفی؟ (ت) در قسمت (ب) آیا کار انجام شده برای بازگرداندن $A$ مثبت است یا منفی؟

۷۹- یک ماهوارهٔ سادهٔ اولیه شامل یک بالون آلومینیومی کروی پر از باد به قطر $30 m$ و جرم $20 kg$ بود. شهاب سنگی به جرم $7/0 kg$ از ۳/۰ متری سطح این ماهواره عبور می‌کند. بزرگی نیروی گرانشی وارد بر شهاب سنگ از طرف ماهواره در نزدیکترین فاصله چقدر است؟ SSM

۸۰- کرهٔ توپر یکنواختی به شعاع $R$ شتاب گرانشی $a_g$ در سطح خود ایجاد می‌کند. در چه فاصله‌ای از مرکز کره (الف) در داخل و (ب) در خارج کره، نقطه‌هایی وجود دارند که شتاب آنها برابر $\frac{a_g}{3}$ است؟

۸۱- پرتابه‌ای از سطح زمین با سرعت اولیهٔ $10 km/s$ به طرف بالا پرتاب می‌شود. اگر از مقاومت هوا صرفنظر کنیم، این پرتابه تا چه ارتفاعی از سطح زمین بالا می‌رود؟ ILW

۸۲- یک ماهوارهٔ ۵۰ کیلوگرمی در هر ۶/۰ ساعت یک بار به دور سیارهٔ کروتون می‌گردد. بزرگی نیروی گرانشی وارد بر ماهواره از طرف کروتون برابر $80 N$ است. مطلوب است (الف) شعاع این مدار (ب) انرژی جنبشی ماهواره، (ج) جرم سیارهٔ کروتون.

۸۳- در یک سامانهٔ دو ستاره‌ای، دو ستاره هر یک به جرم $3/0 \times 10^{30} kg$ به دور مرکز جرم این سامانه در شعاع $1/0 \times 10^{11} m$ می‌گردند. (الف) تندی زاویه‌ای مشترک آنها چقدر است؟ (ب) اگر شهاب سنگی از مرکز جرم این سامانه به طور عمود بر صفحهٔ مداری آنها عبور کند، کمینهٔ سرعت آن در مرکز

جرم باید چقدر باشد تا از سامانهٔ دو ستاره‌ای به بینهایت فرار کند؟ SSM

۸۴- جسمی که روی استوای زمین قرار دارد (الف) دارای شتابی به طرف مرکز زمین است زیرا زمین می‌چرخد. (ب) دارای شتابی به طرف خورشید است زیرا زمین به دور خورشید در مداری تقریباً دایره‌ای می‌گردد. (پ) دارای شتابی به طرف مرکز کهکشان است زیرا خورشید نیز به دور مرکز کهکشان می‌گردد. دورهٔ تناوب گردش خورشید به دور مرکز کهکشان برابر $۲/۵\times۱۰^۸$ y و شعاع آن $۲/۲\times۱۰^{۲۰}$ m است. این سه شتاب را به صورت ضریبی از $g=۹/۸\,m/s^۲$ به دست آورید.

۸۵- جرمها و مختصات سه کره به این صورت‌اند: $x=۰/۵m, ۲۰kg$ و $y=۱/۰m$ ، $x=-۱/۰m, ۴۰kg$ و $y=-۱/۰m$ ، $x=۰, ۶۰kg$ و $y=-۰/۵m$ . بزرگی نیروی گرانشی وارد بر کره به جرم ۲۰ کیلوگرم که در مبدأ قرار دارد از طرف سه کرهٔ بالا چقدر است؟ ILW

۸۶- اگر یک بستهٔ پستی را در تونل مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳-۴ رها کنیم، با چه سرعتی از مرکز زمین عبور خواهد کرد؟

۸۷- مدار زمین به دور خورشید تقریباً دایره‌ای است: نزدیکترین و دورترین فاصله‌ها از هم به ترتیب برابر $۱/۴۷\times۱۰^۸$ km و $۱/۵۲\times۱۰^۸$ km است. تغییرات مربوط در کمیتهای زیر را تعیین کنید: (الف) تغییر در انرژی کل، (ب) تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی، (ج) تغییر در انرژی جنبشی و (د) تغییر تندی مداری. (توجه: از پایستگی انرژی و پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای استفاده کنید.) SSM

۸۸- سفینه‌ای روی مسیری به صورت خط راست بین زمین و ماه قرار دارد. در چه فاصله‌ای از زمین نیروی گرانشی خالص وارد بر سفینه صفر است؟

۸۹- جسمی به جرم $m$ در ابتدا در فاصلهٔ شعاعی $r=۳R_E$ از مرکز زمین قرار داده شده که $R_E$ شعاع زمین است. فرض کنیم جرم زمین $M_E$ است. نیرویی بر جسم وارد می‌شود که آن را به اندازهٔ فاصلهٔ شعاعی $r=۴R_E$ حرکت می‌دهد جایی که دوباره در آنجا قرار می‌گیرد. مطلوب است محاسبهٔ کار انجام شده توسط نیروی وارده در طی حرکت با انتگرالگیری از بزرگی نیرو.

۹۰- سریعترین آهنگ چرخش ممکن یک سیاره وقتی است که نیروی گرانشی وارد بر جسم در استوا درست نیروی مرکزگرای لازم برای چرخش را ایجاد کند. (چرا؟) (الف) نشان دهید که کمترین دورهٔ تناوب چرخش برابر است با

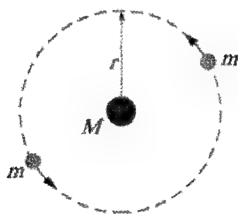
$$T=\sqrt{\frac{۳\pi}{G\rho}}$$

که درآن $\rho$ چگالی یکنواخت (جرم بر واحد حجم) سیارهٔ کروی است. (ب) دورهٔ تناوب چرخش را با فرض چگالی $۳/۰\,g/cm^۳$ برای سیاره (که این مقدار نوعی برای بسیاری از سیاره‌ها، ماهواره‌ها و سیارکهاست) محاسبه کنید. هیچ جسم نجومی دیده نشده است که با دورهٔ تناوبی کمتر از این مقدار چرخش داشته باشد.

۹۱- (الف) اگر سیب افسانه‌ای نیوتون را از حالت سکون در ارتفاع ۲ متری سطح یک ستارهٔ نوترونی به جرم ۱/۵ برابر جرم خورشید ما و شعاع ۲۰km رها کنیم، تندی سیب را وقتی به سطح ستاره می‌رسد به دست آورید. (ب) اگر این سیب روی سطح ستاره به حالت سکون درآید، اختلاف شتاب گرانشی بین ابتدا و انتهای سیب چقدر است؟ (اندازهٔ معقولی برای سیب فرض کنید؛ جواب نشان می‌دهد که سیب هرگز در نزدیکی یک ستارهٔ نوترونی جان سالم به در نمی‌برد.)

۹۲- بعضی از مردم بر این باورند که مکان سیاره‌ها به هنگام تولد بر نوزاد تأثیر می‌گذارد. برخی دیگر این عقیده را مسخره می‌کنند و اظهار می‌دارند که نیروی گرانشی وارد به یک نوزاد از طرف ماما بزرگتر از نیروی وارد از طرف سیاره‌هاست. برای بررسی این عقیده بزرگی نیروی گرانشی وارد به یک نوزاد ۳ کیلوگرمی را (الف) توسط یک مامای ۷۰ کیلوگرمی که در فاصلهٔ ۱ متری قرار دارد و با تقریب غیر واقعی به صورت یک جرم نقطه‌ای در نظر گرفته می‌شود، (ب) توسط سیارهٔ بزرگ مشتری ($m=۲\times۱۰^{۲۷}$ kg) که نزدیکترین فاصلهٔ آن تا زمین برابر $۶\times۱۰^{۱۱}$m است و (پ) توسط مشتری در دورترین فاصله از زمین که برابر $۹\times۱۰^{۱۱}$m است محاسبه کنید. (ت) آیا این عقیده درست است؟

۹۳- یک سامانهٔ سه ستاره‌ای معین شامل دو ستاره هر یک به جرم $m$ است که در مدار دایره‌ای یکسانی به شعاع $r$ به دور یک ستارهٔ مرکزی به جرم $M$ می‌گردند (شکل ۱۳-۵۴). دو ستارهٔ در حال گردش همواره در دو انتهای مقابل یکدیگر روی یک قطر از مدار قرار دارند. عبارتی برای دورهٔ تناوب گردش ستاره‌ها به دست آورید. SSM




شکل ۱۳-۵۴ مسئلهٔ ۹۳

۹۴- یک موشک ۱۵۰/۰ کیلوگرمی در حال حرکت به طور شعاعی به سمت بالای زمین است. وقتی موتور موشک خاموش شود سرعت آن برابر ۳/۷۰km/s است و موشک در ارتفاع ۲۰۰km بالای سطح زمین قرار دارد. (الف) با فرض اینکه مقاومت هوا ناچیز باشد، انرژی جنبشی موشک را در ارتفاع ۱۰۰۰ کیلومتری بالای سطح زمین پیدا کنید. (ب) بیشینهٔ ارتفاعی که موشک به آن می‌رسد چقدر است؟

۹۵- سیارهٔ روتون[1] با جرمی برابر $۷/۰\times۱۰^{۲۴}$kg و شعاع ۱۶۰۰km با نیروی گرانشی شهاب سنگی را که در ابتدا نسبت به سیاره در حال سکون است جذب می‌کند. شهاب سنگ آنقدر

1. Roton

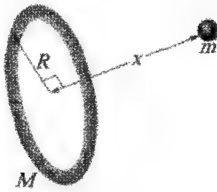
دور است که می‌توان فاصلهٔ آن را بینهایت در نظر گرفت. شهاب سنگ به طرف سیاره سقوط می‌کند. با فرض اینکه در سیاره هوا وجود نداشته باشد، سرعت شهاب سنگ را در لحظهٔ برخورد با سیاره پیدا کنید.

۹۶- دو کرهٔ ۲۰ کیلوگرمی در مکانی روی محور $y$ قرار دارند، یکی در $y=$ ۰/۴۰m و دیگری در $y=-$ ۰/۴m . سپس یک توپ ۱۰ کیلوگرمی را از حال سکون به نقطه‌ای روی محور $x$ می‌اندازیم به طوری که در فاصلهٔ دوری (عملاً بینهایت) از کره‌ها قرار گیرد. اگر فقط نیروهای گرانشی بر توپ وارد شوند، وقتی توپ به نقطهٔ $(x,y)$ به مقدار (۰/۳m,۰) می‌رسد، (الف) انرژی جنبشی آن و (ب) نیروی خالص وارد بر آن از طرف کره‌ها برحسب بردارهای یکه چیست؟

۹۷- ماهواره‌ای با جرم ۱۲۵kg در مداری دایره‌ای به شعاع ۷/۰۰×۱۰$^{6}$m به دور سیاره‌ای می‌گردد. اگر دورهٔ تناوب آن برابر ۸۰۵۰s باشد، انرژی مکانیکی ماهواره چقدر است؟

۹۸- ژول ورن[1] در سال ۱۸۶۵/۱۲۴۴ در داستان علمی تخیلی معروف خود *از زمین تا ماه* شرح می‌دهد که چطور سه فضانورد را با استفاده از یک تفنگ غول پیکر به ماه پرتاب می‌کنند. بنابراین داستان کپسول آلومینیومی که این سه فضانورد در آن قرار داشتند را با آتش زدن نیترو سلولز به سرعتی برابر ۱۱km/s در راستای طول لولهٔ تفنگ به طول ۲۲۰m می‌رساندند. (الف) شتاب متوسط کپسول و فضانوردان داخل لولهٔ تفنگ را برحسب g به دست آورید. (ب) آیا این شتاب قابل تحمل است یا اینکه برای فضانوردان فوق العاده خطرناک است؟ نمونهٔ جدیدی از چنین سفینه‌ای که با تفنگ شلیک می‌شود (البته بدون سرنشین) ساخته شده است. در این نمونهٔ جدید که SHARP[2] (مخفف «پروژهٔ پژوهشی برای ارتفاعهای بسیار بالا») نامیده می‌شود، آتش گرفتن متان و هوا پیستونی را به طرف پایین لولهٔ تفنگ هل می‌دهد و باعث فشرده‌شدن گاز هیدروژن می‌شود که سرانجام موشکی را پرتاب می‌کند. در طی این پرتاب ابتدا موشک ۳/۵km حرکت می‌کند و به سرعت ۷/۰km/s می‌رسد و سپس یکباره پرتاب می‌شود و می‌تواند سرعت لازم را به دست آورد. (پ) شتاب متوسط موشک در طول این پرتاب چقدر است؟ (د) سرعت اضافی لازم (توسط موتور موشک) برای اینکه موشک در مدار زمین در ارتفاع ۷۰۰km قرار گیرد چقدر است؟

۹۹- چندین سیاره (مثل مشتری، زحل، اورانوس) در اطراف خود حلقه‌هایی دارند که احتمالاً از موادی تشکیل شده‌اند که نتوانسته‌اند قمری را تشکیل دهند. به علاوه، بسیاری از کهکشانها شامل ساختارهای حلقه‌ای شکل‌اند. حلقهٔ نازک همگنی را به جرم $M$ و شعاع خارجی $R$ (شکل ۱۳-۵۵) در نظر بگیرید. (الف) چه جاذبهٔ گرانشی بر ذره‌ای به جرم $m$ که روی محور مرکزی حلقه و به فاصلهٔ $x$ از مرکز حلقه قرار دارد وارد می‌شود؟ (ب) فرض کنید که ذره در نتیجهٔ جاذبهٔ حلقه از حال سکون سقوط کند. ذره با چه سرعتی از مرکز حلقه می‌گذرد؟




شکل ۱۳-۵۵ مسئلهٔ ۹۹

۱۰۰- چهار ذرهٔ مشابه ۱/۵kg را در گوشه‌های مربعی به ضلع ۲۰cm قرار می‌دهیم. بزرگی نیروی گرانشی وارد بر هر یک از این ذره‌ها از طرف ذره‌های دیگر چقدر است؟

۱۰۱- در تماشای دو جسم نجومی مشابه $A$ و $B$ هر یک به جرم $m$ هستیم که به دلیل نیروی گرانشی به سمت یکدیگر در حال سقوط‌اند. فاصلهٔ اولیهٔ مرکزهای آنها برابر $R_i$ است. فرض کنید که در چارچوب مرجع لختی در حال سکون نسبت به مرکز جرم این سامانهٔ دو ذره‌ای هستیم. با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی $(K_f+U_f=K_i+U_i)$ وقتی فاصلهٔ مرکزهای آنها به ۰/۵$R_i$ رسید، مقدارهای زیر را به دست آورید. (الف) انرژی جنبشی کل سامانه. (ب) انرژی جنبشی هر جسم. (پ) تندی هر جسم نسبت به ما و (ت) تندی جسم $B$ نسبت به جسم $A$.

سپس فرض کنید که در چارچوب مرجعی متصل به جسم $A$ قرار داریم (سوار بر جسم هستیم). در این صورت مشاهده می‌کنیم که جسم $B$ از حالت سکون به طرف ما سقوط می‌کند. از نظر این چارچوب مرجع نیز با استفاده از رابطهٔ $K_f+U_f=K_i+U_i$ در صورتی که فاصلهٔ مرکزهای آنها از هم برابر ۰/۵$R_i$ باشد، مقدارهای زیر را بدست آورید. (ث) انرژی جنبشی جسم $B$، (ج) تندی جسم $B$ نسبت به جسم $A$، (چ) چرا پاسخ قسمتهای (ح) و (خ) با هم فرق می‌کند؟ کدام پاسخ درست است؟

۱۰۲- درصد تغییر شتاب زمین به طرف خورشید از هم‌راستایی زمین، خورشید و ماه در یک خورشید گرفتگی (که ماه بین زمین و خورشید قرار می‌گیرد) تا وقتی به یک ماه گرفتگی (زمین بین ماه و خورشید قرار می‌گیرد) برسیم چقدر است؟

۱۰۳- سیاره‌ای که ۶/۰×۱۰$^{30}$kg جرم دارد به ۳۰۰ روز (زمینی) نیاز دارد تا مدارش را به دور خورشید کامل کند. (الف) شعاع مداری این سیاره و (ب) تندی مداری آن را به دست آورید.

۱۰۴- ذره‌ای از غبار ستارهٔ دنباله‌دار با جرم $m$ به فاصلهٔ $R$ از مرکز زمین و فاصلهٔ $r$ از مرکز ماه قرار دارد. اگر جرم زمین $M_E$ و جرم ماه $M_m$ باشد، انرژی پتانسیل گرانشی کل سامانهٔ ذره- زمین و انرژی پتانسیل گرانشی سامانهٔ ذره- ماه چقدر است؟

1. Jules Vern
2. Super High Altitude Research Project

# ۱۴ دما، گرما و قانون اول ترمودینامیک



سوسکهای نسبتاً کوچک ملانوفیلا به داشتن رفتارهای ناباورانه معروف هستند. آنها به سوی جنگلهای آتش گرفته حرکت می‌کنند و در نزدیکی آنها جفت‌گیری می‌کنند، و سپس جفت ماده همچنان به داخل خاکسترهای آتش می‌رود تا در لابلای پوست درختان سوخته تخم‌گذاری کند. اینجا یک محیط دلخواه برای لاروهایی است که از تخم بیرون می‌آیند، چون درختان با صمغ یا مواد شیمیایی دیگر نمی‌توانند از خود در مقابل لاروها حفاظت کنند. البته اگر سوسک در نزدیکی آتش بوده باشد، آشکار کردن آتش ساده خواهد بود. با وجود این، این سوسکها آتش را از فاصلهٔ نسبتاً زیادی به اندازهٔ ۱۲km می‌توانند تشخیص دهند. اینها این کار را بدون دیدن یا بوییدن آتش انجام می‌دهند.

**سوسکها چگونه می‌توانند از فاصلهٔ دور آتش را تشخیص دهند؟**

پاسخ در همین فصل.

## ۱۴-۱ فیزیک چیست؟

یکی از شاخه‌های اصلی فیزیک و مهندسی **ترمودینامیک** است، که به مطالعه و کاربرد *انرژی گرمایی* دستگاهها (که اغلب *انرژی درونی* نامیده می‌شود) می‌پردازد. یکی از مفهومهای مهم ترمودینامیک *دما* است، که در بخش بعدی دربارهٔ آن بحث خواهیم کرد. از بچگی دانش عملی انرژی گرمایی و دما در ما رشد کرده است. به عنوان مثال، احتیاط در برابر غذاهای گرم و اجاقهای داغ و نگهداری غذاهای فاسد شدنی در سرما یا ظرفهای سرد را یاد گرفته‌ایم. همچنین می‌دانیم که دمای داخل اتاق یا اتومبیل را چگونه کنترل و از خود در برابر باد سرد و آفتاب سوختگی حفاظت کنیم.

مثالهای بی شماری وجود دارد که می‌توان به نقش مهم ترمودینامیک در مهندسی و علم امروزی پی برد. مهندسان اتومبیل با گرمایش موتور آن، مثلاً در مسابقهٔ NASCAR رو به رو هستند. مهندسان صنایع غذایی هم با گرم کردن مناسب غذاها مانند پیتزایی که در میکروموج باید قرار داده شود، و هم با سرد کردن مناسب غذاها مانند شامهای تلویزیونی که در یک فرایند ساختگی باید به طور سریع سرد شود سروکار دارند. جغرافی‌دانان با انتقال انرژی گرمایی در پدیدهٔ النینو[1] و گرم شدن تدریجی پهنه‌های یخی در شمالگان و جنوبگان روبه‌رو هستند. مهندسان کشاورزی با شرایط آب و هوایی مواجه‌اند که رونق یا نابودی کشاورزی کشوری را تعیین می‌کند. مهندسان پزشکی با چگونگی دمای بیماری سروکار دارند که یک آلودگی ویروسی بی‌خطر را از یک رشد سرطانی متمایز می‌کند.

نقطهٔ شروع بحث ما دربارهٔ ترمودینامیک مفهوم دما و چگونگی اندازه‌گیری آن است.

## ۱۴-۲ دما

دما یکی از هفت کمیت اصلی SI است. فیزیکدانان دما را در **مقیاس کلوین** اندازه‌گیری می‌کنند که برحسب یکایی به نام *کلوین* مشخص شده است. هر چند ظاهراً حد بالایی برای دمای یک جسم وجود ندارد، ولی قطعاً حد پایینی برای آن وجود دارد؛ این دمای پایین حدی به عنوان صفر در مقیاس کلوین دما در نظر گرفته می‌شود. دمای اتاق تقریباً ۲۹۰ کلوین بالای این صفر مطلق است که به صورت ۲۹۰ K نوشته می‌شود. شکل ۱۴-۱ گسترهٔ وسیعی از دماها را نشان می‌دهد.

وقتی که جهان ۱۳/۷ میلیارد سال پیش به وجود آمد، دمای آن تقریباً $10^{39}$ K بود. وقتی که جهان گسترش یافت سرد شد

1. El Nino




**شکل ۱۴-۱** چند دما در مقیاس کلوین. دمای $T=0$ متناظر با $10^{-\infty}$ است و در این مقیاس لگاریتمی نمی‌توان آن را نشان داد.

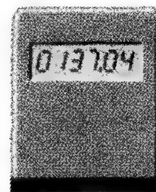
و اکنون به دمای میانگینی در حدود ۳K رسیده است. ما روی زمین اندکی گرمتر از آن هستیم چون در نزدیکی ستاره‌ای زندگی می‌کنیم. بدون خورشید، ما نیز در دمای ۳K خواهیم بود (یا شاید وجود نمی‌داشتیم.)

## ۱۴-۳ قانون صفرم ترمودینامیک

وقتی دمای بسیاری از جسمها را تغییر دهیم، مثلاً آنها را از یخچال به یک اجاق گرم انتقال دهیم، خواص آنها تغییر می‌کند. اینک به ذکر چند مثال می‌پردازیم: با افزایش دما، حجم یک مایع بیشتر می‌شود، یک میلهٔ فلزی اندکی درازتر می‌شود، مقاومت الکتریکی یک سیم افزایش می‌یابد و فشار اعمال شده توسط یک گاز محبوس بیشتر می‌شود. از هر کدام از این خواص به عنوان اساس وسیله‌ای برای روشن شدن مفهوم دما می‌توان استفاده کرد.

شکل ۱۴-۲ چنین وسیله‌ای را نشان می‌دهد. هر مهندس مبتکری با استفاده از هر یک از خواص گفته شده در بالا می‌تواند آن را طراحی کند و بسازد. این وسیله یک نمایشگر رقمی دارد و دارای خواص زیر است: اگر آن را گرم کنیم (مثلاً با شعلهٔ چراغ)، عددهای نمایشگر شروع به افزایش می‌کنند، اگر پس از آن این وسیله را در یخچال قرار دهیم، عددهای نمایشگر آن شروع به کاهش می‌کنند. این دستگاه به هیچ روشی کالیبره[2] نشده است و مقدارهای آن (فعلاً) مفهوم فیزیکی ندارند. این یک *دمانما* است ولی (هنوز) یک *دماسنج* نیست.

۲. کالیبراسیون عملی است که تحت شرایط مشخص شده بین مقدارهای این نمایشگر و مقدارهای متناظر آنها از یک دستگاه مرجع دمایی (مانند یک دماسنج مقاومتی پلاتینی)، با عمل مقایسه رابطه‌ای برقرار می‌کند. م




**شکل ۱۴-۲** یک دما نما. هرگاه دستگاه گرم شود عددها افزایش و هرگاه سرد شود عددها کاهش می‌یابند. عنصر حساس به گرما می‌تواند- در میان امکانهای زیاد- پیچه‌ای از سیمی باشد که مقاومت الکتریکی آن اندازه‌گیری و نمایش داده می‌شود.

مانند شکل ۱۴-۳ الف فرض کنید دمانما (که آن را جسم $T$ می‌نامیم) با جسم دیگری (جسم $A$) در تماس باشد. کل سیستم داخل محفظه‌ای با دیواره‌های ضخیم عایق بندی شده قرار دارد. عدد نمایش داده شده توسط دمانما تغییر می‌کند و سرانجام ثابت می‌ماند (فرض کنید این مقدار "۱۳۷/۰۴" باشد) و تغییر دیگری انجام نمی‌گیرد. در واقع فرض می‌کنیم که هر خاصیت قابل اندازه‌گیری جسم $T$ و جسم $A$ یک اندازهٔ پایدار و غیر قابل تغییر پیدا کند. آن وقت می‌گوییم دو جسم با یکدیگر در حالت *تعادل گرمایی* هستند و حتی اگر عدد نمایش داده شده برای جسم $T$ کالیبره نشده باشد، نتیجه می‌گیریم که جسمهای $T$ و $A$ باید دمای یکسانی (نامعلوم) داشته باشند.

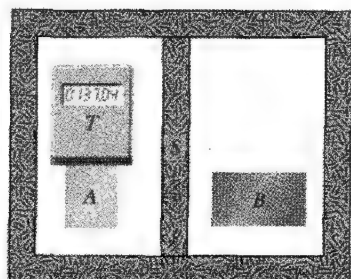
حال فرض کنید که جسم $T$ را با جسم $B$ تماس دهیم (شکل ۱۴-۳ ب) و با *عدد یکسانی که دما نما* نشان می‌دهد دریابیم که دو جسم در حالت تعادل گرمایی‌اند. بنابراین دو جسم $T$ و $B$ حتماً باید در دمای یکسانی (هنوز نامعلوم) باشند. اگر اینک دو جسم $A$ و $B$ را با هم تماس دهیم (شکل ۱۴-۳ پ)، آیا بی درنگ آنها با یکدیگر در حالت تعادل گرمایی خواهند بود؟ به طور تجربی در می‌یابیم که چنین است.

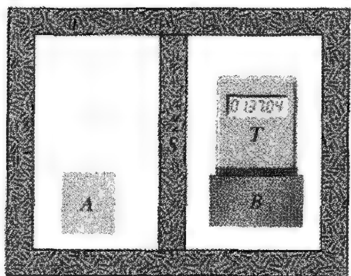
واقعیتهای تجربی نشان داده شده در شکل ۱۴-۳ در **قانون صفرم ترمودینامیک** خلاصه شده‌اند

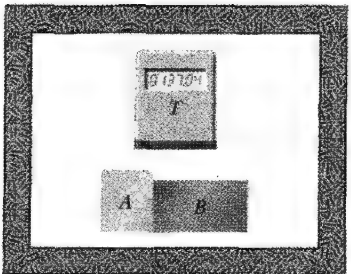
> ☜ اگر دو جسم $A$ و $B$ با جسم سوم $T$ در حالت تعادل گرمایی باشند، آنگاه آنها با یکدیگر در حالت تعادل گرمایی خواهند بود.

به بیان ساده‌تر، مفهوم قانون صفرم ترمودینامیک این است: «هر جسمی خاصیتی به نام **دما** دارد. هرگاه دو جسم در حالت تعادل گرمایی باشند، دمای آنها برابر است، و برعکس» اکنون می‌توان دما نما ( جسم سوم $T$) را به صورت یک دماسنج درآورد و اطمینان داشت که قرائتهای آن معنی فیزیک دارند. کاری که باید انجام دهیم کالیبره کردن آن است.

در آزمایشگاه به طور دائم از قانون صفرم استفاده می‌کنیم.




**شکل ۱۴-۳** (الف) جسم $T$ (یک دمانما) و جسم $A$ در حالت تعادل گرمایی‌اند. (جسم $S$ یک پردهٔ عایق گرمایی است.) (ب) جسم $T$ و جسم $B$ نیز با همان عددی که دما نما نشان می‌دهد در حالت تعادل گرمایی‌اند. (پ) اگر (الف) و (ب) درست باشند قانون صفرم ترمودینامیک می‌گوید که جسم $A$ و جسم $B$ نیز در حالت تعادل گرمایی خواهند بود.

برای اینکه بدانیم دو مایع در دو ظرف در یک دما هستند، دمای هر یک را با دماسنج اندازه می‌گیریم. لزومی ندارد که دو مایع را به حالت تماس در آوریم تا ببینیم که آیا آنها در حالت تعادل گرمایی‌اند یا نه.

قانون صفرم که پس از یک تفکر منطقی نامگذاری شده است، بسیار دیرتر از کشف قانونهای اول و دوم ترمودینامیک و شماره‌گذاری آنها در سالهای ۱۹۳۰/۱۳۱۰ کشف و شماره گذاری شد. چون مفهوم دما اساس این دو قانون است، این قانون که دما را به عنوان یک مفهوم معتبر تثبیت می‌کند باید پایینترین شماره را داشته باشد و از این رو قانون صفرم نامیده شده است.

## ۱۴-۴ اندازه‌گیری دما

در اینجا نخست دما را در مقیاس کلوین تعریف و اندازه‌گیری می‌کنیم. سپس یک دمانما را کالیبره می‌کنیم به طوری که بتوان از آن به صورت یک دماسنج استفاده کرد.

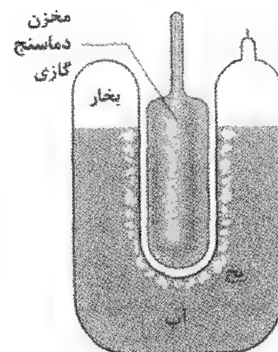
## نقطهٔ سه‌گانهٔ آب

برای برقراری یک مقیاس دمایی، چند پدیدهٔ گرمایی قابل باز تولید را اختیار می‌کنیم و کاملاً اختیاری دمای کلوین معینی را به محیط آن نسبت می‌دهیم؛ یعنی، یک *نقطهٔ ثابت استاندارد* را برمی‌گزینیم و آن را *دمای* نقطهٔ ثابت استاندارد می‌نامیم. برای مثال می‌توان نقطهٔ انجماد یا نقطهٔ جوش آب را برگزید، ولی به دلیلهای فنی به جای آن **نقطهٔ سه‌گانهٔ آب** را انتخاب می‌کنیم.

آب مایع، یخ جامد و بخار آب (آب به حالت گاز) فقط به‌ازای مقدارهای خاصی از فشار و دما می‌توانند در کنار یکدیگر و در تعادل گرمایی وجود داشته باشند. شکل ۱۴-۴ یک محفظهٔ نقطهٔ سه‌گانه را نشان می‌دهد که در آن می‌توان نقطهٔ سه‌گانهٔ آب را در آزمایشگاه به وجود آورد. با توافق جهانی به نقطهٔ سه‌گانهٔ آب مقدار $۲۷۳/۱۶K$ به عنوان دمای نقطهٔ ثابت استاندارد برای کالیبراسیون دماسنجها نسبت داده شده است؛ یعنی

$$T_۳ = ۲۷۳/۱۶\,K \qquad \text{(دمای نقطهٔ سه‌گانه)} \qquad (۱۴-۱)$$

که در آن زیر نویس ۳ نشان دهندهٔ «نقطهٔ سه‌گانه» است. این توافق همچنین اندازهٔ کلوین را به صورت ۱/۲۷۳/۱۶ برابر اختلاف میان صفر مطلق و دمای نقطهٔ سه‌گانه آب تعریف می‌کند.




**شکل ۱۴-۴** یک محفظهٔ نقطهٔ سه‌گانه که در آن یخ جامد، آب مایع و بخار آب در کنار هم در تعادل گرمایی‌اند. با توافق جهانی دمای این آمیزه $۲۷۳/۱۶\,K$ تعریف شده است. مخزن یک دماسنج گازی با حجم ثابت واقع در فرورفتگی محفظه نشان داده شده است.

توجه کنید که در نمایش دماهای کلوین از علامت درجه استفاده نمی‌شود، پس $۳۰۰K$ (نه $۳۰۰°K$) و خوانده می‌شود «۳۰۰ کلوین» (نه ۳۰۰ درجهٔ کلوین). در ضمن پیشوندهای معمول در SI هم مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین، $۰/۰۰۳۵K$ همان $۳/۵mK$ است. هیچ فرقی میان اصطلاحهای مربوط به دماهای کلوین و اختلافهای دما وجود ندارد، بنابراین می‌توان نوشت «نقطهٔ جوش گوگرد $۷۱۷/۸K$ است» و «دمای آب این حمام $۸/۵K$ بالا رفته است.»

## دماسنج گازی با حجم ثابت

دماسنج استانداردی که تمام دماسنجها با آن کالیبره می‌شوند، مبتنی بر فشار گاز در یک حجم معین است. شکل ۱۴-۵ این **دماسنج گازی با حجم ثابت** را نشان می‌دهد؛ که شامل یک محفظهٔ پر شده از گاز است که به وسیلهٔ لوله‌ای به یک فشارسنج جیوه‌ای متصل شده است. با بالا بردن و پایین آوردن مخزن $R$، همواره می‌توان سطح جیوه را در لولهٔ سمت چپ U شکل به صفر مقیاس رساند تا حجم گاز ثابت بماند (تغییر در حجم گاز بر اندازه‌گیری دما تأثیر می‌گذارد).

بنابراین دمای هر جسمی که در تماس گرمایی با محفظه باشد (مانند مایع اطراف محفظه در شکل ۱۴-۵) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T = C\,p \qquad (۱۴-۲)$$

که در آن $p$ فشار وارد شده توسط گاز و $C$ یک ثابت است. از معادلهٔ ۳۰-۱۰، فشار $p$ عبارت است از

$$p = p_۰ - \rho g h \qquad (۱۴-۳)$$

که در آن $p_۰$ فشار جو، $\rho$ چگالی جیوه در فشارسنج و $h$ اختلاف سطح اندازه‌گیری شدهٔ جیوه در دو شاخهٔ لوله است[1]. (علامت منفی در معادلهٔ ۱۴-۳ بدان معناست که فشار $p$ *بالاتر* از سطحی اندازه‌گیری می‌شود که در آن فشار $p_۰$ است).

اکنون، اگر مخزن دماسنج در محفظهٔ نقطهٔ سه‌گانه قرار داده شود، دمای اندازه‌گیری شده عبارت است از

$$T_۳ = C\,p_۳ \qquad (۱۴-۴)$$

که در آن $p_۳$ فشار فعلی گاز است. با حذف $C$ بین معادله‌های ۱۴-۲ و ۱۴-۴ دما به صورت زیر به‌دست می‌آید

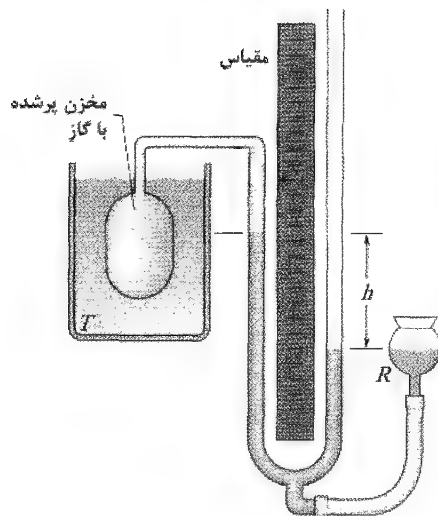
$$T = T_۳\left(\frac{p}{p_۳}\right) = (۲۷۳/۱۶K)\left(\frac{p}{p_۳}\right) \qquad \text{(موقت)} \qquad (۱۴-۵)$$

هنوز مشکلی با این دماسنج وجود دارد. اگر از این دماسنج برای اندازه‌گیری مثلاً نقطهٔ جوش آب استفاده کنیم، در می‌یابیم که گازهای مختلف درون مخزن، نتیجه‌های تقریباً متفاوتی به دست می‌دهند. ولی اگر از مقدارهای کم و کمتر گاز برای پر کردن مخزن استفاده کنیم، مقدارهای خوانده شده به سمت یک دمای واحد همگرا می‌شوند که به نوع گاز مورد استفاده بستگی ندارد. شکل ۱۴-۶ این همگرایی را برای سه گاز نشان می‌دهد.

---

۱. در مورد یکاهای فشار باید از یکاهای داده شده در بخش ۳۰-۳ استفاده کنیم. یکاهای SI فشار نیوتون بر متر مربع است، که پاسکال (Pa) نامیده می‌شود. پاسکال با رابطهٔ زیر به یکاهای دیگر فشار مربوط است

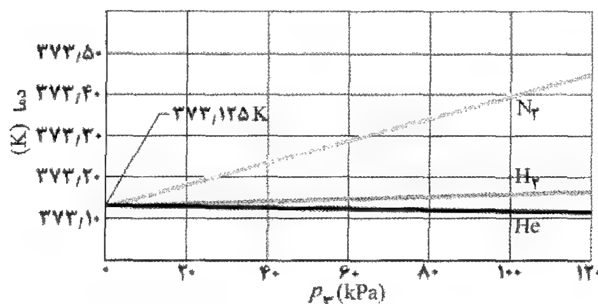
$$۱\,atm = ۱/۰۱ \times ۱۰^۵\,Pa = ۷۶۰\,torr = ۱۴/۷\,lb/in^۲.$$




**شکل ۱۴-۵** دماسنج گازی با حجم ثابت، که مخزن آن در مایعی فرو برده شده است که می‌خواهیم دمای $T$ آن را اندازه بگیریم.

بنابراین روش کار برای اندازه‌گیری دما با دماسنج گازی عبارت است از

$$T=(\text{۲۷۳/۱۶K})\left(\lim_{\text{gas}\to \text{۰}}\frac{p}{p_{\text{۳}}}\right) \qquad (\text{۱۴-۶})$$




**شکل ۱۴-۶** دماهای اندازه‌گیری شده توسط یک دماسنج گازی با حجم ثابت، که مخزن آن در آب جوش فرو برده شده است. جهت محاسبهٔ دما با استفاده از معادلهٔ ۱۴-۵، فشار $p_۳$ در نقطهٔ سه‌گانهٔ آب اندازه‌گیری شده است. سه گاز مختلف در مخزن دماسنج عموماً سه نتیجه مختلف در سه فشار مختلف گاز به دست می‌دهند، ولی وقتی مقدار گاز کم شود (با کم شدن $p_۳$)، هر سه منحنی در نقطهٔ ۳۷۳/۱۲۵ K همگرا می‌شوند.

با توجه به این روش برای اندازه‌گیری دمای نامعلوم $T$ به این صورت عمل می‌کنیم: مخزن دماسنج را با مقدار دلخواهی از هر گاز (مثلاً نیتروژن) پر می‌کنیم و فشار $p_3$ (با استفاده از یک محفظهٔ نقطهٔ سه‌گانه) و $p$ فشار گاز، در دمای آزمایش را اندازه می‌گیریم. (حجم گاز را ثابت نگه می‌داریم.) نسبت $p/p_۳$ را محاسبه می‌کنیم. سپس اندازه‌گیریها را با مقدار کمتری از گاز در مخزن تکرار می‌کنیم و دوباره این نسبت را محاسبه می‌کنیم. این کار را با استفاده از مقدار کمتر و کمتر گاز تکرار می‌کنیم، تا آنکه بتوانیم نسبت $p/p_۳$ را در وقتی که تقریباً هیچ گازی درون مخزن وجود ندارد برونیابی کنیم. با قرار دادن این نسبت برونیابی شده در معادلهٔ ۱۴-۶ دمای $T$ را محاسبه می‌کنیم. (این دما *دمای گاز آرمانی* نامیده می‌شود.)

## ۱۴-۵ مقیاسهای سلسیوس و فارنهایت

تاکنون فقط دربارهٔ مقیاس کلوین بحث کردیم که در کارهای علمی پایه به کار می‌رود. تقریباً در همه کشورهای جهان مقیاس سلسیوس (که پیشتر سانتی‌گراد نامیده می‌شد) مقیاسی است که برای استفاده‌های عمومی و اقتصادی و بیشتر استفاده‌های علمی انتخاب شده است. دماهای سلسیوس برحسب درجه اندازه‌گیری می‌شوند و درجهٔ سلسیوس همان اندازهٔ کلوین را دارد. اما صفر مقیاس سلسیوس، نسبت به صفر مطلق به جای مناسبتری انتقال داده شده است. اگر $T_C$ دمای سلسیوس و $T$ دمای کلوین باشد، آنگاه

$$T_C = T - \text{۲۷۳/۱۵}^\circ \qquad (\text{۱۴-۷})$$

در بیان دماها در مقیاس سلسیوس، معمولاً از نماد درجه استفاده می‌شود. بنابراین، در مقیاس سلسیوس می‌نویسیم ۲۰/۰۰°C که در مقیاس کلوین آن را به صورت ۲۹۳/۱۵K می‌نویسیم.

مقیاس فارنهایت، که در امریکا به کار برده می‌شود، نسبت به مقیاس سلسیوس از درجهٔ کوچکتری استفاده می‌کند و دمای صفر آن متفاوت است. این اختلافها را با در نظر گرفتن یک دماسنج معمولی در اتاق که روی آن هر دو مقیاس نشانه‌گذاری شده‌اند، به آسانی می‌توان بررسی کرد. رابطهٔ میان مقیاسهای سلسیوس و فارنهایت به صورت زیر است

$$T_F = \frac{\text{۹}}{\text{۵}}T_C + \text{۳۲}^\circ \qquad (\text{۱۴-۸})$$

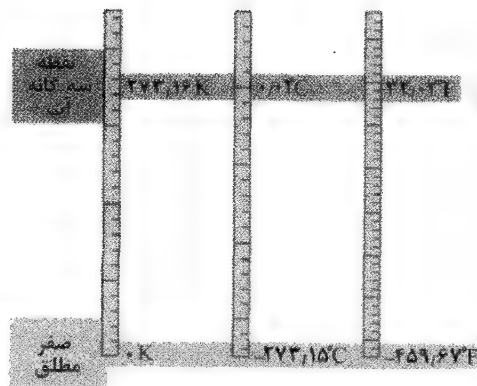
در آن $T_F$ دمای فارنهایت است. تبدیل بین این دو مقیاس را با در نظر گرفتن چند نقطه، مانند نقطه‌های انجماد و جوش آب (جدول ۱۴-۱) به آسانی می‌توان انجام داد. در شکل ۱۴-۷ مقیاسهای کلوین، سلسیوس و فارنهایت مقایسه شده‌اند.

**جدول ۱۴-۱**

چند دمای مربوط به هم

| دما | °C | °F |
|---|---|---|
| نقطه جوش آب* | ۱۰۰ | ۲۱۲ |
| دمای طبیعی بدن | ۳۷/۰ | ۹۸/۶ |
| دمای مناسب محیط زندگی | ۲۰ | ۶۸ |
| نقطهٔ انجماد آب* | ۰ | ۳۲ |
| صفر مقیاس فارنهایت | ۱۸-≈ | ۰ |
| دمای انطباق مقیاسها | ۴۰- | ۴۰- |

*- نقطهٔ جوش آب در مقیاس سلسیوس ۹۹/۹۷۵ °C و نقطهٔ انجماد آب ۰/۰۰°C است. بنابراین، فاصله بین این دو نقطه اندکی کمتر از ۱۰۰°C است.




**شکل ۱۴–۷** مقیاسهای دمایی کلوین، سلسیوس و فارنهایت مقایسه شده‌اند.

حروف C و F را برای تمایز اندازه‌گیریها و درجه‌های دو مقیاس به کار می‌بریم. پس

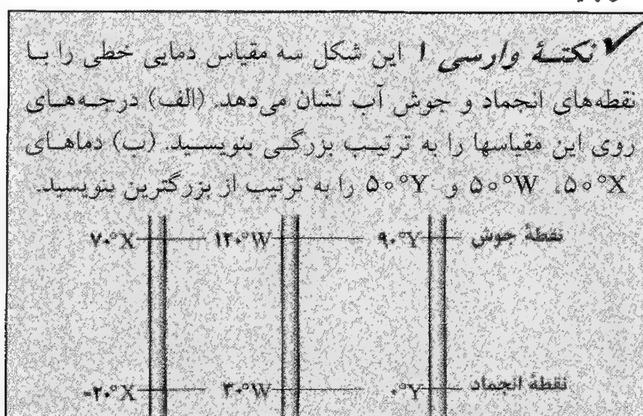
$$0°C = 32°F$$

بدان معناست که صفر درجهٔ مقیاس سلسیوس، در مقیاس فارنهایت همان دما را ۳۲° اندازه‌گیری می‌کند، در حالی که

$$5\ C° = 9\ F°$$

بدان معناست که اختلاف دمای پنج درجهٔ سلسیوس ( به نماد درجه پس از C توجه کنید) معادل با اختلاف دمای نه درجهٔ فارنهایت است.

**نکتهٔ وارسی ۱** این شکل سه مقیاس دمایی خطی را با نقطه‌های انجماد و جوش آب نشان می‌دهد. (الف) درجه‌های روی این مقیاسها را به ترتیب بزرگی بنویسید. (ب) دماهای $50°X$، $50°W$ و $50°Y$ را به ترتیب از بزرگترین بنویسید.




## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۴–۱

فرض کنید که به یک نوشته علمی قدیمی برخورد کرده‌اید که یک مقیاس دمایی به نام Z را توصیف می‌کند که در آن نقطهٔ جوش آب $65/0°Z$ و نقطهٔ انجماد آن $-14/0°Z$ است. چه دمایی در مقیاس فارنهایت متناظر با دمای $T = -98/0°Z$ است؟ فرض کنید که مقیاس Z خطی است؛ یعنی اندازهٔ یک درجهٔ Z در همه جای مقیاس Z یکسان است.

**نکته کلیدی** یک ضریب تبدیل بین دو مقیاس دمایی (خطی) را با استفاده از دو دمای معلوم (نشانه)، مانند نقطه‌های جوش و انجماد آب می‌توان محاسبه کرد. تعداد درجه‌های بین دماهای معلوم در یک مقیاس معادل با تعداد درجه‌های بین آنها در مقیاس دیگر است.

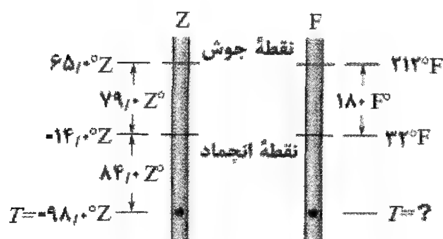
***محاسبه‌ها:*** با ارتباط دادن دمای داده شده $T$ به هر دمای معلوم در مقیاس Z شروع می‌کنیم. چون $T = -98/0°Z$ به نقطهٔ انجماد ($-14/0°Z$) نزدیکتر از نقطهٔ جوش ($65/0°Z$) است، از نقطهٔ انجماد استفاده می‌کنیم. پس توجه داریم که $T$ به اندازهٔ $-14/0°Z - (-98/0°Z) = 84/0Z°$ *زیر این نقطه* قرار دارد (شکل ۱۴–۸). (این اختلاف دما را به صورت "$84/0Z$ درجه" بخوانید.)

سپس ضریب تبدیل بین مقیاسهای Z و فارنهایت را تعیین می‌کنیم تا بتوان این مقدار اختلاف را تبدیل کرد. برای این کار هر دو دمای معلوم در مقیاس Z و دماهای متناظر در مقیاس فارنهایت را به کار می‌بریم. در مقیاس Z، اختلاف بین نقطه‌های جوش و انجماد برابر با $65/0°Z - (-14/0°Z) = 79/0Z°$ است. در مقیاس فارنهایت، مقدار این اختلاف عبارت است از $212°F - 32/0°F = 180F°$. بنابراین، اختلاف دمای $79/0Z°$ معادل با اختلاف دمای $180F°$ است (شکل ۱۴–۸)، و می‌توانیم نسبت $(180F°)/(79/0Z°)$ را به عنوان ضریب تبدیل به کار ببریم.

حال چون $T$ به اندازهٔ $84/0Z°$ زیر نقطهٔ انجماد قرار دارد، پس باید به اندازهٔ

$$(84/0Z°)\frac{180F°}{79/0Z°} = 191F°$$

زیر نقطهٔ انجماد باشد.




**شکل ۱۴–۸** یک مقیاس نامعلوم دما با مقیاس دمای فارنهایت مقایسه شده است.

چون نقطهٔ انجماد در $32/0°F$ قرار دارد، این بدان معناست که

$$T = 32/0°F - 191F° = -159°F \qquad \text{(پاسخ)}$$

# تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱: تغییرهای دما*

اختلاف بین نقطهٔ جوش و نقطهٔ انجماد آب، (تقریباً) ۱۰۰ کلوین و ۱۰۰ درجهٔ سلسیوس است. بنابراین، اندازهٔ یک کلوین برابر با اندازهٔ یک درجهٔ سلسیوس است. از این موضوع یا از معادلهٔ ۱۴–۷، معلوم است که هر تغییر دمایی برحسب کلوین یا درجهٔ سلسیوس عدد یکسانی است. برای مثال، تغییر دمای $10K$ به طور دقیق معادل با تغییر دمای $10C°$ است.

اختلاف بین نقطهٔ جوش و نقطهٔ انجماد آب، ۱۸۰ درجهٔ فارنهایت است. بنابراین، $180\,F^\circ = 100\,K$ و یک درجهٔ فارنهایت برابر با $\frac{100}{180}$ یا $\frac{5}{9}$ برابر اندازهٔ یک کلوین یا یک درجهٔ سلسیوس است. از این موضوع یا از معادلهٔ ۱۴-۸ معلوم است که هر تغییر دمایی برحسب درجهٔ فارنهایت باید $\frac{9}{5}$ برابر همان تغییر دما برحسب کلوین یا درجهٔ سلسیوس باشد. برای مثال تغییر دمای $10\,K$ برابر با $10\,K(9/5)$ یا $18\,F^\circ$ است.

دقت کنید که *دما* را با *تغییر* یا *اختلاف* دما اشتباه نگیرید. دمای $10\,K$ قطعاً همان $10^\circ C$ یا $18^\circ F$ نیست ولی همانطور که در بالا گفته شد، *تغییر* دمای $10\,K$ برابر با $10\,C^\circ$ یا $18\,F^\circ$ است. این تمایز، در معادله‌ای که به جای تغییر دما یا اختلاف دمای $T_2 - T_1$، شامل $T$ باشد بسیار مهم است: اصولاً دمای $T$ باید برحسب کلوین بیان شود نه سلسیوس یا فارنهایت. خلاصه اینکه مواظب "$T$ تنها" باشید.

## ۱۴-۶ انبساط گرمایی

اگر درپوش فلزی محکم یک ظرف شیشه‌ای را زیر بخار آب گرم بگیریم شل می‌شود. هم فلز درپوش و هم شیشهٔ ظرف با دادن انرژی به اتمهایشان منبسط می‌شوند. (با اضافه شدن انرژی اتمها در برابر نیروهای بین اتمی فنر گونه که هر جامدی را پایدار نگه می‌دارد، اندکی از یکدیگر نسبت به حالت معمولی دور می‌شوند.) ولی چون اتمهای فلز بیشتر از اتمهای شیشه از هم دور می‌شوند، درپوش ظرف انبساط بیشتری می‌یابد و در نتیجه شل می‌شود.

**انبساط گرمایی** مواد با افزایش دما در بسیاری از وضعیتهای عمومی باید قابل پیش بینی باشد. برای مثال، هرگاه پلی در معرض تغییرهای زیاد فصلی دما باشد، بخشهایی از پل را با شکافهای انبساطی از یکدیگر فاصله می‌دهند به طوری که در روزهای گرم فضاهایی برای انبساط وجود داشته باشند تا پل تاب برندارد. وقتی دندانی پر می‌شود، مادهٔ پر کننده حتماً باید خواص انبساط گرمایی یکسانی با دندان داشته باشد، در غیر این صورت به هنگام مصرف بستنی و چای گرم کاملاً دردناک خواهد بود. وقتی هواپیمای کنکورد (شکل ۱۴-۹) ساخته می‌شد، طوری طراحی شده بود که انبساط گرمایی بدنه بر اثر گرم شدن به‌دلیل اصطکاک ناشی از عبور هوا در ضمن پرواز فرا صوتی امکان پذیر باشد.

از خواص گرمایی برخی از مواد می‌توان در کاربردهای معمولی استفاده کرد. دماسنجها و دماپاها بر اختلاف در انبساط بین اجزای یک *نوار دو فلزه* استوارند (شکل ۱۴-۱۰). همچنین دماسنجهای آشنای مایع در شیشه بر این واقعیت مبتنی هستند که مایعهایی مانند جیوه و الکل نسبت به ظرف شیشه‌ای حاوی آنها انبساط متفاوتی (بیشتری) دارند.



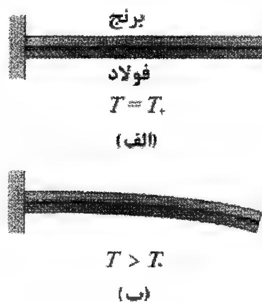
**شکل ۱۴-۹** وقتی کنکورد با سرعت بیش از تندی صوت حرکت کند، انبساط گرمایی بر اثر اصطکاک ناشی از عبور هوا طول هواپیما را تقریباً ۱۲/۵ cm زیاد می‌کند. (دما در دماغهٔ هواپیما تقریباً تا ۱۲۸ C افزایش می‌یابد و در دم آن تقریباً به ۹۰ C می‌رسد، و پنجره‌های اتاق آن به اندازهٔ قابل توجهی گرم می‌شوند به طوری که با دست قابل احساس است.)

### انبساط خطی

اگر دمای یک میلهٔ فلزی به طول $L$ به اندازه $\Delta T$ افزایش یابد، طول آن به اندازهٔ

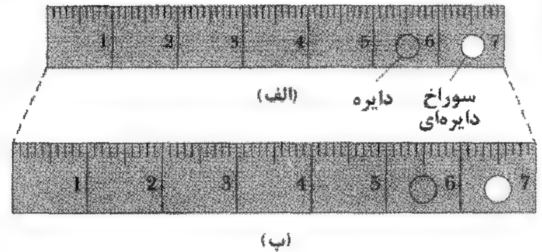
$$\Delta L = L\alpha\Delta T \qquad (14\text{-}9)$$

افزایش می‌یابد، که در آن $\alpha$ مقداری ثابت است که **ضریب انبساط خطی** نام دارد. یکای ضریب $\alpha$ «بر درجه» یا «بر کلوین» است و به جنس ماده بستگی دارد. هر چند که $\alpha$ با دما تا اندازه‌ای تغییر می‌کند، ولی برای بسیاری از موارد عملی برای مادهٔ معینی آن را ثابت در نظر می‌گیرند. جدول ۱۴-۲ چند ضریب انبساط خطی را نشان می‌دهد. توجه کنید که به جای یکای $C^\circ$ می‌توان از یکای K هم استفاده کرد.




**شکل ۱۴-۱۰** (الف) یک نوار دو فلزه، مرکب از یک نوار برنجی و یک نوار فولادی که در دمای $T_0$ به یکدیگر جوش داده شده‌اند. (ب) در دماهای بالاتر از این دمای مرجع، نوارها به صورت نشان داده شده خم می‌شوند. در دماهای کمتر از دمای مرجع، نوار به طرف دیگر خم می‌شود. بسیاری از دماپاها بر این اساس کار می‌کنند، که یک تماس الکتریکی را با افزایش یا کاهش دما قطع یا وصل می‌کنند.

انبساط گرمایی یک جسم جامد مانند بزرگ سازی تصویر در عکاسی است به جز اینکه آن در سه بعد انجام می‌شود. شکل ۱۴-۱۱ ب انبساط گرمایی (مبالغه شده) یک خط کش فولادی را نشان می‌دهد. معادلهٔ ۱۴-۹ برای هر بعد خطی خط‌کش، نظیر لبه، ضخامت، و قطرهای دایرهٔ حک شده روی خط‌کش و در حفره دایره‌ای بریده شده در آن برقرار است. اگر قرص در آورده شده در یک دمایی به راحتی در جای اول خود قرار گیرد، وقتی دمای خط‌کش و قرص به یک اندازه افزایش یابند، باز هم قرص به راحتی در جای خود قرار می‌گیرد.




**شکل ۱۴-۱۱** یک خط‌کش فولادی در دو دمای مختلف. هنگامی که خط‌کش منبسط می‌شود، درجه بندی، عددها، ضخامت، و قطرهای دایره حک شده و سوراخ دایره‌ای به یک نسبت افزایش می‌یابند (برای روشن شدن مطلب، انبساط مبالغه آمیز نشان داده شده است.)

**جدول ۱۴-۲**

چند ضریب انبساط خطی[1]

| ماده | $\alpha(10^{-6}/C^\circ)$ | ماده | $\alpha(10^{-6}/C^\circ)$ |
|---|---|---|---|
| یخ (در $0^\circ C$) | ۵۱ | فولاد | ۱۱ |
| سرب | ۲۹ | شیشه (معمولی) | ۹ |
| آلومینیوم | ۲۳ | شیشه(پیرکس) | ۳/۲ |
| برنج | ۱۹ | الماس | ۱/۲ |
| مس | ۱۷ | اینوار[2] | ۰/۷ |
| بتون | ۱۲ | کوارتز مذاب | ۰/۵ |

۱- به جز مورد یخ مقدارهای دیگر جدول در دمای اتاق است.
۲- این آلیاژ به خاطر داشتن ضریب انبساط کم ساخته شده است. این واژه مخفف "invariable" به معنی تغییر ناپذیر است.

## *انبساط حجمی*

اگر همهٔ ابعاد جسم جامدی با دما منبسط شود، حجم آن جسم نیز باید انبساط یابد. در مورد مایعها، انبساط حجمی تنها عامل معنی‌دار در انبساط است. اگر دمای جامد یا مایعی که حجم آن $V$ است به اندازهٔ $\Delta T$ افزایش یابد، افزایش در حجم آن عبارت است از

$$\Delta V = V\beta \Delta T \qquad (14\text{-}10)$$

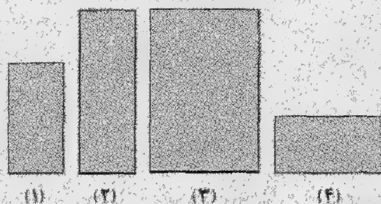
که $\beta$ **ضریب انبساط حجمی** جامد یا مایع است. ضریبهای انبساط حجمی و انبساط خطی یک جسم جامد با رابطهٔ زیر به هم مربوط‌اند

$$\beta = 3\alpha \qquad (14\text{-}11)$$

آب، معمولترین مایع، مانند سایر مایعها رفتار نمی‌کند. تقریباً بالاتر از $4^\circ C$، همانطور که انتظار داریم آب بر اثر افزایش دما منبسط می‌شود. ولی بین ۰ و $4^\circ C$، با افزایش دما آب منقبض می‌شود. بنابراین، در $4^\circ C$ چگالی آب تقریباً به یک مقدار بیشینه می‌رسد. در همهٔ دماهای دیگر، چگالی آب کمتر از این مقدار بیشینه است.

به دلیل همین رفتار آب است که دریاچه‌ها به جای یخ زدن از پایین به بالا، از بالا به پایین یخ می‌زنند. هنگامی که آب سطح مثلاً از $10^\circ C$ شروع به سرد شدن تا نقطهٔ انجماد می‌کند، این آب چگالتر ("سنگینتر") از آب پایینتر است و بنابراین به پایین فرو می‌رود. اما در دمای پایینتر از $4^\circ C$، کاهش دما باعث می‌شود که آب سطح نسبت به آب پایینتر کم چگالتر ("سبکتر") شود، به طوری که روی آب می‌ماند تا یخ بزنند. بنابراین، در حالی که آب زیر هنوز مایع است آب سطح یخ می‌زند. اگر آب دریاچه‌ها از پایین به بالا یخ می‌زدند، چون آب روی آن به صورت عایق در می‌آمد، یخ تشکیل شده، در طی تابستان به طور کامل نمی‌توانست آب شود. پس از چند سالی، بسیاری از آبهای روباز در نواحی معتدل زمین در طول سال منجمد می‌شد و همان طور که می‌دانیم آبزیان نمی‌توانستند زنده بمانند.

✔ ***نکتهٔ وارسی ۲*** شکل چهار صفحهٔ فلزی مستطیل شکل به ضلعهای $L$، $2L$ یا $3L$ را نشان می‌دهد. همهٔ آنها از یک جنس ساخته شده‌اند و دمای آنها تا یک مقدار افزایش داده می‌شود. این صفحه‌ها را به ترتیب افزایش مورد انتظار (الف) ارتفاع آنها و (ب) مساحت آنها از بیشترین تا کمترین مرتب کنید.




**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۴-۲**

در یک روز گرم یک تانکر حامل سوخت با $37000\,L$ سوخت دیزل بارگیری شده است. راننده در مسیر خود با هوای سردی روبه‌رو می‌شود که $23/0\,K$ کمتر از دمای محلی است که سوخت را بار زده است. او چند لیتر سوخت تحویل می‌دهد؟ ضریب انبساط حجمی سوخت دیزل $9/50\times10^{-4}/C^\circ$ و ضریب انبساط خطی تانکر فولادی $11\times10^{-6}/C^\circ$ است.

**نکتهٔ کلیدی** حجم سوخت به طور مستقیم به دما بستگی دارد. بنابراین، چون دما کاهش یافته، حجم سوخت نیز که با معادلهٔ ۱۴-۱۰ ($\Delta V = V\beta\Delta T$) داده می‌شود کم شده است.

***محاسبه‌ها:*** داریم

$$\Delta V = (۳۷۰۰۰\,\mathrm{L})(۹/۵۰\times۱۰^{-۴}/\mathrm{C}°)(-۲۳/۰\,\mathrm{K}) = -۸۰۸\,\mathrm{L}$$

پس مقدار تحویل داده شده عبارت است از

$$V_{\mathrm{del}} = V + \Delta V = ۳۷۰۰۰\,\mathrm{L} - ۸۰۸\,\mathrm{L} = ۳۶۱۹۰\,\mathrm{L}$$ (پاسخ)

توجه کنید که انبساط گرمایی تانکر فولادی در مسئله وارد نشده است. پرسش: بهای سوخت دیزل «از دست رفته» را چه کسی باید بپردازد؟

## ۱۴-۷ دما و گرما

اگر قوطی نوشابه‌ای را از یخچال در بیاورید و آن را روی میز بگذارید، دمای قوطی نوشابه، در آغاز به تندی و سپس به آرامی، بالا می‌رود تا با دمای اتاق مساوی شود (در این موقع این دو در تعادل گرمایی‌اند). به همین ترتیب، دمای یک فنجان چای با قرار دادن آن روی میز کاهش می‌یابد تا به دمای اتاق برسد.

در تعمیم این موضوع، نوشابه یا چای را به عنوان *دستگاه* (با دمای $T_S$) و بخشهای مربوط به اتاق را به عنوان *محیط* (با دمای $T_E$) آن دستگاه در نظر می‌گیریم. مشاهدهٔ ما این است که اگر $T_S$ برابر با $T_E$ نباشد، آنگاه $T_S$ تغییر می‌کند ( $T_E$ نیز ممکن است اندکی تغییر کند) تا دو دما با یکدیگر برابر شوند و به تعادل گرمایی برسند.

چنین تغییری در دما ناشی از تغییر در انرژی گرمایی دستگاه است که به دلیل انتقال انرژی بین دستگاه و محیط صورت گرفته است. (به خاطر بیاورید که *انرژی گرمایی* یک انرژی درونی است که مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل مربوط به حرکتهای کاتوره‌ای اتمها، مولکولها و اجزای میکروسکوپی دیگر داخل جسم است.) انرژی مبادله شده **گرما** نام دارد و با نماد $Q$ نشان داده می‌شود. گرما وقتی *مثبت* است که انرژی گرمایی از محیط به دستگاه انتقال یابد (می‌گوییم گرما توسط دستگاه جذب شده است.) گرما وقتی *منفی* است که انرژی گرمایی از دستگاه به محیط آن انتقال یابد (می‌گوییم گرما آزاد یا تلف شده است).

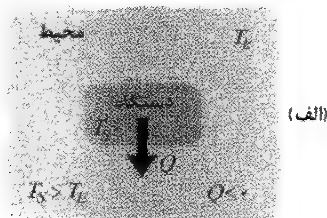
این انتقال انرژی در شکل ۱۴-۱۲ نشان داده شده است. در وضعیت شکل ۱۴-۱۲ الف، که در آن $T_S > T_E$ ، انرژی از دستگاه به محیط انتقال می‌یابد، پس $Q$ منفی است. در شکل ۱۴-۱۲ ب، که در آن $T_S = T_E$، چنین انتقالی وجود ندارد، یعنی $Q$ صفر است و گرما نه جذب شده و نه آزاد شده است. در شکل ۱۴-۱۲ پ، که در آن $T_S < T_E$، انرژی از محیط به دستگاه انتقال یافته؛ پس $Q$ مثبت است.

بنابراین، به تعریف زیر گرما رهنمون می‌شویم

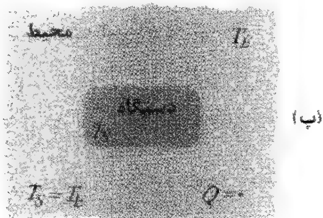
☜ گرما انرژی مبادله شده بین یک دستگاه و محیط پیرامون آن است که به علت اختلاف دمای بین آن دو صورت می‌گیرد.

توجه داشته باشید که انرژی می‌تواند از طریق نیروی وارد بر دستگاه هم به صورت *کار* $W$ بین دستگاه و محیط آن مبادله شود. گرما و کار برخلاف دما، فشار و حجم از خواص ذاتی یک دستگاه نیستند. اینها فقط وقتی معنی دارند که انرژی منتقل شده به یک دستگاه یا خارج شده از آن را توصیف می‌کنند. به همین ترتیب جملهٔ «انتقال مقداری پول» وقتی معنی خواهد داشت که انتقال به حساب یا از حسابی را توصیف کند، نه آنچه را که در حساب است، زیرا حساب نگه دارندهٔ پول است نه انتقال آن. در اینجا مناسب است گفته شود: «در مدت ۳ دقیقه، ۱۵ J گرما از محیط به دستگاه انتقال یافته است» یا «در یک دقیقه گذشته، ۱۲ J کار توسط محیط روی دستگاه انجام شده است». این بی معناست که گفته شود: «این دستگاه ۴۵۰ J گرما دارد» یا «این دستگاه شامل ۳۸۵ J کار است».

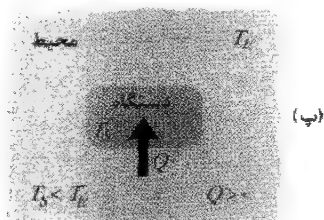
(الف)




(ب)




(پ)




**شکل ۱۴-۱۲** اگر دمای دستگاهی بیشتر از محیط باشد مانند (الف) گرمای $Q$ از دستگاه به محیط داده می‌شود تا در حالت (ب) به تعادل گرمایی برسد. (پ) اگر دمای دستگاه کمتر از دمای محیط باشد، گرما توسط دستگاه جذب می‌شود تا تعادل گرمایی برقرار شود.

پیش از آنکه دانشمندان پی ببرند که گرما انرژی انتقال یافته است، گرما برحسب توانایی آن برای افزایش دمای آب اندازه‌گیری می‌شد. بنابراین **کالری** (cal) به صورت مقدار

گرمایی که دمای 1g آب را از ۱۴/۵°C تا ۱۵/۵°C بالا می‌برد، تعریف می‌شد. در دستگاه بریتانیایی، یکای مربوط به گرما **یکای بریتانیایی گرما** (Btu) است که به صورت مقدار گرمایی که دمای یک پوند آب را از ۶۳°F تا ۶۴°F بالا می‌برد تعریف شده است.

از آنجا که گرما (مانند کار) انرژی مبادله شده است، در سال ۱۹۴۸/۱۳۲۷ جامعهٔ علمی تصمیم گرفت که یکای SI گرما بهتر است همان یکای انرژی- یعنی **ژول** باشد. امروزه کالری، بدون آنکه سخنی از گرم کردن آب باشد، برابر با 4/1868 J (به طور دقیق) تعریف شده است. («کالری» که در تغذیه به کار می‌رود، گاهی کالری بزرگ (Cal) نامیده می‌شود که در واقع برابر یک کیلو کالری است.) رابطه‌های بین یکاهای مختلف گرما عبارت‌اند از:

$$1\,\text{cal} = 3/969\times10^{-3}\ \text{Btu} = 4/1868\ \text{J} \qquad (12-14)$$

## ۱۴-۸ جذب گرما توسط جامدها و مایعها

### ظرفیت گرمایی

**ظرفیت گرمایی** $C$ یک جسم عبارت است از ثابت تناسب بین گرمای $Q$ که جسم جذب می‌کند یا از دست می‌دهد و تغییر دمای حاصل شدهٔ $\Delta T$ آن جسم؛ یعنی

$$Q = C\Delta T = C(T_f - T_i) \qquad (13-14)$$

که در آن $T_i$ و $T_f$ دماهای اولیه و نهایی جسم هستند. یکای ظرفیت گرمایی $C$، انرژی بر درجه یا انرژی بر کلوین است. ظرفیت گرمایی $C$ مثلاً یک تخته سنگ مرمر به کار رفته در یک گرم کننده ممکن است 179 cal/C° باشد، که آن را به صورت 179 cal/K یا به صورت 747 J/K نیز می‌توان نوشت.

واژهٔ «ظرفیت» در این متن در واقع گمراه کننده است زیرا به نظر می‌رسد که شبیه گنجایش یک سطل برای جابه‌جا کردن آب است. *این قیاس نادرست است،* و شما نباید فکر کنید که جسم «دربر دارندهٔ» گرما یا محدود کنندهٔ توانایی آن برای جذب گرماست. انتقال گرما بدون هیچ محدودیتی تا جایی که اختلاف دمایی وجود داشته باشد انجام می‌گیرد. البته جسم ممکن است در ضمن این فرایند ذوب یا بخار شود.

### گرمای ویژه

ظرفیتهای گرمایی دو جسمی که از یک جنس ساخته شده‌اند، مثل مرمر، با جرمهایشان متناسب است. بنابراین، بهتر است که «ظرفیت گرمایی یکای جرم» یا **گرمای ویژهٔ** $c$ را تعریف کنیم که نه به جسم بلکه به یکای جرم ماده‌ای که جسم از آن ساخته شده، بستگی دارد. بنابراین معادلهٔ ۱۴-۱۳ به صورت زیر در می‌آید

$$Q = cm\Delta T = cm(T_f - T_i) \qquad (14-14)$$

با تجربه می‌توان دریافت که اگر چه ظرفیت گرمایی مرمر نوعی گفته شده 179 cal/C° (یا 749 J/K) است، گرمای ویژهٔ خود مرمر (در یک تخته سنگ یا هر نوع جسم مرمری دیگر) 0/21 cal/g·C° (یا 880 J/kg·K) است.

از راهی که کالری و یکای گرمایی بریتانیایی در آغاز تعریف شدند، گرمای ویژهٔ آب برابر است با

$$c = 1\ \text{cal/g}\cdot\text{C}° = 1\ \text{Btu/lb}\cdot\text{F}° = 4190\ \text{J/kg}\cdot\text{K} \qquad (15-14)$$

جدول ۱۴-۳ گرمای ویژه چند جسم را در دمای اتاق نشان می‌دهد. توجه کنید که مقدار آن برای آب نسبتاً زیاد است. گرمای ویژه هر نوع ماده‌ای در واقع تا اندازه‌ای به دما بستگی دارد، ولی اندازه‌های جدول ۱۴-۳ در گسترهٔ دماهای نزدیک به دمای اتاق کاربرد قابل قبولی دارند.

**جدول ۱۴-۳**

گرمای ویژه چند ماده در دمای اتاق

| ماده | گرمای ویژه cal/g·K | گرمای ویژه J/kg·K | گرمای ویژهٔ مولی J/mol·K |
|---|---|---|---|
| *عنصرهای جامد* | | | |
| سرب | ۰/۰۳۰۵ | ۱۲۸ | ۲۶/۵ |
| تنگستن | ۰/۰۳۲۱ | ۱۳۴ | ۲۴/۸ |
| نقره | ۰/۰۵۶۴ | ۲۳۶ | ۲۵/۵ |
| مس | ۰/۰۹۲۳ | ۳۸۶ | ۲۴/۵ |
| آلومینیوم | ۰/۲۱۵ | ۹۰۰ | ۲۴/۴ |
| *جامدهای دیگر* | | | |
| برنج | ۰/۰۹۲ | ۳۸۰ | |
| گرانیت | ۰/۱۹ | ۷۹۰ | |
| شیشه | ۰/۲۰ | ۸۴۰ | |
| یخ (−۱۰°C) | ۰/۵۳۰ | ۲۲۲۰ | |
| *مایعها* | | | |
| جیوه | ۰/۰۳۳ | ۱۴۰ | |
| الکل اتیلیک | ۰/۵۸ | ۲۴۳۰ | |
| آب دریا | ۰/۹۳ | ۳۹۰۰ | |
| آب | ۱/۰۰ | ۴۱۸۰ | |

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۳*** مقدار معینی از گرمای $Q$ می‌تواند دمای 1g از مادهٔ $A$ را تا ۳C° و 1g از مادهٔ $B$ را تا ۴C° گرم کند. گرمای ویژهٔ کدام ماده بیشتر است؟

### گرمای ویژهٔ مولی

در بسیاری از موارد یکای بسیار مناسب برای مشخص کردن مقدار یک ماده مول (mol) است، که برای هر ماده‌ای عبارت است از

$$1\text{mol} = 6/02\times10^{23}\ \text{یکای بنیادی}$$

بنابراین ۱ mol از آلومینیوم به معنای $۶/۰۲\times ۱۰^{۲۳}$ اتم (اتم واحد بنیادی است) و ۱ mol از اکسید آلومینیوم به معنای $۶/۰۲\times ۱۰^{۲۳}$ مولکول است (مولکول واحد بنیادی یک ترکیب است).

هرگاه کمیتها برحسب مول بیان شوند، گرمای ویژه را هم باید برحسب مول (به جای یکای جرم) بیان کرد؛ که در این صورت **گرمای ویژهٔ مولی** نامیده می‌شود. جدول ۱۴-۳ مقدارهای چند عنصر جامد را (که هر کدام، یک تک عنصر است) در دمای اتاق نشان می‌دهد.

### *یک نکتهٔ مهم*

در تعیین و سپس در استفاده کردن از گرمای ویژهٔ هر ماده‌ای، نیاز داریم شرایطی را که در آن انرژی به صورت گرما انتقال می‌یابد بدانیم. در مورد جامدها و مایعها، معمولاً فرض می‌کنیم که نمونه در حین انتقال انرژی در فشار ثابت (معمولاً فشار جو) قرار دارد. همچنین امکان دارد که در هنگام جذب شدن گرما حجم نمونه نیز ثابت نگهداشته شود. این بدان معناست که با اعمال فشار خارجی مانع انبساط گرمایی نمونه شویم. در مورد جامدها و مایعها ترتیب دادن این امر به طور تجربی خیلی دشوار است، ولی اثر آن را می‌توان محاسبه کرد و معلوم شده است که گرماهای ویژه با فشار ثابت و حجم ثابت در مورد هر جامد یا مایعی معمولاً بیش از چند درصد با هم تفاوت ندارند. گازها، همان‌طور که خواهیم دید، در شرایط فشار ثابت و حجم ثابت گرماهای ویژه کاملاً متفاوتی دارند.

### *گرماهای تغییر حالت*

هنگامی که انرژی به صورت گرما به وسیلهٔ جامد یا مایعی جذب شود، دمای نمونه الزاماً افزایش نمی‌یابد. بلکه ممکن است نمونه از یک *فاز* یا *حالت* (یعنی جامد، مایع یا گاز) به حالت دیگر تغییر کند. ماده می‌تواند در سه حالت وجود داشته باشد: *حالت جامد* که در آن مولکولهای یک نمونه بر اثر جاذبهٔ متقابل به صورت ساختاری نسبتاً صلب به یکدیگر قفل شده‌اند. *حالت مایع* که در آن مولکولها انرژی بیشتری دارند و در اطراف بیشتر حرکت می‌کنند. اینها خوشه‌های کوتاهی را تشکیل می‌دهند، ولی نمونه ساختار صلبی ندارد و می‌تواند جاری شده یا خود را در یک ظرف جا دهد. *حالت گاز* یا *حالت بخار*، که در آن مولکولها حتی انرژی زیادتری دارند، نسبت به یکدیگر آزاد هستند و می‌توانند حجم یک ظرف را به طور کامل اشغال کنند.

*ذوب شدن* جامد به معنای تغییر آن از حالت جامد به حالت مایع است. این فرایند به انرژی نیاز دارد چون مولکولهای جامد باید از ساختار صلب خود آزاد شوند. ذوب شدن یک قطعه یخ و تبدیل آن به آب یک نمونهٔ عادی است. *منجمد شدن* مایع و تبدیل شدن آن به جامد معکوس ذوب بوده و مستلزم گرفتن انرژی از مایع است، به طوری که مولکولها در یک ساختار صلب جمع شوند.

*بخار شدن* مایع به معنای تبدیل آن از حالت مایع به حالت بخار (گاز) است. این فرایند، مانند ذوب شدن به انرژی نیاز دارد چون مولکولها باید از حالت خوشه‌ای خود آزاد شوند. جوشاندن آب و تبدیل شدن آن به بخار آب (یا بخار- گازی از مولکولهای منفرد آب) یک مثال عادی است. *چگالش* گاز و تبدیل شدن آن به مایع عکس عمل بخار شدن است و این مستلزم گرفتن انرژی از گاز است، به طوری که مولکولها به جای دور شدن از یکدیگر بتوانند خوشه‌هایی تشکیل دهند.

مقدار انرژی مربوط به یکای جرم که هنگام تغییر فاز کامل یک نمونه به صورت گرما انتقال می‌یابد **گرمای تغییر حالت** L نامیده می‌شود. بنابراین، هنگامی که نمونه‌ای به جرم $m$ به طور کامل تغییر فاز می‌دهد، انرژی کل انتقال یافته عبارت است از

$$Q = Lm \qquad (۱۴\text{-}۱۶)$$

هنگامی که تغییر فاز از مایع به گاز (که در آن نمونه باید گرما جذب کند) یا از گاز به مایع (که نمونه بایدگرما آزاد کند) صورت می‌گیرد،گرمای تغییر حالت **گرمای تبخیر** $L_V$ نامیده می‌شود. در مورد آب در دمای جوش یا چگالش عادی داریم

$$L_V = ۵۳۹\,\text{cal/g} = ۴۰/۷\,\text{kJ/mol} = ۲۲۵۶\,\text{kJ/kg} \qquad (۱۴\text{-}۱۷)$$

هنگامی که تغییر فاز از جامد به مایع (که نمونه باید گرما جذب کند) یا از مایع به جامد (که نمونه باید گرما آزاد کند) صورت می‌گیرد، گرمای تغییر حالت **گرمای ذوب** $L_F$ نامیده می‌شود. در مورد آب در دمای انجماد یا ذوب عادی داریم

$$L_F = ۷۹/۵\,\text{cal/g} = ۶/۰۱\,\text{kJ/mol} = ۳۳۳\,\text{kJ/kg} \qquad (۱۴\text{-}۱۸)$$

جدول ۱۴-۴ گرماهای تغییر حالت چند ماده را نشان می‌دهد.

**جدول ۱۴-۴**

چند گرمای تغییر حالت

| ماده | ذوب | | جوش | |
|---|---|---|---|---|
| | نقطهٔ ذوب (K) | گرمای ذوب $L_F$ (kJ/kg) | نقطهٔ جوش (K) | گرمای جوش $L_v$ (kJ/kg) |
| هیدروژن | ۱۴/۰ | ۵۸/۰ | ۲۰/۳ | ۴۵۵ |
| اکسیژن | ۵۴/۸ | ۱۳/۹ | ۹۰/۲ | ۲۱۳ |
| جیوه | ۲۳۴ | ۱۱/۴ | ۶۳۰ | ۲۹۶ |
| آب | ۲۷۳ | ۳۳۳ | ۳۷۳ | ۲۲۵۶ |
| سرب | ۶۰۱ | ۲۳/۲ | ۲۰۱۷ | ۸۵۸ |
| نقره | ۱۲۳۵ | ۱۰۵ | ۲۳۲۳ | ۲۳۳۶ |
| مس | ۱۳۵۶ | ۲۰۷ | ۲۸۶۸ | ۴۷۳۰ |

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۴-۳**

(الف) چقدر گرما باید توسط یخی به جرم $m = ۷۲۰\,g$ که در دمای $-۱۰°C$ قرار دارد جذب شود تا به حالت مایع با دمای $۱۵°C$ تبدیل شود؟

**نکته‌های کلیدی** فرایند گرم شدن در سه مرحله انجام می‌گیرد: (۱) یخ در دمای کمتر از نقطهٔ انجماد نمی‌تواند ذوب شود- پس در آغاز هر مقدار انرژی که به صورت گرما به یخ انتقال می‌یابد، فقط دمای یخ را افزایش می‌دهد، تا به $۰°C$ برسد. (۲) تا تمام یخ ذوب نشود دما نمی‌تواند از $۰°C$ بیشتر شود. بنابراین، انرژی انتقال یافته به یخ فقط یخ را به آب تبدیل می‌کند، تا همهٔ یخ ذوب شود. (۳) اکنون انرژی انتقال یافته به آب به صورت گرما، فقط صرف افزایش دمای آب می‌شود.

***گرم شدن یخ:*** گرمای $Q_۱$ که لازم است تا دما از مقدار اولیه $T_i = -۱۰°C$ به مقدار نهایی $T_f = ۰°C$ افزایش یابد (بنابراین، یخ بعد از آن می‌تواند ذوب شود) با معادلهٔ ۱۴-۱۴ $(Q = cm\Delta T)$ داده می‌شود. با استفاده از گرمای ویژهٔ $c_{\text{یخ}}$ از جدول ۱۴-۳ داریم

$$Q_۱ = c_{\text{یخ}}\, m (T_f - T_i)$$
$$= (۲۲۲۰\ J/kg\cdot K)(۰/۷۲۰\,kg)[۰°C - (-۱۰°C)]$$
$$= ۱۵۹۸۴\ J \approx ۱۵/۹۸\,kJ$$

***ذوب یخ:*** گرمای $Q_۲$ که لازم است تا همهٔ یخ ذوب شود با معادلهٔ ۱۴-۱۶ $(Q = Lm)$ داده می‌شود. در اینجا $L$ گرمای ذوب $L_F$ است که در معادلهٔ ۱۴-۱۸ و جدول ۱۴-۴ داده شده است. داریم

$$Q_۲ = L_F m = (۳۳۳\,kJ/kg)(۰/۷۲۰\,kg) \approx ۲۳۹/۸\ kJ$$

***گرم شدن آب:*** گرمای $Q_۳$ که لازم است تا دمای آب از مقدار اولیهٔ $T_i = ۰°C$ به مقدار نهایی $T_f = ۱۵°C$ افزایش یابد، با معادلهٔ ۱۴-۱۴ داده می‌شود (که گرمای ویژهٔ آب $c_{\text{آب}}$ است)

$$Q_۳ = c_{\text{آب}}\, m (T_f - T_i)$$
$$= (۴۱۹۰\,J/kg\cdot K)(۰/۷۲۰\,kg)(۱۵°C - ۰°C)$$
$$= ۴۵۲۵۲\ J \approx ۴۵/۲۵\,kJ$$

***کل:*** کل گرمای مورد نیاز $Q_{\text{کل}}$ عبارت است از مجموع مقدارهای مورد نیاز در سه مرحله

$$Q_{\text{کل}} = Q_۱ + Q_۲ + Q_۳$$
$$= ۱۵/۹۸\,kJ + ۲۳۹/۸\,kJ + ۴۵/۲۵\,kJ$$
$$\approx ۳۰۰\ kJ \qquad \text{(پاسخ)}$$

توجه کنید که گرمای لازم برای ذوب کردن یخ خیلی بیشتر از گرمای لازم برای افزایش دمای یخ تا آب است.

(ب) اگر به یخ فقط انرژی کل $۲۱۰\,kJ$ (به صورت گرما) بدهیم، حالت نهایی چیست و دمای آب چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** از مرحلهٔ ۱، می‌دانیم که $۱۵/۹۸\,kJ$ برای افزایش دمای یخ تا نقطهٔ ذوب لازم است. گرمای باقیمانده $Q_{\text{مانده}}$ عبارت است از $۲۱۰\,kJ - ۱۵/۹۸\,kJ$ یا تقریباً $۱۹۴\,kJ$. از مرحلهٔ ۲، می‌توان دید که این مقدار گرما برای ذوب همهٔ یخ کافی نیست. چون یخ به طور کامل ذوب نمی‌شود، باید در پایان مخلوط یخ و مایع داشته باشیم؛ و دمای مخلوط باید دمای نقطهٔ انجماد آب یعنی $۰°C$ باشد.

***محاسبه‌ها:*** جرم $m$ یخ را که با انرژی $Q_{\text{مانده}}$ ذوب می‌شود با استفاده از معادلهٔ ۱۴-۱۶ با مقدار $L_F$ می‌توان پیدا کرد

$$m = \frac{Q_{\text{مانده}}}{L_F} = \frac{۱۹۴\,kJ}{۳۳۳\,kJ/kg} = ۰/۵۸۳\,kg \approx ۵۸۰\,g$$

بنابراین، جرم یخ باقیمانده $۷۲۰\,g - ۵۸۰\,g$ یا $۱۴۰\,g$ است و داریم

(پاسخ) $۵۸۰\,g$ آب و $۱۴۰\,g$ یخ، در دمای $۰°C$.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۴-۴**

یک تکه مس به جرم $۷۵\,g$ را در کورهٔ آزمایشگاهی تا دمای $T = ۳۱۲°C$ گرم می‌کنیم. سپس این تکه را درون یک ظرف شیشه‌ای حاوی $m_w = ۲۲۰\,g$ آب می‌اندازیم. ظرفیت گرمایی $C_b$ ظرف $۴۵\,cal/K$ و دمای اولیهٔ $T_i$ آب و ظرف $۱۲°C$ است. با فرض اینکه تکه مس، ظرف و آب یک دستگاه منزوی هستند و آب بخار نمی‌شود، دمای نهایی $T_f$ تکه مس و آب هنگامی که این دو به تعادل گرمایی می‌رسند چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) چون دستگاه منزوی است انرژی کلی دستگاه نمی‌تواند تغییر کند و فقط انتقال انرژی گرمایی به صورت داخلی رخ می‌دهد. (۲) چون در این انتقالها تغییر فازی وجود ندارد، انتقالهای انرژی گرمایی فقط می‌توانند دماها را تغییر دهد.

***محاسبه‌ها:*** برای ارتباط دادن این انتقالها به تغییرهای دما، می‌توان از معادله‌های ۱۴-۱۳ و ۱۴-۱۴ استفاده کرد

برای آب $\qquad Q_w = c_w m_w (T_f - T_i) \qquad (۱۴-۱۹)$

برای ظرف $\qquad Q_b = C_b (T_f - T_i) \qquad (۱۴-۲۰)$

برای مس $\qquad Q_c = c_c m_c (T_f - T) \qquad (۱۴-۲۱)$

چون انرژی کل دستگاه نمی‌تواند تغییر کند. مجموع این سه انتقال انرژی صفر است

$$Q_w + Q_b + Q_c = ۰ \qquad (۱۴-۲۲)$$

با قرار دادن معادله‌های ۱۴-۱۹ تا ۱۴-۲۱ در معادلهٔ ۱۴-۲۲ خواهیم داشت

$$c_w m_w (T_f - T_i) + C_b (T_f - T_i) + c_c m_c (T_f - T) = ۰ \qquad (۱۴-۲۳)$$

در معادلهٔ ۱۴-۲۳ فقط اختلاف دماها وجود دارد. بنابراین، چون این اختلافها در مقیاسهای سلسیوس و کلوین یکسان هستند، از هر کدام از آنها در این معادله می‌توان استفاده کرد. از حل این معادله برحسب $T_f$ خواهیم داشت

$$T_f = \frac{c_c m_c T + C_b T_i + c_w m_{wT_i}}{c_w m_w + C_b + c_c m_c}$$

با استفاده از دماهای سلسیوس و قرار دادن مقدارهای $c_c$ و $c_w$ از جدول ۱۴-۳، صورت کسر به صورت زیر در می‌آید

$$(\text{۰/۰۹۲۳}\,\mathrm{cal/g\cdot K})(\text{۷۵}\,\mathrm{g})(\text{۳۱۲}\,^\circ\mathrm{C}) + (\text{۱۴۵}\,\mathrm{cal/K})(\text{۱۲}\,^\circ\mathrm{C}) + (\text{۱/۰۰}\,\mathrm{cal/g\cdot K})(\text{۲۲۰}\,\mathrm{g})(\text{۱۲}\,^\circ\mathrm{C}) = \text{۵۳۳۹/۸}\,\mathrm{cal}$$

و مخرج آن به این صورت است

$$(\text{۱/۰۰}\,\mathrm{cal/g\cdot K})(\text{۲۲۰}\,\mathrm{g}) + \text{۴۵}\,\mathrm{cal/K} + (\text{۰/۰۹۲۳}\,\mathrm{cal/g\cdot K})(\text{۷۵}\,\mathrm{g}) = \text{۲۷۱/۹}\,\mathrm{cal/C^\circ}$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$T_f = \frac{\text{۵۳۳۹/۸}\,\mathrm{cal}}{\text{۲۷۱/۹}\,\mathrm{cal/C^\circ}} = \text{۱۹/۶}\,^\circ\mathrm{C} \approx \text{۲۰}\,^\circ\mathrm{C} \qquad \text{(پاسخ)}$$

از داده‌های بالا می‌توان نشان داد که

$$Q_w \approx \text{۱۶۷۰}\,\mathrm{cal}\ ,\quad Q_b \approx \text{۳۴۲}\,\mathrm{cal}\ ,\quad Q_c \approx -\text{۲۰۲۰}\,\mathrm{cal}$$

همان‌طور که از معادلهٔ ۱۴-۲۲ بر می‌آید، پس از گرد کردن خطاها، مجموع جبری این سه گرمای انتقال یافته صفر است.

## ۱۴-۹ نگاهی دقیقتر به گرما و کار

در اینجا چگونگی انتقال انرژی به صورت گرما و کار بین یک دستگاه و محیط آن را به تفصیل بررسی می‌کنیم. همانند شکل ۱۴-۱۳ دستگاه را یک گاز محبوس در استوانه‌ای با پیستون متحرک در نظر می‌گیریم. نیروی رو به بالای وارد بر پیستون ناشی از فشار گاز محبوس برابر با وزن گلوله‌های سربی است که روی پیستون گذاشته شده است. دیواره‌های استوانه از مادهٔ عایقی ساخته شده است که انتقال انرژی به صورت گرما را از آن ناممکن می‌سازد. کف استوانه روی منبعی از انرژی گرمایی قرار دارد، دمای *منبع گرمایی* (شاید یک صفحهٔ گرم) $T$ است که با چرخاندن دگمه‌ای می‌توان آن را کنترل کرد.

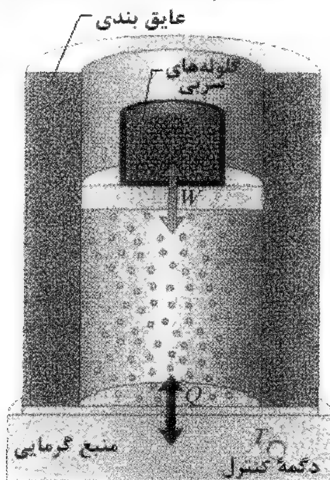
این دستگاه (گاز) از *حالت اولیهٔ* $i$ با فشار $P_i$، حجم $V_i$ و دمای $T_i$ شروع می‌کند و ما می‌خواهیم دستگاه را به *حالت نهایی* $f$ با فشار $P_f$، حجم $V_f$ و دمای $T_f$ تغییر دهیم. روشی که به وسیلهٔ آن دستگاه از حالت اولیه به حالت نهایی خود تغییر می‌یابد *فرایند ترمودینامیکی* نامیده می‌شود. در طی چنین فرایندی گرما ممکن است از منبع گرمایی (گرمای مثبت) به دستگاه انتقال یابد یا برعکس (گرمای منفی). هم چنین کار می‌تواند توسط دستگاه برای بالا بردن پیستون با بار روی آن (کار مثبت) یا برای پایین آوردن آن (کار منفی) انجام گیرد. فرض می‌کنیم همهٔ این تغییرها به آرامی صورت پذیرند و در نتیجه دستگاه همیشه (تقریباً) در تعادل گرمایی باشد (یعنی هر بخشی از دستگاه همیشه با هر بخش دیگر در تعادل گرمایی است.)

فرض کنید که تعدادی از گلوله‌های سربی را از روی پیستون شکل ۱۴-۱۳ برداریم تا گاز بتواند پیستون و گلوله‌های باقیمانده را با نیروی رو به بالای $\vec{F}$ به اندازهٔ جابه‌جایی دیفرانسیلی $d\vec{s}$ به طرف بالا حرکت دهد. چون جابه‌جایی کوچک است، $\vec{F}$ را در طی جابه‌جایی می‌توان ثابت فرض کرد. بنابراین، بزرگی $\vec{F}$ برابر با $pA$ است، که در آن $p$ فشار گاز و $A$ مساحت قاعدهٔ پیستون است. کار دیفرانسیلی $dW$ که در طی جابه‌جایی به وسیلهٔ گاز انجام می‌گیرد، عبارت است از

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = (pA)(ds) = p\,(A\,ds) = p\,dV \qquad (\text{۱۴-۲۴})$$

که در آن $dV$ تغییر دیفرانسیلی در حجم گاز ناشی از حرکت پیستون است. هرگاه به اندازهٔ کافی از گلوله‌ها برداریم، حجم گاز از $V_i$ به $V_f$ تغییر می‌کند و کار کل انجام شده به وسیلهٔ گاز عبارت است از

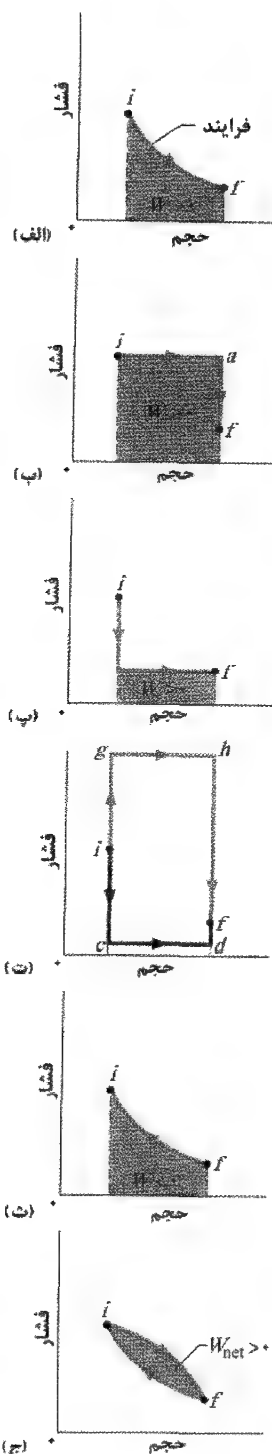
$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV \qquad (\text{۱۴-۲۵})$$




**شکل ۱۴-۱۳** گازی در استوانه‌ای با پیستون متحرک محبوس شده است. با تنظیم دمای $T$ یک منبع گرمایی می‌توان گرمای $Q$ را به گاز افزود یا از آن گرفت. کار $W$ با بالا بردن یا پایین آوردن پیستون انجام می‌گیرد.

در ضمن تغییر حجم، فشار و دمای گاز هم ممکن است تغییر کند. برای محاسبهٔ مستقیم انتگرال در معادلهٔ ۱۴-۲۵، باید بدانیم که در یک فرایند واقعی که به واسطهٔ آن دستگاه از حالت $i$ به حالت $f$ تغییر می‌کند، تغییر فشار برحسب حجم چگونه است.

در واقع راههای زیادی وجود دارد که گاز از حالت $i$ به حالت $f$ تغییر کند. یکی از این راهها در شکل ۱۴-۱۴ الف نشان داده شده، که نموداری از تغییر فشار گاز برحسب حجم آن است و نمودار $p$-$V$ نامیده می‌شود. در شکل ۱۴-۱۴ الف، منحنی نشان می‌دهد که وقتی حجم افزایش می‌یابد فشار کم می‌شود. انتگرال معادلهٔ ۱۴-۲۵ (و در نتیجه کار $W$ انجام شده به وسیلهٔ گاز) با مساحت سایه‌دار زیر منحنی میان نقطه‌های $i$ و $f$ نشان داده شده است. بدون توجه به اینکه گاز در امتداد منحنی چه تغییری کرده است. به واسطهٔ این واقعیت که حجم گاز به واسطهٔ نیروی رو به بالای پیستون زیاد شده است، کار مثبت است.




**شکل ۱۴-۱۴** (الف) مساحت سطح سایه‌دار کار $W$ انجام شده به وسیلهٔ یک دستگاه را وقتی از حالت اولیهٔ $i$ به حالت نهایی $f$ تغییر می‌کند نشان می‌دهد. کار $W$ مثبت است چون حجم دستگاه افزایش می‌یابد. (ب) $W$ باز هم مثبت ولی بیشتر است. (پ) کار باز هم مثبت ولی اکنون کمتر است. (ت) $W$ می‌تواند کمتر (مسیر $icdf$) یا بیشتر (مسیر $ighf$) شود. (ث) در اینجا با متراکم شدن گاز توسط یک نیروی خارجی حجم گاز کمتر می‌شود و دستگاه از حالت $f$ به حالت $i$ تغییر می‌کند. کار $W$ انجام شده به وسیلهٔ دستگاه اکنون منفی است. (ج) کار خالص $W_{net}$ انجام شده به وسیلهٔ دستگاه در ضمن یک چرخهٔ کامل با مساحت سطح سایه‌دار نشان داده شده است.

راه دیگر رفتن از حالت $i$ به حالت $f$ در شکل ۱۴-۱۴ ب نشان داده شده است. در اینجا تغییر در دو مرحله انجام شده است- مرحلهٔ اول از حالت $i$ به حالت $a$ و مرحلهٔ دوم از حالت $a$ به حالت $f$.

مرحلهٔ $ia$ در این فرایند در فشار ثابت انجام می‌گیرد، که بدان معناست که در گلوله‌های سربی که روی پیستون در شکل ۱۴-۱۳ قرار دارند تغییری نمی‌دهیم. با چرخاندن دگمهٔ کنترل دما به آرامی، دمای گاز تا مقدار $T_a$ بالا می‌رود و حجم (از $V_i$ تا $V_f$) افزایش می‌یابد (با افزایش دما نیروی وارد بر پیستون به وسیلهٔ گاز افزایش می‌یابد و آن را بالا می‌برد.) در این مرحله، به‌وسیلهٔ گاز در حال انبساط کار مثبت انجام می‌گیرد (برای بالا بردن پیستون با بار) و گرما توسط دستگاه از منبع گرمایی گرفته می‌شود (در پاسخ به تغییرهای دمایی کوچک دلخواه که در هنگام بالا بردن دما ایجاد می‌شود.) گرما در اینجا مثبت است چون به دستگاه افزوده شده است.

مرحلهٔ $af$ فرایند شکل ۱۴-۱۴ ب در حجم ثابت انجام می‌گیرد، در نتیجه برای جلوگیری از حرکت پیستون باید آن را نگهداشت. در این صورت، هنگام استفاده از دگمهٔ کنترل برای کاهش دادن دما، خواهیم دید که فشار از $p_a$ به مقدار نهایی $p_f$ افت می‌کند. در طی این مرحله، گرما به وسیلهٔ دستگاه به منبع گرمایی داده می‌شود.

برای کل فرایند $iaf$، کار $W$ که مثبت است، و فقط در مرحلهٔ $ia$ انجام می‌گیرد، با مساحت سایه‌دار زیر منحنی نمایش داده شده است. انرژی به صورت گرما در طی دو مرحلهٔ $ia$ و $af$ انتقال می‌یابد که مقدار خالص آن $Q$ است.

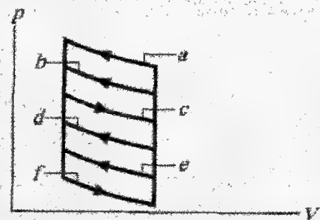
شکل ۱۴-۱۴ پ فرایندی را نشان می‌دهد که در آن دو مرحلهٔ قبلی به طور وارونه انجام گرفته‌اند. کار $W$ در این حالت کمتر از کار در شکل ۱۴-۱۴ ب است چون گرمای خالص جذب شده است. شکل ۱۴-۱۴ ت حاکی از آن است که می‌توان کار انجام شده به وسیلهٔ گاز را هر چقدر که بخواهیم کمتر (با دنبال کردن مسیری مانند $icdf$) یا بیشتر (با دنبال کردن مسیری مانند $ighf$) کرد.

در مجموع، یک دستگاه می‌تواند با تعداد نامحدودی فرایند از حالت اولیهٔ معینی به حالت نهایی معین برود. در این فرایندها گرما ممکن است دخالت داشته باشد یا نداشته باشد و به طور کلی کار $W$ و گرمای $Q$ در فرایندهای مختلف اندازه‌های مختلفی خواهند داشت. گفته می‌شود که گرما و کار کمیتهای *وابسته به مسیرند.*

شکل ۱۴-۱۴ ث مثالی را نشان می‌دهد که در آن وقتی نیروی خارجی گاز را متراکم می‌کند و حجم را کاهش می‌دهد، دستگاه کار منفی انجام می‌دهد. مقدار مطلق کار انجام شده باز هم برابر با مساحت زیر منحنی است، ولی چون گاز *متراکم* شده است، کار انجام شده به وسیلهٔ آن منفی است.

شکل ۱۴-۱۴ ج یک *چرخهٔ ترمودینامیکی* را نشان می‌دهد که در آن دستگاه از یک حالت اولیهٔ $i$ به حالت دیگر $f$ می‌رود و سپس به حالت $i$ بر می‌گردد. کار خالص انجام شده به وسیلهٔ دستگاه در طول این چرخه عبارت است از مجموع کار مثبت انجام شده در هنگام انبساط و کار منفی انجام شده در هنگام تراکم. در شکل ۱۴-۱۴ ج کار خالص مثبت است چون مساحت زیر منحنی انبساط ($i$ تا $f$) بیشتر از مساحت زیر منحنی تراکم ($f$ تا $i$) است.

**✔ *نکتهٔ وارسی ۴*** شکل نمودار $p$-$V$ شش منحنی (که با راههای قائم به هم وصل شده‌اند) را نشان می‌دهد که به وسیلهٔ گازی پیموده شده است. اگر بخواهیم کار خالص انجام شده به وسیلهٔ گاز بیشترین مقدار مثبت را داشته باشد، کدام دو مسیر باید بخشی از یک چرخهٔ بسته باشند (مسیرهای منحنی به علاوهٔ مسیرهای قائم وصل کننده)؟




## ۱۴-۱۰ قانون اول ترمودینامیک

دیدیم که هرگاه دستگاهی از یک حالت اولیهٔ معین به حالت نهایی معین دیگری تغییر کند، کار $W$ و گرمای $Q$ هر دو به طبیعت فرایند بستگی دارند. ولی به طور تجربی با موضوع شگفت انگیزی مواجه می‌شویم: *کمیت $Q-W$ برای همهٔ فرایندها یکسان است.* این کمیت فقط به حالتهای اولیه و نهایی بستگی دارد و به هیچ وجه به نحوهٔ رفتن دستگاه از یک حالت به حالت دیگر بستگی ندارد. همه ترکیبهای دیگر $Q$ و $W$ از جمله $Q$ تنها، $W$ تنها، $Q+W$ و $Q-2W$ به مسیر وابسته‌اند و فقط کمیت $Q-W$ به مسیر بستگی ندارد.

کمیت $Q-W$ باید تغییری در یک خاصیت ذاتی دستگاه را نشان دهد. این خاصیت را *انرژی درونی* $E_{\text{int}}$ می‌نامیم و داریم

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},f} - E_{\text{int},i} = Q - W \qquad \text{(قانون اول)} \qquad (۱۴\text{-}۲۶)$$

معادلهٔ ۱۴-۲۶ **قانون اول ترمودینامیک** است. اگر یک دستگاه ترمودینامیکی فقط یک تغییر دیفرانسیلی پیدا کند، قانون اول را می‌توان به این صورت نوشت[1]

$$dE_{\text{int}} = dQ - dW \qquad \text{(قانون اول)} \qquad (۱۴\text{-}۲۷)$$

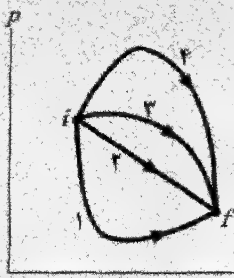
☜ انرژی درونی $E_{\text{int}}$ یک دستگاه وقتی تمایل به افزایش دارد که انرژی به صورت گرمای $Q$ به آن داده شود و وقتی تمایل به کاهش دارد که انرژی به صورت کار $W$ که به وسیلهٔ دستگاه انجام می‌گیرد تلف شود.

در فصل ۸، دربارهٔ اصل پایستگی انرژی در مورد دستگاههای منزوی بحث کردیم. یعنی در مورد دستگاههایی که هیچ انرژی به آنها وارد یا از آنها خارج نمی‌شود. قانون اول ترمودینامیک تعمیم این اصل به دستگاههایی است که منزوی *نیستند*. در چنین مواردی انرژی می‌تواند هم به وسیلهٔ کار $W$ و هم به وسیلهٔ گرمای $Q$ به دستگاهی داده شود یا از آن گرفته شود. در بیان قانون اول ترمودینامیک در بالا، فرض کردیم که هیچ تغییری در انرژی جنبشی یا انرژی پتانسیل کل دستگاه صورت نمی‌گیرد؛ یعنی $\Delta K = \Delta U = ۰$.

پیش از این فصل، اصطلاح *کار* و نماد $W$ همیشه به معنای کار انجام شده *روی* یک دستگاه به کار می‌رفت. ولی با شروع از معادلهٔ ۱۴-۲۴ و ادامهٔ استفاده از آن در دو فصل بعدی دربارهٔ ترمودینامیک، توجه خود را به کار انجام شده *به وسیلهٔ* یک دستگاه، مثل گاز در شکل ۱۴-۱۳ معطوف می‌کنیم.

کار انجام شده *روی* یک دستگاه همیشه برابر با منفی کار انجام شده به وسیلهٔ دستگاه است. پس، اگر معادلهٔ ۱۴-۲۶ را برحسب کار $W_{\text{on}}$ انجام شده روی دستگاه دوباره بنویسیم، خواهیم داشت، $\Delta E_{\text{int}} = Q + W_{\text{on}}$. معنی این امر چنین است: انرژی درونی یک دستگاه تمایل به افزایش دارد اگر گرما به وسیلهٔ دستگاه جذب شود یا اگر کار مثبت *روی* دستگاه انجام گیرد. برعکس، انرژی درونی تمایل به کاهش دارد اگر گرما به وسیلهٔ دستگاه هدر رود یا اگر کار منفی *روی* دستگاه انجام گیرد.

**✔ *نکتهٔ وارسی ۵*** این شکل چهار مسیر در نمودار $p-V$ را نشان می‌دهد که در آنها گازی می‌تواند مسیرها از حالت $i$ تا حالت $f$ طی کند. مسیرها را به ترتیب بزرگی (الف) تغییر $\Delta E_{\text{int}}$ در انرژی درونی گاز، (ب) کار $W$ انجام شده به وسیلهٔ گاز و (پ) بزرگی انرژی منتقل شده به صورت گرمای $Q$ از بیشترین تا کمترین مقدار مرتب کنید.




---

۱. در اینجا برخلاف $dE_{\text{int}}$ کمیتهای $dQ$ و $dW$ دیفرانسیلهای کامل نیستند؛ یعنی تابعهایی مانند $Q(p,V)$ و $W(p,V)$ که فقط به حالت دستگاه بستگی داشته باشند وجود ندارند. کمیتهای $dQ$ و $dW$ *دیفرانسیلهای ناکامل* نامیده می‌شوند و معمولاً با نمادهای $đQ$ و $đW$ نمایش داده می‌شوند. در مورد هدفهای ما، با اینها به صورت انرژیهای انتقال یافتهٔ بینهایت کوچک رفتار می‌کنیم.

## ۱۴-۱۱ چند حالت ویژهٔ قانون اول ترمودینامیک

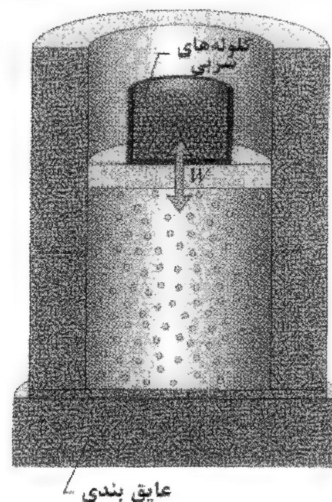
در اینجا چهار فرایند ترمودینامیکی متفاوت را در نظر می‌گیریم که در هر یک محدودیت معینی بر دستگاه اعمال شده است. سپس نتیجه‌های حاصل از کاربرد قانون اول ترمودینامیک در مورد این فرایندها را بررسی می‌کنیم. این نتیجه‌ها در جدول ۱۸-۵ به طور خلاصه نوشته شده‌اند.

**۱- *فرایندهای بی در رو.*** فرایند بی در رو فرایندی است که خیلی سریع رخ می‌دهد یا در دستگاهی رخ می‌دهد که به خوبی عایق بندی شده است و هیچ گونه مبادلهٔ انرژی به صورت گرما بین دستگاه و محیط آن صورت نمی‌گیرد. با قرار دادن $Q=0$ در قانون اول ترمودینامیک (معادلهٔ ۱۴-۲۶) خواهیم داشت

$$\Delta E_{int} = -W \qquad \text{(فرایند بی در رو)} \qquad (۱۴-۲۸)$$

این رابطه حاکی از آن است که اگر *به وسیلهٔ* دستگاه کاری انجام گیرد (یعنی اگر $W$ مثبت باشد)، به میزان این کار انرژی درونی دستگاه کاهش می‌یابد. برعکس، اگر کار *روی* دستگاه انجام گیرد (یعنی اگر $W$ منفی باشد)، انرژی درونی دستگاه به اندازهٔ مقدار کار افزایش می‌یابد.

شکل ۱۴-۱۵ یک فرایند بی‌دررو آرمانی را نشان می‌دهد. به علت عایق بندی، گرما نمی‌تواند وارد دستگاه یا از آن خارج شود. بنابراین، تنها راه مبادلهٔ انرژی بین دستگاه و محیط آن انجام دادن کار است. اگر گلوله‌ها را از روی پیستون برداریم و اجازه دهیم که گاز منبسط شود، کار انجام شده به وسیلهٔ دستگاه (گاز) مثبت است و انرژی درونی گاز کاهش می‌یابد. برعکس، اگر به گلوله‌ها بیفزاییم و گاز را متراکم کنیم، کار انجام شده به وسیلهٔ دستگاه منفی است و انرژی درونی گاز افزایش می‌یابد.




**شکل ۱۴-۱۵** با برداشتن آهستهٔ گلوله‌های سربی از روی پیستون انبساط بی در رو صورت می‌گیرد. افزودن گلوله‌های سربی فرایند را در هر مرحله معکوس می‌کند.

**جدول ۱۴-۵**

قانون اول ترمودینامیک: چهار حالت ویژه

قانون: $\Delta E_{int} = Q - W$ معادله (۱۴-۲۶)

| | فرایند | محدودیت پیامد |
|---|---|---|
| بی در رو | $Q=0$ | $\Delta E_{int} = -W$ |
| حجم ثابت | $W=0$ | $\Delta E_{int} = Q$ |
| چرخهٔ بسته | $\Delta E_{int} = 0$ | $Q=W$ |
| انبساط آزاد | $Q=W=0$ | $\Delta E_{int} = 0$ |

**۲- *فرایندهای حجم- ثابت.*** اگر حجم دستگاهی (مانند یک گاز) ثابت بماند، این دستگاه هیچ کاری انجام نمی‌دهد. با قرار دادن $W=0$ در قانون اول (معادلهٔ ۱۴-۲۶) خواهیم داشت

$$\Delta E_{int} = Q \qquad \text{(فرایند حجم- ثابت)} \qquad (۱۴-۲۹)$$

بنابراین، اگر گرما توسط دستگاهی جذب شود (یعنی اگر $Q$ مثبت باشد)، انرژی درونی دستگاه افزایش می‌یابد. برعکس، اگر در طی فرایندی گرما تلف شود (یعنی اگر $Q$ منفی باشد)، انرژی درونی دستگاه کاهش می‌یابد.

**۳- *فرایندهای چرخه‌ای.*** فرایندهایی وجود دارند که در آنها پس از تبادل مقدار معینی گرما و کار، دستگاه به حالت اول بر می‌گردد. در این صورت، هیچ خاصیت ذاتی دستگاه- از جمله انرژی درونی آن- امکان تغییر ندارد. با قرار دادن $\Delta E_{int} = 0$ در قانون اول (معادلهٔ ۱۴-۲۶) خواهیم داشت

$$Q = W \qquad (۱۴-۳۰)$$

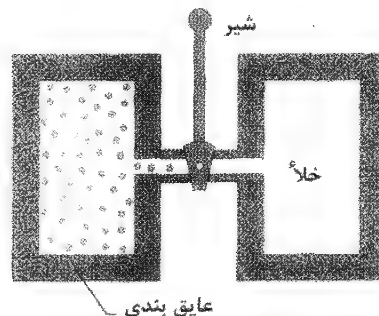
بنابراین، کار انجام شده در طی فرایند باید دقیقاً برابر با مقدار خالص انرژی مبادله شده به صورت گرما باشد؛ یعنی ذخیرهٔ انرژی درونی دستگاه بدون تغییر می‌ماند. فرایندهای چرخه‌ای مانند شکل ۱۴-۱۴ ج، یک حلقهٔ بسته در نمودار فشار- حجم تشکیل می‌دهند. دربارهٔ چنین فرایندهایی در فصل ۱۶ به تفصیل سخن خواهیم گفت.

**۴- *انبساطهای آزاد.*** اینها فرایندهای بی دررویی هستند که در آنها هیچ گونه مبادلهٔ گرما بین دستگاه و محیط پیرامون آن صورت نمی‌گیرد و هیچ کاری به وسیلهٔ دستگاه یا روی آن انجام نمی‌شود. بنابراین، $Q=W=0$ و از قانون اول لازم است که

$$\Delta E_{int} = 0 \qquad \text{(انبساط آزاد)} \qquad (۱۴-۳۱)$$

شکل ۱۴-۱۶ نشان می‌دهد که چگونه چنین انبساطی می‌تواند انجام شود. گازی که در درون خود در تعادل گرمایی است، در آغاز با بستن شیر در یکی از دو اتاقک عایق بندی شده محبوس می‌شود و اتاقک دیگر خالی است. حال شیر را باز می‌کنیم و گاز به طور آزاد منبسط می‌شود و هر دو اتاقک را فرا می‌گیرد. به علت عایق بندی، هیچ گرمایی به گاز داده یا از آن گرفته نمی‌شود. چون گاز به خلأ وارد می‌شود هیچ کاری به وسیله آن انجام نمی‌گیرد و با هیچ فشاری روبه‌رو نمی‌شود.

انبساط آزاد با تمام فرایندهای دیگری که به آنها اشاره کردیم تفاوت دارد زیرا نمی‌تواند به آرامی و به طور کنترل شده‌ای انجام گیرد. در نتیجه در هر لحظه در ضمن انبساط ناگهانی، گاز در تعادل گرمایی نیست و فشار یکنواختی ندارد. بنابراین، اگر چه حالتهای اولیه و نهایی را روی نمودار $p$-$V$ می‌توان رسم کرد، ولی مسیر خود انبساط را نمی‌توان رسم کرد.




**شکل ۱۴-۱۶** مرحله اول یک فرایند انبساط آزاد. پس از اینکه شیر باز شد با پر کردن هر دو اتاقک، گاز سرانجام به حالت تعادل می‌رسد.

✓ ***نکتهٔ وارسی ۶*** در مورد چرخهٔ کامل که در این نمودار $p$-$V$ نشان داده شده است، آیا (الف) $\Delta E_{int}$ برای گاز (ب) انرژی خالص انتقال یافته به صورت گرمای $Q$، مثبت است یا منفی یا صفر است؟




### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۴-۵

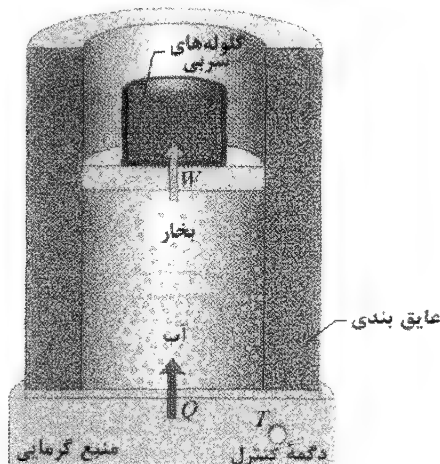
۱/۰۰kg آب ۱۰۰°C با جوشیدن در فشار جوی استاندارد (که ۱/۰۰atm یا ۱/۰۱×۱۰⁵ Pa است) در وسیله‌ای مطابق شکل ۱۴-۱۷ به بخار ۱۰۰°C تبدیل می‌شود. حجم آب از مقدار اولیهٔ $۱/۰۰\times۱۰^{-۳}\ m^۳$ به صورت مایع به مقدار $۱/۶۷۱\ m^۳$ به صورت بخار تبدیل می‌شود.

(الف) در این فرایند چه مقدار کار به وسیلهٔ دستگاه انجام می‌گیرد؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) دستگاه باید کار مثبت انجام دهد چون حجم افزایش می‌یابد. (۲) با انتگرالگیری از تابع فشار نسبت به حجم (معادلهٔ ۱۴-۲۵) کار انجام شده $W$ را محاسبه می‌کنیم.

***محاسبه:*** چون در اینجا فشار ثابت $(۱/۰۱\times۱۰^۵\ Pa)$ است، پس $p$ را می‌توان از انتگرال بیرون آورد. بنابراین، خواهیم داشت

$$W=\int_{V_i}^{V_f} p\,dV = p\int_{V_i}^{V_f} dV = p(V_f-V_i)$$
$$=(۱/۰۱\times۱۰^۵\ Pa)(۱/۶۷۱\ m^۳-۱/۰۰\times۱۰^{-۳}\ m^۳)$$
$$=۱/۶۹\times۱۰^۵\ J=۱۶۹\ kJ \qquad \text{(پاسخ)}$$




**شکل ۱۴-۱۷** جوشیدن آب در فشار ثابت. انرژی از منبع گرمایی به صورت گرما انتقال می‌یابد تا آب به طور کامل به بخار تبدیل شود. کار به وسیلهٔ انبساط گاز و هنگام بالا رفتن پیستون بار گذاری شده انجام می‌گیرد

(ب) در طی این فرایند چقدر انرژی به صورت گرما انتقال می‌یابد؟

**نکتهٔ کلیدی** چون گرما فقط صرف تغییر فاز می‌شود و دما را تغییر نمی‌دهد، پس می‌توان گرما را از معادلهٔ ۱۴-۱۶ $(Q=Lm)$ به طور کامل به دست آورد.

***محاسبه:*** چون تغییر از فاز مایع به فاز گاز صورت می‌گیرد، $L$ گرمای تبخیر $L_V$ است که مقدار آن در معادلهٔ ۱۴-۱۷ و جدول ۱۴-۴ داده شده است. داریم

$$Q=L_Vm=(۲۲۵۶\ kJ/kg)(۱/۰۰\ kg)$$
$$=۲۲۵۶\ kJ\approx۲۲۶۰\ kJ \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) در طی این فرایند تغییر در انرژی درونی دستگاه چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** تغییر انرژی درونی دستگاه بنابر قانون اول ترمودینامیک (معادلهٔ ۱۴-۲۶) به گرما (در اینجا انرژی منتقل شده به دستگاه) و کار (در اینجا انرژی خارج شده از دستگاه) بستگی دارد.

***محاسبه:*** قانون اول را به این صورت می‌نویسیم

$$\Delta E_{int}=Q-W=۲۲۵۶kJ-۱۶۹\ kJ$$
$$\approx۲۰۹۰\ kJ=۲/۰۹\ MJ \qquad \text{(پاسخ)}$$

این کمیت مثبت است و حاکی از آن است که انرژی درونی دستگاه در طی فرایند جوشیدن افزایش یافته است. این انرژی صرف جدا کردن مولکولهای $H_۲O$ می‌شود که در حالت مایع یکدیگر را به شدت جذب کرده‌اند. می‌توان دید که هرگاه آب بجوشد، تقریباً ۷/۵٪ (=۱۶۹kJ/۲۲۶۰kJ) گرما جهت انجام کار در عقب راندن جو می‌شود. باقیمانده گرما انرژی درونی دستگاه را افزایش می‌دهد.

## ۱۴-۱۲ سازوکارهای انتقال گرما

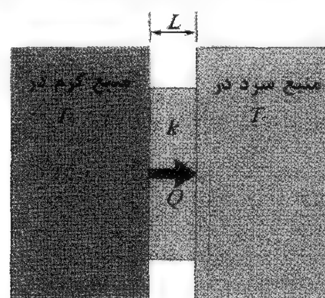
دربارهٔ انتقال انرژی به صورت گرما بین یک دستگاه و محیط پیرامون آن بحث کردیم، ولی هنوز دربارهٔ اینکه این انتقال چگونه رخ می‌دهد چیزی نگفته‌ایم. سه سازوکار برای انتقال انرژی وجود دارد که عبارت‌اند از: رسانش، همرفت و تابش.

### *رسانش*

اگر نوک یک سیخ فلزی را به مدت طولانی در آتش قرار دهیم، دستهٔ آن گرم خواهد شد. انرژی در طول سیخ به وسیلهٔ **رسانش** (گرمایی) از آتش به دستهٔ آن انتقال می‌یابد. در نوک سیخ که در آتش قرار دارد دامنهٔ ارتعاش اتمها و الکترونها به علت دمای زیاد آتش نسبتاً زیاد می‌شود. این افزایش دامنه‌های ارتعاشی و در نتیجه انرژی مربوط به آن بر اثر برخورد میان اتمهای مجاور در طول سیخ از اتمی به اتم دیگر منتقل می‌شود. به این ترتیب، ناحیه‌ای که دمایش افزایش یافته است در طول سیخ تا دسته گسترش می‌یابد.

بُره‌ای به مساحت $A$ و ضخامت $L$ را در نظر می‌گیریم که وجوه آن همانند شکل ۱۴-۱۸، توسط یک منبع گرم و یک منبع سرد در دماهای $T_H$ و $T_C$ نگهداشته شده‌اند. فرض می‌کنیم $Q$ انرژیی باشد که به صورت گرما در مدت $t$ از وجه گرم به وجه سرد آن بُره انتقال می‌یابد. تجربه نشان می‌دهد که *آهنگ رسانش* $P_{\text{رسانش}}$ (مقدار انرژی انتقال یافته در یکای زمان) عبارت است از

$$P_{\text{رسانش}} = \frac{Q}{t} = kA\frac{T_H - T_C}{L} \qquad (۱۴-۳۲)$$




**شکل ۱۴-۱۸** رسانش گرمایی. انرژی به صورت گرما از منبع با دمای $T_H$ به منبع سرد با دمای $T_C$ از طریق یک برهٔ رسانده به ضخامت $L$ و رسانایی گرمایی $k$ انتقال می‌یابد.

که در آن $k$ ثابتی است که به جنس قطعه بستگی دارد و *رسانندگی گرمایی* نام دارد. ماده‌ای که انرژی را با رسانش به تندی انتقال می‌دهد *رسانای گرمایی* خوب محسوب می‌شود و مقدار $k$ در آن زیاد است. جدول ۱۴-۶ رسانندگی گرمایی چند فلز، گاز و مواد ساختمانی متداول را نشان می‌دهد.

**جدول ۱۴-۶**

رسانندگی گرمایی برخی از مواد

| ماده | $k$ (W/m.K) |
|---|---|
| *فلزها* | |
| فولاد رنگ نزن | ۱۴ |
| سرب | ۳۵ |
| آهن | ۶۷ |
| برنج | ۱۰۹ |
| آلومینیوم | ۲۳۵ |
| مس | ۴۰۱ |
| نقره | ۴۲۸ |
| *گازها* | |
| هوا (خشک) | ۰/۰۲۶ |
| هلیوم | ۰/۱۵ |
| هیدروژن | ۰/۱۸ |
| *مواد ساختمانی* | |
| اسفنج پلی اورتان | ۰/۰۲۴ |
| پوکهٔ سنگ | ۰/۰۴۳ |
| پشم شیشه | ۰/۰۴۸ |
| کاج سفید | ۰/۱۱ |
| شیشهٔ پنجره | ۱/۰ |

### *مقاومت گرمایی در رسانش (مقدار R)*

اگر بخواهید منزل خود را عایق بندی کنید یا در گردش بخواهید نوشابه‌ای را سرد نگهدارید، از رساناهای گرمایی ضعیف استفاده می‌کنید نه از رساناهای گرمایی خوب. به این دلیل مفهوم مقاومت گرمایی $R$ در کارهای مهندسی وارد شده است. مقدار $R$ برای بُره‌ای به ضخامت $L$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R = \frac{L}{k} \qquad (۱۴-۳۳)$$

بنابراین، هرچه رسانایی گرمایی مادهٔ سازندهٔ بُره کمتر باشد، مقدار $R$ آن بُره بیشتر است؛ بنابراین، چیزهایی که مقدار $R$ آنها بالا باشد *رسانای گرمایی ضعیف* و در نتیجه *عایق گرمایی* خوب هستند.

توجه کنید که $R$ خاصیتی از یک بُره با ضخامت معین است نه خاصیتی از مادهٔ سازندهٔ بُره. یکای متداولی که برای $R$ به کار می‌رود (که دست کم در امریکا تقریباً به کار نمی‌رود) عبارت است از فوت مربع- درجهٔ فارنهایت- ساعت بر یکای بریتانیایی گرما $(\text{ft}^2\cdot\text{F}^\circ\cdot\text{h/Btu})$. (اکنون متوجه می‌شوید که چرا این یکا به ندرت به کار می‌رود.)

### *رسانش در یک بُرهٔ مرکب*

شکل ۱۴-۱۹ یک بُرهٔ مرکب را که شامل دو نوع ماده با ضخامتهای مختلف $L_1$ و $L_2$ و رسانندگیهای گرمایی مختلف $k_1$ و $k_2$ است، نشان می‌دهد. دمای سطحهای بیرونی بُره $T_H$ و $T_C$ هستند و مساحت هر سطح بُره $A$ است. می‌خواهیم عبارتی

را برای آهنگ رسانش در بُره به دست آوریم با این فرض که انتقال انرژی فرایندی به *حالت پایا* است؛ یعنی آهنگ انتقال انرژی و دماها در هر جای معین در بُره با زمان تغییر نمی‌کند.

در حالت پایا، آهنگهای رسانش از دو ماده باید برابر باشند. این معادل با این گفته است که انرژی انتقال یافته از طریق یک ماده در زمان معینی باید برابر با انرژی انتقال یافته از طریق ماده دیگر در همان مدت زمان باشد. اگر این طور نباشد، دما در بُره تغییر می‌کند و دیگر حالت پایا وجود نخواهد داشت. $T_X$ را دمای سطح مشترک دو ماده در نظر می‌گیریم، با استفاده از معادلهٔ ۱۴-۳۲ می‌توان نوشت

$$P_{\text{رسانش}}=\frac{k_2 A(T_H-T_X)}{L_2}=\frac{k_1 A(T_X-T_C)}{L_1} \qquad (۱۴\text{-}۳۴)$$

از حل معادلهٔ ۱۴-۳۴ برحسب $T_X$ و پس از اندکی عملیات جبری خواهیم داشت

$$T_X=\frac{k_1 L_2 T_C+k_2 L_1 T_H}{k_1 L_2+k_2 L_1} \qquad (۱۴\text{-}۳۵)$$

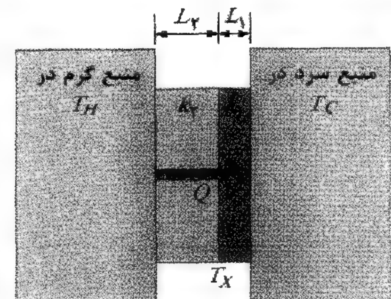
با قرار دادن این عبارت به جای $T_X$ در هر یک از تساویهای معادلهٔ ۱۴-۳۴ خواهیم داشت

$$P_{\text{رسانش}}=\frac{A(T_H-T_C)}{L_1/k_1+L_2/k_2} \qquad (۱۴\text{-}۳۶)$$

معادلهٔ ۱۴-۳۶ را به هر تعداد $n$ از ماده‌های تشکیل دهندهٔ یک بُره می‌توان تعمیم داد:

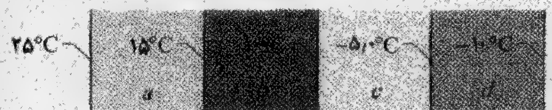
$$P_{\text{رسانش}}=\frac{A(T_H-T_C)}{\sum(L/k)} \qquad (۱۴\text{-}۳۷)$$

علامت جمع در مخرج به معنای افزودن مقدارهای $L/k$ برای همهٔ ماده‌هاست.




**شکل ۱۴-۱۹** گرما با آهنگ پایا از بُره‌ای که از دو جنس مختلف با ضخامتها و رسانندگیهای گرمایی مختلف ساخته شده‌اند انتقال می‌یابد. دمای حالت پایا در سطح مشترک دو ماده $T_X$ است.

***نکتهٔ وارسی ۷*** شکل دماهای سطحها و دمای سطح مشترکهای یک بُرهٔ مرکب را نشان می‌دهد که از چهار ماده با ضخامتهای یکسان تشکیل شده است و گرما به طور پایا از آنها انتقال می‌یابد. این چهار ماده را به ترتیب بزرگی رسانندگی گرمایی آنها از بیشترین تا کمترین بنویسید.




### همرفت

هنگامی که به شعلهٔ شمع یا شعلهٔ کبریت نگاه می‌کنید، شما نظاره‌گر انرژی گرمایی هستید که به وسیلهٔ **همرفت** رو به بالا انتقال می‌یابد. هرگاه شاره‌ای مانند هوا یا آب به حالت تماس با جسمی در آید که دمای آن بیشتر از شاره است، چنین انتقالی رخ می‌دهد. دمای شاره‌ای که در تماس با جسم گرم است افزایش می‌یابد و (در بیشتر حالتها) شاره منبسط و در نتیجه چگالی‌اش کمتر می‌شود. چون اکنون این شارهٔ منبسط شده سبکتر از شارهٔ سردتر اطراف است، به علت نیروهای شناوری بالا می‌رود. در نتیجه، مقداری از شاره سردتر اطراف جای شارهٔ گرمتر بالا رفته را می‌گیرد و خودش گرم می‌شود، و سپس این فرایند ادامه می‌یابد.

همرفت بخشی از بسیاری از فرایندهای طبیعی است. همرفت جوی نقشی اساسی در تعیین الگوی آب و هوایی کرهٔ زمین و تغییرهای آب و هوایی روزانه بازی می‌کند. خلبانان گلایدرها و نیز پرندگان گرماهای بالا رونده (جریانهای همرفت هوای گرم) را جستجو می‌کنند تا آنها را بالای زمین نگهدارند. انتقالهای عظیم انرژی در داخل اقیانوسها با همین فرایند صورت می‌گیرد. بالاخره، انرژی از کورهٔ هسته‌ای خورشید در هستهٔ آن به وسیلهٔ کانونهای فوق العاده بزرگ همرفت به سطح خورشید انتقال می‌یابد، در این همرفت گازهای داغ از هسته به سطح بالا می‌آیند و گازهای سردتر اطراف هسته به زیر سطح می‌روند.

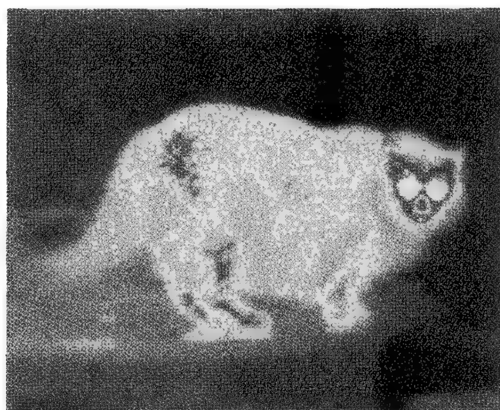
### تابش

روش سوم برای مبادلهٔ انرژی گرمایی بین یک جسم و محیط پیرامون آن از طریق موجهای الکترومغناطیسی است (نور مرئی یک نوع موج الکترومغناطیسی است). برای تمایز گرمای انتقال یافته از *سیگنالهای* الکترومغناطیسی (مثلاً پخش تلویزیونی) و از تابش هسته‌ای (انرژی و ذره‌های گسیل شده از هسته)، انرژی انتقال یافته به این روش اغلب **تابش گرمایی** نامیده می‌شود. (در حالت کلی «تابش کردن» به معنای گسیل کردن است.) هرگاه در کنار آتش بزرگی بایستیم، با کاهش انرژی گرمایی آتش، انرژی گرمایی ما افزایش می‌یابد. برای انتقال گرما از طریق تابش به هیچ محیطی نیاز نیست- تابش می‌تواند مثلاً از خورشید از طریق خلأ حرکت کند و به ما برسد.

آهنگ $P_{\text{تابش}}$ که با آن جسمی انرژی را از طریق تابش الکترومغناطیسی گسیل می‌کند به مساحت سطح $A$ جسم و دمای $T$ آن سطح برحسب کلوین بستگی دارد و با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$P_{\text{تابش}}=\sigma\varepsilon A T^4 \qquad (۱۴\text{-}۳۸)$$

در اینجا $\sigma = ۵/۶۷۰۳ \times ۱۰^{-۸}\ W/m^{۲}\cdot K^{۴}$ به افتخار *جوزف استفان*[1] (که در سال ۱۸۷۹/۱۲۵۸ معادلهٔ ۱۴–۳۸ را به طور تجربی کشف کرد) و لودویگ بولتزمن[2] (که اندکی بعد آن معادله را به طور نظری ثابت کرد) *ثابت استفان– بولتزمن* نامیده می‌شود. نماد $\varepsilon$ *گسیلندگی* سطح جسم را نشان می‌دهد که مقدار آن بسته به ترکیب سطح بین صفر و یک است. سطحی با گسیلندگی بیشینهٔ ۱/۰ *تابشگر جسم سیاه* نامیده می‌شود، ولی چنین سطحی یک حد آرمانی است و در طبیعت وجود ندارد. دوباره توجه کنید که دما در معادلهٔ ۱۴–۳۸ باید برحسب کلوین باشد، در نتیجه دمای صفر مطلق متناظر با حالت بدون تابش است. همچنین توجه کنید که هر جسمی با دمای بالاتر از ۰K، از جمله خود شما، تابش گرمایی گسیل می‌کند، (به شکل ۱۴–۲۰ نگاه کنید).



**شکل ۱۴–۲۰** تصویر یک دما نگاشت که آهنگ تابش انرژی توسط یک گربه را نشان می‌دهد. وقتی تصویر رنگی باشد آهنگ تابش رنگها از بیشتر به کمتر عبارت‌اند از رنگهای سفید و قرمز. بینی سرد است.

آهنگ $P_{\text{جذب}}$ که جسمی انرژی را از طریق تابش گرمایی از محیط خود، که فرض می‌کنیم در دمای یکنواخت $T_{\text{محیط}}$ (برحسب کلوین) باشد، جذب می‌کند عبارت است از

$$P_{\text{جذب}} = \sigma \varepsilon A T^{۴}_{\text{محیط}} \qquad (۱۴\text{–}۳۹)$$

گسیلندگی $\varepsilon$ در معادلهٔ ۱۴–۳۹ دارای همان مقدار مربوط به معادلهٔ ۱۴–۳۸ است. یک تابشگر جسم سیاه آرمانی با $\varepsilon = ۱$ همهٔ انرژی تابیده شده به آن را جذب می‌کند (به جای اینکه بخشی از آن را توسط بازتاب یا پراکندگی از خود دور کند).

چون یک جسم در حالی که انرژی را از محیط جذب می‌کند به محیط انرژی تابش می‌کند، آهنگ خالص $P_{\text{خالص}}$ تبادل انرژی جسم ناشی از تابش گرمایی عبارت است از

$$P_{\text{خالص}} = P_{\text{جذب}} - P_{\text{تابش}} = \sigma \varepsilon A (T^{۴}_{\text{محیط}} - T^{۴}) \qquad (۱۴\text{–}۴۰)$$

$P_{\text{خالص}}$ مثبت است هرگاه انرژی از طریق تابش جذب شود و منفی است هرگاه آن را از طریق تابش از دست بدهد.

حال به داستان توانایی سوسک *ملانوفیلا* برمی‌گردیم که می‌تواند از فاصلهٔ نسبتاً دوری تقریباً ۱۲Km بدون دیدن یا بوییدن آتش را تشخیص دهد. دو اندام در هر طرف بدن سوسک می‌تواند تابش گرمایی حتی سطح پایین را آشکار کند. هر اندام دارای تقریباً ۷۰ حسگر دگمه مانند است که هرگاه تابش گرمایی را از آتش دریافت کنند کمی منبسط می‌شوند؛ انبساط آنها موجب فشار آنها روی سلولهای حسگر می‌شود. بنابراین، آشکارساز سازوکاری است که انرژی را از تابش گرمایی به یک وسیلهٔ مکانیکی منتقل می‌کند. سوسک با سمتگیری خود به طوری که همه چهار اندام آشکار کننده فروسرخ تحت تأثیر قرار گرفته باشد مکان آتش را تشخیص می‌دهد و سپس به سمت آتش پرواز می‌کند به طوری پاسخ اندامها افزایش یابد.

در مورد یک مار زنگی مرده که با دست تماس پیدا کند، نیز موارد متعدد پزشکی دیده شده که در آنها تابش گرمایی دخالت داشته است. حفره‌های بین هر چشم و سوراخ بینی مار زنگی به عنوان حسگرهای تابش گرمایی عمل می‌کنند (شکل ۱۴–۲۱). مثلاً هرگاه موشی در نزدیکی سر مار زنگی حرکت کند، تابش گرمایی به حسگرها برخورد می‌کند، که موجب واکنش می‌شود که مار موش را با دندانهای خود گرفته و زهر خود را به آن وارد می‌کند. تابش گرمایی از دستی که با مار تماس پیدا می‌کند می‌تواند موجب همان واکنش شود حتی اگر مار ۳۰ دقیقه قبل مرده باشد، چون دستگاه عصبی مار هنوز کار می‌کند. به عنوان یک توصیه تخصصی اگر مجبور باشید که یک مار تازه کشته شده را بردارید، به جای دست خود از یک چوب بلند استفاده کنید.



**شکل ۱۴–۲۱** صورت یک مار زنگی دارای آشکار کننده‌های تابش گرمایی است، که اجازه می‌دهد مار حتی در تاریکی کامل به حیوانی آسیب برساند.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۴–۶

شکل ۱۴–۲۲ سطح مقطع دیواری را نشان می‌دهد که از چوب کاج سفید به ضخامت $L_a$ و آجر به ضخامت $L_d (= ۲/۰ L_a)$ ساخته شده است که بین آنها دو لایه با جنس نامعلوم با ضخامتها و رسانندگیهای گرمایی یکسان قرار گرفته است.

1. Josef stefan
2. Ludwig Boltzmann

رسانندگی گرمایی کاج $k_a$ و از آن آجر $k_d (=۵/۰ k_a)$ است. مساحت دیوار $A$ نامعلوم است. رسانش گرمایی از طریق دیوار به حالت پایا رسیده است؛ دماهای سطحهای مشترک برابرند با $T_۱ = ۲۵°C$، $T_۲ = ۲۰°C$ و $T_۵ = -۱۰°C$. دمای سطح مشترک $T_۴$ چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) دمای $T_۴$، همان‌طور که با معادلهٔ ۱۴-۳۲ مشخص شده است، کمک می‌کند تا آهنگ $P_d$ رسانش انرژی از طریق آجر را به دست آوریم. ولی برای حل معادلهٔ ۱۴-۳۲ برحسب $T_۴$ داده‌های کافی نداریم. (۲) چون رسانش در حالت پایا است، آهنگ رسانش $P_d$ از طریق آجر باید برابر با آهنگ رسانش $P_a$ از طریق چوب کاج باشد.

***محاسبه:*** از معادلهٔ ۱۴-۳۲ و شکل ۱۴-۲۲ می‌توان نوشت

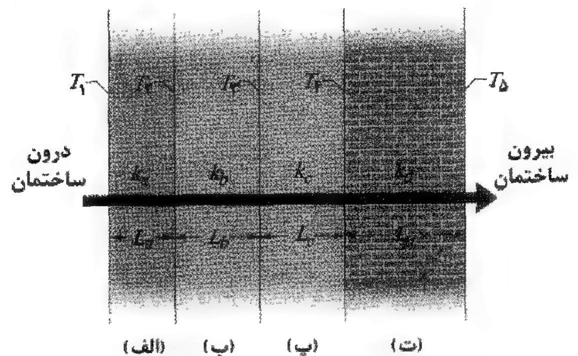
$$P_a = k_a A \frac{T_۱ - T_۲}{L_a} \qquad \text{و} \qquad P_d = k_d A \frac{T_۴ - T_۵}{L_d}$$

با قرار دادن $P_a = P_d$ و حل آن برحسب $T_۴$ خواهیم داشت

$$T_۴ = \frac{k_a L_d}{k_d L_a}(T_۱ - T_۲) + T_۵$$

چون $L_d = ۲/۰ L_a$ و $k_d = ۵/۰ k_a$، پس با استفاده از دماهای معلوم خواهیم داشت

$$T_۴ = \frac{k_a(۲/۰ L_a)}{(۵/۰ k_a) L_a}(۲۵°C - ۲۰°C) - (-۱۰°C)$$
$$= -۸/۰ °C \qquad \text{(پاسخ)}$$




**شکل ۱۴-۲۲** دیواری با چهار لایه که در آن انتقال گرما به صورت پایا منتقل می‌شود.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۴-۷ مهارت خود را تقویت کنید

در ضمن عبور از یک بیابان برهوت اشتیاق فوق العاده‌ای به یخ دارید. متأسفانه شبها دمای هوا فقط تا $۶/۰°C$ پایین می‌آید- که برای یخ زدن خیلی بالاست. ولی، چون آسمان شبهای صاف بدون ماه مانند یک تابشگر جسم سیاه واقع در دمای $T_s = -۲۳°C$ عمل می‌کند شاید بتوانید با قرار دادن یک لایهٔ کم عمق آب و تابش انرژی به چنین آسمانی یخ درست کنید. در آغاز با گذاشتن یک لایه با رسانندگی ضعیف مانند اسفنج لاستیکی یا کاه در زیر یک ظرف آن را از نظر گرمایی نسبت به زمین عایق می‌کنید. سپس آب را به داخل ظرف می‌ریزید تا لایه‌ای یکنواخت و نازک به جرم $m = ۴/۵g$ با مساحت $A = ۹/۰ cm^۲$ و عمق $d = ۵/۰mm$ و گسیلندگی $\varepsilon = ۰/۹۰$ و با دمای اولیهٔ $۶/۰°C$ تشکیل شود. زمان لازم را برای اینکه آب از طریق تابش یخ بزند پیدا کنید. آیا یخ زدن می‌تواند در یک شب انجام می‌گیرد؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) آب در دمای بالاتر از نقطهٔ انجماد نمی‌تواند یخ بزند. بنابراین، تابش ابتدا باید دمای آب را از $۶/۰°C$ به نقطه انجماد $۰°C$ کاهش دهد که مستلزم برداشتن مقدار انرژی $Q_۱$ است. (۲) سپس تابش باید مقدار انرژی اضافی $Q_۲$ را جهت یخ زدن همهٔ آب بردارد. (۳) در تمامی این فرایند، آب همچنین انرژی تابش شده به آن از آسمان را جذب می‌کند. می‌خواهیم انرژی خالص از دست رفته را پیدا کنیم.

***سرمایش آب:*** با استفاده از معادلهٔ ۱۴-۱۴ و جدول ۱۴-۳ در می‌یابیم که انرژی لازم برای سرد کردن آب تا $۰°C$ برابر است با

$$Q_۱ = cm(T_f - T_i)$$
$$= (۴۱۹۰ J/kg \cdot K)(۴/۵ \times ۱۰^{-۳} kg)(۰°C - ۶/۰°C)$$
$$= -۱۱۳J$$

بنابراین، ۱۱۳J باید از آب تابش شود تا دمای آن به نقطهٔ انجماد برسد.

***انجماد آب:*** با استفاده از معادلهٔ ۱۴-۱۶ $(Q = mL)$ با مقدار $L$ برابر با $L_f$، از معادلهٔ ۱۴-۱۸ یا جدول ۱۴-۴ و قرار دادن علامت منفی بخاطر از دست دادن انرژی خواهیم داشت

$$Q_۲ = -mL_F = -(۴/۵ \times ۱۰^{-۳} kg)(۳/۳۳ \times ۱۰^۵ J/kg)$$
$$= -۱۴۹۹J$$

بنابراین، کل انرژی مورد نیاز داده شده عبارت است از

$$Q_{\text{کل}} = Q_۱ + Q_۲ = -۱۱۳J - ۱۴۹۹J = -۱۶۱۲J$$

***تابش:*** وقتی آب از طریق تابش به آسمان انرژی از دست می‌دهد، انرژی تابش شده از آسمان را نیز جذب می‌کند. در زمان کل $t$، می‌خواهیم انرژی خالص این تبادل برابر با انرژی از دست داده شدهٔ $Q_{\text{کل}}$ باشد؛ بنابراین، می‌خواهیم توان این تبادل به صورت زیر باشد

$$\text{توان} = \frac{\text{انرژی خالص}}{\text{زمان}} = \frac{Q_{\text{کل}}}{t} \qquad (۱۴-۴۱)$$

توان چنین تبادل انرژی نیز برابر با آهنگ خالص $P_{\text{خالص}}$ تابش گرمایی است که توسط معادله ۱۴-۴۰ داده می‌شود؛ پس زمان $t$ مورد نیاز برای از دست دادن انرژی که باید برابر با $Q_{\text{کل}}$ باشد عبارت است از

$$t = \frac{Q}{P_{\text{خالص}}} = \frac{Q}{\sigma\varepsilon A(T_s^۴ - T^۴)} \qquad (۱۴-۴۲)$$

اگر چه دمای $T$ آب به هنگام سرد شدن اندکی کاهش می‌یابد، می‌توان $T$ را تقریباً نقطهٔ انجماد یعنی ۲۷۳K در نظر گرفت. با $T_s = ۲۵۰K$، مخرج معادلهٔ ۱۴-۴۲ عبارت است از

$$(5/67\times10^{-8}\ W/m^2\cdot K^4)(0/90)(9/0\times10^{-3}\ m^2)$$
$$\times[(250\,K)^4-(273\,K)^4]=-7/57\times10^{-2}\ J/s$$

و از معادلهٔ ۱۴-۴۲ خواهیم داشت

$$t=\frac{-1612\,J}{-7/57\times10^{-2}\ J/s}=2/13\times10^4\ s=5/9h \qquad \text{(پاسخ)}$$

چون $t$ کمتر از یک شب است، انجماد آب با تابش به آسمان تاریک امکان پذیر است. در واقع در بخشهایی از جهان پیش از اینکه یخ‌سازهای الکتریکی وجود داشته باشد، مردم از این روش استفاده می‌کردند.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**دما؛ دماسنجها** دما یکی از کمیتهای اصلی SI است که به احساسِ ما از سردی و گرمی مربوط می‌شود. دما را با دماسنج اندازه می‌گیرند، که دارای یک ماده کاری با یک خاصیت قابل اندازه‌گیری مانند طول یا فشار است که به روش منظم در هنگام گرم یا سرد شدن تغییر می‌کند.

**قانون صفرم ترمودینامیک** هرگاه یک دماسنج و جسم دیگری در تماس با یکدیگر قرار گیرند، سرانجام به تعادل دمایی می‌رسند. در این صورت عدد خوانده شده از دماسنج به عنوان دمای جسم در نظر گرفته می‌شود. این فرایند به دلیل **قانون صفرم ترمودینامیک** اندازه‌گیریهای دما را به طور مفید و سازگار فراهم می‌کند: اگر دو جسم $A$ و $B$ هر یک با جسم سوم $C$ (دماسنج) در حالت تعادل گرمایی باشند، آنگاه $A$ و $B$ با یکدیگر در تعادل گرمایی‌اند.

**مقیاس دمایی کلوین** در دستگاه SI، دما در **مقیاس کلوین** اندازه‌گیری می‌شود، که بر *نقطهٔ سه‌گانهٔ* آب (273/16K) استوار است. دماهای دیگر با استفاده از یک *دماسنج گازی با حجم ثابت*، که در آن فشار یک نمونهٔ گازی با حجم ثابت با دمای آن متناسب است، تعریف می‌شوند. *دمای* $T$ را به صورتی که با یک دماسنج گازی اندازه‌گیری می‌شود تعریف می‌کنیم که عبارت است از

$$T=(273/16K)\left(\lim_{\text{مقدار گاز}\to 0}\frac{p}{p_3}\right) \qquad (۱۴-۶)$$

در اینجا $T$ برحسب کلوین و $p_3$ و $p$ به ترتیب فشار گاز در دمای 273/16K و فشار گاز در دمای اندازه‌گیری شده است.

**مقیاسهای سلسیوس و فارنهایت** مقیاس دمایی سلسیوس به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_C=T-273/15° \qquad (۱۴-۷)$$

که در آن $T$ برحسب کلوین است. مقیاس دمایی فارنهایت به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_F=\frac{9}{5}T_C+32° \qquad (۱۴-۸)$$

**انبساط گرمایی** ابعاد همهٔ جسمها با تغییر دما تغییر می‌کند. به ازای تغییر دمای $\Delta T$، تغییر $\Delta L$ در بعد خطی $L$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\Delta L=L\alpha\Delta T \qquad (۱۴-۹)$$

که در آن $\alpha$ **ضریب انبساط خطی** است. تغییر $\Delta V$ در حجم $V$ یک جامد یا مایع عبارت است از

$$\Delta V=V\beta\Delta T \qquad (۱۴-۱۰)$$

که در آن $\beta=3\alpha$ **ضریب انبساط حجمی** ماده است.

***گرما*** گرمای $Q$ انرژیی است که به علت وجود اختلاف دما بین یک دستگاه و محیط آن مبادله می‌شود. گرما را می‌توان برحسب **ژول** (J)، **کالری** (Cal)، **کیلو کالری** (kcal یا Cal)، یا **یکای بریتانیایی گرما** (Btu) اندازه‌گیری کرد

$$1cal=3/969\times10^{-3}\ Btu=4/1868\,J \qquad (۱۴-۱۲)$$

***ظرفیت گرمایی و گرمای ویژه*** اگر گرمای $Q$ توسط جسمی جذب شود، تغییر دمای $T_f-T_i$ جسم با گرمای $Q$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$Q=C(T_f-T_i) \qquad (۱۴-۱۳)$$

که در آن $C$ ظرفیت گرمایی جسم است. اگر جرم جسم $m$ باشد، آنگاه

$$Q=cm(T_f-T_i) \qquad (۱۴-۱۴)$$

که $c$ **گرمای ویژهٔ** ماده‌ای است که جسم از آن ساخته شده است. **گرمای ویژهٔ مولی** یک ماده برابر است با ظرفیت گرمایی هر مول، یا $6/02\times10^{23}$ برابر واحد بنیادی ماده.

**گرمای تغییر حالت** گرمای جذب شده توسط یک ماده ممکن است حالت فیزیکی ماده را تغییر دهد- مثلاً از جامد به مایع یا از مایع به گاز. مقدار انرژی مورد نیاز برای تغییر حالت (نه تغییر دمای) یکای جرم یک مادهٔ معین را **گرمای تغییر حالت** $L$ می‌نامند. بنابراین

$$Q=Lm \qquad (۱۴-۱۶)$$

**گرمای تبخیر** $L_V$ عبارت است از مقدار انرژی مربوط به یکای جرم که باید به مایع داد تا بخار شود یا از گاز گرفت تا به مایع تبدیل شود. **گرمای ذوب** $L_F$ عبارت است از مقدار انرژی مربوط به یکای جرم که باید به یک جسم جامد داد تا ذوب شود، یا از یک مایع گرفت تا منجمد شود.

**کار مربوط به تغییر حجم** یک گاز می‌تواند با محیط خود از طریق کار انرژی مبادله کند. مقدار کار $W$ انجام شده *به وسیلهٔ* گاز در هنگام انبساط یا تراکم آن از حجم اولیهٔ $V_i$ تا حجم $V_f$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$W=\int dW=\int_{V_i}^{V_f}p\,dV \qquad (۱۴-۲۵)$$

چون فشار $p$ ممکن است در طی تغییر حجم تغییر کند، انتگرالگیری ضروری است.

***قانون اول ترمودینامیک*** اصل پایستگی انرژی برای یک فرایند ترمودینامیکی به صورت **قانون اول ترمودینامیک** بیان می‌شود، که می‌تواند شکلهای زیر را داشته باشد

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},f} - E_{\text{int},i} = Q - W \quad \text{(قانون اول)} \quad (۱۴-۲۶)$$

یا

$$dE_{\text{int}} = dQ - dW \quad \text{(قانون اول)} \quad (۱۴-۲۷)$$

$E_{\text{int}}$ انرژی درونی ماده را نشان می‌دهد که فقط به حالت ماده (دما، فشار و حجم) بستگی دارد. $Q$ انرژی مبادله شده به صورت گرما بین دستگاه و محیط آن است. اگر دستگاه گرما جذب کند $Q$ مثبت و اگر دستگاه گرما از دست بدهد $Q$ منفی است. $W$ کار انجام شده *به وسیلهٔ* دستگاه است؛ اگر دستگاه براثر نیروی خارجی وارد شده از محیط اطراف منبسط شود، $W$ مثبت و اگر دستگاه بر اثر نیروی خارجی وارد شده منقبض شود، $W$ منفی است. *$Q$ و $W$ هر دو به مسیر بستگی دارند ولی $\Delta E_{\text{int}}$ مستقل از مسیر است.*

**کاربردهای قانون اول ترمودینامیک** قانون اول ترمودینامیک در چند حالت خاص به کار می‌رود

*فرایندهای بی دررو* $Q = ۰, \quad \Delta E_{\text{int}} = -W$

*فرایندهای حجم ثابت* $W = ۰, \quad \Delta E_{\text{int}} = Q$

*فرایندهای چرخه‌ای* $\Delta E_{\text{int}} = ۰, \quad Q = W$

*انبساطهای آزاد* $Q = W = \Delta E_{\text{int}} = ۰$

***رسانش، همرفت و تابش*** آهنگ **رسانش** انرژی $P_{\text{رسانش}}$ از طریق تُره‌ای که وجوه آن در دماهای $T_H$ و $T_C$ قرار دارند عبارت است از

$$P_{\text{رسانش}} = \frac{Q}{t} = kA\,\frac{T_H - T_C}{L} \quad (۱۴-۳۲)$$

که در آن $A$ مساحت، $L$ ضخامت تُره، و $k$ رسانندگی گرمایی ماده است.

همرفت هنگامی رخ می‌دهد که اختلاف دما باعث انتقال انرژی به وسیلهٔ حرکت در داخل یک شاره شود. *تابش*، عبارت است از انتقال انرژی از طریق گسیل انرژی الکترومغناطیسی. آهنگ تابش $P_{\text{تابش}}$، که با آن جسمی انرژی را از طریق تابش گرمایی گسیل می‌کند برابر است با

$$P_{\text{تابش}} = \sigma\varepsilon A T^۴ \quad (۱۴-۳۸)$$

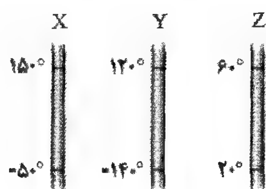
که در آن $\sigma (= ۵/۶۷۰۳ \times ۱۰^{۵}\ \text{W/m}^۲ \cdot \text{K}^۴)$ ثابت استفان-بولتزمن، $\varepsilon$ گسیلندگی سطح جسم، $A$ مساحت سطح و $T$ دمای سطح (برحسب کلوین) است. آهنگ جذب $P_{\text{جذب}}$ که با آن جسمی انرژی را از طریق تابش گرمایی از محیط خود، که در دمای یکنواخت $T_{\text{محیط}}$ (برحسب کلوین) قرار دارد جذب می‌کند، عبارت است از

$$P_{\text{جذب}} = \sigma\varepsilon A T^۴_{\text{محیط}} \quad (۱۴-۳۹)$$

## پرسشها

۱- ماده‌های $A$، $B$ و $C$ جامدهایی هستند که در دماهای ذوب خود قرار دارند. مادهٔ $A$ برای ذوب ۴kg به ۲۰۰J، مادهٔ $B$ برای ذوب ۵ kg به ۳۰۰J و مادهٔ $C$ برای ذوب ۶ kg به ۳۰۰J نیاز دارد. این ماده‌ها را به ترتیب بزرگی گرماهای ذوب آنها مرتب کنید.

۲- شکل ۱۴-۲۳ سه مقیاس دمایی خطی را نشان می‌دهد که در آن نقطه‌های انجماد و جوش آب مشخص شده‌اند. این سه مقیاس را به ترتیب بزرگی اندازهٔ یک درجه روی مقیاس مرتب کنید.

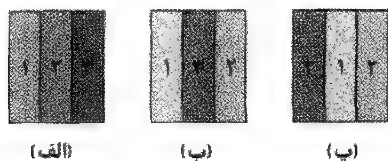



**شکل ۱۴-۲۳** پرسش ۲

۳- در جدول زیر طول اولیهٔ $L$، تغییر دمای $\Delta T$ و تغییر طول $\Delta L$ چهار میله داده شده‌اند. میله‌ها را به ترتیب بزرگی ضریب انبساط گرمایی آنها مرتب کنید.

| میله | L(m) | $\Delta T(C^\circ)$ | $\Delta L(m)$ |
|---|---|---|---|
| a | ۲ | ۱۰ | $۴\times۱۰^{-۴}$ |
| b | ۱ | ۲۰ | $۴\times۱۰^{-۴}$ |
| c | ۲ | ۱۰ | $۸\times۱۰^{-۴}$ |
| d | ۴ | ۵ | $۴\times۱۰^{-۴}$ |

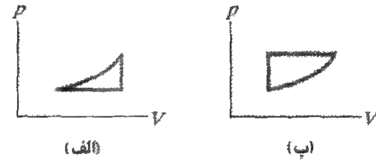
۴- شکل ۱۴-۲۴ سه آرایش مختلف ماده‌های ۱، ۲ و ۳ را برای تشکیل یک دیوار نشان می‌دهد. رسانندگیهای گرمایی عبارت‌اند از $k_۱ > k_۲ > k_۳$. دمای سمت چپ دیوار ۲۰°C بالاتر از دمای سمت راست آن است. این آرایش را به ترتیب بزرگی (الف) آهنگ رسانش انرژی (حالت پایا) از طریق دیوار و (ب) اختلاف دمای دو طرف مادهٔ ۱ مرتب کنید.




**شکل ۱۴-۲۴** پرسش ۴

۵- شکل ۱۴-۲۵ دو چرخهٔ بسته را برای یک گاز در نمودارهای $p$-$V$ نشان می‌دهد. طول و شکل هر سه بخش چرخهٔ ۱ مانند طول و شکل چرخهٔ ۲ است. در مورد هر چرخه اگر (الف) کار خالص $W$ انجام شده به وسیلهٔ گاز مثبت باشد و (ب) انرژی خالص انتقال یافته به وسیلهٔ گاز به صورت گرمای

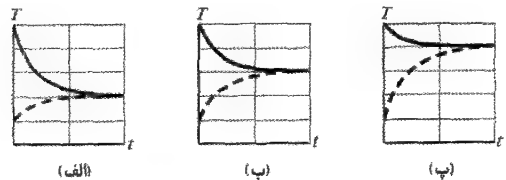
$Q$ مثبت باشد، آیا چرخه باید در جهت ساعتگرد پیموده شود یا پادساعتگرد؟




**شکل ۱۴-۲۵** پرسشهای ۵ و ۶

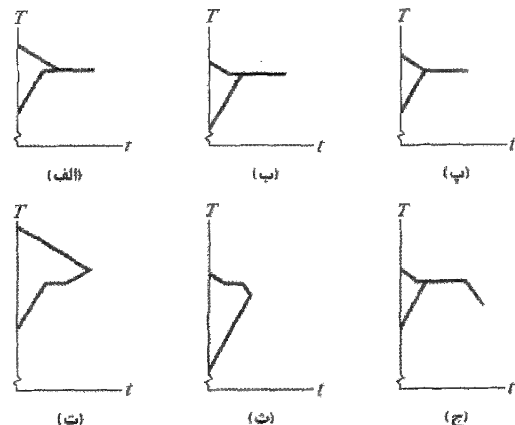
۶- در مورد کدام چرخه در شکل ۱۴-۲۵ که در جهت ساعتگرد پیموده می‌شود (الف) $W$ بیشتر است و (ب) $Q$ بیشتر است؟

۷- جسم گرمی را به داخل مخزنی از آب که به طور گرمایی عایق بندی شده است می‌اندازیم و سپس جسم و آب به تعادل گرمایی می‌رسند. این آزمایش با دو جسم گرم مختلف دیگر تکرار می‌شود. جرم و دمای اولیهٔ هر سه جسم یکسان است و جرم و دمای اولیهٔ آب نیز در سه آزمایش یکسان است. شکل ۱۴-۲۶ نموداری از دماهای $T$ جسم و آب برحسب زمان $t$ را برای هر سه آزمایش نشان می‌دهد. این نمودارها را به ترتیب بزرگی گرماهای ویژهٔ سه جسم مرتب کنید.




**شکل ۱۴-۲۶** پرسش ۷

۸- نمونهٔ $A$ از آب و نمونهٔ $B$ از یخ با جرم یکسان را در یک ظرف منزوی شده قرار می‌دهیم و می‌گذاریم تا به تعادل گرمایی برسند. شکل ۱۴-۲۷ الف نمودار دمای $T$ نمونه‌ها را برحسب زمان $t$ نشان می‌دهد. (الف) آیا دمای تعادل نسبت به دمای نقطه انجماد آب بالاتر است یا پایینتر یا با آن مساوی است؟ (ب) هنگام رسیدن به تعادل، آیا مقداری از مایع یخ می‌زند، کاملاً یخ می‌زند یا اصلاً یخ نمی‌زند؟ (پ) آیا مقداری از یخ یا تمام یخ ذوب می‌شود یا اصلاً ذوب نمی‌شود؟

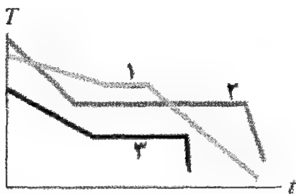



**شکل ۱۴-۲۷** پرسشهای ۸ و ۹

۹- در ادامهٔ پرسش ۸، از نمودار ب تا ج شکل ۱۴-۲۷، نمودارهای دیگری از $T$ برحسب $t$ است که یک مورد یا بیشتر از یک مورد امکان تحقق ندارد. (الف) کدامیک امکان تحقق ندارد و چرا؟ (ب) در موردی که امکان تحقق وجود دارد، آیا دمای تعادل بیشتر است یا کمتر یا برابر با نقطهٔ انجماد آب است؟ (پ) در وضعیتهایی که امکان رسیدن به تعادل وجود دارد، آیا مقداری از مایع یخ می‌زند، تمام مایع یخ می‌زند یا اصلاً یخ نمی‌زند؟ آیا مقداری از یخ ذوب می‌شود، تمام یخ ذوب می‌شود، یا اصلاً ذوب نمی‌شود؟

۱۰- یک مکعب صلب به ضلع $r$، یک کرهٔ صلب به شعاع $r$، و یک نیمکرهٔ صلب به شعاع $r$، همه از یک جنس با دمای ۳۰۰K در محیطی که دمای آن ۳۵۰K است، قرار داده شده‌اند. این سه جسم را به ترتیب بزرگی آهنگ خالصی که تابش گرمایی با محیط مبادله می‌کند مرتب کنید.

۱۱- سه مادهٔ مختلف با جرم یکسان را به نوبت در یک جایخی که می‌تواند انرژی را با آهنگ معین و ثابتی از هر یک بگیرد قرار می‌دهیم. در ضمن فرایند سرد شدن، هر ماده از حالت مایع شروع می‌کند و در پایان به حالت جامد می‌رسد؛ شکل ۱۴-۲۸ دمای $T$ را برحسب زمان $t$ نشان می‌دهد. (الف) در مورد مادهٔ ۱، گرمای ویژه برای حالت مایع بیشتر از گرمای ویژه برای حالت جامد است یا کمتر؟ این سه ماده را به ترتیب بزرگی (ب) دمای نقطهٔ انجماد و (پ) گرمای ویژه در حالت مایع و (ت) گرمای ویژه در حالت جامد و (ث) گرمای ذوب مرتب کنید.




**شکل ۱۴-۲۸** پرسش ۱۱

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)

SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها

WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

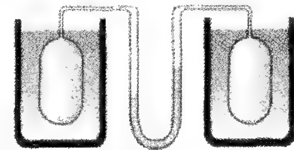
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

●●● تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.

اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

**بخش ۱۴-۴ اندازه‌گیری دما**

•۱- یک دماسنج گازی از دو حباب حاوی گاز ساخته شده است که مانند شکل ۱۴-۲۹ هر یک در یک ظرف آب قرار دارند. اختلاف فشار بین دو حباب، مانند آنچه که نشان داده شده است، توسط یک فشارسنج جیوه‌ای اندازه‌گیری می‌شود. مخزنهای مناسبی که در شکل نشان داده نشده‌اند، حجم گاز در دو حباب را ثابت نگه می‌دارند. وقتی که هر دو ظرف در دمای نقطهٔ سه‌گانهٔ آب قرار دارند، هیچ اختلاف فشاری وجود ندارد. وقتی یکی از ظرفها در دمای نقطهٔ سه‌گانه و دیگری در دمای نقطهٔ جوش آب قرار می‌گیرد، اختلاف فشار ۱۲۰ torr است. هرگاه یکی از ظرفها در دمای نقطهٔ سه‌گانه و دیگری در یک دمای نامعلوم که تحت اندازه‌گیری است قرار گیرد، اختلاف فشار ۹۰/۰ torr است. دمای نامعلوم چقدر است؟



**شکل ۱۴-۲۹** مسئلهٔ ۱

•۲- دو دماسنج گازی با حجم ثابت یکی محتوی نیتروژن و دیگری محتوی هیدروژن است. هر دو به مقدار کافی از گاز پر شده‌اند، به طوری که $p_3 = 80\,kPa$. (الف) اگر هر دو مخزن دماسنجها را در آب جوش قرار دهیم، اختلاف فشار در دو دماسنج چقدر می‌شود؟ (*راهنمایی*: به شکل ۱۴-۶ نگاه کنید.) (ب) فشار کدام گاز بیشتر است؟

••۳- فرض کنید وقتی که گازی در نقطهٔ جوش آب قرار دارد دمای آن ۳۷۳/۱۵K باشد. در این صورت، مقدار حدی نسبت فشار گاز در نقطهٔ جوش به فشار آن در نقطهٔ سه‌گانهٔ آب چقدر است؟ (فرض کنید که حجم گاز در هر دو دما یکسان است.)

**بخش ۱۴-۵ مقیاسهای سلسیوس و فارنهایت**

•۴- (الف) در سال ۱۹۶۴/۱۳۴۳، دما در دهکدهٔ اویمیاکون[1] در سیبری به ۷۱°C- رسید. این دما در مقیاس فارنهایت چقدر است؟ (ب) بالاترین دمای ثبت شدهٔ رسمی در قارهٔ امریکا در درهٔ مرگ در کالیفرنیا ۱۳۴°F بوده است. این دما در مقیاس سلسیوس چقدر است؟

•۵- در چه دمایی عدد مقیاس فارنهایت برابر با (الف) دو برابرعدد دمای سلسیوس و (ب) نصف عدد دمای سلسیوس است؟

••۶- در مقیاس دمایی خطی X، آب در ۱۲۵/۰°X- یخ می‌زند و در ۳۷۵/۰°X می‌جوشد. در مقیاس دمایی خطی Y، آب در ۷۰/۰۰°Y- یخ می‌زند و در ۳۰/۰۰°Y- می‌جوشد. دمای ۵۰/۰۰°Y متناظر با چه دمایی در مقیاس X است؟

••۷- فرض کنید که در مقیاس دمایی خطی X، آب در ۵۳/۵°X- می‌جوشد و در ۱۷۰°X- یخ می‌زند. دمای ۳۴۰K در مقیاس X چقدر است؟ (نقطهٔ جوش آب را تقریباً ۳۷۳K در نظر بگیرید.) ILW

**بخش ۱۴-۶ انبساط گرمایی**

•۸- طول میلهٔ آلومینیومی یک پرچم ۳۳m است. اگر دما ۱۵C° افزایش یابد، طول میله چقدر افزایش می‌یابد؟

•۹- تغییر در حجم یک کرهٔ آلومینیومی به شعاع اولیهٔ ۱۰cm وقتی کره از ۰/۰°C تا ۱۰۰°C گرم شود چقدر است؟ SSM

•۱۰- طول یک میلهٔ آلومینیومی در دمای ۲۰/۰۰۰°C برابر با ۱۰/۰۰۰cm و در نقطهٔ جوش آب برابر با ۱۰/۰۱۵cm است. (الف) طول میله در نقطهٔ انجماد آب چقدر است؟ (ب) اگر طول میله ۱۰/۰۰۹cm باشد، دما چقدر است؟

•۱۱- قطر سوراخ دایره‌ای در یک صفحهٔ آلومینیومی در ۰/۰۰۰°C برابر با ۲/۷۲۵cm است. وقتی دمای صفحه به ۱۰۰/۰°C برسد قطر سوراخ چقدر می‌شود؟ ILW

•۱۲- طول ضلع یک مکعب برنجی در دمای ۲۰°C برابر با ۳۰cm است. وقتی دما از ۲۰°C به ۷۵°C برسد، افزایش در مساحت سطح مکعب چقدر است؟

•۱۳- اگر حجم یک گلولهٔ سربی در ۶۰/۰۰°C برابر با ۵۰/۰۰cm³ باشد، حجم آن در ۳۰/۰۰°C چقدر است؟

••۱۴- وقتی دمای یک استوانهٔ فلزی از ۰/۰°C به ۱۰۰°C برسد، طول آن ۰/۲۳٪ بیشتر می‌شود. (الف) درصد تغییر در چگالی را پیدا کنید. (ب) این فلز چیست؟ از جدول ۱۴-۲ استفاده کنید.

••۱۵- یک ظرف آلومینیومی با حجم ۱۰۰cm³ در ۲۲°C به طور کامل از گلیسیرین پر شده است. اگر دمای ظرف و گلیسیرین به ۲۸°C افزایش داده شود، چقدر گلیسیرین از ظرف بیرون می‌ریزد (اگر بریزد)؟ (ضریب انبساط حجمی گلیسیرین برابر با $5/1\times10^{-4}/C°$ است.) SSM WWW

••۱۶- طول میله‌ای در دمای ۲۰°C، که با یک خط‌کش فولادی اندازه‌گیری شده دقیقاً ۲۰/۰۵ cm است. میله و خط‌کش را در کوره‌ای به دمای ۲۷۰°C قرار می‌دهیم. در این صورت طول میله با اندازه‌گیری با همان خط‌کش برابر با ۲۰/۱۱cm می‌شود. ضریب انبساط خطی ماده‌ای که میله از آن ساخته شده چقدر است؟

••۱۷- در دمای ۲۵/۰۰°C قطر یک میلهٔ فولادی ۳/۰۰۰cm است. در دمای ۲۵/۰۰°C قطر داخلی یک حلقهٔ برنجی ۲/۹۹۲cm است. در چه دمای مشترکی حلقه درست در میله می‌لغزد؟ ILW

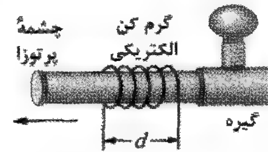
••۱۸- وقتی دمای یک سکهٔ مسی به اندازهٔ ۱۰۰C° افزایش یابد، قطر آن ۰/۱۸٪ زیاد می‌شود. با دو رقم با معنا، درصد افزایش

1. Oymyakon

در (الف) مساحت یک رویهٔ سکه، (ب) ضخامت، (پ) حجم و (ت) جرم سکه را به دست آورید. (ث) ضریب انبساط خطی سکه را محاسبه کنید.

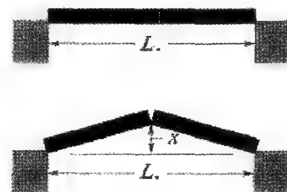
**۱۹••**- یک لولهٔ شیشه‌ای قائم به طول $L=۱/۲۸۰۰۰۰۰\,m$ در دمای $۲۰/۰۰۰۰۰۰°C$ تا نیمه با مایعی پر شده است. وقتی لوله تا $۳۰/۰۰۰۰۰۰°C$ گرم شود، طول ستون مایع چقدر تغییر می‌کند؟ $\alpha_{شیشه}=۱/۰۰۰۰۰۰\times۱۰^{-۵}/K$ و $\beta_{مایع}=۴/۰۰۰۰۰۰\times۱۰^{-۵}/K$ است.

**۲۰••**- در آزمایشی لازم است که یک چشمهٔ پرتوزای کوچک را با تندی بسیار کمی حرکت دهند. این حرکت با بستن چشمه به انتهای یک میلهٔ آلومینیومی و گرم کردن بخش مرکزی میله به روشی کنترل شده انجام می‌گیرد. اگر طول بخش گرم شده مؤثر میله در شکل ۱۴-۳۰ برابر $d=۲/۰۰\,cm$ باشد، برای اینکه چشمه با تندی ثابت $۱۰۰\,nm/s$ حرکت کند، دمای میله با چه آهنگ ثابتی باید تغییر کند؟



شکل ۱۴-۳۰ مسئلهٔ ۲۰

**۲۱•••**- وقتی دمای یک میله که در وسط آن شکافی وجود دارد به اندازهٔ $۳۲°C$ افزایش یابد، میله به طرف بالا کشیده می‌شود (شکل ۱۴-۳۱). اگر فاصلهٔ ثابت $L_0$ برابر با $۳/۷۷\,m$ و ضریب انبساط خطی میله $۲۵\times۱۰^{-۶}/C°$ باشد، بالا رفتگی $x$ مرکز میله را پیدا کنید. SSM ILW



شکل ۱۴-۳۱ مسئلهٔ ۲۱

## بخش ۱۴-۸ جذب گرما به وسیلهٔ جامدها و مایعها

**۲۲•**- جرم هر مول از مادهٔ معینی برابر با $۵۰/۰\,g/mol$ است. وقتی $۳۱۴\,J$ انرژی به صورت گرما به $۳۰/۰\,g$ این ماده داده شود، دمای آن از $۲۵/۰°C$ به $۴۵/۰°C$ افزایش می‌یابد. (الف) گرمای ویژه و (ب) گرمای ویژهٔ مولی این ماده چقدر است؟ (پ) در این نمونه چند مول وجود دارد؟

**۲۳•**- یک پزشک متخصص تغذیه مردم را به خوردن آب یخ در برنامهٔ غذایی تشویق می‌کند. نظر او این است که برای بالا بردن دمای آب از $۰/۰۰°C$ به دمای بدن که $۳۷/۰°C$ است، بدن باید به مقدار زیادی چربی بسوزاند. برای سوزاندن $۴۵۴\,g$ (تقریباً $1\,lb$) چربی، و با فرض اینکه برای سوختن این مقدار چربی انتقال $۳۵۰۰\,Cal$ به آب یخ لازم است، چند لیتر آب یخ باید مصرف شود؟ چرا این پرهیز غذایی توصیه نمی‌شود؟ ($۱=$لیتر $۱۰^۳\,cm^۳$ و چگالی آب $۱/۰۰\,kg/m^۳$ است.)

**۲۴•**- پس از اینکه $۵۰/۲\,kJ$ گرما از $۲۶۰\,g$ آب که در آغاز در نقطهٔ انجماد قرار دارد گرفته شد چقدر آب یخ نزده باقی می‌ماند؟

**۲۵•**- کمترین مقدار انرژی لازم برحسب ژول که برای ذوب کامل $۱۳۰\,g$ نقره که در آغاز در دمای $۱۵/۰°C$ قرار دارد چقدر است؟ SSM

**۲۶•**- یک راه برای جلوگیری از سرد شدن بیش از حد یک گاراژ در شب هنگام در وقتی که دمای زیر صفر پیش بینی شده است، قرار دادن تشت بزرگ پر از آب در گاراژ است. اگر جرم آب $۱۲۵\,kg$ و دمای اولیه آن $۲۰°C$ باشد، (الف) برای انجماد کامل، آب چقدر انرژی باید به محیط خود انتقال دهد و (ب) پس از این اتفاق پایینترین دمای ممکن آب و محیط اطراف آن چقدر است؟

**۲۷•**- برای گرم کردن $۱۰۰\,g$ آب جهت تهیهٔ یک فنجان قهوه از یک گرم کن الکتریکی غوطه‌ور در آب استفاده می‌کنیم. روی برچسب گرم‌کن «۲۰۰ وات» نوشته شده است (انرژی الکتریکی را با این آهنگ به انرژی گرمایی تبدیل می‌کند). با چشم پوشی از تلفات گرمایی، زمان لازم را برای رساندن آب از $۲۳/۰°C$ به $۱۰۰°C$ محاسبه کنید. SSM

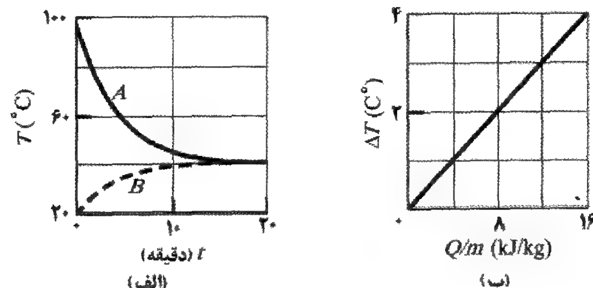
**۲۸•**- چند گرم کره که حاوی انرژی مفید $۶/۰\,cal/g(=۶۰۰۰\,cal/g)$ است با تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی مردی به جرم $۷۳/۰\,kg$ که از سطح دریا به قلهٔ اورست به بلندی $۸/۸۴\,km$ صعود می‌کند، هم ارز است؟ فرض کنید که میانگین $g$ برای صعود $۹/۸۰\,m/s^۲$ است.

**۲۹••**- چه جرمی از بخار آب $۱۰۰°C$ را باید با $۱۵۰\,g$ یخ با دمای نقطهٔ ذوب در یک ظرف عایق بندی شدهٔ گرمایی مخلوط کرد تا آب $۵۰°C$ به دست آید؟ ILW

**۳۰••**- یک کاسهٔ مسی به جرم $۱۵۰\,g$ حاوی $۲۲۰\,g$ آب است و دمای هر دو $۲۰/۰°C$ است. یک استوانهٔ مسی خیلی داغ به جرم $۳۰۰\,g$ را درون آب می‌اندازیم که باعث می‌شود آب بجوشد و $۵/۰۰\,g$ از آن به بخار تبدیل شود. دمای نهایی دستگاه $۱۰۰°C$ است. از مبادلهٔ انرژی با محیط چشم پوشی کنید. (الف) چقدر انرژی (برحسب کالری) به صورت گرما به آب داده می‌شود؟ (ب) چقدر انرژی گرمایی به کاسه داده می‌شود؟ (پ) دمای اولیهٔ استوانه چقدر بوده است؟

**۳۱••**- *تبدیل غیر متریک:* چقدر طول می‌کشد تا یک آب گرم‌کن $۲/۰\times۱۰^۵\,Btu/h$، دمای $۴۰\,gal$ آب را از $۷۰°F$ به $۱۰۰°F$ برساند؟ *تبدیل متری:* چقدر طول می‌کشد تا یک آب گرم‌کن $۵۹\,kW$ دمای $۱۵۰\,L$ آب را از $۲۱°C$ به $۳۸°C$ برساند؟

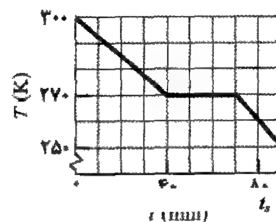
●●۳۲- وقتی نمونه‌های $A$ و $B$ در یک مخزن عایق بندی شدهٔ گرمایی قرار داده می‌شوند تا به تعادل گرمایی برسند در دماهای اولیهٔ مختلفی قرار دارند. شکل ۱۴-۳۲ الف دماهای $T$ آنها را برحسب زمان $t$ نشان می‌دهد. جرم نمونهٔ $A$ برابر با ۵/۰kg و جرم نمونهٔ $B$ برابر با ۱/۵kg است. شکل ۱۴-۳۲ ب نمودار کلی برای مادهٔ نمونهٔ $B$ است. این نمودار تغییر دمای $\Delta T$ را نشان می‌دهد که ماده به هنگام انتقال انرژی به صورت گرمای $Q$ پیدا می‌کند. تغییر $\Delta T$ برحسب انرژی $Q$ بر یکای جرم ماده رسم و مقیاس محور $x$ با $\Delta T = ۴/۰ C°$ مشخص شده است. گرمای ویژهٔ نمونهٔ $A$ چقدر است؟




شکل ۱۴-۳۲ مسئلهٔ ۳۲

●●۳۳- در یک آب گرم‌کن خورشیدی، توسط آبی که از طریق لوله‌هایی در جمع کنندهٔ بالای سقف دور می‌زند، انرژی خورشید گرفته می‌شود. تابش خورشید از طریق یک پوشش شفاف وارد جمع کننده می‌شود و آب را در لوله‌ها گرم می‌کند؛ این آب توسط یک تلمبه داخل یک مخزن نگهداری می‌شود. فرض کنید که کارایی کل دستگاه ۲۰٪ باشد (یعنی ۸۰٪ انرژی خورشیدی تابیده شده به دستگاه هدر می‌رود). وقتی که شدت نور تابشی خورشید ۷۰۰W/m² است، برای افزایش دمای ۲۰۰L آب در مخزن از ۲۰°C تا ۴۰°C در مدت ۱/۰h چه مساحتی از جمع کننده مورد نیاز است؟

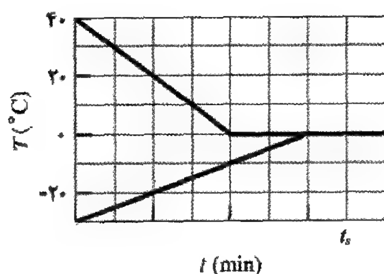
●●۳۴- نمونه‌ای به جرم ۰/۴۰۰kg را در یک وسیلهٔ سرد کننده قرار می‌دهیم و نمونه انرژی را به صورت گرما در آهنگ ثابت از دست می‌دهد. شکل ۱۴-۳۳ دمای $T$ نمونه را برحسب زمان $t$ نشان می‌دهد؛ مقیاس افقی با $t_s = ۸۰/۰\,min$ مشخص شده است. این نمونه در ضمن از دست دادن انرژی یخ می‌زند. گرمای ویژهٔ نمونه در آغاز فاز مایع ۳۰۰۰J/kg·K است. (الف) گرمای ذوب نمونه و (ب) گرمای ویژهٔ آن در فاز انجماد چقدر است؟




شکل ۱۴-۳۳ مسئلهٔ ۳۴

●●۳۵- یک ترموس عایق بندی شده حاوی ۱۳۰cm³ قهوهٔ گرم در دمای ۸۰/۰°C است. یک قطعه یخ به جرم ۱۲/۰g که در نقطهٔ ذوب خود قرار دارد برای سرد کردن قهوه در داخل آن قرار داده می‌شود. با قرار دادن یخ قهوه چقدر سرد می‌شود؟ قهوه را آب خالص در نظر بگیرید و از مبادلهٔ انرژی با محیط چشمپوشی کنید.

●●۳۶- نمونه‌ای از آب به جرم ۰/۵۳۰kg و نمونه‌ای از یخ در یک ظرف عایق بندی شدهٔ گرمایی قرار داده می‌شوند. ظرف همچنین دارای وسیله‌ای است که انرژی را با آهنگ ثابت $P$ به صورت گرما از آب به یخ انتقال می‌دهد تا تعادل گرمایی حاصل شود. دمای آب و یخ برحسب تابعی از زمان $t$ در شکل ۱۴-۳۴ داده شده است. مقیاس افقی با $t_s = ۸۰/۰\,min$ مشخص شده است. (الف) آهنگ P چقدر است؟ (ب) در حالت تعادل، چه جرمی از یخ در این فرایند ایجاد شده است؟




شکل ۱۴-۳۴ مسئلهٔ ۳۶

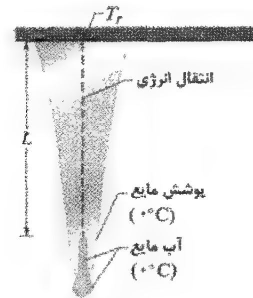
●●۳۷- الکل اتیلیک دارای نقطهٔ جوش ۷۸/۰°C، نقطهٔ انجماد ۱۱۴°C-، گرمای تبخیر ۸۷۹kJ/kg، گرمای ذوب ۱۰۹kJ/kg و گرمای ویژهٔ ۲/۴۳ kJ/kg·K است. چقدر انرژی باید از ۰/۵۱۰kg الکل اتیلیک که در آغاز گازی در دمای ۷۸/۰°C است، گرفته شود تا به صورت جامد با دمای ۱۱۴°C- در آید؟

●●۳۸- گرمای ویژهٔ ماده‌ای با دما با رابطهٔ $c = ۰/۲۰ + ۰/۱۴T + ۰/۰۲۳T^۲$ تغییر می‌کند، که در آن $T$ برحسب °C و $c$ برحسب cal/g·K است. انرژی لازم برای بالا بردن دمای ۲/۰g از این ماده از ۵/۰°C تا ۱۵°C چقدر است؟

●●۳۹- شخصی می‌خواهد با مخلوط کردن ۵۰۰g چای داغ (در اصل آب) با جرم مساوی از یخ در نقطهٔ ذوب آن مقداری چای سرد تهیه کند. فرض کنید این مخلوط انرژی ناچیزی با محیط خود مبادله می‌کند. اگر دمای اولیهٔ چای $T_i = ۹۰°C$ باشد، در لحظهٔ تعادل گرمایی (الف) دمای $T_f$ مخلوط و (ب) جرم یخ باقیماندهٔ $m_f$ چقدر است؟ اگر $T_i = ۷۰°C$ باشد، در لحظهٔ تعادل گرمایی (پ) $T_f$ و (ت) $m_f$ چقدر است؟

●●●۴۰- *قندیل یخی.* آب یک قندیل فعال (در حال رشد) را پوشانده و به صورت یک لولهٔ کوتاه و باریک در راستای محور مرکزی توسعه می‌یابد (شکل ۱۴-۳۵). چون فصل مشترک آب-یخ باید دمای ۰° C داشته باشد، آب داخل لوله در دور قندیل یا وقتی از نوک آن به پایین می‌افتد نمی‌تواند انرژی از دست بدهد، چون تغییر دمایی در آن جهتها وجود ندارد. فقط با ارسال

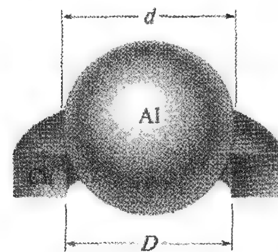
انرژی به بالای قندیل (به طول $L$) که در آنجا دمای $T_r$ می‌تواند کمتر از $0\,^\circ C$ باشد، انرژی از دست می‌دهد و یخ می‌زند. فرض کنید $L = ۰/۱۲\,m$ و $T_r = -۵^\circ C$ باشد. همچنین فرض کنید که مساحت مقطع لولهٔ مرکزی و مسیر رسانش رو به بالا A باشد. برحسب $A$، آهنگ (الف) انرژی رسانش شده به بالا و (ب) جرم تبدیل شده از آب به یخ در بالای لولهٔ مرکزی چقدر است؟ (پ) با چه آهنگی بالای لوله به دلیل انجماد آب در آنجا به پایین حرکت می‌کند؟ رسانایی گرمایی یخ $۰/۴۰۰\,W/m\cdot k$، و چگالی آب $۱۰۰۰\,kg/m^۳$ است؟




شکل ۱۴-۳۵ مسئلهٔ ۴۰

●●●۴۱- (الف) دو قطعه یخ $۵۰g$ به داخل $۲۰۰g$ آب در یک ظرف عایق بندی شده انداخته می‌شود. اگر دمای اولیهٔ آب $۲۵^\circ C$ و یخ به طور مستقیم از محل یخ‌ساز با دمای $-۱۵^\circ C$ خارج شده باشد، دمای نهایی در لحظهٔ تعادل گرمایی چقدر است؟ (ب) اگر فقط از یک قطعه استفاده شود، دمای نهایی چقدر است؟ WWW SSM

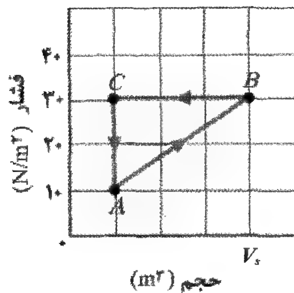
●●●۴۲- قطر داخلی یک حلقهٔ مسی به جرم $۲۰/۰\,g$ در دمای $۰/۰۰۰^\circ C$ برابر با $D = ۲/۵۴۰۰۰\,cm$ است. قطر یک کرهٔ آلومینیومی در دمای $۱۰۰/۰^\circ C$ برابر با $d = ۲/۵۴۵۰۸\,cm$ است. کره روی حلقه گذاشته می‌شود (شکل ۱۴-۳۶) و با چشمپوشی از اتلاف گرما به محیط، این دو به حالت تعادل گرمایی می‌رسند. در دمای تعادل کره درست از حلقه رد می‌شود. جرم کره چقدر است؟ SSM




شکل ۱۴-۳۶ مسئلهٔ ۴۲

## بخش ۱۴-۱۱ چند حالت ویژهٔ قانون اول ترمودینامیک

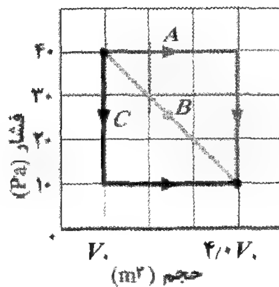
●۴۳- گازی در یک اتاقک بسته، چرخهٔ نشان داده شده در نمودار $p$-$V$ در شکل ۱۴-۳۷ را طی می‌کند. مقیاس افقی با $V_s = ۴/۰\,m^۳$ مشخص شده است. انرژی خالص داده شده به دستگاه را به صورت گرما در یک چرخهٔ کامل محاسبه کنید. SSM ILW




شکل ۱۴-۳۷ مسئلهٔ ۴۳

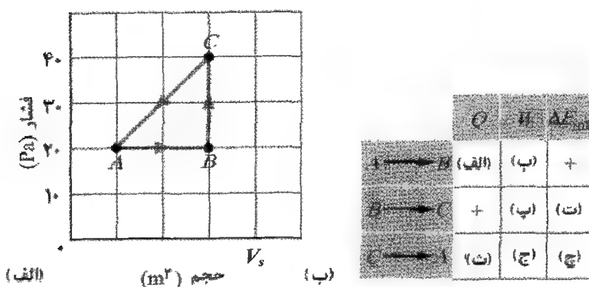
●۴۴- فرض کنید که $۲۰۰J$ کار روی دستگاهی انجام گیرد و $۷۰/۰\,cal$ گرما از دستگاه گرفته شود. از نظر قانون اول ترمودینامیک، مقدارهای (الف) $W$، (ب) $Q$ و (پ) $\Delta E_{int}$، (با در نظر گرفتن علامت جبری) چقدر است؟

●۴۵- در شکل ۱۴-۳۸، نمونه‌ای از گاز از $V_0$ تا $۴/۰V_0$ منبسط می‌شود، در حالی که فشار آن از $p_0$ تا $p_0/۴/۰$ کاهش می‌یابد. اگر فشار گاز نسبت به حجم از طریق (الف) مسیر $A$، (ب) مسیر $B$، و (پ) مسیر $C$ تغییر کند، چقدر کار توسط گاز انجام می‌گیرد؟




شکل ۱۴-۳۸ مسئلهٔ ۴۵

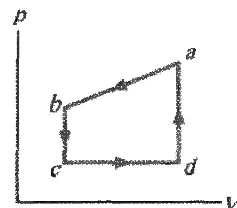
●۴۶- به طوری که در نمودار $p$-$V$ در شکل ۱۴-۳۹ الف نشان داده شده است، یک دستگاه ترمودینامیکی از حالت $A$ به حالت $B$ و به حالت $C$ می‌رود و سپس به حالت $A$ بر می‌گردد. مقیاس عمودی با $p_s = ۴۰\,Pa$ و مقیاس افقی با $V_s = ۴/۰\,m^۳$ مشخص شده‌اند. از (الف) تا (چ) جدول شکل ۱۴-۳۹ ب را با قرار دادن علامت مثبت یا علامت منفی، یا صفر در هر خانهٔ جدول پر کنید. کار خالص انجام شده توسط دستگاه وقتی یک بار چرخهٔ $ABCA$ را طی کند چقدر است؟




| | $Q$ | $W$ | $\Delta E_{int}$ |
|---|---|---|---|
| $A \to B$ | (الف) | (ب) | + |
| $B \to C$ | + | (پ) | (ت) |
| $C \to A$ | (ث) | (ج) | (چ) |

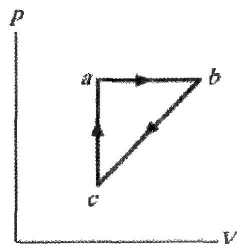
شکل ۱۴-۳۹ مسئلهٔ ۴۶

●●۴۷- شکل ۱۴-۴۰ چرخهٔ مسدودی را برای گازی نشان می‌دهد (شکل با مقیاس رسم نشده است). تغییر در انرژی درونی گاز وقتی از $a$ به $c$ راستای مسیر $abc$ را طی می‌کند برابر با J ۲۰۰- است. وقتی از $c$ تا $d$ می‌رود، باید J ۱۸۰ به صورت گرما به آن داده شود. انتقال اضافی J ۸۰ به صورت گرما لازم است تا از $d$ به $a$ برود. برای رفتن گاز از $c$ تا $d$ چقدر کار باید روی گاز انجام گیرد؟



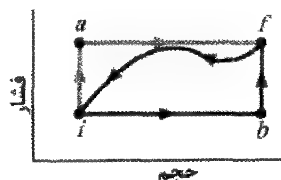

شکل ۱۴-۴۰ مسئلهٔ ۴۷

●●۴۸- نمونه‌ای از یک گاز چرخهٔ $abca$ نشان داده شده در نمودار $p$-$V$ شکل ۱۴-۴۱ را طی می‌کند. کار خالص انجام شده J ۱/۲+ است. در مسیر $ab$، تغییر در انرژی درونی J ۳/۰+ و بزرگی کار انجام شده J ۵/۰ است. در مسیر $ca$، انرژی انتقال یافته به گاز به صورت گرما J ۲/۵+ است. چقدر انرژی به صورت گرما در (الف) مسیر $ab$ و (ب) مسیر $bc$ انتقال می‌یابد؟



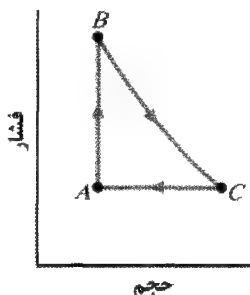

شکل ۱۴-۴۱ مسئلهٔ ۴۸

●●۴۹- وقتی دستگاهی در مسیر $iaf$ همانند شکل ۱۴-۴۲ از حالت $i$ به حالت $f$ برود، $Q = ۵۰\,\text{cal}$ و $W = ۲۰\,\text{cal}$ است. در طول مسیر $ibf$ داریم، $Q = ۳۶\,\text{cal}$. (الف) کار $W$ در طول مسیر $ibf$ چقدر است؟ (ب) اگر برای برگشت مسیر $fi$، $W = -۱۳\,\text{cal}$ باشد، گرمای $Q$ برای این مسیر چقدر است؟ (پ) اگر $E_{\text{int},i} = ۱۰\,\text{cal}$ باشد، مقدار $E_{\text{int},f}$ چقدر است؟ اگر $E_{\text{int},b} = ۲۲\,\text{cal}$ باشد، مقدار $Q$ برای (ت) مسیر $ib$ و (ث) مسیر $bf$ چقدر است؟ SSM WWW




شکل ۱۴-۴۲ مسئلهٔ ۴۹

●●۵۰- گازی داخل یک محفظه، چرخهٔ نشان داده شده در شکل ۱۴-۴۳ را می‌پیماید. در صورتی که $Q_{AB}$، انرژی داده شده به گاز به صورت گرما در طی فرایند $AB$ برابر با J ۲۰/۰ باشد و در طی فرایند $BC$ هیچ گرمایی مبادله نشود و کار خالص انجام شده در چرخه J ۱۵/۰ باشد، انرژی داده شده توسط دستگاه به صورت گرما در طی فرایند $CA$ چقدر است؟




شکل ۱۴-۴۳ مسئلهٔ ۵۰

**بخش ۱۴-۱۲ ساز و کارهای انتقال گرما**

●۵۱- بُرهٔ نشان داده شده در شکل ۱۴-۱۸ را در نظر بگیرید. فرض کنید که $A = ۹۰/۰\,\text{cm}^2$، $L = ۲۵/۰\,\text{cm}$ و جنس بُره از مس است. اگر $T_H = ۱۲۵°\text{C}$، $T_C = ۱۰/۰°\text{C}$ و حالت پایا برقرار باشد، آهنگ رسانش در بُره را پیدا کنید. SSM

●۵۲- اگر بخواهید بدون لباس فضانوردی و دور از خورشید در فضا مقداری قدم بزنید (مانند فضانورد در فیلم اودیسهٔ فضایی ۲۰۰۱)، احساس خواهید کرد که فضا سرد است- در حالی که انرژی گرمایی تابش می‌کنید، هیچ انرژی از محیط خود جذب نمی‌کنید. (الف) با چه آهنگی انرژی از دست می‌دهید؟ (ب) در مدت s ۳۰ چقدر انرژی از دست می‌دهید؟ فرض کنید گسیلندگی شما ۰/۹۰ است و داده‌های مورد نیاز دیگر را در محاسبهٔ خودتان تخمین بزنید.

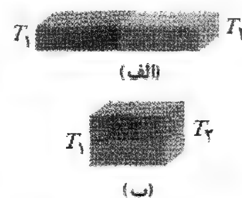
●۵۳- یک میلهٔ استوانه‌ای مسی به طول $۱/۲\text{m}$ و مساحت مقطع $۴/۸\,\text{cm}^2$ برای جلوگیری از اتلاف گرمایی از سطح عایق بندی شده است. دو انتهای آن $۱۰۰\text{C}°$ اختلاف دما دارند چون یک سر آن در آمیزهٔ آب و یخ و سر دیگر آن در آمیزهٔ آب جوش و بخار قرار دارد. (الف) آهنگ رسانش گرما در طول میله چقدر است؟ (ب) با چه آهنگی یخ در انتهای سرد میله ذوب می‌شود؟ ILW

●۵۴- مقدار $R$ سقف یک خانهٔ تک خانوار که در آب و هوای سرد ساکن‌اند، ۳۰ است. برای عایق بندی این خانه چه ضخامتی از (الف) اسفنج پلی اورتان و (ب) نقره، باید به کار رود؟

●۵۵- کره‌ای به شعاع $۰/۵۰۰\text{m}$، دمای $۲۷/۰°\text{C}$ و گسیلندگی ۰/۸۵۰ در محیطی با دمای $۷۷/۰°\text{C}$ قرار دارد. این کره با چه آهنگی تابش گرمایی را (الف) گسیل و (ب) جذب می‌کند؟ (پ) آهنگ خالص مبادله انرژی توسط کره چقدر است؟

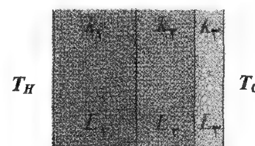
●●۵۶- استوانهٔ صلبی به شعاع $r_1 = ۲/۵\text{cm}$، طول $h_1 = ۵/۰\text{cm}$، گسیلندگی ۰/۸۵، و دمای ۳۰°C در محیطی با دمای ۵۰°C معلق است. (الف) آهنگ انتقال تابش گرمایی $P_1$ استوانه چقدر است؟ (ب) اگر استوانه کشیده شود تا شعاع آن به $r_2 = ۰/۵\text{cm}$ برسد،آهنگ انتقال تابش گرمایی خالص به $P_2$ می‌رسد. نسبت $P_2/P_1$ چقدر است؟

●●۵۷- در شکل ۱۴-۴۴ الف، دو میلهٔ یکسان مکعب مستطیلی از فلز با دمای $T_1 = ۰°\text{C}$ در سمت چپ و دمای $T_2 = ۱۰۰°\text{C}$ در سمت راست سر به سر به هم جوش داده شده‌اند. فرض کنید در مدت ۲/۰min، ۱۰J گرما با آهنگ ثابت از سمت راست به سمت چپ عبور می‌کند. اگر میله‌ها مانند شکل ۱۴-۴۴ ب به هم جوش داده شوند، در چه مدت ۱۰J گرما از آنها عبور می‌کند؟



**شکل ۱۴-۴۴** مسئلهٔ ۵۷

●●۵۸- شکل ۱۴-۴۵ مقطع دیواری را نشان می‌دهد که از سه لایه ساخته شده است. ضخامت لایه‌ها عبارت اند از $L_1$، $L_2 = ۰/۷۰۰L_1$ و $L_3 = ۰/۳۵۰L_1$. رسانندگیهای گرمایی عبارت‌اند از $k_1$، $k_2 = ۰/۹۰۰k_1$ و $k_3 = ۰/۸۰۰k_1$. دمای سمت چپ و سمت راست دیوار به ترتیب $T_H = ۳۰/۰°\text{C}$ و $T_C = -۱۵/۰°\text{C}$ است. رسانش گرمایی از طریق دیوار به حالت پایا رسیده است. (الف) اختلاف دمای $\Delta T_2$ در لایهٔ ۲ (بین سمت چپ و راست لایه) چقدر است؟ اگر $k_2$ برابر با $۱/۱k_1$ باشد. (ب) آیا آهنگ رسانش انرژی از طریق دیوار بیشتر می‌شود یا کمتر یا برابر با مقدار قبلی است؟ و (پ) مقدار $\Delta T_2$ چقدر است؟



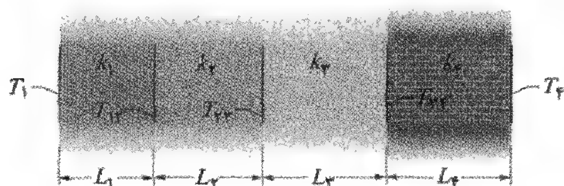
**شکل ۱۴-۴۵** مسئلهٔ ۵۸

●●۵۹- (الف) اگر دمای بیرون یک پنجرهٔ شیشه‌ای به ضخامت ۳/۰mm برابر ۲۰°F− و دمای داخل آن ۷۲°F+ باشد، آهنگ اتلاف انرژی برحسب وات بر متر مربع چقدر است؟ (ب) پنجرهٔ زمستانی با همان ضخامت از شیشه ولی با یک فاصلهٔ هوا به ضخامت ۷/۵cm موازی با پنجرهٔ اولی نصب شده است. اگر در ساز و کار اتلاف انرژی فقط رسانش مهم باشد، آهنگ اتلاف انرژی اکنون چقدر است؟ ILW

●●۶۰- توده زنبورهای قرمز و بزرگ وسپا ماندارینیای[1] ژاپنی زنبورهای عسل ژاپنی را شکار می‌کنند. اگر یکی از توده زنبورهای قرمز به یک کندو حمله کند، چند صد زنبور عسل دور توده زنبور قرمز خیلی سریع به صورت توپ جمع می‌شوند و او را متوقف می‌کنند. آنها نیش، گاز نمی‌زنند، فشار نمی دهند یا خفه نمی‌کنند. بلکه آنها با افزایش خود دمای بدن خود را از ۳۵°C به ۴۷°C یا ۴۸°C می‌رسانند، که برای توده زنبورهای قرمز کشنده است ولی برای زنبورهای عسل این طور نیست (شکل ۱۴-۴۶). فرض کنید که ۵۰۰ زنبور عسل توپی به شعاع $R = ۲/۰\text{cm}$ را در مدت $t = ۲۰\text{min}$ تشکیل می‌دهند، اتلاف انرژی اولیه توسط توپ به شیوهٔ تابش گرمایی بوده و گسیلمندی سطح توپ $\varepsilon = ۰/۸۰$ و دمای توپ یکنواخت است. به طور متوسط چقدر انرژی اضافی باید هر زنبور در ۲۰min ایجاد کند تا دما در ۴۷°C ثابت بماند؟


**شکل ۱۴-۴۶** مسئلهٔ ۶۰

●●۶۱- شکل ۱۴-۴۷ (مقطع) یک دیوار با چهار لایه با رسانندگیهای $k_1 = ۰/۰۶۰\text{W/m·K}$، $k_3 = ۰/۰۴۰\text{W/m·K}$ و $k_4 = ۰/۱۲\text{W/m·K}$ را نشان می‌دهد ($k_2$ معلوم نیست). ضخامت لایه‌ها عبارت‌اند از $L_1 = ۱/۵\text{cm}$، $L_3 = ۲/۸\text{cm}$ و $L_4 = ۳/۵\text{cm}$ ($L_2$ معلوم نیست). دماهای معلوم عبارتند از: $T_1 = ۳۰°\text{C}$، $T_{12} = ۲۵°\text{C}$ و $T_4 = -۱۰°\text{C}$. انتقال انرژی از طریق دیوار پایاست. دمای فصل مشترک لایهٔ ۳ و ۴ چقدر است؟



**شکل ۱۴-۴۷** مسئلهٔ ۵۹

●●۶۲- *تجمع پنگوئنها.* برای تحمل آب و هوای سخت قطب جنوب، سردسته پنگوئنها آنها را به صورت گروهی جمع می‌کند (شکل ۱۴-۴۸). فرض کنید پنگوئن استوانه‌ای با مقطع دایره با مساحت مقطع $a = ۰/۳۴\text{m}^2$ و ارتفاع $h = ۱/۱\text{m}$ باشد. فرض کنید $P_r$ آهنگ تابش انرژی به محیط هر پنگوئن (از مقطع و پیرامون استوانه) باشد؛ بنابراین، $NP_r$ آهنگی خواهد بود که N

1. Vespa mandarinia

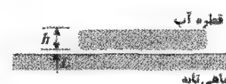
پنگوئن یکسان و جدا از هم تابش می‌کنند. اگر تجمع پنگوئنها استوانه‌ای تشکیل دهد که مساحت مقطع آن $Na$ و ارتفاع آن $h$ باشد، استوانه با آهنگ $P_h$ تابش می‌کند. اگر $N=۱۰۰۰$ باشد، (الف) مقدار کسر $P_h/NP_r$ چقدر است و (ب) این تجمع چه درصد از دست دادن تابش کل را کم می‌کند؟



شکل ۱۴-۴۸ مسئلهٔ ۶۲

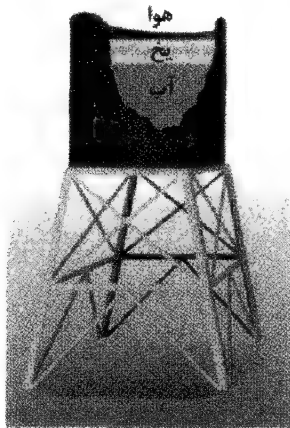
●●۶۳- روی استخر کم عمقی یخ تشکیل شده و حالت پایا برقرار است. دمای هوای روی یخ $-۵/۰°C$ و دمای آب ته استخر $۴/۰°C$ است. اگر کل عمق *یخ + آب* برابر با $۱/۴m$ باشد، ضخامت یخ چقدر است؟ (فرض کنید که رسانندگی گرمایی یخ و آب به ترتیب $۰/۴۰$ و $۰/۱۲cal/m\cdot C°\cdot s$ است.)

●●۶۴- *پدیدهٔ لیدن فراست.* قطرهٔ آبی که بین دمای $۱۰۰°C$ و تقریباً $۲۰۰°C$ داخل ماهی‌تابه بیافتد بعد از تقریباً $1s$ از بین می‌رود. ولی اگر ماهی‌تابه خیلی داغتر باشد، قطره چند دقیقه دوام می‌آورد، پدیده‌ای است که به نام اولین پژوهشگر مربوط به آن شناخته شده است. این مدت زمان طولانیتر به دلیل وجود لایهٔ نازکی از هوا و بخار آب است که قطره را از فلز جدا می‌کند (به اندازهٔ فاصلهٔ $L$ در شکل ۱۴-۴۹). $L=۰/۱۰۰mm$ قرار دهید و فرض کنید که قطره صاف با ارتفاع $h=۱/۵۰mm$ و مساحت مقطع قسمت پایین آن $A=۴/۰۰\times۱۰^{-۶}m^۲$ باشد. هم‌چنین فرض کنید که دمای $T_s=۳۰۰°C$ ماهی‌تابه ثابت و دمای قطره $۱۰۰°C$ است. چگالی آب $\rho=۱۰۰۰kg/m^۳$ و رسانایی گرمایی لایهٔ نازک $k=۰/۰۲۶W/m\cdot K$ است. (الف) با چه آهنگی انرژی از ماهی‌تابه به قطره از طریق سطح زیری قطره رسانش می‌شود؟ (ب) اگر رسانش عمده‌ترین روشی باشد که انرژی از ماهی‌تابه به قطره می‌رود، قطره چقدر دوام می‌آورد؟




شکل ۱۴-۴۹ مسئلهٔ ۶۴

●●۶۵- مخزن آبی در هوای سرد بیرون قرار دارد و لایه‌ای از یخ به ضخامت $۵/۰cm$ روی سطح آن تشکیل شده است (شکل ۱۴-۵۰). دمای هوای بالای یخ $-۱۰°C$ است. آهنگ تشکیل یخ (برحسب سانتی‌متر بر ساعت) را در زیر لایهٔ یخ محاسبه کنید. رسانندگی گرمایی و چگالی یخ را $۰/۰۰۴۰cal/s\cdot cm\cdot C°$ و $۰/۹۲g/cm^۳$ بگیرید. فرض کنید هیچ انرژیی از طریق دیواره‌های مخزن یا کف آن انتقال نمی‌یابد. SSM




شکل ۱۴-۵۰ مسئلهٔ ۶۵

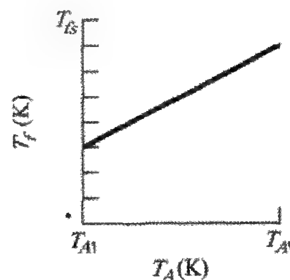
●●●۶۶- *سرمایش ناشی از تبخیر در نوشیدنی‌ها.* اگر نوشابهٔ سردی را داخل ظرف سرامیکی متخلخلی که در آب خیس شده باشد قرار دهیم می‌توان حتی در روز گرم آن را سرد نگهداشت. فرض کنید که انرژی از دست رفته جهت تبخیر برابر با انرژی خالص به دست آمده از طریق تبادل تابش در سطحهای بالایی و کناری باشد. دمای ظرف و نوشابه $T=۱۵°C$، دمای محیط $T_{env}=۳۲°C$ و ظرف استوانه‌ای به شعاع $r=۲/۲cm$ و ارتفاع $۱۰cm$ است. گسیلمندی را تقریباً $\varepsilon=۱$ بگیرید و از تبادلهای انرژی دیگر صرفنظر کنید. ظرف با چه آهنگ $dm/dt$ جرم آب را از دست می‌دهد؟

### مسئله‌های اضافی

۶۷- موقع خروج شکلات سرد از یک مجرا، با فشار اعمال شده از مجرا روی شکلات کار انجام می‌گیرد. کار بر یکای جرم شکلات خارج شده برابر با $p/\rho$ است که در آن $p$ اختلاف بین فشار اعمال شده و فشار شکلات موقع خروج از مجرا، و $\rho$ چگالی شکلات است. کار به جای افزایش دمای شکلات، چربی کاکائو را در شکلات ذوب می‌کند. گرمای ذوب این چربیها $۱۵۰kJ/kg$ است. فرض کنید که همهٔ کار صرف ذوب شود و این چربیها ۳۰٪ جرم شکلات را تشکیل بدهد. اگر $p=۵/۵MPa$ و $\rho=۱۲۰۰kg/m^۳$ باشد، درصد چربیهای ذوب شده در ضمن خروج چقدر است؟

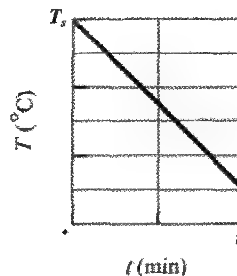
۶۸- در یک رشته آزمایش، قطعهٔ $B$ را در ظرفی که عایق گرمایی است و قطعهٔ $A$ با همان جرم قطعهٔ $B$ در آن است قرار می‌دهیم. درهر آزمایش، قطعهٔ $B$ در دمای معین اولیهٔ $T_B$ قرار دارد ولی دمای $T_A$ قطعهٔ $A$ از آزمایشی به آزمایش دیگر تغییر می‌کند. فرض می‌کنیم $T_f$ دمای نهایی دو قطعه در وقتی باشد که در هر آزمایش به تعادل گرمایی می‌رسند. شکل ۱۴-۵۱

دمای $T_f$ را برحسب دمای اولیهٔ $T_A$ در گسترهٔ مقدارهای ممکن $T_A$ از $T_{A1} = 0K$ تا $T_{A2} = 500K$ را نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $T_{fs} = 400K$ مشخص شده است. (الف) دمای $T_B$ و (ب) نسبت $c_B / c_A$ گرماهای ویژهٔ قطعه‌ها چقدر است؟




**شکل ۱۴-۵۱** مسئلهٔ ۶۸

۶۹- نمونه‌ای به جرم ۰/۳۰۰kg در یک وسیلهٔ سرمایش قرار گرفته است که انرژی را به صورت گرما با آهنگ ثابت ۲/۸۱W از دست می‌دهد. شکل ۱۴-۵۲ دمای $T$ نمونه را برحسب زمان $t$ نشان می‌دهد. مقیاس دما با $T_s = 30°C$ و مقیاس زمان با $t_s = 20\,min$ مشخص شده است. گرمای ویژهٔ نمونه چقدر است؟



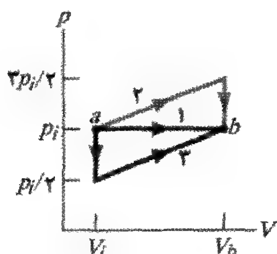

**شکل ۱۴-۵۲** مسئله ۶۹

۷۰- گرمای ویژهٔ فلز را با استفاده از داده‌های زیر محاسبه کنید. ظرفی از فلز به جرم ۳/۶kg ساخته شده و حاوی ۱۴kg آب است. تکه‌ای به جرم ۱/۸kg از فلزی که در آغاز در دمای ۱۸۰°C بوده است در آب انداخته می‌شود. ظرف آب در آغاز در دمای ۱۶/۰°C بوده و دمای نهایی کل دستگاه ۱۸/۰°C است.

۷۱- افزایش حجم یک مکعب آلومینیومی به ضلع ۵/۰۰cm وقتی از ۱۰/۰°C تا ۶۰/۰°C گرم شود چقدر است؟

۷۲- یک میلهٔ مسی، یک میلهٔ آلومینیومی و یک میلهٔ برنجی، هر کدام به طول ۶/۰۰m و قطر ۱/۰۰cm در امتداد هم قرار دارند و میلهٔ آلومینیومی در وسط است. انتهای آزاد میلهٔ مسی در نقطهٔ جوش آب، و انتهای آزاد میلهٔ برنجی در نقطهٔ انجماد آب قرار گرفته‌اند. دمای حالت پایای (الف) پیوندگاه مس- آلومینیوم و (ب) پیوندگاه آلومینیوم- برنج چقدر است؟

۷۳- همان‌طور که در نمودار $p$-$V$ در شکل ۱۴-۵۳ نشان داده شده است، نمونه‌ای از یک گاز در انتقال از حالت اولیهٔ $a$ به حالت نهایی $b$ می‌تواند سه مسیر مختلف (فرایند) را طی کند، که $V_b = 5/00 V_i$ است. در فرایند ۱ انرژی منتقل شده به گاز به صورت گرما برابر با $10\, p_iV_i$ است. برحسب $p_iV_i$، (الف) انرژی انتقال یافته به گاز به صورت گرما در فرایند ۲ و (ب) تغییر در انرژی درونی گاز در فرایند ۳ چقدر است؟ SSM




**شکل ۱۴-۵۳** مسئلهٔ ۷۳

۷۴- آهنگ میانگین رسانش انرژی از طریق سطح زمین در امریکای شمالی به بیرون عبارت است از $54/0\, mW/m^2$ و متوسط رسانندگی گرمایی سنگهای سطح زمین ۲/۵۰W/m·K است. با فرض اینکه دمای سطح ۱۰/۰°C باشد، دما در عمق ۳۵/۰km (نزدیکی کف پوسته) را پیدا کنید. از گرمای ایجاد شده توسط عنصرهای پرتوزا چشمپوشی کنید.

۷۵- دمای یک قرص پیرکس از ۱۰/۰°C به ۶۰/۰°C تغییر می‌یابد. شعاع اولیهٔ آن ۸/۰۰cm و ضخامت اولیهٔ آن ۰/۵۰۰cm است. این داده‌ها را دقیق در نظر بگیرید. تغییر در حجم قرص چقدر است؟ (به جدول ۱۴-۲ نگاه کنید.) SSM

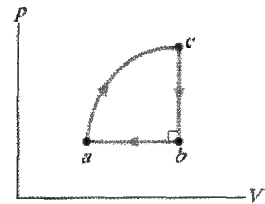
۷۶- در یک خانهٔ خورشیدی، انرژی از خورشید در بشکه‌های پر از آب ذخیره می‌شود. در یک زمستان برای پنج روز ابری $1/00 \times 10^6$ kcal برای نگهداشتن داخل خانه در دمای ۲۲/۰°C مورد نیاز است. با فرض اینکه دمای آب بشکه‌ها ۵۰/۰°C و چگالی آب $1/00 \times 10^3\, kg/m^3$ باشد، چه حجمی از آب مورد نیاز است؟

۷۷- نمونه‌ای از گاز از فشار اولیه و حجم ۱۰Pa و $1/0\, m^3$ به حجم نهایی $2/0\, m^3$ منبسط می‌شود. در ضمن انبساط، فشار و حجم با معادلهٔ $p = aV^2$ به هم مربوط‌اند، که $a = 10\, N/m^8$ است. کار انجام شده به وسیله گاز را در طی این انبساط تعیین کنید. SSM

۷۸- (الف) با داده‌های زیر، آهنگی را که گرمای بدن از طریق پوشش یک اسکی باز در فرایند حالت پایا تابش می‌کند محاسبه کنید: مساحت بدن $1/8\, m^2$، ضخامت پوشش ۱/۰cm؛ دمای سطح پوست ۳۳°C، دمای سطح بیرونی پوشش ۱/۰°C و رسانندگی گرمایی پوشش ۰/۰۴۰W/m·K. (ب) اگر پس از یک سقوط لباسهای اسکی باز در آب با رسانندگی گرمایی

۰/۶۰ W/m خیس شود، آهنگ رسانش در چه عددی باید ضرب شود؟

۷۹- شکل ۱۴-۵۴ یک چرخهٔ بسته را برای یک گاز نشان می‌دهد. از $c$ تا $b$، ۴۰J به صورت گرما از گاز انتقال می‌یابد. از $b$ تا $a$، ۱۳۰J به صورت گرما انتقال می‌یابد و بزرگی کار انجام شده به وسیلهٔ گاز ۸۰J است. از $a$ تا $c$، ۴۰۰J به صورت گرما به گاز انتقال می‌یابد. کار انجام شده به وسیلهٔ گاز از $a$ تا $c$ چقدر است؟ (*راهنمایی*: نیاز دارید برای داده‌ها علامتهای مثبت و منفی در نظر بگیرید.)

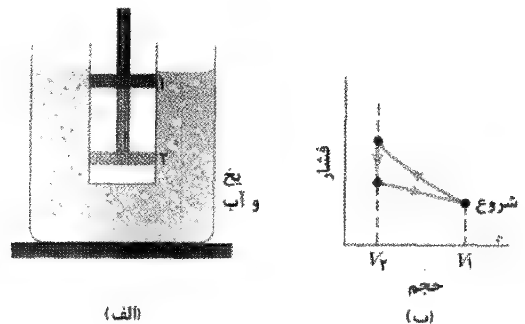



شکل ۱۴-۵۴ مسئلهٔ ۷۹

۸۰- ابعاد یک جام شیشه در دمای ۱۰°C دقیقاً ۲۰cm در ۳۰cm است. با فرض اینکه شیشه بتواند به طور آزاد انبساط یابد، وقتی دمای آن به ۴۰°C برسد، مساحت آن چقدر زیاد می‌شود؟

۸۱- یک تکه آلومینیوم به جرم ۲/۵۰kg را تا ۹۲/۰°C گرم می‌کنیم و سپس آن را داخل ۸/۰۰kg آب با دمای ۵/۰۰°C فرو می‌بریم. با فرض اینکه دستگاه تکه- آب از نظر گرمایی منزوی باشد، دمای تعادل دستگاه چقدر است؟ SSM

۸۲- شکل ۱۴-۵۵ الف استوانهٔ حاوی گازی را نشان می‌دهد که توسط یک پیستون متحرک بسته شده است. این استوانه در مخلوط یخ- آب فرو برده می‌شود. پیستون به *طور سریع* از وضعیت ۱ به وضعیت ۲ به پایین برده می‌شود و در وضعیت ۲ نگهداشته می‌شود تا اینکه گاز دوباره در دمای مخلوط یخ- آب قرار گیرد، سپس *به آرامی* به وضعیت ۱ بالا آورده می‌شود. شکل ۱۴-۵۵ ب نمودار $p$-$V$ را برای این فرایند نشان می‌دهد. اگر ۱۰۰ g یخ در ضمن این چرخه ذوب شود، چقدر کار *روی* گاز انجام می‌شود؟




شکل ۱۴-۵۵ مسئلهٔ ۸۲

۸۳- دمای یک مکعب ۰/۷۰۰kg یخی تا ۱۵۰°C- کاهش می‌یابد. سپس به تدریج انرژی به صورت گرما به مکعب انتقال می‌یابد در حالی که مکعب از محیط خود عایق بندی گرمایی شده است. کل انتقال انرژی ۰/۶۹۹۳MJ است. فرض کنید مقدار $c_{یخ}$ در جدول ۱۴-۳ برای دمای از ۱۵۰°C- تا ۰°C معتبر باشد. دمای نهایی آب چقدر است؟ SSM

۸۴- یک میلهٔ فولادی را که در دمای ۲۵/۰°C در دو انتها با قلاب محکم بسته شده است سرد می‌کنیم. میله در چه دمایی گسیخته می‌شود. از جدول ۱۲-۱ استفاده کنید.

۸۵- فرض کنید از ۵/۰×۱۰^-۳ انرژی تابش شده توسط کرهٔ گرم که شعاع آن ۰/۰۲۰min، گسیلندگی آن ۰/۸۰ و دمای سطح آن ۵۰۰K است جلوگیری کنید. درمدت ۲/۰min از چه مقدار انرژی جلوگیری کرده‌اید؟

۸۶- سه میلهٔ راست با طولهای مساوی از آلومینیوم، اینوار و فولاد همه در دمای ۲۰/۰°C، با اتصالهایی در سه گوشه تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع داده‌اند. در چه دمایی زاویهٔ مقابل میلهٔ اینوار ۵۹/۹۵° می‌شود. در مورد فرمولهای مثلثاتی از پیوست ث و برای داده‌های مورد نیاز از جدول ۱۴-۲ استفاده کنید.

۸۷- یخ را با ساییدن قطعه‌ای روی قطعه دیگر می‌توان ذوب کرد. اگر بخواهیم ۱/۰۰g یخ را ذوب کنیم، برحسب ژول باید چقدر کار انجام دهیم؟

۸۸- دماسنجی به جرم ۰/۰۵۵۰kg و گرمای ویژهٔ ۰/۸۳۷kJ/kg·K عدد ۱۵/۰°C را نشان می‌دهد. این دماسنج سپس به طور کامل در ۰/۳۰۰kg آب فرو برده می‌شود و به دمای نهایی آب می‌رسد. اگر دماسنج ۴۴/۴°C را نشان دهد، دمای آب پیش از قرار گرفتن دماسنج چقدر بوده است؟

۸۹- یک عضو جدید فقط وقتی که دمای بیرون ایستگاه آموندسن- اسکات[1] قطب جنوب زیر ۷۰°C- باشد می‌تواند در باشگاه نیمه سری "۳۰۰F" عضو شود. در چنین روزی عضو جدید ابتدا حمام سونای گرم می‌گیرد و سپس با پوشیدن فقط کفشهای خود به بیرون می‌رود. (البته این کار فوق العاده خطرناکی است، ولی این تشریفات تأکیدی به منظور وجود خطر ثابت سرمای زمستان در قطب جنوب است.)

فرض کنید که موقع خروج از سونا، دمای پوست عضو جدید ۱۰۲°F و دمای دیواره‌ها، سقف و کف اتاق سونا ۳۰°C باشد. مساحت سطح عضو جدید را براورد کنید و گسیلندگی پوست را ۰/۸۰ بگیرید. (الف) آهنگ خالص تقریبی $P_{خالص}$ که عضو جدید انرژی را از طریق مبادلهٔ تابش گرمایی با اتاق از دست می‌دهد چقدر است؟ حال فرض کنید که در بیرون، نصف مساحت بدن با آسمان با دمای ۲۵°C- و نصف دیگر با برف و زمین با دمای ۸۰°C- تابش گرمایی

1. Amundsen- scott

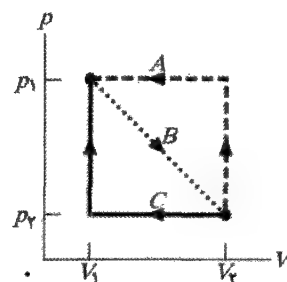
مبادله می‌کند. آهنگ خالص اتلاف انرژی عضو جدید از طریق مبادلهٔ تابش گرمایی با (ب) آسمان و (پ) برف و زمین چقدر است؟

۹۰- ابعاد اولیهٔ یک صفحهٔ شیشه‌ای مستطیلی شکل در آغاز ۰/۲۰۰m در ۰/۳۰۰m است. ضریب انبساط خطی شیشه $۹/۰۰\times۱۰^{-۶}$/K است. اگر دما به اندازهٔ ۲۰/۰K افزایش یابد، تغییر در مساحت صفحه چقدر است؟

۹۱- ورزشکاری که نیاز به کاهش وزن دارد، برای این کار از «بالا و پایین بردن وزنهٔ آهنی» استفاده می‌کند. (الف) برای سوزاندن ۱/۰۰lb چربی، با فرض اینکه آن مقدار چربی زیادی معادل با ۳۵۰۰Cal باشد، چند بار باید یک وزنهٔ ۸۰/۰kg را تا فاصلهٔ ۱/۰۰m بلند کند؟ (ب) اگر وزنه هر ۲/۰۰s یک بار بلند شود، این عمل چقدر طول می‌کشد؟

۹۲- توده‌های یخ شناور در آتلانتیک شمالی خطرات جدی برای کشتیرانی دارند، و باعث می‌شوند تا مسیرهای کشتیرانی به اندازهٔ ۳۰٪ در فصل توده‌های یخی زیاد شود. کوششهایی برای تخریب یخها انجام می‌گیرد که عبارت‌اند از کاشتن مواد منفجره، بمباران، اژدر افکنی، پرتاب نارنجک، سوراخ کردن و پوشش دادن با دوده. فرض کنید که بخواهیم توده‌های یخ را با قرار دادن منابع گرمایی در یخ به طور مستقیم ذوب کنیم. چقدر انرژی برای ذوب ۱۰٪ یک تودهٔ یخی به جرم ۲۰۰۰۰۰ تن لازم است؟ (۱=۱۰۰۰kg تن متریک)

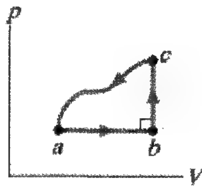
۹۳- نمونه‌ای از گاز در نمودار $p$-$V$ در شکل ۱۴-۵۶ از $V_۱=۱/۰\,\mathrm{m^۳}$ و $p_۱=۴۰\,\mathrm{Pa}$ به $V_۲=۴/۰\,\mathrm{m^۳}$ و $p_۲=۱۰\,\mathrm{Pa}$ در مسیر $B$ انبساط می‌یابد. سپس در مسیر $A$ یا $C$ برمی‌گردد و به مقدار $V_۱$ متراکم می‌شود. کار خالص انجام شده به وسیله گاز را برای کل چرخه در (الف) مسیر $BA$ و (ب) مسیر $BC$ محاسبه کنید.




**شکل ۱۴-۵۶** مسئلهٔ ۹۳

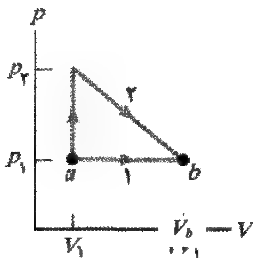
۹۴- بلافاصله پس از تشکیل زمین، گرمای آزاد شده به وسیلهٔ واپاشی عنصرهای پرتوزا میانگین دمای داخلی آن را از ۳۰۰ به ۳۰۰۰K رساند، که تقریباً امروز نیز همین مقدار حفظ شده است. با فرض اینکه ضریب انبساط حجمی میانگین برابر با $۳/۰\times۱۰^{-۵}\,\mathrm{K^{-۱}}$ باشد، از زمان تشکیل سیاره شعاع آن چقدر بیشتر شده است؟

۹۵- شکل ۱۴-۵۷ چرخهٔ بسته‌ای را برای یک گاز نشان می‌دهد. تغییر انرژی درونی در مسیر $ca$ برابر با ۱۶۰J- است. انرژی انتقال یافته به صورت گرما به گاز در مسیر $ab$ برابر با ۲۰۰J و در مسیر $bc$ برابر با ۴۰J است. چقدر کار به وسیلهٔ گاز در (الف) مسیر $abc$ و (ب) مسیر $ab$ انجام می‌گیرد؟




**شکل ۱۴-۵۷** مسئلهٔ ۹۵

۹۶- نمودار $p$-$V$ در شکل ۱۴-۵۸ دو مسیر را نشان می‌دهد که نمونه‌ای از گاز می‌تواند از حالت $a$ به حالت $b$ برود که $V_b=۳/۰\,V_۱$ است. در مسیر ۱ لازم است که انرژیی برابر با $۵/۰\,p_۱V_۱$ به صورت گرما به گاز داده شود. در مسیر ۲ لازم است که انرژیی برابر با $۵/۵\,p_۱V_۱$ به صورت گرما به گاز داده شود. نسبت $p_۲/p_۱$ چقدر است؟




**شکل ۱۴-۵۸** مسئلهٔ ۹۶

۹۷- مکعبی به ضلع $۶/۰\times۱۰^{-۶}$ m، گسیلندگی ۰/۷۵ و دمای ۱۰۰°C- در محیطی با دمای ۱۵۰°C- غوطه‌ور می‌شود. آهنگ انتقال تابش گرمایی خالص مکعب چقدر است؟

۹۸- *گرماسنج شارشی* وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری گرمای ویژهٔ یک مایع به کار می‌رود. انرژی به صورت گرما با آهنگ معلومی به جریانی از مایع که با آهنگ مشخصی از گرماسنج می‌گذرد افزوده می‌شود. با اندازه‌گیری اختلاف دمای مربوط به نقطه‌های ورودی و خروجی جریان می‌توان گرمای ویژهٔ مایع را محاسبه کرد. فرض کنید مایعی با چگالی $۰/۸۵\,\mathrm{g/cm^۳}$ از گرماسنجی با آهنگ $۸/۰\,\mathrm{cm^۳/s}$ می‌گذرد. گرما با آهنگ ۲۵۰W به وسیلهٔ یک گرم‌کن الکتریکی افزوده می‌شود و اختلاف دمای ۱۵C° در شرایط حالت پایا میان نقطه‌های ورودی و خروجی برقرار است. گرمای ویژهٔ مایع چقدر است؟

۹۹- جسمی به جرم ۶/۰۰kg از ارتفاع ۵۰/۰m سقوط می‌کند و به وسیلهٔ یک ارتباط مکانیکی چرخی را به دوران در می‌آورد که ۰/۶۰۰ kg آب را به هم می‌زند. فرض کنید که انرژی پتانسیل گرانشی اولیهٔ جسم به طور کامل به انرژی گرمایی آب منتقل می‌شود، که در آغاز در دمای ۱۵/۰°C بوده است. دمای آب چقدر افزایش می‌یابد؟

# ۱۵ نظریهٔ جنبشی گازها



وقتـی در نوشـابهٔ گـازدار سردی را بـاز مـی‌کنـیم در اطراف دهانهٔ باز شده ایجاد مه شده و مقـداری از مـایع به بیرون پاشیده می‌شود. در عکس مه بـه صـورت ابـر سفیدی است کـه دهانـه را احاطه کرده و رگه‌هـایی در داخل ابر ایجاد شده است.

**چه چیزی موجب مـه می‌شود؟**

پاسخ در همین فصل.

## ۱۵-۱ فیزیک چیست؟

یکی از موضوعهای اصلی ترمودینامیک فیزیک گازهاست. گاز شامل اتمهایی (به صورت منفرد یا وابسته به یکدیگر به صورت مولکول) است که حجم ظرف خود را پرمی‌کنند و بر دیواره‌های ظرف فشار وارد می‌آورند. معمولاً به چنین گاز محصور شده‌ای می‌توان دمایی نسبت داد. این سه متغیر مربوط به گاز - حجم، فشار و دما - همه نتیجه‌ای از حرکت اتمها است. حجم نتیجهٔ آزادی اتمهایی است که در سراسر ظرف پخش‌اند، فشار نتیجهٔ برخورد اتمها با دیوارهٔ ظرف، و دما نتیجهٔ انرژی جنبشی اتمهاست. **انرژی جنبشی گازها**، که در این فصل مورد بحث قرار می‌گیرد، حرکت اتمها را به حجم، فشار و دمای گاز مرتبط می‌سازد.

کاربردهای نظریهٔ جنبشی گازها بی‌شمار است. مهندسان خودرو با احتراق سوخت بخار شده (یک گاز) در موتور خودروها سروکار دارند. مهندسان غذایی با آهنگ تولید گاز ناشی از تخمیر که موجب باز شدن نان به هنگام پخت می‌شود سروکار دارند. مهندسان صنایع نوشابه با این مسئله مواجه‌اند که چگونه گاز در شیشه‌های نوشابه فشار ایجاد می‌کند. مهندسان پزشکی و متخصصین فیزیولوژی با محاسبهٔ چگونگی توقف یک غواص به هنگام بالاآمدن جهت از بین بردن گاز نیتروژن از جریان خون (برای اجتناب از اختلال در گردش خون) سروکار دارند. دانشمندان محیط زیست با این سروکار دارند که تعادل گرما بین اقیانوسها و جو چگونه بر شرایط آب و هوایی تأثیر می‌گذارد.

اولین مرحلهٔ بحث دربارهٔ نظریهٔ جنبشی گازها به اندازه‌گیری مقدار گاز موجود در یک نمونه می‌پردازد که با استفاده از عدد آووگادرو صورت می‌گیرد.

## ۱۵-۲ عدد آووگادرو

هنگام فکر کردن به مولکولها و اتمها متوجه می‌شویم که باید مقدار نمونه‌ها را برحسب مول اندازه بگیریم. اگر چنین کنیم، می‌توان اطمینان داشت که نمونه‌هایی را مقایسه می‌کنیم که دارای تعداد یکسانی از اتمها یا مولکولها هستند. **مول** یکی از هفت یکای اصلی SI است و به صورت زیر تعریف می‌شود

> یک مول تعداد اتمهای موجود در یک نمونهٔ ۱۲ گرمی از کربن ۱۲ است.

اکنون پرسش روشن این است: «چند اتم یا مولکول در یک مول وجود دارد؟» پاسخ به طور تجربی تعیین شده و همانطور که در فصل ۱۴ دیدیم برابر است با

$$N_A = 6.02\times10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}} \quad \text{(عدد آووگادرو)} \qquad (۱۵-۱)$$

که در آن $\mathrm{mol^{-1}}$ عکس مول یا «برمول» را نشان می‌دهد و mol مخفف mole است. عدد $N_A$ به نام دانشمند ایتالیایی آمادئو آووگادرو[1] (۱۱۵۵-۱۱۷۶/۱۲۳۵-۱۸۵۶)، کسی که پیشنهاد کرد همهٔ گازها هنگامی که در شرایط یکسان دما و فشار حجم یکسانی را اشغال می‌کنند تعداد یکسانی اتم یا مولکول خواهند داشت، **عدد آووگادرو** نامیده می‌شود.

تعداد $n$ مول موجود در یک نمونه از هر ماده‌ای برابراست با نسبت تعداد مولکولهای $N$ در نمونه بر تعداد مولکولهای $N_A$ در یک مول

$$n = \frac{N}{N_A} \qquad (۱۵-۲)$$

(*هشدار*: سه نماد در این معادله وجود دارد که به آسانی موجب اشتباه با یکدیگر می‌شوند. پیش از آنکه در مورد $N$ دچار اشتباه شویم، بهتر است آنها را با توجه به مفهومشان مرتب کنیم.) تعداد $n$ مول در یک نمونه را از جرم $M_s$ آن نمونه و جرم *مولی* $M$ (جرم یک مول) یا جرم مولکولی $m$ (جرم یک مولکول) می‌توان پیدا کرد

$$n = \frac{M_s}{M} = \frac{M_s}{mN_A} \qquad (۱۵-۳)$$

در معادلهٔ ۱۵-۳، از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که جرم $M$ یک مول عبارت است از ضرب جرم $m$ یک مولکول در تعداد مولکولهای $N_A$ در یک مول

$$M = mN_A \qquad (۱۵-۴)$$

## تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱: عدد آووگادرو از چه چیز؟*

در معادلهٔ ۱۵-۱، عدد آووگادرو برحسب $\mathrm{mol^{-1}}$ بیان شد، که عکس مول یا $1/\mathrm{mol}$ است. به جای این یکا می‌توان واحد بنیادی به کار رفته در حالت معینی را هم بیان کرد. برای مثال، اگر واحد بنیادی اتم باشد، می‌توان نوشت $N_A = 6.02\times10^{23}$ اتم/mol. اگر واحد بنیادی مولکول باشد، می‌توان نوشت $N_A = 6.02\times10^{23}$ مولکول/mol. یکایی که موقع نوشتن معمولاً بهتر است دربارهٔ آن تصریح کنید.

## ۱۵-۳ گازهای آرمانی

هدف ما در این فصل توضیح خواص ماکروسکوپی یک گاز - مانند فشار و دمای آن- برمبنای رفتار مولکولهای سازندهٔ آن است. ولی بی‌درنگ مسئله‌ای نیز وجود دارد: کدام گاز؟ آیا این گاز می‌تواند هیدروژن یا اکسیژن یا متان یا مثلاً هگزافلورید

---

1. Amadeo Avogadro

اورانیوم باشد؟ همهٔ این گازها متفاوت‌اند. ولی آزمایشگران در یافته‌اند که اگر نمونه‌های ۱ مولی از گازهای مختلف در جعبه‌های با حجم یکسان محبوس شوند و گازها در دمای یکسانی قرار داشته باشند، آنگاه فشار اندازه‌گیری شدهٔ آنها تقریباً - اگر چه نه به طور دقیق- یکسان خواهد بود. اگر اندازه‌گیریها را با گازهای با چگالی کمتر تکرار کنیم، آنگاه این اختلافهای کوچک در فشارهای اندازه‌گیری شده کم کم از میان می‌رود. آزمایشهای بیشتر نشان می‌دهند که در چگالیهای به قدر کافی کم، همهٔ گازها تمایل دارند از رابطهٔ زیر پیروی کنند

$$pV=nRT \quad \text{(قانون گاز آرمانی)} \qquad (۱۵-۵)$$

که در آن $p$ فشار مطلق (نه پیمانه‌ای)، $n$ تعداد مولهای گاز مورد نظر و $T$ دما برحسب کلوین است. نماد $R$ ثابتی است که **ثابت گازها** نامیده می‌شود و مقدار آن برای همهٔ گازها یکسان است، یعنی

$$R=۸/۳۱\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \qquad (۱۵-۶)$$

معادلهٔ ۱۵-۵ **قانون گاز آرمانی** نامیده می‌شود. مشروط بر اینکه چگالی گاز کم باشد، این قانون برای هر نوع گاز تنها یا آمیزه‌ای از گازهای مختلف برقرار است. (در مورد یک آمیزه $n$ تعداد کل مولها در آمیزه است.)

معادلهٔ ۱۵-۵ را می‌توان برحسب ثابتی به نام **ثابت بولتزمن** $k$ به صورت دیگری نوشت که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$k=\frac{R}{N_A}=\frac{۸/۳\text{J/mol}\cdot\text{k}}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\ \text{mol}^{-1}}=۱/۳۸\times۱۰^{۲۳}\ \text{J/K} \qquad (۱۵-۷)$$

از این می‌توان نوشت $R=kN_A$. پس با معادلهٔ ۱۵-۲ ($n=N/N_A$) ، می‌توان دید که

$$nR=Nk \qquad (۱۵-۸)$$

با قرار دادن این در معادلهٔ ۱۵-۵ عبارت دیگری برای قانون گاز آرمانی به دست می‌آید

$$pV=NkT \quad \text{(قانون گازهای آرمانی)} \qquad (۱۵-۹)$$

(*هشدار*: به تفاوت بین دو عبارت قانون گاز آرمانی توجه کنید، معادلهٔ ۱۵-۵ شامل تعداد مولهای $n$ و معادلهٔ ۱۵-۹ شامل تعداد مولکولهای $N$ است.)

ممکن است بپرسید، «*یک گاز آرمانی* چیست، و «آرمانی» بودن یک گاز به چه معنی است؟» پاسخ این در ساده بودن قانونی نهفته است که بر خواص ماکروسکوپی آن حاکم است (معادله‌های ۱۵-۵ و ۱۵-۹). با استفاده از این قانون - همان‌طور که خواهیم دید- بسیاری از خواص گازهای آرمانی را به روش ساده‌ای می‌توان استنتاج کرد. اگر چه در طبیعت چیزی به عنوان گاز واقعاً آرمانی وجود ندارد، ولی *همهٔ گازها* در چگالیهای به اندازهٔ کافی کم - یعنی در شرایطی که مولکولهای آنها به اندازهٔ کافی از یکدیگر دور هستند تا با یکدیگر بر هم‌کنش نکنند به حالت آرمانی نزدیک می‌شوند. بنابراین، مفهوم گاز آرمانی به ما اجازه می‌دهد تا دیدگاه مفیدی در رفتار حدی گازهای واقعی به دست آوریم.

داخل واگن مخزنی راه‌آهن در شکل ۱۵-۱ توسط خدمه در آخر روز با بخار تمیز شده بود. چون این کار در آخر نوبت کاری آنها ناتمام مانده بود، آنها واگن را بسته و در شب رها کرده بودند. وقتی صبح روز بعد برمی‌گردند، در می‌یابند که با وجود اینکه واگن دیوارهای فولادی بسیار قوی داشته است، بعضی چیزها واگن را خرد کرده‌اند، مثل اینکه مخلوقات بزرگی از یک فیلم علمی تخیلی درجهٔ $B$ در شب به طور وحشیانه روی آن پا گذاشته‌اند.



**شکل ۱۵-۱** واگن مخزنی در شب آسیب دیده است.

با معادلهٔ ۱۵-۹ می‌توان توضیح داد که چه چیزی واگن مخزنی راه‌آهن را خرد کرده است. آنها وقتی که واگن را تمیز می‌کنند، داخل آن با بخار خیلی گرم پر می‌شود، که گازی از مولکولهای آب است. خدمه در حالی که همهٔ مجراها واگن را در پایان نوبت کاری خود می‌بندند بخار را در داخل واگن رها می‌کنند. در آن لحظه فشار گاز در واگن برابر با فشار جو است چون مجراها در ضمن تمیزکاری به جو باز می‌شوند. وقتی که واگن در ضمن شب سرد می‌شود، بخار سرد شده و مقدار زیادی از آن چگالیده می‌شود، که بدان معناست که تعداد $N$ مولکول گاز و دمای $T$ گاز هر دو کاهش می‌یابند. بنابراین، سمت راست معادلهٔ ۱۵-۹ کم می‌شود و چون حجم ثابت است، فشار گاز $p$ در سمت چپ نیز کاهش می‌یابد. در چند نقطه در ضمن شب فشار گاز داخل واگن به اندازه‌ای کم می‌شود که فشار بیرونی جو می‌تواند دیواره‌های فلزی واگن را خرد کند. خدمه با بازگذاشتن مجراها می‌توانند از این کار جلوگیری کنند، به طوری که برای نگهداشتن فشار داخل برابر با فشار جو در بیرون هوا بتواند وارد واگن شود.

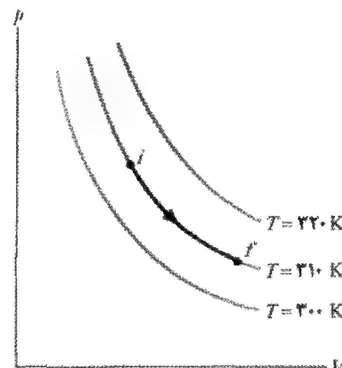
## کار انجام شده به وسیلهٔ یک گاز آرمانی در دمای ثابت

فرض کنید گازی آرمانی را در یک آرایش پیستون - استوانه مانند موارد فصل ۱۴ قرار دهیم. همچنین فرض کنید که گاز بتواند از یک حجم اولیه $V_i$ به یک حجم نهایی $V_f$ با ثابت نگهداشتن دمای $T$ گاز منبسط شود. چنین فرایندی را که در *دمای ثابت* انجام می‌گیرد **انبساط تکدما** (و عکس آن را **تراکم تکدما**) می‌نامند.

در نمودار $p$-$V$، *تکدما* یک منحنی است که نقطه‌هایی را که دمای یکسان دارند به هم وصل می‌کند. بنابراین، این منحنی بیان کنندهٔ تغییرات فشار برحسب حجم گازی است که دمای $T$ آن ثابت نگهداشته شده است. در مورد $n$ مول یک گاز آرمانی معادلهٔ این نمودار به این صورت است

$$p=nRT\frac{1}{V}=(\text{ثابت})\times\frac{1}{V} \qquad (۱۰\text{-}۱۵)$$

شکل ۱۵-۲ سه منحنی تکدما را نشان می‌دهد که هر یک به مقدار (ثابت) متفاوتی از دمای $T$ مربوطانـد. (توجه کنید که مقدار $T$ برای منحنیهای تکدما به طرف بالا و سمت راست افزایش می‌یابد.) منحنی تکدمای میانی مسیری را نشان می‌دهد




**شکل ۱۵-۲** سه تکدما روی نمودار $p$-$V$. مسیر نشان داده شده در امتداد تکدمای میانی یک انبساط تکدمای گازی را از حالت اولیه $i$ به حالت نهایی $f$ نشان می‌دهد. مسیر از $f$ به $i$ در امتداد تکدما فرایند وارونه - یعنی تراکم تکدما را نشان می‌دهد.

که گاز در ضمن انبساط تکدما از حالت $i$ به حالت $f$ در دمای ثابت ۳۱۰K پیموده است.

برای پیدا کردن کار انجام شده به وسیلهٔ یک گاز آرمانی در ضمن انبساط تکدما، از معادلهٔ ۱۴-۲۵ شروع می‌کنیم

$$W=\int_{V_i}^{V_f} p\,dV \qquad (۱۱\text{-}۱۵)$$

این معادلهٔ عمومی برای کار انجام شده توسط هر تغییری در حجم است. در مورد گاز آرمانی ۱۵-۵ $(pV=nRT)$ به جای $p$ قرار می‌دهیم، که خواهیم داشت

$$W=\int_{V_i}^{V_f}\frac{nRT}{V}\,dV \qquad (۱۲\text{-}۱۵)$$

چون انبساط تکدما را در نظر گرفته‌ایم، $T$ ثابت است، پس می‌توان آن را از زیر علامت انتگرال بیرون آورد و نوشت

$$W=nRT\int_{V_i}^{V_f}\frac{nRT}{V}=nRT\left[\ln V\right]_{V_i}^{V_f} \qquad (۱۳\text{-}۱۵)$$

با محاسبهٔ عبارت داخل کروشه در حدود داده شده و با استفاده از رابطهٔ $\ln a-\ln b=\ln(a/b)$ ، خواهیم داشت

$$W=nRT\ln\frac{V_f}{V_i} \qquad \text{(گاز آرمانی، فرایند تکدما)} \qquad (۱۴\text{-}۱۵)$$

به خاطر آورید که ln ، نماد لگاریتم *طبیعی* یعنی در پایهٔ $e$ است.

در انبساط، $V_f$ بزرگتر از $V_i$ است، پس نسبت $V_f/V_i$ در معادلهٔ ۱۵-۱۴ بزرگتر از یک است. لگاریتم طبیعی مقدار بزرگتر از یک، مثبت است و در نتیجه کار $W$ انجام شده به وسیلهٔ یک گاز آرمانی در ضمن یک انبساط تکدما، همان‌طور که انتظار داریم، مثبت است. در مورد تراکم، $V_f$ کمتر از $V_i$ است، پس نسبت حجمها در معادلهٔ ۱۵-۱۴ کمتر از یک است. لگاریتم طبیعی در این معادله - و از این رو کار $W$ ، همان‌طور که باز انتظار داریم، منفی است.

## کار انجام شده در حجم ثابت و فشار ثابت

در معادلهٔ ۱۵-۱۴، $W$ کار انجام شده توسط یک گاز آرمانی در هر فرایند ترمودینامیکی نیست، بلکه کار انجام شده را فقط در فرایندی به دست می‌دهد که در آن دما ثابت نگهداشته شود. اما اگر دما تغییر کند، آنگاه $T$ را در معادلهٔ ۱۵-۱۲ نمی‌توان مانند معادلهٔ ۱۵-۱۳ از زیر انتگرال بیرون آورد و در نتیجه نمی‌توان به معادلهٔ ۱۵-۱۴ دست یافت.

با وجود این، برای پیدا کردن کار $W$ انجام شده به وسیلهٔ یک گاز آرمانی (یا هر گاز دیگر) در ضمن هر فرایندی، مانند حجم ثابت و فرایند فشار ثابت همیشه به معادلهٔ ۱۵-۱۱ برمی‌گردیم. اگر حجم گاز ثابت باشد، آنگاه از ۱۵-۱۱ خواهیم داشت

$$W=0 \qquad \text{(فرایند حجم- ثابت)} \qquad (۱۵\text{-}۱۵)$$

اما اگر حجم تغییر کند در حالی که فشار $p$ گاز ثابت نگهداشته شود، در این صورت معادلهٔ ۱۵-۱۱ چنین نوشته می‌شود

$$W=p(V_f-V_i)=p\,\Delta V \qquad \text{(فرایند فشار- ثابت)} \qquad (۱۶\text{-}۱۵)$$

**✓ *نکتهٔ وارسی ۱*** فشار اولیهٔ یک گاز آرمانی ۳ واحد فشار و حجم اولیهٔ آن ۳ واحد حجم است. این جدول فشار و حجم نهایی گاز را (برحسب همان واحدها) در پنج فرایند نشان می‌دهد. آغاز و پایان کدام فرایند روی منحنی تکدما قرار گرفته است؟

| | الف | ب | پ | ت | ث |
|---|---|---|---|---|---|
| P | ۱۲ | ۶ | ۵ | ۴ | ۱ |
| V | ۱ | ۲ | ۷ | ۳ | ۱۲ |

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵-۱

استوانه‌ای در دمای $۲۰^\circ C$ و فشار ۱۵ atm محتوی ۱۲ L اکسیژن است. دمای گاز به $۳۵^\circ C$ افزایش و حجم به ۸/۵ L کاهش می‌یابد. فشار نهایی گاز برحسب اتمسفر چقدر است؟ فرض کنید که گاز آرمانی است.

**نکتهٔ کلیدی** چون گاز آرمانی است، فشار، حجم، دما و مقدار مولهای آن چه در حالت اولیهٔ $i$ و چه در حالت نهایی $f$ (پس از تغییر) توسط قانون گاز آرمانی به هم مربوط‌اند.

***محاسبه‌ها:*** از معادلهٔ ۱۵-۵ می‌توان نوشت

$$p_iV_i = nRT_i \quad \text{و} \quad p_fV_f = nRT_f$$

از تقسیم معادلهٔ دوم بر معادلهٔ اول و حل آن برحسب $p_f$، داریم

$$p_f = \frac{p_iT_fV_i}{T_iV_f} \qquad (۱۵\text{–}۱۷)$$

توجه کنید که اگر حجمهای اولیه و نهایی را از لیتر به یکای مناسب متر مکعب تبدیل کنیم، ضریبهای تبدیل در معادلهٔ ۱۵-۱۷ حذف می‌شوند. همین کار برای ضریبهای تبدیل فشارها از اتمسفر به پاسکال نیز درست است. ولی برای تبدیل دماهای داده شده به کلوین یک مقدار اضافی را که حذف نمی‌شود باید افزود و این موضوع باید در نظر گرفته شود. از این رو باید بنویسیم

$$T_i = (۲۷۳ + ۲۰)\text{K} = ۲۹۳\,\text{K}$$

و

$$T_f = (۲۷۳ + ۳۵)\text{K} = ۳۰\,\text{K}$$

با قراردادن داده‌های معلوم در معادلهٔ ۱۵-۱۷ خواهیم داشت

$$p_f = \frac{(۱۵\,\text{atm})(۳۰۸\,K)(۱۲\,L)}{(۲۹۳\text{K})(۸/۵\text{L})} = ۲۲\,\text{atm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

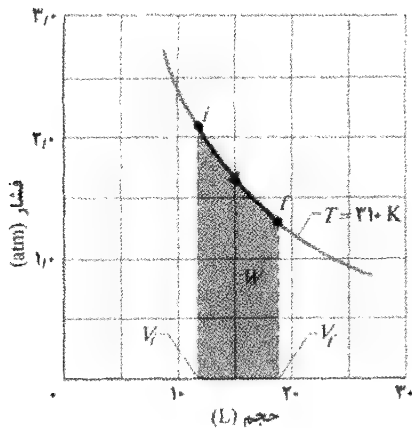
## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵-۲

یک مول از اکسیژن (با فرض گاز آرمانی) در دمای ثابت $T$ برابر با ۳۱۰K از حجم اولیهٔ $V_i$ برابر با ۱۲ L به حجم نهایی $V_f$ برابر با ۱۹L منبسط می‌شود. در ضمن انبساط گاز، چقدر کار انجام می‌شود؟

**نکتهٔ کلیدی** با استفاده از معادلهٔ ۱۵-۱۱، معمولاً کار انجام شده را به وسیلهٔ انتگرالگیری از تابع فشار گاز نسبت به حجم پیدا می‌کنیم. ولی چون در اینجا گاز آرمانی و انبساط تکدما است، انتگرالگیری به معادلهٔ ۱۵-۱۴ می‌انجامد.

***محاسبه:*** این مقدار برابر است با

$$\begin{aligned} W &= nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \\ &= (۱\text{mol})(۸/۳۱\text{J/mol}\cdot\text{K})(۳۱۰\,\text{K}) \ln \frac{۱۹\text{L}}{۱۲\text{L}} \\ &= ۱۱۸۰\,\text{J} \end{aligned} \qquad \text{(پاسخ)}$$




**شکل ۱۵-۳** مساحت سایه‌دار کار انجام شده به وسیلهٔ ۱ mol اکسیژن را در انبساط از $V_i$ به $V_f$ در دمای ثابت $T$ برابر با ۳۱۰K نشان می‌دهد.

انبساط گاز در نمودار $p$-$V$ شکل ۱۵-۳ رسم شده است. کار انجام شده به وسیلهٔ گاز در ضمن انبساط با مساحت زیر منحنی $if$ نشان داده شده است.

می‌توان نشان داد که اگر انبساط، با تراکم تکدما از ۱۹L به ۱۲L، معکوس شود، کار انجام شده به وسیلهٔ گاز ۱۱۸۰J- خواهد بود. بنابراین، یک نیروی خارجی باید ۱۱۸۰J کار روی گاز برای تراکم آن انجام دهد.

## ۱۵-۴ فشار، دما و تندی جذر میانگین مربعی (RMS)

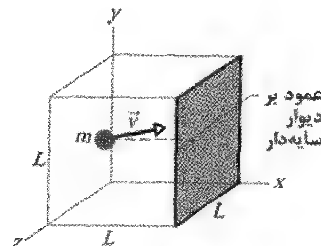
این اولین مسئلهٔ نظریهٔ جنبشی ماست. فرض کنید $n$ مول از یک گاز آرمانی مانند شکل ۱۵-۴ در یک جعبهٔ مکعبی به جرم $V$ محبوس باشد. دیواره‌های جعبه در دمای $T$ نگهداشته شده‌اند. رابطهٔ میان فشار $P$ که گاز بر دیواره‌ها وارد می‌کند و تندی مولکولها چیست؟

مولکولهای گاز که در جعبه با تندیهای مختلف در همهٔ جهتها حرکت می‌کنند، با یکدیگر برخورد می‌کنند و از دیواره‌های جعبه مانند توپهایی در یک محوطه وا می‌جهند. از برخوردهای مولکولها با مولکولهای دیگر (فعلاً) چشم‌پوشی می‌کنیم و فقط برخوردهای کشسان با دیواره‌ها را در نظر می‌گیریم.

شکل ۱۵-۴ مولکولی از یک گاز نوعی به جرم $m$ و سرعت $\vec{v}$ را نشان می‌دهد، که در حال برخورد با دیوارهٔ سایه‌دار است. چون فرض می‌کنیم که برخورد مولکول با دیواره کشسان است، وقتی این مولکول با دیوارهٔ سایه‌دار برخورد می‌کند، فقط مؤلفهٔ $x$ سرعت آن تغییر می‌کند و این مؤلفه تغییر جهت می‌دهد. این بدان معناست که تنها تغییر در اندازه حرکت ذره در راستای محور $x$ است و این تغییر عبارت است از

$$\Delta p_x = (-mv_x) - (mv_x) = -۲mv_x$$

بنابراین، اندازه حرکت $\Delta p_x$ که به وسیلهٔ مولکول در ضمن برخورد به دیواره داده می‌شود برابر است با $+2mv_x$ (چون در این کتاب نماد $p$ هم برای اندازه حرکت و هم برای فشار به کار رفته است، باید توجه کنیم که در اینجا $p$ اندازه حرکت را نشان می‌دهد و یک کمیت برداری است.)




**شکل ۱۵-۴** جعبه مکعبی به ضلع $L$ که محتوی $n$ مول از یک گاز آرمانی است. مولکولی به جرم $m$ و سرعت $\vec{v}$ در لحظهٔ برخورد با دیوارهٔ سایه‌دار به مساحت $L^2$ است. خط عمود بر دیوار نشان داده شده است.

مولکول شکل ۱۵-۴ به طور مکرر به دیوارهٔ سایه‌دار برخورد می‌کند. زمان $\Delta t$ میان برخوردها عبارت است از زمانی که لازم است تا مولکولی با تندی $v_x$ به دیوارهٔ مقابل رفته و دوباره برگردد (مسافت $2L$). بنابراین، $\Delta t$ برابر است با $2L/v_x$. (توجه کنید که این نتیجه حتی اگر مولکول در مسیر خود از دیواره‌های دیگر هم برگردد درست است، چون آن دیواره‌ها با $x$ موازی‌اند و $v_x$ را تغییر نمی‌دهند.) بنابراین، آهنگ میانگینی که اندازه حرکت به وسیلهٔ این مولکول تنها به دیوارهٔ سایه‌دار انتقال می‌یابد عبارت است از

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t}=\frac{2mv_x}{2L/v_x}=\frac{mv_x^2}{L}$$

از قانون دوم نیوتون $(\vec{F}=d\vec{p}/dt)$ آهنگی که اندازه حرکت به دیواره انتقال می‌یابد عبارت است از نیرویی که برآن دیواره وارد می‌شود. برای پیدا کردن نیروی کل، باید سهم همهٔ مولکولها را با توجه به اینکه دارای تندیهای متفاوتی هستند، با هم جمع کنیم. با تقسیم نیروی کل $F_x$ بر مساحت دیوار $(=L^2)$ فشار $p$ وارد بر دیواره به دست می‌آید، که اکنون و در باقیمانده این بحث، $p$ فشار را نمایش می‌دهد. بنابراین، با استفاده از عبارت $\Delta p_x/\Delta t$، این فشار را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$p=\frac{F_x}{L^2}=\frac{mv_{x1}^2/L+mv_{x2}^2/L+\ldots+mv_{xN}^2/L}{L^2}$$
$$=\left(\frac{m}{L^3}\right)(v_{x1}^2+v_{x2}^2+\ldots+v_{xN}^2) \qquad (۱۸-۱۶)$$

که در آن $N$ تعداد مولکولهای درون جعبه است.

چون $N=nN_A$ ، تعداد $nN_A$ جمله در پرانتز دوم معادلهٔ ۱۵-۱۸ وجود دارد. این کمیت را با $nN_A(v_x^2)_{avg}$ جایگزین می‌کنیم، که در آن $(v_x^2)_{avg}$ متوسط مجذور مؤلفه‌های $x$ همهٔ تندیهای مولکولی است. پس از معادلهٔ ۱۵-۱۸ خواهیم داشت

$$p=\frac{nmN_A}{L^3}(v_x^2)_{avg}$$

ولی $mN_A$ جرم مولی $M$ گاز (یعنی جرم 1mol از گاز) و $L^3$ حجم جعبه است، پس

$$p=\frac{nM(v_x^2)_{avg}}{V} \qquad (۱۵-۱۹)$$

در مورد هر مولکول رابطهٔ $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$ برقرار است. چون تعداد زیادی مولکول وجود دارند و چون همهٔ آنها در جهتهای کاتوره‌ای حرکت می‌کنند، مقدارهای میانگین مجذورهای مؤلفه‌های سرعت آنها برابر هستند، پس $v_x^2=\frac{1}{3}v^2$ و بنابراین، از معادلهٔ ۱۵-۱۹ خواهیم داشت

$$p=\frac{nM(v^2)_{avg}}{3V} \qquad (۱۵-۲۰)$$

ریشهٔ دوم $(v^2)_{avg}$ نوعی تندی میانگین به نام **تندی جذر میانگین مربعی** مولکولهاست و با نماد $v_{rms}$ نمایش داده می‌شود. نام این کمیت آن را به خوبی توصیف می‌کند: تندی هر مولکول را *مجذور* کنید. مقدار میانگین (یعنی متوسط) همهٔ این تندیهای مجذور شده را پیدا کنید و سپس *جذر* این مقدار میانگین را حساب کنید. با توجه به رابطهٔ $\sqrt{(v^2)_{avg}}=v_{rms}$، معادلهٔ (۱۵-۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$p=\frac{nMv_{rms}^2}{3V} \qquad (۱۵-۲۱)$$

معادلهٔ ۱۵-۲۱ به جوهر نظریهٔ جنبشی نزدیک است و نشان می‌دهد که چگونه فشار گاز (یک کمیت به طور خالص ماکروسکوپی) به تندی مولکولها (یک کمیت به طور خالص میکروسکوپی) وابسته است.

به معادله ۱۵-۲۱ برمی‌گردیم و برای محاسبهٔ $v_{rms}$ از آن استفاده می‌کنیم. با ترکیب معادلهٔ ۱۵-۲۱ با قانون گاز آرمانی $(pV=nRT)$، خواهیم داشت

$$v_{rms}=\sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad (۱۵-۲۲)$$

جدول ۱۵-۱ چند تندی جذر میانگین مربعی محاسبه شده از معادلهٔ ۱۵-۲۲ را نشان می‌دهد. تندیها به طور شگفت‌انگیزی بزرگ‌اند. در مورد مولکولهای هیدروژن در دمای اتاق (۳۰۰K)، تندی rms برابر با ۱۹۲۰m/s یا ۴۳۰۰mi/h است که از تندی یک گلولهٔ تفنگ بیشتر است! در سطح خورشید که دما برابر با $2\times10^6$K است، تندی rms مولکولهای هیدروژن ۸۲ بار بیشتر از تندی rms آنها در دمای اتاق است و این طور نیست که در چنین تندیهای زیادی، مولکولها با یکدیگر نمی‌توانند برخورد کنند. به یاد داشته باشید که تندی rms فقط یک نوع تندی میانگین است، بسیاری از مولکولها خیلی تندتر از این و برخی دیگر خیلی آهسته‌تر حرکت می‌کنند.

**جدول ۱۵-۱**

چند تندی rms در دمای اتاق ($T = ۳۰۰ K$)[1]

| گاز | جرم مولی ($10^{-3}$ kg/mol) | $V_{rms}$(m/s) |
|---|---|---|
| هیدروژن ($H_2$) | ۲/۰۲ | ۱۹۲۰ |
| هلیوم (He) | ۴/۰ | ۱۳۷۰ |
| بخار آب ($H_2O$) | ۱۸/۰ | ۶۴۵ |
| نیتروژن ($N_2$) | ۲۸ | ۵۱۷ |
| اکسیژن ($O_2$) | ۳۲/۰ | ۴۸۳ |
| کربن دی اکسید ($CO_2$) | ۴۴/۰ | ۴۱۲ |
| سولفور دی اکسید ($SO_2$) | ۶۴/۱ | ۳۴۲ |

۱. برای آسانی، دمای اتاق را برابر با ۳۰۰K در نظر می‌گیریم، اگر چه (در ۲۷°C یا ۸۱°F) این مقدار مربوط به اتاق نسبتاً گرمی است.

تندی صوت در گاز ارتباط نزدیکی با تندی rms مولکولهای آن گاز دارد. در یک موج صوتی، اغتشاش به وسیلهٔ برخوردها، از مولکولی به مولکول دیگر انتقال می‌یابد. این موج نمی‌تواند تندتر از تندی «میانگین» مولکولها حرکت کند. در واقع تندی صوت باید قدری کمتر از این تندی مولکولی «میانگین» باشد، چون همهٔ مولکولها دقیقاً در جهت حرکت موج، حرکت نمی‌کنند. به عنوان مثال در دمای اتاق، تندی rms مولکولهای هیدروژن و نیتروژن به ترتیب ۱۹۲۰m/s و ۵۱۷ m/s است. تندیهای صوت در این دو گاز و در این دما به ترتیب ۱۳۵۰m/s و ۳۵۰m/s است.

این پرسش وجود دارد: اگر مولکولها این قدر سریع حرکت می‌کنند، چرا وقتی در شیشه عطری در اتاق باز می‌شود نزدیک به یک دقیقه طول می‌کشد تا بوی آن استشمام شود؟ همان‌طور که در بخش ۱۵-۶ بحث خواهیم کرد، پاسخ این است که هر مولکول عطر ممکن است تندی زیادی داشته باشد ولی از شیشه عطر بسیار آهسته دور شود چون برخوردهای مکرر آن با مولکولهای دیگر مانع از آن می‌شود که به طور مستقیم در راستای اتاق حرکت کنند و به ما برسند.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵-۳**

پنج عدد را در نظر بگیرید: ۵، ۱۱، ۳۲، ۶۷، ۸۹.

(الف) مقدار میانگین $n_{avg}$ این عددها چیست؟

*محاسبه:* این را از رابطه زیر پیدا می‌کنیم

$$n_{avg} = \frac{۵+۱۱+۳۲+۶۷+۸۹}{۵} = ۴۰/۸ \quad \text{(پاسخ)}$$

(ب) مقدار جذر میانگین مربعی $n_{rms}$ این عددها چیست؟

*محاسبه:* این مقدار از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$n_{rms} = \sqrt{\frac{۵^2+۱۱^2+۳۲^2+۶۷^2+۸۹^2}{۵}} = ۵۲/۱ \quad \text{(پاسخ)}$$

مقدار rms از مقدار میانگین بیشتر است چون عددهای بزرگتر که مجذور می‌شوند در تشکیل اندازهٔ rms اهمیت بیشتری پیدا می‌کنند. برای آزمودن این موضوع به جای ۸۹ در این مجموعه پنج عددی، ۳۰۰ را قرار می‌دهیم. مقدار میانگین این مجموعهٔ جدید (که بهتر است آن را نشان دهید) ۲/۰ برابر مقدار متوسط قبلی است. ولی مقدار rms عددها ۲/۷ برابر rms قبلی است.

## ۱۵-۵ انرژی جنبشی انتقالی

دوباره یک مولکول تنها از یک گاز آرمانی را در نظر می‌گیریم که در جعبهٔ شکل ۱۵-۴ حرکت می‌کند، ولی اکنون فرض می‌کنیم که در هنگام برخورد با مولکولهای دیگر تندی آن تغییر می‌کند. انرژی جنبشی انتقالی آن در هر لحظه $\frac{1}{2}mv^2$ است. *میانگین* انرژی جنبشی انتقالی آن در سراسر زمانی که مشاهده می‌شود برابر است با

$$K_{avg} = (\frac{1}{2}mv^2)_{avg} = \frac{1}{2}m(v^2)_{avg} = \frac{1}{2}mv_{rms}^2 \qquad (۱۵-۲۳)$$

که در آن فرض کرده‌ایم که تندی میانگین مولکول در مدت زمان مشاهده، مانند تندی میانگین همهٔ مولکولها در یک مدت معین است. (مشروط بر اینکه انرژی کل گاز تغییر نکند و مولکول را به مدت کافی مشاهده کنیم، این فرض مناسب است.) با قرار دادن مقدار $v_{rms}$ از معادلهٔ ۱۵-۲۲ خواهیم داشت

$$K_{avg} = (\frac{1}{2}m)\frac{3RT}{M}$$

ولی نسبت $M/m$، جرم مولی بخش بر جرم یک مولکول و به طور ساده عدد آووگادرو است. پس داریم

$$K_{avg} = \frac{3RT}{2N_A}$$

با استفاده از معادلهٔ ۱۵-۷ ($k=R/N_A$)، می‌توان نوشت

$$K_{avg} = \frac{3}{2}KT \qquad (۱۵-۲۴)$$

این معادله حاکی از موضوعی غیرمنتظره است.

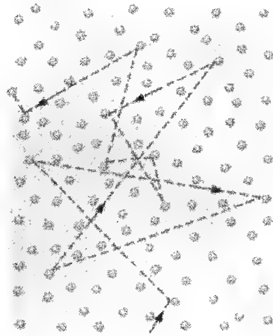
در دمای معین $T$، همهٔ مولکولهای گاز آرمانی- صرف‌نظر از جرم آنها- دارای انرژی جنبشی انتقالی میانگین یکسانی برابر با $\frac{3}{2}kT$ هستند. هنگامی که دمای گازی را اندازه می‌گیریم، انرژی جنبشی انتقالی میانگین مولکولهای آن را نیز اندازه گرفته‌ایم.

✓ ***نکتهٔ وارسی ۲*** یک آمیزهٔ گازی مرکب از سه نوع مولکول ۱، ۲ و ۳ با جرمهای مولکولی $m_1 > m_2 > m_3$ است. این سه نوع را به ترتیب بزرگی کمیتهای زیر بنویسید، (الف) انرژی جنبشی متوسط و (ب) rms.

## ۱۵-۶ پویش آزاد میانگین

بررسی حرکت مولکولها را در یک گاز آرمانی ادامه می‌دهیم. شکل ۱۵-۵ مسیری را که یک مولکول نوعی در هنگام حرکت در گاز می‌پیماید نشان می‌دهد، که در آن هم تندی و هم جهت برخورد کشسان با مولکولهای دیگر به طور ناگهانی تغییر می‌کند. در فاصلهٔ بین برخوردها، مولکول مورد نظر با تندی ثابت در یک خط راست حرکت می‌کند. اگر چه شکل نشان می‌دهد که مولکولهای دیگر ساکن هستند، ولی آنها نیز به همین صورت حرکت می‌کنند.

یک عامل مفید برای توصیف این حرکت کاتوره‌ای عبارت است از پویش آزاد میانگین $\lambda$ مولکولها، و همان‌طور که از نامش پیداست، $\lambda$ میانگین مسافت پیموده شده به وسیلهٔ یک مولکول در فاصلهٔ میان برخوردهاست. انتظار داریم که $\lambda$ با عکس $N/V$ یعنی تعداد مولکولها در یکای حجم (یا چگالی مولکولها) تغییر کند. هر چه $N/V$ بیشتر باشد، برخوردها زیادتر و پویش آزاد میانگین کوچکتر است. همچنین انتظار داریم که $\lambda$ به طور معکوس با اندازهٔ مولکولها- مثلاً با قطر $d$ آنها، تغییر کند. (اگر مولکولها نقطه می‌بودند. به صورتی که آنها را این طور فرض می‌کنیم، آنها هرگز برخورد نمی‌کردند و پویش آزاد میانگین بینهایت می‌شد.). بنابراین، هر چه مولکولها بزرگتر باشند، پویش آزاد میانگین کوچکتری خواهند داشت. حتی می‌توان پیش‌بینی کرد که $\lambda$ (به طور معکوس) با مجذور قطر مولکولی



**شکل ۱۵-۵** مولکولی که در یک گاز حرکت می‌کند در راه خود با مولکولهای دیگر گاز برخورد می‌کند. اگر چه مولکولهای دیگر در حالت سکون نشان داده شده‌اند ولی آنها نیز به همین ترتیب حرکت می‌کنند.

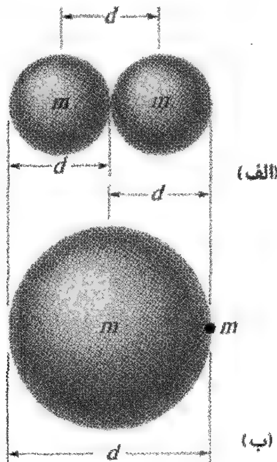
تغییر می‌کند، چون سطح مقطع یک مولکول- نه قطر آن- مساحت مؤثر هدف را تعیین می‌کند.

در واقع رابطهٔ پویش آزاد میانگین به صورت زیر است

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V} \qquad \text{(پویش آزاد میانگین)} \qquad (۱۵-۲۵)$$

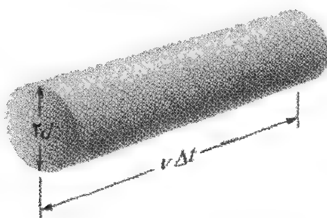
برای توجیه معادلهٔ ۱۵-۲۵، توجه خود را به یک مولکول تنها متمرکز می‌کنیم و مانند پیشنهاد شکل ۱۵-۵، فرض می‌کنیم که مولکول مورد نظر با تندی ثابت $v$ حرکت می‌کند و مولکولهای دیگر در حال سکون هستند. بعداً این فرض را کنار می‌گذاریم.

افزون بر این، فرض می‌کنیم که مولکولها کره‌هایی به قطر $d$ باشند. اگر مرکزهای دو مولکول مانند شکل ۱۵-۶ الف فاصلهٔ $d$ از یکدیگر قرار گرفته باشند،برخورد رخ می‌دهد. راه دیگر این است که مانند شکل ۱۵-۶ ب، *شعاع* مولکول مورد نظر را $d$ و سایر مولکولها را به صورت *نقطه* در نظر بگیریم. این امر معیار ما را برای برخورد تغییر نمی‌دهد.




**شکل ۱۵-۶** (الف) برخورد هنگامی رخ می‌دهد که فاصلهٔ مرکزهای دو مولکول به فاصلهٔ $d$ از یکدیگر قرار داشته باشند که $d$ قطر مولکولی است. (ب) نمایش هم‌ارز ولی مناسبتر این است که فرض شود *شعاع* مولکول $d$ است و مولکولهای دیگر به صورت نقطه هستند. شرط برخورد تغییر نمی‌کند.

هنگامی که یک مولکول تنها در مسیری به صورت خط شکسته در گاز حرکت می‌کند، در فاصلهٔ میان دو برخورد پی‌درپی استوانه‌ای کوتاه به مساحت مقطع $\pi d^2$ را جارو می‌کند. اگر این مولکول را دربازهٔ زمانی $\Delta t$ بنگریم، مسافت $v\Delta t$ را می‌پیماید، که $v$ تندی آن است. بنابراین، اگر همهٔ استوانه‌های کوتاه جارو شده در زمان $\Delta t$ را در یک خط قرار دهیم، استوانه مرکبی (شکل ۱۵-۷) به طول $v\Delta t$ و حجم $(\pi d^2)(v\Delta t)$ تشکیل خواهد شد. بنابراین، تعداد برخوردهایی که در مدت $\Delta t$ رخ می‌دهند برابر با تعداد مولکولهای (نقطه‌ای) موجود درون این استوانه است.




**شکل ۱۵-۷** در زمان $\Delta t$ مولکول در حال حرکت به طور مؤثر استوانه‌ای به طول $v\Delta t$ و شعاع $d$ را جارو می‌کند.

چون $N/V$ تعداد مولکولها در یکای حجم است، تعداد مولکولهای داخل استوانه برابر $N/V$ ضربدر حجم این استوانه، یا $(N/V)\,(\pi d^2 v\Delta t)$ است. از طرفی این مقدار با تعداد برخوردها در زمان $\Delta t$ نیز برابر است. پویش آزاد میانگین عبارت است از طول مسیر ( و طول استوانه) بخش بر این عدد

$$\lambda = \frac{\text{طول مسیر پیموده شده در مدت } \Delta t}{\text{تعداد برخوردها در مدت } \Delta t} = \frac{v\Delta t}{\pi d^2 v\Delta t\, N/V}$$

$$= \frac{1}{\pi d^2 N/V} \qquad (۱۵\text{–}۲۶)$$

این معادله تقریبی است، چون بر این فرض مبتنی است که همهٔ مولکولها به غیر از یک مولکول در حال سکون هستند. در واقع، همهٔ مولکولها در حال حرکت‌اند؛ هرگاه این نکته به طور مناسبی در نظر گرفته شود، معادلهٔ ۱۵–۲۵ به دست می‌آید. توجه کنید که این معادله فقط در یک ضریب $1/\sqrt{2}$ با معادلهٔ (تقریبی) ۱۵–۲۶ تفاوت دارد.

می‌توان از «تقریبی بودن» معادلهٔ ۱۵–۲۶ تصوری ارائه کرد. در این معادله $v$ در مخرج و در صورت کاملاً یکسان نیستند. $v$ در صورت برابر $v_{avg}$ یعنی تندی متوسط مولکولها *نسبت به ظرف* است اما $v$ در مخرج برابر $v_{rel}$ یعنی تندی متوسط یک مولکول تنها *نسبت به مولکولهای دیگر* است که در حال حرکت‌اند و همین تندی متوسط است که تعداد برخوردها را تعیین می‌کند. از یک محاسبه دقیق با در نظر گرفتن توزیع تندی واقعی مولکولها مقدار $v_{rel}=\sqrt{2}\,v_{avg}$ و در نتیجه ضریب $\sqrt{2}$ به دست می‌آید.

پویش آزاد میانگین مولکولهای هوا در سطح دریا تقریباً $0/1\,\mu m$ است. در ارتفاع $100km$، چگالی هوا به اندازه‌ای کم می‌شود که پویش آزاد میانگین تقریباً به $16cm$ افزایش می‌یابد. در $300\,km$، پویش آزاد میانگین تقریباً $20km$ است. مسئله‌ای که در مطالعهٔ فیزیک و شیمی جو بالایی در آزمایشگاه وجود دارد، در دسترس نبودن ظرف به اندازهٔ کافی بزرگی است که شرایط جو بالایی را در آن شبیه‌سازی کنند. با این همه مطالعات مربوط به غلظتهای فریون، کربن دی اکسید و ازن در جو بالایی از مسایل حیاتی مورد توجه عموم است.

✔ **نکتهٔ وارسی ۳** یک مول گاز $A$ با قطر مولکولی $2d_0$ و تندی متوسط مولکولی $v_0$ در داخل یک ظرفی قرار دارد. یک مول گاز $B$ با قطر مولکولی $d_0$ و تندی متوسط مولکولی $2v_0$ (مولکولهای $B$ کوچکتر ولی تندتر هستند) در داخل ظرف مشابهی قرار دارد. آهنگ برخورد توسط کدام گاز در داخل ظرف خود بیشتر است؟

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵–۴**

(الف) پویش آزاد میانگین $\lambda$ برای مولکولهای اکسیژن در دمای $T=300K$ و فشار $p=1/0atm$ چقدر است؟ فرض کنید که قطر مولکول $d=290pm$ و گاز آرمانی است.

**نکتهٔ کلیدی** هر مولکول اکسیژن به دلیل برخوردها مسیری به خط شکسته را در میان سایر مولکولهای متحرک می‌پیماید. بنابراین، برای تعیین پویش آزاد میانگین از معادلهٔ ۱۵–۲۵ استفاده می‌کنیم.

*محاسبه:* ابتدا به تعداد مولکولهای موجود در یکای حجم، یعنی $N/V$ نیاز داریم. چون فرض کردیم که گاز آرمانی است، از قانون گاز آرمانی معادلهٔ ۱۵–۹ $(pV=NkT)$ می‌توان نوشت $N/V=p/kT$. با قرار دادن این در معادلهٔ ۱۵–۲۵ خواهیم داشت

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V} = \frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi d^2 p}$$

$$= \frac{(1/38\times10^{-23}\ J/K)(300K)}{\sqrt{2}\pi(2/9\times10^{-10}\ m)^2(1/01\times10^5\ Pa)}$$

$$= 1/1\times10^{-7}\ m \qquad \text{(پاسخ)}$$

این تعداد حدود ۳۸۰ برابر قطرهای مولکولی است.

(ب) فرض کنید تندی متوسط مولکولهای اکسیژن $v=450m/s$ باشد. مدت زمان متوسط $t$ بین برخوردهای پیاپی برای یک مولکول معین چقدر است؟ این مولکول با چه آهنگی برخورد می‌کند، یعنی بسامد $f$ برخورد آن چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** (۱) مسافتی که مولکول به طور متوسط در بین برخوردها طی می‌کند همان پویش آزاد میانگین $\lambda$ با تندی $v$ است. (۲) آهنگ میانگین یا بسامدی که برخوردها رخ می‌دهند عکس زمان $t$ بین برخوردهاست.

*محاسبه‌ها:* از نکتهٔ کلیدی اول مدت زمان میانگین بین برخوردها عبارت است از

$$t = \frac{\text{مسافت}}{\text{تندی}} = \frac{\lambda}{v} = \frac{1/1\times10^{-7}\ m}{450\ m/s}$$

$$= 2/44\times10^{-10}\ s \approx 0/24\ ns \qquad \text{(پاسخ)}$$

این مقدار نشان می‌دهد برای هر مولکول اکسیژن به طور میانگین زمان بین برخوردها کمتر از یک نانو ثانیه است.

از نکتهٔ کلیدی دوم، بسامد برخورد عبارت است از

$$f = \frac{1}{t} = \frac{1}{2/44\times10^{-10}\ s} = 4/1\times10^9\ s^{-1} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این حاکی از آن است که به طور میانگین هر مولکول اکسیژن تقریباً ۴ میلیارد برخورد در ثانیه انجام می‌دهد.

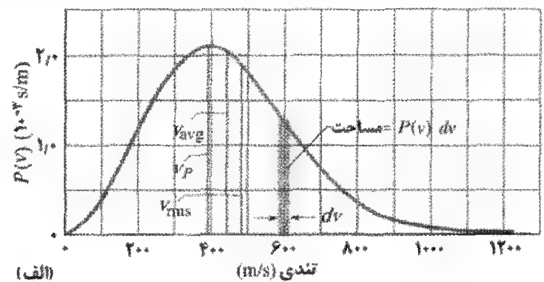
## ۱۵–۷ توزیع تندیهای مولکولی

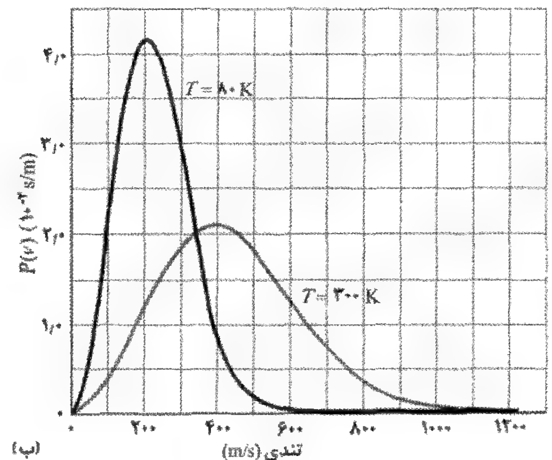
تندی جذر میانگین مربعی $v_{rms}$، یک تصور کلی از تندی مولکولی را در یک گاز با دمای معین به دست می‌دهد. ولی اغلب می‌خواهیم اطلاعات بیشتری داشته باشیم. برای مثال،

می‌خواهیم بدانیم چه کسری از مولکولها دارای تندیهای بیش از مقدار rms هستند؟ چه کسری از آنها دارای تندیهای بیش از دو برابر مقدار rms هستند؟ برای پاسخ به چنین پرسشهایی، نیاز داریم بدانیم که اندازه‌های ممکن تندی در میان مولکولها چگونه توزیع شده‌اند؟ شکل ۱۵-۸ الف همچنین توزیعی را در دمای اتاق ($T=۳۰۰K$) برای مولکولهای اکسیژن نشان می‌دهد؛ و در شکل ۱۵-۸ ب آن را با توزیع مربوط به $T=۸۰\,K$ مورد مقایسه قرار می‌دهد.

در سال ۱۸۵۲/۱۲۳۱ فیزیکدان اسکاتلندی جیمز کلارک ماکسول[1] برای اولین بار مسئله پیدا کردن توزیع تندی مولکولهای گاز را حل کرد. نتیجهٔ او که به نام **قانون توزیع تندی ماکسول** نامیده می‌شود به صورت زیر است

$$P(v)=۴\pi\left(\frac{M}{۲\pi RT}\right)^{۳/۲} v^۲ e^{-Mv^۲/۲RT} \qquad (۱۵-۲۷)$$




**شکل ۱۵-۸** (الف) نمودار توزیع تندی ماکسول برای مولکولهای اکسیژن در $T=۳۰۰K$. در نمودار سه تندی مشخص نشانه‌گذاری شده‌اند. (ب) منحنیهای ۳۰۰ K و ۸۰ K. توجه کنید که مولکولها در دماهای پایین خیلی آهسته‌تر حرکت می‌کنند. چون این منحنیها تابعهای توزیع احتمال را نشان می‌دهند، مقدار عددی مساحت زیر هر منحنی برابر واحد است.

در اینجا $M$ جرم مولی گاز، $R$ ثابت گاز، $T$ دمای گاز و $v$ تندی مولکولی است. در شکل ۱۵-۸ الف و ب نمودار این معادله رسم شده است. کمیت $P(v)$ در معادلهٔ ۱۵-۲۷ و شکل ۱۵-۸ یک *تابع توزیع احتمال* است: به ازای هر تندی $v$، حاصلضرب $P(v)\,dv$ (کمیت بدون بعد) نشان دهندهٔ کسری از مولکولهایی است که تندی آنها در بازهٔ $dv$ با مرکزیت تندی $v$ قرار دارند.

همان‌طور که شکل ۱۵-۸ الف نشان می‌دهد، این کسر برابر با مساحت نواری است که بلندی آن $P(v)$ و پهنای آن $dv$ است. کل مساحت زیر منحنی توزیع متناظر با کسری از مولکولهایی است که تندی آنها بین صفر و بی‌نهایت قرار دارند. همهٔ مولکولها در این گروه قرار دارند، پس تعداد این مساحت کل برابر با واحد است؛ یعنی

$$\int_۰^\infty P(v)\,dv=۱ \qquad (۱۵-۲۸)$$

بنابراین، کسر $f$ از مولکولهایی که تندی آنها در بازهٔ مثلاً از $v_۱$ تا $v_۲$ قرار دارد عبارت است از

$$f=\int_{v_۱}^{v_۲} P(v)\,dv \qquad (۱۵-۲۹)$$

## *تندیهای متوسط و جذر میانگین مربعی، محتملترین تندی*

در اصل تندی متوسط $v_{avg}$ مولکولها در یک گاز را با روش زیر می‌توان پیدا کرد: *وزن* هر مقدار $v$ در توزیع را مشخص می‌کنیم؛ یعنی $v$ را در کسر $P(v)\,dv$ مولکولها که شامل تندیهای واقع در بازهٔ دیفرانسیلی $dv$ با مرکزیت $v$ است ضرب می‌کنیم. سپس، تمام این مقدارهای $v\,P(v)\,dv$ را با هم جمع می‌کنیم. نتیجهٔ آن $v_{avg}$ است. در عمل این کارها را با محاسبهٔ انتگرال زیر انجام می‌دهیم

$$v_{avg}=\int_۰^\infty v\,P(v)\,dv \qquad (۱۵-۳۰)$$

با قرار دادن $P(v)$ از معادلهٔ ۱۵-۲۷ و با استفاده از ۲۰ شکل عمومی انتگرال در پیوست ث خواهیم داشت

$$v_{avg}=\sqrt{\frac{۸RT}{\pi M}} \quad \text{(تندی میانگین)} \qquad (۱۵-۳۱)$$

همچنین مقدار میانگین مربع تندیها $(v^۲)_{avg}$ را هم می‌توان با انتگرال زیر پیدا کرد

$$(v^۲)_{avg}=\int_۰^\infty v^۲\,P(v)\,dv \qquad (۱۵-۳۲)$$

با قرار دادن $P(v)$ از معادلهٔ ۱۵-۲۷ و استفاده از ۱۶ شکل انتگرال پیوست ث داریم

$$(v^۲)_{avg}=\frac{۳RT}{M} \qquad (۱۵-۳۳)$$

جذر $(v^۲)_{avg}$، عبارت است از تندی جذر میانگین مربعی $v_{rms}$. پس

1. James Clerk Maxwell

$$v_{rms}=\sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \text{(تندی rms)} \quad (۱۵-۳۴)$$

که با معادلهٔ ۱۵-۲۲ سازگار است.

**محتملترین تندی** $v_P$ آن تندی است که $P(v)$ به ازای آن بیشینه است (به شکل ۱۵-۸ الف نگاه کنید). برای محاسبهٔ $v_p$ داریم $dp/dv=0$ (شیب منحنی در شکل ۱۵-۸ الف در بیشینهٔ منحنی صفر است) و سپس معادلهٔ حاصل را برحسب $v$ حل می‌کنیم. با انجام این کار خواهیم داشت

$$v_P=\sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad \text{(محتملترین تندی)} \quad (۱۵-۳۵)$$

یک مولکول بیشتر مایل است تندی $v_P$ را داشته باشد تا تندیهای دیگر، ولی بعضی از مولکولها ممکن است تندیهایی چند برابر تندی $v_P$ داشته باشند. این مولکولها مانند شکل ۱۵-۸ الف در *دنبالهٔ تندی زیاد* منحنی توزیع قرار دارند. قدر این مولکولهای کم ولی با تندی زیاد را باید بدانیم چون اینها موجب بارش باران و تابش نور خورشید می‌شوند (بدون اینها وجود نخواهیم داشت). اکنون دلیل این موضوع را شرح می‌دهیم.

**باران:** توزیع تندی مولکولهای آب مثلاً، در یک استخر در دمای تابستان را می‌توان با یک منحنی شبیه به منحنی شکل ۱۵-۸ الف نمایش داد. بیشتر مولکولهای آب دارای انرژی جنبشی کافی نیستند تا از آن فرار کنند. ولی مقدار اندکی از مولکولهای خیلی تند با تندیهای واقع در انتهای منحنی می‌توانند چنین کاری را بکنند، همین مولکولهای آب هستند که تبخیر می‌شوند، ابر ایجاد می‌کنند و احتمالاً باران به وجود می‌آورند.

هنگامی که مولکولهای تند آب سطح را ترک می‌کنند، با حمل انرژی به وسیلهٔ آنها، دمای آب باقیمانده با انتقال گرما از محیط اطراف محفوظ می‌ماند. مولکولهای تند دیگر که در برخوردهای مناسب سرعت پیدا می‌کنند - فوراً جای مولکولهای خارج شده را می‌گیرند و توزیع تندی مولکولها محفوظ می‌ماند.

**نور خورشید:** فرض کنید منحنی توزیع شکل ۱۵-۸ الف اکنون به پروتونهای موجود در هستهٔ خورشید مربوط باشد. انرژی خورشیدی به وسیلهٔ فرایند گداخت هسته‌ای با ادغام دو پروتون شروع می‌شود. ولی پروتونها به دلیل بارهای الکتریکی خود از یکدیگر رانده می‌شوند و پروتونهای با تندی متوسط انرژی جنبشی کافی ندارند تا بتوانند بر رانش چیره شوند و برای ادغام به هم نزدیک شوند. با این وجود پروتونهای خیلی تند با تندیهای دنبالهٔ منحنی توزیع چنین کاری را می‌کنند و در نتیجه خورشید می‌تواند به درخشد.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵-۵

ظرفی که با گاز اکسیژن پر شده است در دمای اتاق (۳۰۰K) قرار دارد. چه کسری از مولکولها دارای تندیهایی در گسترهٔ ۵۵۹ تا ۶۰۱ متر بر ثانیه هستند. جرم مولی $M$ اکسیژن ۰/۰۳۲۰kg/mol است. به صورت زیرند:

**نکته‌های کلیدی**

۱. تندی مولکولها در گسترهٔ زیادی از مقدارها توزیع شده‌اند که با توزیع $P(v)$ معادلهٔ ۱۵-۲۷ داده می‌شود.

۲. کسری از مولکولها که تندی آنها در بازهٔ دیفرانسیلی $dv$ قرار دارد عبارت است از $P(v)dv$.

۳. در یک بازهٔ وسیعتر، این کسر با انتگرالگیری $P(v)$ روی این بازه به دست می‌آید.

۴. اما، در اینجا بازهٔ $\Delta v=2\,m/s$ در مقایسه با تندی مرکزی $v=600\,m/s$ کوچک است.

***محاسبه‌ها:*** چون $\Delta v$ کوچک است، می‌توانیم با استفاده از کسر تقریبی زیر از انتگرالگیری اجتناب کنیم

$$f=P(v)\Delta v=4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2}v^2e^{-Mv^2/2RT}\Delta v$$

منحنی تابع $P(v)$ در شکل ۱۵-۸ الف رسم شده است. مساحت کل بین منحنی و محور افقی کسر کل مولکولها را نشان می‌دهد (واحد). مساحت نوار نازک کسر $f$ را نشان می‌دهد که به دنبال آن هستیم.

برای محاسبهٔ $f$ به صورت جدا جدا می‌توان نوشت

$$f=(4\pi)(A)(v^2)(e^B)(\Delta v) \quad (۱۵-۳۶)$$

که در آن

$$A=\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2}=\left(\frac{0/0320\,kg/mol}{(2\pi)(8/31\,J/mol\cdot K)(300\,K)}\right)^{3/2}$$
$$=2/92\times10^{-9}\,s^3/m^3$$

و

$$B=-\frac{Mv^2}{2RT}=\frac{(0/0320\,kg/mol)(600\,m/s)^2}{(2)(8/31\,J/mol\cdot K)(300\,K)}=-2/31$$

با قراردادن $A$ و $B$ در معادلهٔ ۱۵-۳۶ خواهیم داشت

$$f=(4\pi)(A)(v^2)(e^B)(\Delta v)$$
$$=(4\pi)(2/92\times10^{-9}\,s^3/m^3)(600\,m/s)^2(e^{-2/31})(2\,m/s)$$
$$=2/62\times10^{-3} \quad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین در دمای اتاق، تندی ۰/۲۶۲٪ مولکولهای اکسیژن در گستره باریک تندیهای میان ۵۵۹ و ۶۰۱ متر بر ثانیه قرار دارند. اگر نوار تیرهٔ شکل ۱۵-۸ الف با مقیاس این مسئله رسم شود، در واقع یک نوار بسیار باریکی خواهد بود.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵-۶

جرم مولی $M$ اکسیژن ۰/۰۳۲۰kg/mol است.

(الف) تندی میانگین $v_{avg}$ مولکولهای گاز اکسیژن در دمای $T=300\,K$ چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** برای یافتن تندی میانگین باید وزن تندی $v$ را با تابع توزیع $P(v)$ معادلهٔ ۱۵–۲۷ معین کنیم و سپس از عبارت به دست آمده در گسترهٔ تندیهای ممکن (۰ تا ∞) انتگرال بگیریم.

***محاسبه:*** به معادلهٔ ۱۵–۳۱ می‌رسیم که از آن خواهیم داشت

$$v_{avg}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$=\sqrt{\frac{8(8.31\,J/mol\cdot K)(300\,K)}{\pi(0.0320\,kg/mol)}}=445\,m/s \quad \text{(پاسخ)}$$

این نتیجه در شکل ۱۵–۸ الف رسم شده است.

(ب) تندی جذر میانگین مربعی $v_{rms}$، در دمای $300\,K$ چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** برای پیدا کردن $v_{rms}$، ابتدا باید $(v^2)_{avg}$ را با تعیین وزن $v^2$ با تابع توزیع $P(v)$ معادلهٔ ۱۵–۲۷ پیدا کنیم و سپس از رابطهٔ حاصل در گسترهٔ تندیهای ممکن انتگرال بگیریم. سپس جذر مقدار حاصل را محاسبه کنیم.

***محاسبه:*** به معادلهٔ ۱۵–۳۴ می‌رسیم، که از آن خواهیم داشت

$$v_{rms}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$=\sqrt{\frac{3(8.31\,J/mol\cdot K)(300\,K)}{0.0320\,kg/mol}}=483\,m/s \quad \text{(پاسخ)}$$

این نتیجه که در شکل ۱۵–۸ الف رسم شده است از $v_{avg}$ بزرگتر است زیرا مقدارهای تندی بیشتر در هنگام انتگرالگیری از مقدارهای $v^2$ نسبت به انتگرالگیری از مقدارهای $v$ بیشتر تأثیر می‌گذارد.

(پ) محتملترین تندی $v_P$، در دمای $300\,k$ چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** تندی $v_P$ به بیشینهٔ تابع توزیع $P(v)$ مربوط است، که با قرار دادن $dp/dv=0$ و حل آن برحسب $v$ به دست می‌آید. این به معادلهٔ ۱۵–۳۵ می‌انجامد، و خواهیم داشت

$$v_p=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

$$=\sqrt{\frac{2(8.31\,J/mol\cdot K)(300\,K)}{0.0320\,kg/mol}}=395\,m/s \quad \text{(پاسخ)}$$

این نتیجه در شکل ۱۵–۸ الف رسم شده است.

# ۱۵–۸ گرماهای ویژهٔ مولی گاز آرمانی

در این بخش می‌خواهیم با ملاحظات مولکولی، رابطه‌ای را برای انرژی درونی $E_{int}$ گاز آرمانی به دست آوریم. به عبارت دیگر، به دنبال رابطه‌ای برای انرژی مربوط به حرکتهای کاتوره‌ای اتمها یا مولکولها در گاز هستیم تا سپس این رابطه را برای به دست‌آوردن گرماهای ویژهٔ مولی گاز آرمانی به کار ببریم.

## *انرژی درونی $E_{int}$*

نخست فرض می‌کنیم گاز آرمانی یک *گاز تک اتمی* (گازی که به جای مولکول اتمهای منفرد دارد) مانند هلیوم، نئون یا اکسیژن است. همچنین فرض می‌کنیم که انرژی درونی $E_{int}$ گاز آرمانی مورد نظر برابر با مجموع انرژیهای جنبشی انتقالی اتمهای آن است. (همان‌طور که با نظریهٔ کوانتومی شرح داده می‌شود، اتمهای منفرد انرژی جنبشی دورانی ندارند.)

انرژی جنبشی انتقالی میانگین یک اتم تنها فقط به دمای گاز بستگی دارد و با معادلهٔ ۱۵–۲۴ به صورت $K_{avg}=\frac{3}{2}kT$ داده می‌شود. نمونه‌ای از گاز تشکیل شده از $n$ مول شامل $nN_A$ اتم است. در این صورت، انرژی درونی $E_{int}$ این نمونه عبارت است از

$$E_{int}=(nN_A)K_{avg}=(nN_A)\left(\frac{3}{2}kT\right) \qquad (۱۵-۳۷)$$

با استفاده از معادلهٔ ۱۵–۷ $(k=R/N_A)$، این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_{int}=\frac{3}{2}nRT \qquad \text{(گاز آرمانی تک اتمی)} \qquad (۱۵-۳۸)$$

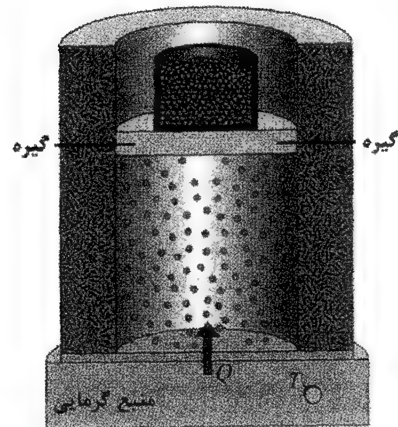
بنابراین

☜ انرژی درونی $E_{int}$ یک گاز آرمانی *فقط* تابعی از دمای گاز است؛ و به هیچ متغیر دیگری بستگی ندارد.

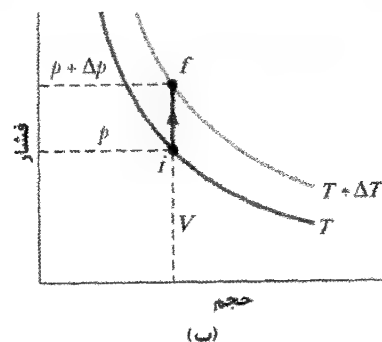
با داشتن معادلهٔ ۱۵–۳۸، اکنون می‌توانیم رابطه‌ای برای گرمای ویژهٔ مولی یک گاز آرمانی به دست آوردیم. در واقع، دو رابطه به دست خواهیم آورد. یکی برای موردی که در آن در هنگام مبادلهٔ انرژی به صورت گرما حجم گاز ثابت می‌ماند و رابطهٔ دیگر برای موردی است که در آن فشار گاز به هنگام مبادلهٔ انرژی به صورت گرما ثابت می‌ماند. نمادهای این دو گرمای ویژهٔ مولی به ترتیب $C_V$ و $C_P$ هستند. (بنا به قرارداد، حرف بزرگ $C$ برای هر دو به کار می‌رود، اگرچه $C_V$ و $C_P$ انواع گرمای ویژه را نشان می‌دهند نه ظرفیتهای گرمایی را.)

## *گرمای ویژهٔ مولی در حجم ثابت*

شکل ۱۵–۹ الف $n$ مول از یک گاز آرمانی را در فشار $p$ و دمای $T$ نشان می‌دهد که در استوانه‌ای به حجم ثابت $V$ محبوس است. این *حالت اولیهٔ* $i$ گاز روی نمودار $p$-$V$ در شکل ۱۵–۹ ب نشان داده شده است. اکنون فرض کنید که مقدار اندکی انرژی به صورت گرمای $Q$ با افزایش آهستهٔ دمای منبع گرمایی که استوانه روی آن قرار دارد به گاز افزوده شود. در نتیجه دمای گاز به مقدار کم تا $T+\Delta T$ و فشار آن به مقدار $p+\Delta p$ افزایش می‌یابد و گاز به *حالت نهایی* $f$ می‌رسد. در چنین




(الف)




(ب)

**شکل ۱۵-۹** (الف) دمای یک گاز آرمانی در فرایند حجم ثابت از $T$ به $T+\Delta T$ افزایش می‌یابد. با آنکه گاز گرما داده می‌شود، کار انجام نمی‌گیرد. (ب) نمایش این فرایند در نمودار $p$-$V$.

آزمایشهایی در می‌یابیم که رابطهٔ گرمای $Q$ با رابطهٔ زیر به تغییر دمای $\Delta T$ مربوط است

$$Q = nC_V\,\Delta T \qquad \text{(حجم ثابت)} \qquad (۱۵\text{-}۳۹)$$

که مقدار $C_V$ ثابتی است که **گرمای ویژهٔ مولی در حجم ثابت** نامیده می‌شود. با قرار دادن این مقدار $Q$ در قانون اول ترمودینامیک که به صورت معادلهٔ ۱۴-۲۶ بیان شده است $(\Delta E_{\text{int}} = Q - W)$ داریم

$$\Delta E_{\text{int}} = nC_V\,\Delta T - W \qquad (۱۵\text{-}۴۰)$$

با ثابت نگهداشتن حجم، گاز نمی‌تواند منبسط شود و بنابراین، هیچ کاری انجام نمی‌دهد. در نتیجه $W=0$ و از معادلهٔ ۱۵-۴۰ خواهیم داشت

$$C_V = \frac{\Delta E_{\text{int}}}{n\Delta T} \qquad (۱۵\text{-}۴۱)$$

از معادلهٔ ۱۵-۳۸ می‌دانیم که $E_{\text{int}} = \frac{3}{2}nRT$، بنابراین، تغییر در انرژی درونی به صورت زیر است

$$\Delta E_{\text{int}} = \frac{3}{2}nR\Delta T \qquad (۱۵\text{-}۴۲)$$

با قرار دادن این نتیجه در معادلهٔ ۱۵-۴۱، خواهیم داشت

$$C_V = \frac{3}{2}R = 12/5\,\text{J/mol}\cdot\text{K} \qquad \text{(گاز تک اتمی)} \qquad (۱۵\text{-}۴۳)$$

همان‌طور که جدول ۱۵-۲ نشان می‌دهد، این پیش‌بینی نظریهٔ جنبشی (برای گازهای آرمانی)، با نتیجه‌های تجربی مربوط به گازهای تک اتمی حقیقی، یعنی حالتی که فرض کرده بودیم، به خوبی سازگار است. مقدارهای تجربی (پیش‌بینی شدهٔ) $C_V$ برای گازهای *دو اتمی* (مولکولهایی با دو اتم) و گازهای *چند اتمی* (مولکولهایی با بیش از دو اتم) به دلایلی که در بخش ۱۵-۹ ذکر خواهد شد، بیشتر از مقدارهای مربوط به گازهای تک اتمی است.

**جدول ۱۵-۲**

گرماهای ویژهٔ مولی در حجم ثابت

| مولکول | مثال | | $C_V$(J/mol.K) |
|---|---|---|---|
| تک اتمی | آرمانی | | $\frac{3}{2}R = 12/5$ |
| | حقیقی | He | ۱۲/۵ |
| | حقیقی | Ar | ۱۲/۶ |
| دو اتمی | آرمانی | | $\frac{5}{2}R = 20/8$ |
| | حقیقی | $N_2$ | ۲۰/۷ |
| | حقیقی | $O_2$ | ۲۰/۸ |
| چند اتمی | آرمانی | | $3R = 24/9$ |
| | حقیقی | $NH_4$ | ۲۹/۰ |
| | حقیقی | $CO_2$ | ۲۹/۷ |

اکنون می‌توان معادلهٔ ۱۵-۳۸ را برای انرژی درونی گاز آرمانی با قراردادن $C_V$ به جای $\frac{3}{2}R$ تعمیم داد، داریم

$$E_{\text{int}} = nC_VT \qquad \text{(هر گاز آرمانی)} \qquad (۱۵\text{-}۴۴)$$

این معادله نه تنها در مورد گاز تک اتمی آرمانی، بلکه مشروط به اینکه اندازهٔ مناسبی برای $C_V$ به کار برده شود، در مورد گازهای دو اتمی و چند اتمی نیز به کار می‌رود. درست مانند معادلهٔ ۱۵-۳۸، می‌بینیم که انرژی درونی گاز به دمای آن بستگی دارد ولی به فشار یا چگالی بستگی ندارد.

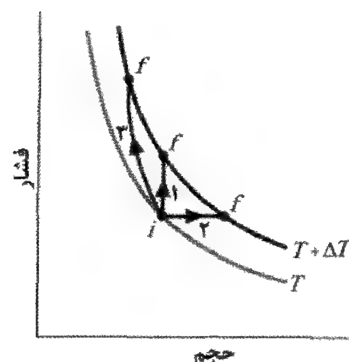
هرگاه دمای یک گاز آرمانی که در ظرفی محبوس است به اندازهٔ $\Delta T$ تغییر کند، آنگاه از معادله‌های ۱۵-۴۱ یا ۱۵-۴۴ تغییر در انرژی درونی آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta E_{\text{int}} = nC_V\Delta T \qquad \text{(گاز آرمانی، هر فرایند)} \qquad (۱۵\text{-}۴۵)$$

از این معادله پیداست که

> تغییر در انرژی درونی $E_{\text{int}}$ یک گاز آرمانی محبوس فقط به تغییر دمای گاز بستگی دارد؛ و به نوع فرایندی که تغییر دما را ایجاد می‌کند بستگی ندارد.

به عنوان مثال، سه مسیر میان دو منحنی تکدما را در نمودار $p$-$V$ شکل ۱۵-۱۰ در نظر می‌گیریم. مسیر ۱ فرایند حجم- ثابت و مسیر ۲ یک فرایند فشار - ثابت را نشان می‌دهد (که می‌خواهیم آن را بررسی کنیم). مسیر ۳ فرایندی را نشان می‌دهد که در آن هیچ گرمایی با محیط اطراف دستگاه مبادله نمی‌شود (دربارهٔ این مطلب در بخش ۱۵-۱۱ بحث می‌کنیم). اگر چه اندازه‌های گرمای $Q$ و کار $W$ مربوط به این سه مسیر و همین طور $p_f$ و $V_f$ متفاوت‌اند، ولی اندازه‌های $\Delta E_{\text{int}}$ مربوط به این سه مسیر که همگی با معادلهٔ ۱۵-۴۵ داده می‌شوند، یکسان هستند، چون برای همهٔ آنها تغییر دمای $\Delta T$ یکسان است. بنابراین، بدون توجه به اینکه در بین منحنیهای تکدمای $T$ و $T+\Delta T$ کدام مسیر پیموده شود، همیشه می‌توان از مسیر ۱ و معادلهٔ ۱۵-۴۵ برای محاسبهٔ آسان $\Delta E_{\text{int}}$ استفاده کرد.



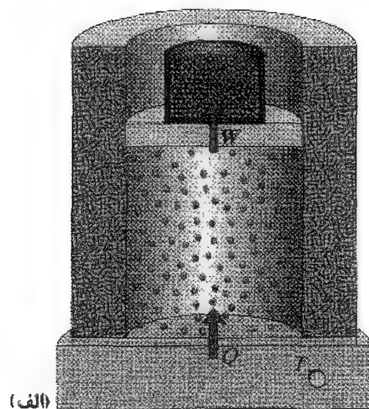

**شکل ۱۵-۱۰** سه مسیر مربوط به سه فرآیند مختلف که یک گاز آرمانی از حالت اولیهٔ $i$ در دمای $T$ تا حالت نهایی $f$ با دمای $T+\Delta T$ طی می‌کند. تغییر $\Delta E_{\text{int}}$ در انرژی درونی گاز برای این سه فرایند و هر فرایند دیگری که همین تغییر دمایی را ایجاد کند، یکسان است.

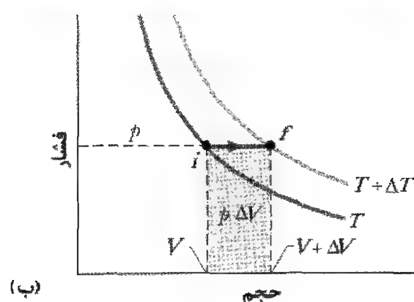
## گرمای ویژهٔ مولی در فشار ثابت

اکنون، فرض می‌کنیم که دمای گاز آرمانی مانند قبل به اندازهٔ $\Delta T$ افزایش یابد، ولی انرژی لازم (گرمای $Q$) با فشار ثابت به گاز داده می‌شود. وسیلهٔ لازم برای انجام دادن این آزمایش در شکل ۱۵-۱۱ الف نشان داده شده است؛ نمودار $p$-$V$ برای این فرآیند در شکل ۱۵-۱۱ ب رسم شده است. از چنین آزمایشهایی می‌توان دریافت که رابطهٔ گرمای $Q$ با تغییر دمای $\Delta T$ به صورت زیر است

$$Q=nC_p\Delta T \qquad \text{(فشار ثابت)} \qquad (۱۵\text{-}۴۶)$$

که در آن $C_p$ ثابتی است که **گرمای ویژهٔ مولی در فشار ثابت** نامیده می‌شود. مقدار $C_p$ از مقدار گرمای ویژهٔ مولی در حجم $C_V$ بیشتر است، چون انرژی اکنون نه تنها برای افزایش دمای گاز بلکه برای انجام دادن کار توسط گاز، یعنی برای بالابردن پیستون همراه بار در شکل ۱۵-۱۱ الف، نیز باید تأمین شود.




**شکل ۱۵-۱۱** (الف) دمای یک گاز آرمانی در فرایند فشار - ثابت از $T$ تا $T+\Delta T$ افزایش می‌یابد. برای بالا بردن پیستون همراه بار گرما اضافه می‌شود و کار انجام می‌گیرد. (ب) نمایش این فرایند در نمودار $p$-$V$. کار $p\Delta V$ با مساحت سایه‌دار داده می‌شود.

برای یافتن رابطهٔ گرماهای ویژهٔ مولی $C_p$ و $C_V$، از قانون اول ترمودینامیک (معادلهٔ ۱۵-۲۶) شروع می‌کنیم

$$\Delta E_{\text{int}}=Q-W \qquad (۱۵\text{-}۴۷)$$

سپس مقدار هر جمله را در معادلهٔ ۱۵-۴۷ قرار می‌دهیم در مورد $\Delta E_{\text{int}}$، از معادلهٔ ۱۵-۴۵ و در مورد $Q$، از معادلهٔ ۱۵-۴۶ استفاده می‌کنیم. برای قراردادن $W$ نخست توجه می‌کنیم که چون فشار ثابت می‌ماند، از معادلهٔ ۱۵-۱۶ داریم $W=p\,\Delta V$. بنابراین، با توجه به معادلهٔ گاز آرمانی $(pV=nRT)$، می‌توان نوشت

$$W=p\,\Delta V=nR\,\Delta T \qquad (۱۵\text{-}۴۸)$$

با قرار دادن مقدارها در معادلهٔ ۱۶-۴۷ و سپس تقسیم کردن دو طرف معادلهٔ حاصل بر $n\,\Delta T$، خواهیم داشت

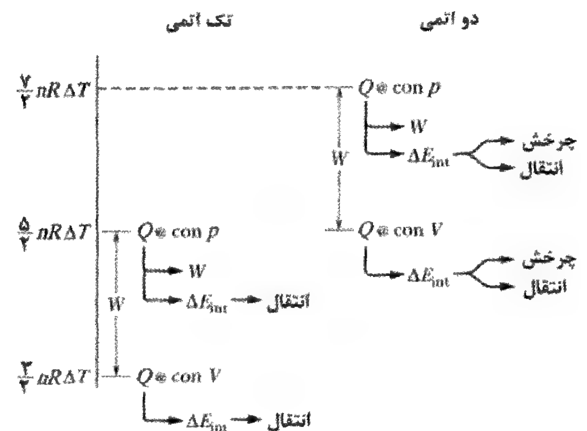
$$C_V=C_p-R$$

و در نتیجه

$$C_p=C_V+R \qquad (۱۵\text{-}۴۹)$$

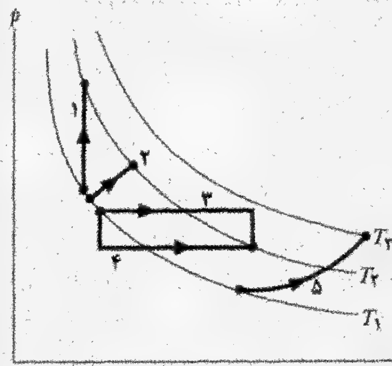
این پیش‌بینی نظریهٔ جنبشی نه تنها برای گازهای تک اتمی بلکه به طور کلی در مورد تمام گازهای با چگالی به نسبت کم که بتوان آنها را به عنوان گاز آرمانی در نظر گرفت، با نتیجه‌های تجربی به خوبی سازگار است.

سمت چپ شکل ۱۵-۱۲ مقدارهای نسبی $Q$ را برای یک گاز تک اتمی در یک فرایند حجم ثابت $(Q=\frac{۳}{۲}nR\Delta T)$ یا فرایند فشار ثابت $(Q=\frac{۵}{۲}nR\Delta T)$ نشان می‌دهد. توجه کنید که برای فرایند دومی، مقدار $Q$، به اندازهٔ $W$ کار انجام شده توسط گاز در انبساط، بیشتر است. همچنین توجه کنید که در فرایند حجم ثابت، انرژی اضافه شده به صورت $Q$ به طور کامل صرف تغییر انرژی درونی $\Delta E_{\text{int}}$ و در فرایند فشار ثابت انرژی اضافه شده به صورت $Q$ هم صرف $\Delta E_{\text{int}}$ و هم صرف کار $W$ می‌شود.




**شکل ۱۵-۱۲** مقدارهای نسبی $Q$ در یک گاز تک اتمی (دست چپ) و یک گاز دو اتمی در فرایند حجم ثابت (با علامت con $V$) و یک فرایند فشار ثابت (با علامت con $p$). تبدیل انرژی به کار $W$ و انرژی درونی $(\Delta E_{\text{int}})$ نشان داده شده است.

**✓ نکتهٔ وارسی ۴** شکل پنج مسیر را نشان می‌دهد که توسط یک گاز در نمودار $p$-$V$ طی شده است. مسیرها را به ترتیب بزرگی تغییر انرژی درونی گاز مرتب کنید.




**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵-۷ مهارت خود را تقویت کنید**

یک حباب شامل ۵/۰۰ مول گاز هلیوم را تا عمق معینی در آب فرو می‌بریم. دمای آب (و هلیوم) در فشار ثابت به اندازهٔ $\Delta T$ برابر با $۲۰/۰\text{C}^\circ$ افزایش می‌یابد و در نتیجه حباب منبسط می‌شود. هلیوم گازی تک اتمی و آرمانی است.

(الف) چقدر انرژی به صورت گرما در ضمن افزایش دما و انبساط به هلیوم داده می‌شود.

**نکتهٔ کلیدی** گرمای $Q$ با تغییر دمای $\Delta T$ از طریق گرمای ویژهٔ مولی گاز رابطه دارد. چون فشار $p$، در ضمن افزایش انرژی ثابت می‌ماند از گرمای ویژهٔ مولی در فشار ثابت $C_p$ و معادلهٔ ۱۵-۴۶ برای پیدا کردن استفاده می‌کنیم

$$Q=nC_p\Delta T \qquad (۱۵-۵۰)$$

برای محاسبهٔ $C_p$ از معادلهٔ ۱۵-۴۹ استفاده می‌کنیم که در مورد هر گاز آرمانی $C_p=C_V+R$ برقرار است. بنابراین، از معادلهٔ ۱۵-۴۳ می‌دانیم که در مورد هر گاز *تک اتمی* (مانند هلیوم) داریم $C_V=\frac{۳}{۲}R$. پس، از معادلهٔ (۱۵-۵۰) خواهیم داشت

$$Q=n(C_V+R)\Delta T=n\left(\frac{۳}{۲}R+R\right)\Delta T=n\left(\frac{۵}{۲}R\right)\Delta T$$

$$=(۵/۰۰\text{mol})(۲/۵)(۸/۳۱\,\text{J/mol}\cdot\text{K})(۲۰/۰\text{C}^\circ)$$

$$=۲۰۷۷/۵\text{J}\approx ۲۰۸۰\text{J} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) تغییر انرژی درونی $\Delta E_{\text{int}}$ هلیوم در ضمن افزایش دما چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** چون حباب منبسط می‌شود؛ در این فرایند حجم ثابت نیست. ولی هلیوم به هر حال (در حباب) محبوس است. بنابراین، تغییر $\Delta E_{\text{int}}$ همان است که در یک فرایند حجم ثابت با تغییر دمای $\Delta T$ *صورت می‌گیرد.*

***محاسبه:*** به آسانی می‌توان تغییر $\Delta E_{\text{int}}$ مربوط به فرایند حجم - ثابت را با معادلهٔ ۱۵-۴۵ پیدا کرد

$$\Delta E_{\text{int}}=nC_V\Delta T=n\left(\frac{۳}{۲}R\right)\Delta T$$

$$=(۵/۰۰\text{mol})(۱/۵)(۸/۳۱\,\text{J/mol}\cdot\text{K})(۲۰/۰\text{C}^\circ)$$

$$=۱۲۴/۵\,\text{J}\approx ۱۲۵۰\,\text{J} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) در هنگام انبساط هلیوم چقدر کار $W$، در مقابله با فشار آب اطراف و در ضمن افزایش دما انجام گرفته است؟

**نکته‌های کلیدی** کار انجام شده توسط هر *گاز* در ضمن انبساط در مقابل فشار محیط آن با معادلهٔ ۱۵-۱۱ داده می‌شود، که نشان می‌دهد باید از $pdV$ انتگرال گرفت. وقتی فشار (مانند اینجا) ثابت است، می‌توان رابطه را به صورت سادهٔ $p\Delta V$ نوشت. وقتی گاز آرمانی باشد (مانند اینجا) با استفاده از قانون گاز آرمانی (معادلهٔ ۱۵-۵) می‌توان نوشت $p\Delta V=nR\Delta T$.

***محاسبه:*** در پایان خواهیم داشت

$$W=nR\Delta T$$

$$=(۵/۰۰\text{mol})(۸/۳۱\text{J/mol}\cdot\text{k})(۲۰/۰\text{C}^\circ)$$

$$=۸۳۱\ \text{J} \qquad \text{(پاسخ)}$$

***راه دیگر:*** چون می‌خواهیم $Q$ و $\Delta E_{int}$ را پیدا کنیم، طور دیگری نیز می‌توان این مسئله را حل کرد: **نکتهٔ کلیدی** اکنون این است که می‌توان تغییرات انرژی گاز را با استفاده از قانون اول ترمودینامیک پیدا کرد و نوشت

$$W = Q - \Delta E_{int} = ۲۰۷۷/۵J - ۱۲۴۶/۵J$$
$$= ۸۳۱J$$

***انتقالها:*** انرژی را دنبال می‌کنیم. از ۲۰۷۷/۵J انرژی منتقل شده به هلیوم به صورت گرمای $Q$، ۸۳۱J به کار لازم $W$ جهت انبساط و ۱۲۴۶/۵J به انرژی درونی $E_{int}$ تبدیل می‌شود، که در مورد گاز تک اتمی تمام آن به صورت انرژی جنبشی اتمها در حرکت انتقالی در می‌آید. این چند نتیجه در طرف چپ شکل ۱۵-۱۲ داده شده است.

## ۱۵-۹ درجه‌های آزادی و گرماهای ویژهٔ مولی

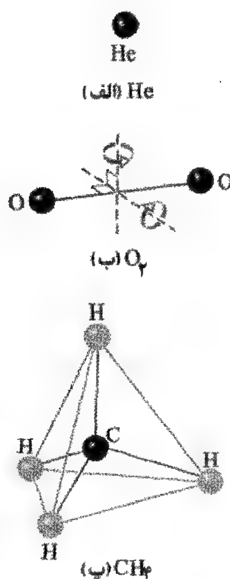
همان‌طور که جدول ۱۵-۲ نشان می‌دهد، پیش‌بینی $C_V = \frac{۳}{۲}R$ برای گازهای تک اتمی با آزمایش سازگار است ولی در مورد گازهای دو اتمی و چند اتمی این رابطه برقرار نیست. حال می‌کوشیم با در نظر گرفتن امکان اینکه مولکولهای با بیش از یک اتم می‌توانند انرژی درونی را در شکلهای دیگری غیر از انرژی جنبشی انتقالی ذخیره کنند، این اختلاف را توضیح دهیم.

شکل ۱۵-۱۳ مدلهای متداول گازهای هلیوم (یک مولکول *تک اتمی*، با یک اتم تنها)، اکسیژن (یک مولکول *دو اتمی*، با دو اتم) و متان (یک مولکول *چند اتمی*) را نشان می‌دهد. با چنین مدلهایی می‌توان فرض کرد که هر سه نوع مولکول می‌توانند حرکتهای انتقالی (یعنی حرکت به چپ، راست، بالا و پایین) و حرکتهای چرخشی (چرخش حول محوری مانند یک فرفره) داشته باشند. افزون بر این؛ می‌توان فرض کرد که مولکولهای دو اتمی و چند اتمی می‌توانند حرکتهای نوسانی هم انجام دهند یعنی اتمها مثل وقتی که به دوانتهای فنری وصل شده‌اند، اندکی به هم نزدیک و از هم دور شوند.

راههای مختلفی را برای ذخیره کردن انرژی در یک گاز می‌توان در نظر گرفت. جیمز کلارک ماکسول **قضیهٔ همپاری انرژی** را به صورت زیر ارایه کرد

> هر نوع مولکول تعداد معین $f$ *درجهٔ آزادی* دارد که راههای مستقلی هستند که مولکول می‌تواند انرژی ذخیره کند. به هریک از این درجه‌های آزادی - به طور متوسط - مقدار انرژی $\frac{۱}{۲}kT$ بر مولکول (یا $\frac{۱}{۲}RT$ بر مول) وابسته است.

حال این قضیه را برای حرکتهای انتقالی و درونی مولکولهای شکل ۱۵-۱۳ به کار می‌بریم. (در بخش بعدی دربارهٔ حرکت نوسانی بحث می‌کنیم.) در مورد حرکت انتقالی، دستگاه محورهای مختصات $xyz$ در هر گاز را در نظر می‌گیریم. در حالت کلی، مولکولها در راستای هر سه محور مؤلفه‌های سرعت دارند. بنابراین، مولکولهای هر نوع گاز سه درجه آزادی انتقالی (سه راه برای حرکت به صورت انتقالی) دارند و به طور متوسط انرژی وابسته به هر مولکول $۳(\frac{۱}{۲}kT)$ است.




**شکل ۱۵-۱۳** مدلهایی از مولکولها به صورتی که در نظریهٔ جنبشی به کار می‌روند: (الف) هلیوم، یک مولکول تک اتمی نوعی؛ (ب) اکسیژن، یک مولکول دو اتمی نوعی؛ و (پ) متان، یک مولکول چند اتمی نوعی؛ کره‌ها اتمها و خطهای بین آنها پیوندها را نشان می‌دهند. دو محور چرخش برای مولکول اکسیژن نشان داده شده است.

در مورد حرکت چرخشی، فرض کنید مبداء دستگاه مختصات $xyz$ در مرکز مولکول در شکل ۱۵-۱۳ قرار دارد. در یک گاز، هر مولکول باید بتواند با یک مؤلفه سرعت زاویه‌ای در راستای هر یک از سه محور چرخش کند، به طوری که هرگاز سه درجهٔ آزادی چرخشی دارد و به طور متوسط، دارای انرژی اضافی $۳(\frac{۱}{۲}kT)$ بر مولکول است. *ولی* آزمایش نشان می‌دهد این که موضوع فقط برای مولکولهای چند اتمی برقرار است. مطابق با نظریهٔ کوانتومی، فیزیک حرکتها و انرژیهای مجاز مولکولها و اتمها را مورد بحث قرار می‌دهد، یک مولکول گاز تک اتمی دوران نمی‌کند و بنابراین، انرژی چرخشی ندارد (یک اتم تنها نمی‌تواند مانند یک فرفره بچرخد). یک مولکول دو اتمی فقط می‌تواند حول محورهای عمود بر خطهای واصل اتمها مثل فرفره چرخش کند (محور نشان داده شده در شکل ۱۵-۱۳ ب) ولی نمی‌تواند حول خود خط واصل بچرخد. بنابراین، یک مولکول دو اتمی فقط می‌تواند دو درجه آزادی دورانی داشته باشد و در نتیجه دارای انرژی چرخشی $۲(\frac{۱}{۲}kT)$ بر مولکول است.

برای تعمیم تحلیل گرماهای ویژهٔ مولی ($C_p$ و $C_V$ در بخش ۱۵-۸) به گازهای دو اتمی و چند اتمی آرمانی، لازم

است یافته‌های آن تحلیل را به تفصیل دنبال کنیم. نخست $E_{int}=(f/۲)nRT$ را در معادلهٔ ۱۵–۳۸ ($E_{int}=\frac{۳}{۲}nRT$) قرار می‌دهیم، که $f$ تعداد درجه‌های آزادی درج شده در جدول ۱۵–۳ است. این امر به این پیش‌بینی می‌انجامد

$$C_V=\left(\frac{f}{۲}\right)R=۴/۱۶f\ \mathrm{J/mol\cdot k} \qquad (۱۵\text{–}۵۱)$$

که با معادلهٔ ۱۵–۴۳ در مورد گازهای تک اتمی ($f=۳$)، چنانچه باید، سازگار است. همان‌طور که جدول ۱۵–۳ نشان می‌دهد، این پیش‌بینی همچنین با نتیجهٔ تجربی گازهای دواتمی ($f=۵$) نیز سازگار است، ولی برای گازهای چند اتمی ($f=۶$ در مورد مولکولها قابل مقایسه با $CH_4$) سازگاری خیلی کمتری دارد.

**جدول ۱۵–۳**

درجه‌های آزادی مولکولهای مختلف

| مولکول | نمونه | درجه‌های آزادی: انتقالی | چرخشی | کل ($f$) | ظرفیتهای گرمایی مولی پیش‌بینی شده: $C_V$ (معادلهٔ ۱۵–۵۱) | $C_p=C_V+R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| تک اتمی | He | ۳ | ۰ | ۳ | $\frac{۳}{۲}R$ | $\frac{۵}{۲}R$ |
| دو اتمی | $O_2$ | ۳ | ۲ | ۵ | $\frac{۵}{۲}R$ | $\frac{۷}{۲}R$ |
| چند اتمی | $CH_4$ | ۳ | ۳ | ۶ | $۳R$ | $۴R$ |

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵–۸ مهارت خود را تقویت کنید

به یک گاز دو اتمی $۱۰۰۰\ \mathrm{J}$ انرژی انتقال می‌دهیم تا در فشار ثابت منبسط شود. مولکولهای گاز چرخش می‌کنند ولی نوسان ندارند. چه مقدار از $۱۰۰۰\ \mathrm{J}$ صرف افزایش انرژی درونی گاز می‌شود؟ از آن مقدار چقدر صرف $\Delta K_{tran}$ (انرژی جنبشی حرکت انتقالی مولکولها) و چقدر صرف $\Delta K_{rot}$ (انرژی جنبشی حرکت چرخشی آنها) می‌شود؟

**نکته‌های کلیدی**

۱. انتقال انرژی به صورت گرمای $Q$ به گاز در فشار ثابت از طریق معادلهٔ ۱۵–۴۶ ($Q=nC_p\Delta T$) به افزایش دمای $\Delta T$ مربوط است.

۲. چون گاز دو اتمی است و مولکولها در حالت چرخش هستند ولی نوسان ندارند، گرمای ویژهٔ مولی از شکل ۱۵–۱۲ و جدول ۱۵–۳ عبارت است از $C_p=\frac{۷}{۲}R$.

۳. افزایش $\Delta E_{int}$ در انرژی درونی مانند حالتی است که با همان اختلاف دمای $\Delta T$ در فرایند با حجم ثابت اتفاق می‌افتد. بنابراین، از معادلهٔ ۱۵–۴۵ داریم $\Delta E_{int}=nC_V\Delta T$. از شکل ۱۵–۱۲ و جدول ۱۵–۳ می‌توان دید که $C_V=\frac{۵}{۲}R$.

۴. در مورد $n$ و $\Delta T$ یکسان، $\Delta E_{int}$ در مورد گاز دو اتمی بزرگتر از گاز تک اتمی است، چون انرژی اضافی برای چرخش لازم است.

***افزایش در $E_{int}$:*** ابتدا تغییر دمای $\Delta T$ ناشی از انتقال انرژی به صورت گرما را در نظر می‌گیریم. در معادلهٔ ۱۵–۴۶، $\frac{۷}{۲}R$ را به جای $C_p$ قرار می‌دهیم، داریم

$$\Delta T=\frac{Q}{\frac{۷}{۲}nR} \qquad (۱۵\text{–}۵۲)$$

سپس از معادلهٔ ۱۵–۴۵، $\Delta E_{int}$ را با قرار دادن گرمای ویژهٔ مولی $C_V(=\frac{۵}{۲}R)$ در فرایند حجم ثابت و با استفاده از $\Delta T$ یکسان پیدا می‌کنیم. چون با گاز دو اتمی سروکار داریم، این تغییر را $\Delta E_{int,dia}$ می‌نامیم. از معادلهٔ ۱۵–۴۵ داریم

$$\Delta E_{int,dia}=nC_V\Delta T=n\frac{۵}{۲}R\left(\frac{Q}{\frac{۷}{۲}nR}\right)=\frac{۵}{۷}Q$$

$$=۰/۷۱۴۲۸Q=۷۱۴/۳\mathrm{J} \qquad \text{(پاسخ)}$$

به عبارتی، تقریباً ۷۱٪ انرژی به انرژی درونی گاز انتقال می‌یابد. بقیه به کار لازم برای افزایش حجم گاز تبدیل می‌شود.

***افزایش در $K$:*** اگر دمای یک گاز *تک اتمی* را (با همان مقدار $n$) به اندازهٔ مقدار داده شده در معادلهٔ ۱۵–۵۲ افزایش دهیم، انرژی درونی به مقدار کم $\Delta E_{int,mon}$ تغییر می‌کند، چون حرکت چرخشی ندارد. برای محاسبهٔ این مقدار از معادلهٔ ۱۵–۴۵ استفاده می‌کنیم ولی اکنون مقدار $C_V$ برای گاز تک اتمی را قرار می‌دهیم- یعنی $C_V=\frac{۳}{۲}R$. پس

$$\Delta E_{int,mon}=n\frac{۳}{۲}R\Delta T$$

با قرار دادن $\Delta T$ از معادلهٔ ۱۵–۵۲ به معادلهٔ زیر می‌رسیم

$$\Delta E_{int,mon}=n\frac{۳}{۲}R\left(\frac{Q}{n\frac{۷}{۲}R}\right)=\frac{۳}{۷}Q$$

$$=۰/۴۲۸۵۷Q=۴۲۸/۶\mathrm{J}$$

در مورد گاز تک اتمی، تمام این انرژی به انرژی جنبشی حرکت انتقالی اتمها تبدیل می‌شود. نکتهٔ مهم در اینجا این است که برای یک گاز دو اتمی با مقدار $n$ و $\Delta T$ یکسان، همان مقدار انرژی به انرژی جنبشی حرکت انتقالی مولکولها تبدیل می‌شود. بقیهٔ انرژی $\Delta E_{int,dia}$ (یعنی، $۲۸۵/۷\ \mathrm{J}$ اضافی) به حرکت چرخشی مولکولها تبدیل می‌شود. بنابراین، در مورد گاز دو اتمی داریم

$$\Delta K_{trans}=۴۲۸/۶\mathrm{J} \quad \text{و} \quad \Delta K_{rot}=۲۸۵/۷\mathrm{J} \qquad \text{(پاسخ)}$$

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵–۹

اتاقی به حجم $V$ در دمای اولیهٔ کم $T_1$ محتوی هواست (که به صورت یک گاز آرمانی دو اتمی در نظر گرفته می‌شود). پس از روشن کردن بخاری هیزمی دمای اتاق به $T_2$ افزایش می‌یابد. تغییر انرژی درونی هوای اتاق، $\Delta E_{int}$، چقدر است؟

**نکته‌های کلیدی** وقتی دمای هوا افزایش می‌یابد، فشار هوا تغییر نمی‌کند و برابر با فشار هوای بیرون اتاق است. دلیل آن این است که چون اتاق درزبندی نشده است، هوا محبوس نیست. وقتی دما زیاد شود، مولکولهای هوا از منفذهای مختلف خارج می‌شوند و بنابراین، تعداد $n$ مول هوا در اتاق کم می‌شود. پس، نمی‌توان از معادلهٔ ۱۵-۴۵ $(\Delta E_{\text{int}} = nC_V T)$ برای پیدا کردن $\Delta E_{\text{int}}$ استفاده کرد، چون مقدار ثابت $n$ در دست نیست. ولی انرژی درونی $E_{\text{int}}$ را در هر لحظه *می‌توان* به $n$ و دمای $T$ از طریق معادلهٔ ۱۵-۴۴ $(E_{\text{int}} = nC_V T)$ ارتباط داد.

***محاسبه‌ها:*** از معادلهٔ ۱۵-۴۴ می‌توان نوشت

$$\Delta E_{\text{int}} = \Delta(nC_V T) = C_V\, \Delta(nT)$$

سپس با استفاده از معادلهٔ ۱۵-۵ $(pV = nRT)$، می‌توان $pV/R$ را به جای $nT$ قرار داد، داریم

$$\Delta E_{\text{int}} = C_V \Delta\left(\frac{pV}{R}\right)$$

اکنون چون $p$، $V$ و $R$ ثابت‌اند، خواهیم داشت

$$\Delta E_{\text{int}} = ۰ \qquad \text{(پاسخ)}$$

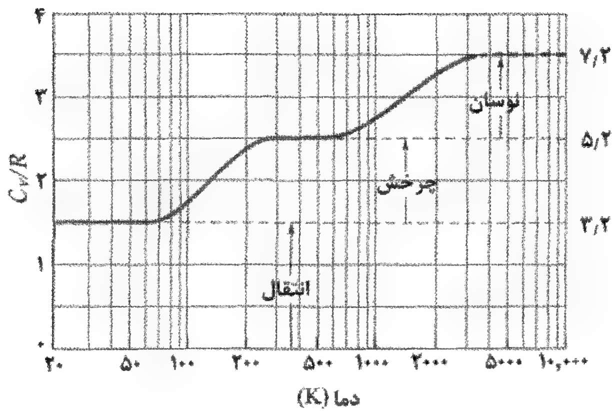
حتی اگر دما تغییر کند.

چرا در دمای بالاتر در اتاق احساس راحتی بیشتری می‌کنیم؟ دست کم دو عامل وجود دارد: (۱) با سطحهای درون اتاق تابش الکترو مغناطیسی (تابش گرمایی) مبادله می‌کنیم، و (۲) با مولکولهای هوا که به بدن برخورد می‌کنند انرژی مبادله می‌شود. وقتی دمای اتاق افزایش می‌یابد، (۱) مقدار انرژی گرمایی تابش شده از سطحها و جذب شده توسط بدن افزایش می‌یابد، و (۲) مقدار انرژی کسب شده از طریق برخوردهای مولکولهای هوا با بدن افزایش می‌یابد.

## ۱۵-۱۰ نکته‌ای از نظریهٔ کوانتومی

سازگاری نظریهٔ جنبشی با تجربه را با در نظر گرفتن نوسانهای اتمها در مولکولهای گاز دو اتمی یا چند اتمی می‌توان بهبود بخشید. برای مثال دو اتم در مولکول $O_2$ در شکل ۱۵-۱۳ ب می‌توانند به سوی یکدیگر و به دور از یکدیگر با پیوندهای داخلی که مثل فنر عمل می‌کنند نوسان کنند. ولی، تجربه نشان می‌دهد که چنین نوسانهایی فقط در دماهای نسبتاً بالای گاز رخ می‌دهند- حرکت فقط هنگامی که مولکولهای گاز انرژیهای نسبتاً زیادی داشته باشند «آغاز می‌شود». حرکت چرخشی نیز چنین «آغاز شدنی» دارد، ولی در دماهای پایینتر گاز.

شکل ۱۵-۱۴ به درک نقطهٔ شروع حرکت چرخشی و حرکت نوسانی کمک می‌کند. در این شکل تغییرات $C_V/R$ برای گاز دو اتمی هیدروژن $(H_2)$ برحسب دما در مقیاس لگاریتمی دما به طوری که چندین مرتبه بزرگی را پوشش دهد، رسم شده




**شکل ۱۵-۱۴** $C_V/R$ برحسب دما برای گاز هیدروژن (دو اتمی). چون حرکتهای دورانی و نوسانی در انرژیهای معینی شروع می‌شوند، در دماهای خیلی پایین فقط حرکت انتقالی امکان‌پذیر است. وقتی دما افزایش می‌یابد، حرکت چرخشی و در دماهای باز هم بالاتر حرکت نوسانی نیز شروع می‌شود.

است. پایینتر از ۸۰K، درمی‌یابیم که $C_V/R = ۱/۵$ است. این نتیجه بدان معناست که فقط سه درجهٔ آزادی انتقالی هیدروژن در گرمای ویژه دخالت دارند.

هنگامی که دما افزایش می‌یابد، مقدار $C_V/R$ به تدریج تا ۲/۵ زیاد می‌شود، و این حاکی از آن است که دو درجه آزادی دیگر نیز وارد شده است. نظریهٔ کوانتومی نشان می‌دهد که این دو درجه آزادی به حرکت چرخشی مولکولهای هیدروژن مربوط‌اند و این حرکت نیازمند به یک مقدار کمینهٔ معین از انرژی است. در دماهای خیلی پایین (زیر ۸۰K)، مولکولها انرژی کافی برای چرخش ندارند و وقتی دما از ۸۰K بیشتر شود، نخست چند مولکول و سپس تعداد زیادتری انرژی کافی برای چرخش را به دست می‌آورند و $C_V/R$ افزایش می‌یابد تا اینکه همهٔ آنها چرخش کنند و $C_V/R = ۲/۵$ شود.

همچنین نظریهٔ کوانتومی نشان می‌دهد که حرکت نوسانی مولکولها نیازمند به مقدار کمینهٔ (بیشتر) معینی از انرژی است. همانطور که در شکل ۱۵-۱۴ نشان داده شده است، تا مولکولها به دمای تقریباً ۱۰۰۰K نرسند این مقدار کمینه فراهم نمی‌شود. هنگامی که دما به بیش از ۱۰۰۰K برسد، تعداد مولکولهای با انرژی کافی برای نوسان زیاد می‌شود و $C_V/R$ افزایش می‌یابد، تا اینکه همهٔ مولکولها نوسان کنند و $C_V/R = ۳/۵$ شود. (در شکل ۱۵-۱۴، منحنی رسم شده در دمای ۳۲۰۰K متوقف می‌شود چون در آن دما اتمهای مولکول هیدروژن به اندازه‌ای زیاد نوسان می‌کنند که بر پیوند مشترکشان چیره می‌شوند، و سپس مولکول به دو اتم مجزا از هم جدا می‌شود.)

## ۱۵-۱۱ انبساط بی در رو یک گاز آرمانی

در بخش ۳۳-۴ خواهیم دید که موجهای صوتی از طریق هوا و گازهای دیگر به صورت رشته تراکمها و انبساطها انتشار

می‌یابند. این تغییرات در محیط چنان به سرعت رخ می‌دهد که زمانی برای انتقال انرژی به صورت گرما از یک بخش به بخش دیگر محیط وجود ندارد. همان‌طور که در بخش ۱۴-۱ دیدیم، فرایندی که در آن $Q=0$ باشد *فرایند بی‌دررو* نام دارد. با انجام فرایند به طور خیلی سریع (مانند موجهای صوتی) یا با انجام آن (با هر آهنگی) در یک ظرف عایق‌بندی شده، می‌توان اطمینان یافت که $Q=0$ است. حال می‌خواهیم ببینیم که نظریهٔ جنبشی دربارهٔ فرایند بی‌دررو چه می‌گوید.

شکل ۱۵-۱۵ الف استوانه عایق‌بندی شدهٔ معمول را نشان می‌دهد که اکنون محتوی یک گاز آرمانی است و روی یک پایهٔ عایق قرار دارد. با برداشتن وزنه‌ای از روی پیستون، می‌توان به طور بی‌دررو گاز را منبسط کرد. وقتی حجم افزایش یابد، فشار و دما کاهش می‌یابند. بعداً نشان می‌دهیم که رابطهٔ میان فشار و حجم در طی یک فرایند بی‌دررو به صورت زیر است

$$pV^{\gamma} = \text{ثابت} \qquad \text{(فرایند بی‌دررو)} \qquad (۱۵-۵۳)$$

که در آن $\gamma = C_p/C_V$، نسبت گرماهای ویژهٔ مولی گاز است. در نمودار $p\text{-}V$ مانند شکل ۱۵-۱۵ ب، فرایند در امتداد یک منحنی (به نام *منحنی بی‌دررو*) که معادلهٔ آن $p = (\text{ثابت}) / V^{\gamma}$ است رخ می‌دهد. چون گاز از حالت اولیهٔ $i$ به حالت نهایی $f$ می‌رود، معادلهٔ ۱۵-۵۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$p_i V_i^{\gamma} = p_f V_f^{\gamma} \qquad \text{(فرایند بی‌دررو)} \qquad (۱۵-۵۴)$$

همچنین، برای فرایند بی‌دررو می‌توان معادله‌ای برحسب $T$ و $V$ نوشت. برای این کار، با استفاده از معادلهٔ گاز آرمانی ($pV=nRT$) مقدار $p$ را از معادلهٔ ۱۵-۵۳ حذف می‌کنیم، داریم

$$\left(\frac{nRT}{V}\right)V^{\gamma} = \text{ثابت}$$

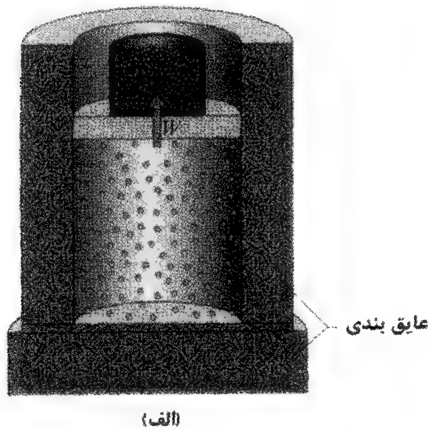
چون $n$ و $R$ ثابت‌اند، این رابطه را به شکل دیگری نیز می‌توان نوشت

$$TV^{\gamma-1} = \text{ثابت} \qquad \text{(فرایند بی‌دررو)} \qquad (۱۵-۵۵)$$

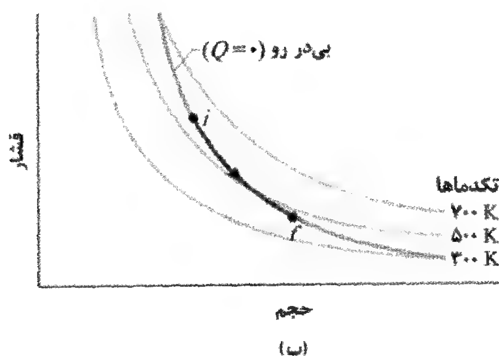
که در آن مقدار ثابت با ثابت معادلهٔ ۱۵-۵۳ فرق دارند. هر گاه از حالت اولیهٔ $i$ به حالت نهایی $f$ برود، معادلهٔ ۱۵-۵۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \qquad \text{(فرایند بی‌دررو)} \qquad (۱۵-۵۶)$$

با درک فرایندهای بی‌دررو می‌توان فهمید که چرا بازکردن ناگهانی در بطری نوشابهٔ سرد یا دور یک قوطی نوشابهٔ سرد در محل باز شدن مه اندکی تشکیل می‌شود. در بالای هر نوشابهٔ کربناتهٔ باز نشده‌ای گازی از کربن دی اکسید و بخار آب وجود دارد. چون فشار گاز از فشار جو بیشتر است، با بازشدن در ظرف، گاز به طرف جو منبسط می‌شود. بنابراین، حجم گاز زیاد می‌شود، و این بدان معناست که گاز در برابر پس زدن جو باید کار انجام دهد. چون انبساط خیلی سریع انجام می‌شود، پس بی‌دررو است و تنها منبع انرژی برای انجام دادن کار انرژی درونی گاز است. چون انرژی درونی کاهش می‌یابد، دمای گاز نیز کم می‌شود، که موجب می‌شود بخار آب در گاز به صورت قطره‌های کوچک چگالیده شود. (توجه کنید که معادلهٔ ۱۵-۵۶ همچنین نشان می‌دهد که در ضمن انبساط بی‌دررو دما باید کاهش یابد: $V_f$ بزرگتر از $V_i$ است، پس $T_f$ باید کمتر از $T_i$ باشد.)




(الف)




(ب)

**شکل ۱۵-۱۵** (الف) حجم یک گاز آرمانی با برداشتن وزنه از روی پیستون افزایش می‌یابد. فرایند بی‌دررو است ($Q=0$). (ب) فرایند حالت $i$ به حالت $f$ را در امتداد یک منحنی بی‌دررو و در نمودار $p\text{-}V$ طی می‌کند.

## *اثبات معادلهٔ ۱۵-۵۳*

فرض کنید که تعدادی از گلوله‌های پیستون شکل ۱۵-۱۵ الف را برداریم، تا گاز آرمانی پیستون را فشار دهد و باقیماندهٔ گلوله‌ها به سوی بالا حرکت کنند و در نتیجه حجم به اندازهٔ دیفرانسیلی $dV$ افزایش یابد. چون تغییر حجم کم است، می‌توان فرض کرد که فشار $p$ گاز که بر پیستون وارد می‌شود در حین تغییر ثابت می‌ماند. از این فرض می‌توان گفت که کار $dW$ انجام شده به وسیلهٔ گاز در حین افزایش حجم برابر با $p\ dV$ است. از معادلهٔ ۱۵-۲۷ قانون اول ترمودینامیک را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dE_{\text{int}} = Q - p\,dV \qquad (۱۵-۵۷)$$

چون گاز از نظر گرمایی منزوی است ( و در نتیجه انبساط بی‌دررو است)، برای $Q$ صفر قرار می‌دهیم. سپس از معادلهٔ ۱۵-۴۵ استفاده می‌کنیم و به جای $dE_{\text{int}}$ مقدار $nC_V dT$ را قرار می‌دهیم. به این ترتیب خواهیم داشت

$$n\,dT = -\left(\frac{p}{C_V}\right)dV \qquad (۱۵\text{-}۵۸)$$

اکنون، از قانون گاز آرمانی $(pV = nRT)$ داریم

$$p\,dV + V\,dp = nR\,dT \qquad (۱۵\text{-}۵۹)$$

با قراردادن $C_p - C_V$ به جای $R$ در معادلهٔ ۱۵-۵۹ خواهیم داشت

$$n\,dT = \frac{p\,dV + V\,dp}{C_p - C_V} \qquad (۱۵\text{-}۶۰)$$

با مساوی قراردادن معادله‌های ۱۵-۵۸ و ۱۵-۶۰ و ترتیب دوباره داریم

$$\frac{dp}{p} + \left(\frac{C_p}{C_V}\right)\frac{dV}{V} = ۰$$

به‌جای نسبت گرماهای ویژهٔ مولی مقدار $\gamma$ را قرار می‌دهیم و پس از انتگرالگیری (انتگرال ۵ در پیوست ث) داریم

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{ثابت}$$

سمت چپ را به صورت $\ln pV^{\gamma}$ می‌نویسیم، و از دو طرف معادلهٔ آنتی لگاریتم می‌گیریم، پس

$$pV^{\gamma} = \text{ثابت} \qquad (۱۵\text{-}۶۱)$$

که همان معادلهٔ مورد نظر است.

## *انبساط‌های آزاد*

از بخش ۱۴-۱۱ به یاد دارید که انبساط آزاد یک گاز فرایندی بی‌دررو است که در آن کاری روی گاز یا به وسیلهٔ آن انجام نمی‌گیرد و انرژی درونی گاز تغییر نمی‌کند. بنابراین، انبساط آزاد با فرایندهای بی‌دررو توصیف شده به وسیلهٔ معادله‌های ۱۵-۵۳ تا ۱۵-۶۱ که در آنها کار انجام می‌شود و انرژی درونی تغییر می‌کند، کاملاً متفاوت است. این است که معادله‌های ذکر شده در مورد انبساط آزاد حتی اگر چنین انبساطی بی‌دررو باشد *برقرار نیستند.*

همچنین به خاطر بیاورید که در انبساط آزاد، گاز فقط در نقطه‌های آغازی و نهایی خود در حالت تعادل است؛ بنابراین، فقط این دو نقطه را می‌توان در نمودار $p$-$V$ مشخص کرد نه خود انبساط را. افزون بر آن، چون $\Delta E_{\text{int}} = ۰$ است، دمای حالت نهایی و حالت اولیه برابرند. بنابراین، نقطه‌های اولیه و نهایی روی نمودار $p$-$V$ روی یک منحنی تکدما قرار دارند و به جای معادله ۱۵-۵۶ خواهیم داشت

$$T_i = T_f \qquad \text{(انبساط آزاد)} \qquad (۱۵\text{-}۶۲)$$

حال اگر فرض کنیم که گاز آرمانی است (یعنی $pV = nRT$)، چون دما تغییر نمی‌کند، حاصلضرب $pV$ نیز نمی‌تواند تغییر کند. پس، به جای معادلهٔ ۱۵-۵۳، رابطهٔ انبساط آزاد به صورت زیر است

$$p_i V_i = p_f V_f \qquad \text{(انبساط آزاد)} \qquad (۱۵\text{-}۶۳)$$

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵-۱۰

در مسئله نمونهٔ ۱۵-۲، 1 mol از گاز اکسیژن (با فرض آرمانی بودن) به طور تکدما (در دمای ۳۱۰K) از حجم اولیهٔ ۱۲L تا حجم نهایی ۱۹L منبسط می‌شود.

(الف) اگر گاز به این حالت نهایی به طور بی‌دررو منبسط شده باشد، دمای نهایی چقدر است؟ اکسیژن ($O_2$) گاز دو اتمی است و در اینجا چرخش دارد ولی نوسان ندارد.

**نکته‌های کلیدی**

۱. وقتی گاز در برابر فشار محیط اطراف منبسط می‌شود، باید کار انجام دهد.

۲. وقتی فرایندی بی‌دررو است (هیچ انرژیی به صورت گرما مبادله نمی‌شود)، آنگاه انرژی لازم برای کار فقط از انرژی درونی گاز تأمین می‌شود.

۳. چون انرژی درونی کم می‌شود، دمای $T$ هم باید کاهش یابد.

***محاسبه‌ها:*** دماها و حجمهای اولیه و نهایی را با معادلهٔ ۱۵-۵۶ می‌توان به هم مربوط کرد

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \qquad (۱۵\text{-}۶۴)$$

چون مولکولها دو اتمی هستند و چرخش می‌کنند ولی نوسان ندارند، گرماهای ویژهٔ مولی را می‌توان از جدول ۱۵-۳ به دست آورد. پس، داریم

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{۷}{۲}R}{\frac{۵}{۲}R} = ۱/۴۰$$

با حل معادلهٔ ۱۵-۶۴ برحسب $T_f$ و قرار دادن مقدارهای عددی خواهیم داشت

$$T_f = \frac{T_i V_i^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} = \frac{(۳۱۰\,\text{K})(۱۲\,\text{L})^{۱/۴۰-۱}}{(۱۹\,\text{L})^{۱/۴۰-۱}}$$

$$= (۳۱۰\,\text{K})\left(\frac{۱۲}{۱۹}\right)^{۰/۴۰} = ۲۵۸\,\text{K} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) اگر گاز از فشار اولیهٔ ۲/۰Pa به حجم جدید به طور آزاد منبسط شود، دما و فشار نهایی چقدراست؟

**نکتهٔ کلیدی** دما در انبساط آزاد تغییر نمی‌کند

***محاسبه:*** پس دما عبارت است از

$$T_f = T_i = ۳۱۰\,\text{K} \qquad \text{(پاسخ)}$$

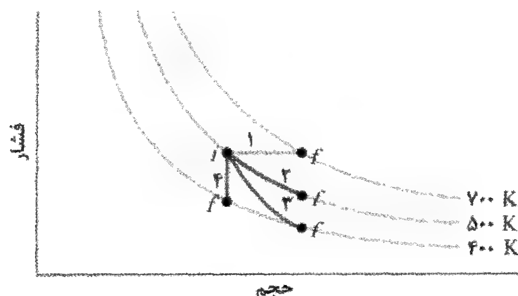
با استفاده از معادلهٔ ۱۵-۶۳ فشار جدید دست می‌آید

$$p_f = p_i \frac{V_i}{V_f} = (۲/۰\,\text{Pa})\frac{۱۲\,\text{L}}{۱۹\,\text{L}} = ۱/۳\,\text{Pa} \qquad \text{(پاسخ)}$$

## تدبیرهای حل مسئله

### تدبیر۲: خلاصهٔ نموداری از چهار فرایند مربوط به گاز

در این فصل دربارهٔ چهار فرایند ویژه‌ای که یک گاز آرمانی می‌تواند انجام دهد بحث کردیم. نمونه‌ای از هر یک (در مورد یک گاز تک اتمی آرمانی) در شکل ۱۵-۱۶ نشان داده شده است. برخی از مشخصه‌های وابسته در جدول ۱۵-۴، با در نظر گرفتن نام دو فرایند (تک فشار و تک حجم) که مورد استفاده قرار نگرفته ولی در کتابهای دیگر ممکن است با آنها برخورد کنید، داده شده‌اند.




**شکل ۱۵-۱۶** نمودار $p$-$V$ که چهار فرایند ویژهٔ مربوط به یک گاز تک اتمی آرمانی را نشان می‌دهد.

**جدول ۱۵-۴**
چهار فرایند ویژه

| مسیر در شکل ۱۵-۱۴ | کمیت ثابت | نوع فرآیند | چند نتیجهٔ ویژه ($\Delta E_{int} = nC_V \Delta T$ و $\Delta E_{int} = Q - W$) برای همهٔ مسیرها) |
|---|---|---|---|
| ۱ | $p$ | تک فشار | $Q = nC_p \Delta T;\ W = p\Delta V$ |
| ۲ | $T$ | تکدما | $Q = W = nRT \ln (V_f / V_i);$ $\Delta E_{int} = 0$ |
| ۳ | $pV^{\gamma},\ TV^{\gamma-1}$ | بی‌دررو | $Q = 0; W = -\Delta E_{int}$ |
| ۴ | $V$ | تک حجم | $Q = \Delta E_{int} = nC_V \Delta T; W = 0$ |

✔ ***نکتهٔ وارسی ۵*** در شکل ۱۵-۱۶ مسیرهای ۱، ۲ و ۳ را به ترتیب بزرگی گرمای داده شده به گاز مرتب کنید.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**نظریهٔ جنبشی گازها** نظریهٔ جنبشی گازها خواص *ماکروسکوپی* گازها (برای مثال، فشار و دما) را به خواص *میکروسکوپی* مولکولهای گاز (برای مثال تندی و انرژی جنبشی) ارتباط می‌دهد.

**عدد آووگادرو** یک مول از ماده شامل $N_A$ (*عدد آووگادرو*) واحد بنیادی (معمولاً اتم یا مولکول) است، که از تجربه اندازهٔ زیر برای $N_A$ به دست آمده است

$$N_A = 6/02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \qquad \text{(عدد آووگادرو)} \qquad (۱۵-۱)$$

جرم مولی $M$ از هر ماده عبارت است از جرم یک مول از آن ماده. این عدد با این رابطه به جرم $m$ مولکولهای مجرای ماده مربوط می‌شود

$$M = mN_A \qquad (۱۵-۴)$$

تعداد مولهای $n$ موجود در نمونه‌ای به جرم $M_{\text{نمونه}}$، که $N$ مولکول دارد با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{M_{\text{نمونه}}}{M} = \frac{M_{\text{نمونه}}}{mN_A} \qquad (۱۵-۲، ۱۵-۳)$$

**گاز آرمانی** *گاز آرمانی* گازی است که در آن رابطهٔ فشار $p$ و حجم $V$ و دمای $T$ به صورت زیر است

$$pV = nRT \qquad \text{(قانون گازهای آرمانی)} \qquad (۱۵-۵)$$

در اینجا $n$ تعداد مولهای گاز و $R$ ثابتی است ($8/31\text{J/mol}\cdot\text{K}$) که **ثابت گاز** نامیده می‌شود. قانون گاز آرمانی به صورت زیر نیز نوشته می‌شود

$$pV = NkT \qquad (۱۵-۹)$$

که $k$ **ثابت بولتزمن** برابر است با

$$k = \frac{R}{N_A} = 1/38 \times 10^{-23}\ \text{J/K} \qquad (۱۵-۷)$$

**کار در تغییر حجم تکدما** کار انجام شده به وسیلهٔ یک گاز آرمانی در ضمن تغییر حجم **تکدما** (دمای ثابت) از حجم $V_i$ به حجم $V_f$ عبارت است از

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \qquad \text{(گاز آرمانی، فرایند تکدما)} \qquad (۱۵-۱۴)$$

**فشار، دما و تندی مولکولی** فشار وارد شده به وسیلهٔ $n$ مول گاز آرمانی، برحسب تندی مولکولهای آن عبارت است از

$$p = \frac{nMv_{\text{rms}}^2}{3V} \qquad (۱۵-۲۱)$$

که در آن $V_{\text{rms}} = \sqrt{(v^2)_{\text{avg}}}$ **تندی جذر میانگین مربعی** مولکولهای گاز است. از معادلهٔ ۱۵-۵ خواهیم داشت

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad (۱۵-۲۲)$$

**دما و انرژی جنبشی** انرژی جنبشی انتقالی متوسط $K_{\text{avg}}$ هر مولکول از گاز آرمانی عبارت است از

$$K_{\text{avg}} = \frac{3}{2}\text{kT} \qquad (۱۵-۲۴)$$

**پویش آزاد میانگین** *پویش آزاد میانگین* $\lambda$ یک مولکول گاز عبارت است از متوسط طول مسیر میان برخوردهای مولکول و با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V} \qquad (۲۵-۱۵)$$

که $N/V$ تعداد مولکولها در یکای حجم و $d$ قطر مولکول است.

**توزیع تندی ماکسول** *توزیع تندی ماکسول* $P(v)$ عبارت است از تابعی مانند $P(v)\,dv$ که کسری از مولکولهای با تندیهای واقع دربازهٔ $dv$ به مرکزیت تندی $v$ را به دست می‌دهد

$$P(v)=4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT} \qquad (۲۷-۱۵)$$

سه مشخصه از توزیع تندیها بین مولکولهای یک گاز عبارت اند از

$$v_{avg}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \qquad \text{(تندی میانگین)} \qquad (۳۱-۱۵)$$

$$v_P=\sqrt{\frac{2RT}{M}} \qquad \text{(محتملترین تندی)} \qquad (۳۵-۱۵)$$

و تندی rms که در معادلهٔ ۱۵-۲۲ تعریف شده است.

**گرماهای ویژهٔ مولی** گرمای ویژهٔ مولی $C_v$ یک گاز در حجم ثابت به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_V=\frac{Q}{n\Delta T}=\frac{\Delta E_{int}}{n\Delta T} \qquad (۳۹-۱۵ ،۴۱-۱۵)$$

که در آن $Q$ انرژی مبادله شده به صورت گرما با نمونه‌ای از ماده شامل $n$ مول گاز، $\Delta T$ تغییر دمای به وجود آمده در گاز، و $\Delta E_{int}$ تغییر حاصل در انرژی درونی گاز است. در مورد گاز تک اتمی آرمانی داریم

$$C_V=\frac{3}{2}R=12/5\,\text{J/mol}\cdot\text{K.} \qquad (۴۳-۱۵)$$

گرمای ویژهٔ مولی $C_P$ یک گاز فشار ثابت به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_P=\frac{Q}{n\Delta T} \qquad (۴۶-۱۵)$$

که در آن $Q$ و $n$ و $\Delta T$ همان است که در بالا گفته شد. $C_P$ نیز با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$C_P=C_V+R \qquad (۴۹-۱۵)$$

در مورد $n$ مول گاز آرمانی، داریم

$$E_{int}=nC_VT \qquad \text{(گاز آرمانی)} \qquad (۴۴-۱۵)$$

اگر دمای $n$ مول از یک گاز آرمانی محبوس با *هرفرایندی* به اندازهٔ $\Delta T$ تغییر کند، تغییر در انرژی درونی گاز عبارت است از

$$\Delta E_{int}=nC_V\Delta T \qquad \text{(گاز آرمانی، هرنوع فرایند)} \qquad (۴۵-۱۵)$$

که در آن با توجه به نوع گاز آرمانی باید مقدار مناسب $C_V$ را قرارداد.

**درجه‌های آزادی و $C_V$** مقدار $C_V$ را با استفاده از قضیهٔ *همپاری انرژی* پیدا می‌کنیم، که می‌گوید به هر *درجهٔ آزادی* مولکول (یعنی هر راه مستقلی که می‌تواند انرژی ذخیره کند)، به طور متوسط، انرژی $\frac{1}{2}kT$ بر مولکول ( $\frac{1}{2}RT$ بر مول) وابسته است. اگر $f$ تعداد درجه‌های آزادی باشد، آنگاه $E_{int}=(f/2)nRT$ و

$$C_V=\left(\frac{f}{2}\right)R=4/16f\ \text{J/mol}\cdot\text{K.} \qquad (۵۱-۱۵)$$

در مورد گازهای تک اتمی $f=3$ (سه درجه آزادی انتقالی)؛ و در مورد گازهای اتمی $f=5$ (درجه آزادی انتقالی و دو درجه آزادی چرخشی).

**فرایند بی‌دررو** هرگاه حجم یک گاز آرمانی به طور بی‌دررو تغییر کند (تغییری که در آن $Q=0$)، فشار و حجم آن با رابطهٔ زیر به هم مربوط‌اند

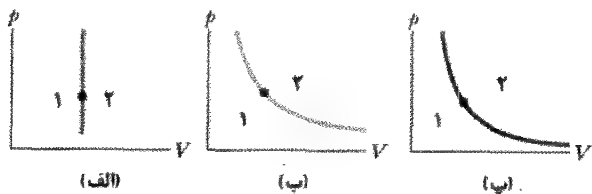
$$pV^{\gamma}=\text{ثابت} \qquad \text{(فرایند بی‌دررو)} \qquad (۵۳-۱۵)$$

که در آن $\gamma(=C_P/C_V)$ نسبت گرماهای ویژهٔ مولی گاز است. ولی در مورد انبساط آزاد، ثابت $=pV$ است.

## پرسشها

۱- برای افزایش دمای $\Delta T_1$ مقدار معینی از یک گاز آرمانی، وقتی در حجم ثابت گرم شود به $30\,\text{J}$ گرما و وقتی در فشار ثابت گرم می‌شود به $50\,\text{J}$ گرما نیاز است. در وضعیت دوم چه کاری توسط گاز انجام می‌شود؟

۲- نقطه در شکل ۱۵-۱۷ الف نشان دهندهٔ حالت اولیهٔ یک گاز است و خط عمودی که از نقطه می‌گذرد نمودار $p$-$V$ را به دو ناحیهٔ ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. در مورد فرایندهای زیر تعیین کنید که کار $W$ انجام شده به وسیلهٔ گاز مثبت است یا منفی، یا صفر است: الف) گاز در راستای خط عمود به سمت بالا تغییر می‌کند، (ب) گاز در راستای خط عمود به سمت پائین تغییر می‌کند، (پ) در ناحیهٔ ۱ به هر جایی تغییر می‌کند و (ت) در ناحیهٔ ۲ به هر جایی تغییر می‌کند.




**شکل ۱۵-۱۷** پرسشهای ۲ و ۴ و ۶

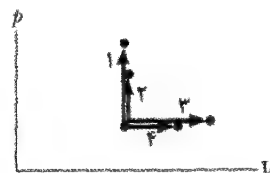
۳- در مورد چهار وضعیت برای یک گاز آرمانی، جدول زیر انرژی مبادله شده با گاز را به صورت گرمای $Q$ و یا کار $W$

انجام شده به وسیلهٔ گاز یا کار $W_{on}$ انجام شده روی گاز همه برحسب ژول نشان می‌دهد. این وضعیتها برحسب تغییر دمای گاز از مثبت‌ترین حالت مرتب کنید.

| | الف | ب | پ | ت |
|---|---|---|---|---|
| $Q$ | −۵۰ | +۳۵ | −۱۵ | +۲۰ |
| $W$ | −۵۰ | +۳۵ | | |
| $W_{on}$ | | | −۴۰ | +۴۰ |

۴- نقطه در شکل ۱۵-۱۷ ب حالت اولیهٔ یک گاز را نشان می‌دهد و تکدمایی که از نقطه گذشته نمودار $p$-$V$ را به دو ناحیهٔ ۱ و ۲ تقسیم کرده است. در فرایندهای زیر تعیین کنید که تغییر $\Delta E_{int}$ در انرژی درونی گاز مثبت است یا منفی یا صفر است: (الف) گاز به طرف بالا در راستای تکدما تغییر می‌کند، (ب) گاز به طرف پایین در راستای تکدما تغییر می‌کند، (پ) در ناحیهٔ ۱ به هر جایی تغییر می‌کند و (ت) در ناحیهٔ ۲ به هر جایی تغییر می‌کند.

۵- مقدار معینی انرژی به صورت گرما به یک مول از یک گاز تک اتمی (الف) در فشار ثابت و (ب) در حجم ثابت و یک مول از گاز دو اتمی (پ) در فشار ثابت و (ت) در حجم ثابت داده می‌شود. شکل ۱۵-۱۸ چهار مسیر از نقطهٔ اولیه به چهار نقطهٔ نهایی را روی نمودار $p$-$V$ نشان می‌دهد. کدام مسیر مربوط به کدام فرایند است؟ (ث) آیا مولکولهای گاز دو اتمی چرخش می‌کنند؟

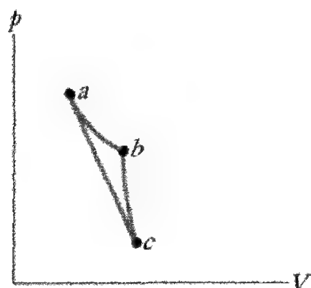



**شکل ۱۵-۱۸** پرسش ۵

۶- نقطه در شکل ۱۵-۱۷ پ حالت اولیهٔ یک گاز را نشان می‌دهد و بی دررویی که از نقطه گذشته نمودار $p$-$V$ را به دو ناحیهٔ ۱ و ۲ تقسیم کرده است. در فرایندهای زیر، تعیین کنید که گرمای مربوطهٔ $Q$ مثبت است یا منفی یا صفر است: (الف) گاز به طرف بالا در راستای بی‌دررو تغییر می‌کند، (ب) گاز به طرف پایین در راستای بی‌دررو تغییر می‌کند، (پ) در ناحیهٔ ۱ به هر جایی تغییر می‌کند، (ت) در ناحیهٔ ۲ به هر جایی تغییر می‌کند.

۷- یک گاز دو اتمی آرمانی با چرخش مولکولی ولی بدون نوسان انرژی را به صورت گرمای $Q$ از دست می‌دهد. اگر این اتلاف در فرایند حجم ثابت یا در فرایند فشار- ثابت انجام گیرد، آیا انرژی درونی گاز کاهش می‌یابد؟

۸- در نمودار $p$-$V$ شکل ۱۵-۱۹، گاز در امتداد تکدمای $ab$ به اندازهٔ 5J و در امتداد بی‌درروی $bc$، به اندازهٔ 4J کار انجام می‌دهد. اگر گاز در راستای مسیر مستقیم $a$ تا $c$ تغییر کند، تغییر در انرژی درونی آن چقدر است؟




**شکل ۱۵-۱۹** پرسش ۸

۹- (الف) چهار مسیر شکل ۱۵-۱۶ را به ترتیب بزرگی کار انجام شده به وسیلهٔ گاز مرتب کنید. (ب) مسیرهای ۱، ۲ و ۳ را مطابق با تغییر در انرژی درونی گاز به ترتیب از مثبت‌ترین تا منفی‌ترین مرتب کنید.

۱۰- آیا دمای گاز آرمانی در حین (الف) انبساط تکدما، (ب) انبساط در فشار ثابت، (پ) انبساط بی‌دررو و (ت) افزایش فشار در حجم ثابت، افزایش می‌یابد یا کاهش یا ثابت می‌ماند؟

## مسئله‌ها

مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)

SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها

WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.

•••-• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.

اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

### بخش ۱۵-۲ عدد آووگادرو

•۱- جرم مولی طلا 197g/mol است. (الف) در 2/50g طلای خالص چند مول طلا وجود دارد؟ (ب) در این نمونه چند اتم وجود دارد؟

•۲- جرم $7/50\times10^{24}$ اتم آرسنیک را که جرم مولی آن 74/9g/mol است، برحسب کیلوگرم پیدا کنید.

### بخش ۱۵-۳ گازهای آرمانی

•۳- فشار بهترین خلاء آزمایشگاهی تقریباً $1/00\times10^{-18}$ atm تا $1/01\times10^{-13}$Pa است. در این خلأ در 293 K چند مولکول گاز در سانتی‌متر مکعب وجود دارد؟

•۴- (الف) تعداد مولها و (ب) تعداد مولکولهای موجود در $1/00\text{cm}^3$ گاز آرمانی را در فشار 100Pa و دمای 220K محاسبه کنید.

•۵- حجم یک لاستیک اتومبیل $1/64\times10^{-2}\ m^3$ و محتوی هوا در فشار پیمانه‌ای (زیادی فشار نسبت به فشار جو) $165\ kPa$ در دمای $0/00°C$ است. وقتی دما به $27/0°C$ و حجم به $1/67\times10^{-2}\ m^3$ برسد فشار پیمانه‌ای هوا در لاستیک چقدر است؟ فشار جو را $1/01\times10^{5}\ Pa$ را بگیرید.

•۶- مقداری گازی آرمانی در دمای $10/0°C$ و فشار $100\ kPa$ حجمی برابر با $2/50\ m^3$ را اشغال می‌کند. (الف) چند مول گاز در این حجم وجود دارد؟ (ب) اگر فشار به $300\ kPa$ و دما به $30/0°C$ برسد، حجم اشغال شده چقدر است؟ از نشت گاز چشمپوشی کنید.

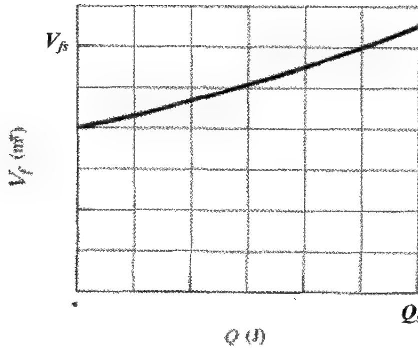
•۷- گاز اکسیژن با حجم $1000\ cm^3$ در دمای $40/0°C$ و فشار $1/01\times10^{5}\ Pa$ منبسط می‌شود تا حجم آن به $1500\ cm^3$ و فشار آن به $1/06\times10^{5}\ Pa$ برسد. (الف) تعداد مولهای اکسیژن موجود و (ب) دمای نهایی نمونه را پیدا کنید. SSM

•۸- ظرفی حاوی $2\ mol$ از یک گاز آرمانی به جرم مولی $M_1$ و $0/5\ mol$ از یک گاز آرمانی دیگر به جرم مولی $M_2=3M_1$ است. چه کسری از فشار کل وارد بردیوارهٔ ظرف مربوط به گاز دوم است؟ (بحث نظریهٔ جنبشی دربارهٔ فشار به قانون تجربی فشارهای جزیی در مورد مخلوطی از گازها که واکنش شیمیایی ندارند، انجامیده است: *فشار کل اعمال شده به وسیلهٔ مخلوط چند گاز برابر است با مجموع فشارهای ناشی از تک تک گازها اگر به تنهایی ظرف را اشغال می‌کردند.*)

•۹- فرض کنید $1/80\ mol$ گاز آرمانی در یک تراکم تکدما در $30°C$ از حجم $3/00\ m^3$ به حجم $1/50\ m^3$ تغییر می‌کند. (الف) در ضمن تراکم، چقدر انرژی به صورت گرما انتقال می‌یابد و (ب) آیا انتقال *به گاز یا از آن* صورت می‌گیرد؟

••۱۰- *بطری آب در یک ماشین داغ.* در جنوب غربی آمریکا، دما در ماشین در حال پارک دربسته در زیر آفتاب در تابستان به قدری زیاد است که می‌تواند تن آدمی را بسوزاند. فرض کنید در بطری آب در دمای یخچال $5/00°C$ باز و سپس بسته شده و بعد در داخل ماشین در بسته‌ای با دمای $75/0°C$ قرار داده شود. با چشمپوشی از انبساط گرمایی آب و بطری، فشار هوای محبوس در داخل بطری را پیدا کنید. (فشار به اندازه‌ای است که در بطری از دندانه‌هایی که برای نگهداشتن آن وجود دارد می‌گذرد).

••۱۱- فرض کنید وقتی به $0/825$ مول از یک گاز آرمانی انرژی به صورت گرمای $Q$ داده شود انبساط تکدما پیدا کند. اگر شکل ۱۵-۲۰ حجم نهایی $V_f$ نسبت به $Q$ را نشان دهد، دمای گاز چقدر است؟ مقیاس محور عمودی با $V_{fs}=0/30\ m^3$ و مقیاس محور افقی با $Q_s=1200\ J$ مشخص شده است.




**شکل ۱۵-۲۰** مسئلهٔ ۱۱

••۱۲- در گسترهٔ دمایی $310K$ تا $330K$، فشار $p$ یک گاز غیرآرمانی معین به حجم $V$ و دمای $T$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$p=(24/9\ J/K)\frac{T}{V}-(0/00662\ J/K^2)\frac{T^2}{V}$$

اگر دمای گاز از $315K$ به $325K$ افزایش یابد و فشار ثابت نگهداشته شود، چقدر کار توسط گاز انجام می‌شود؟

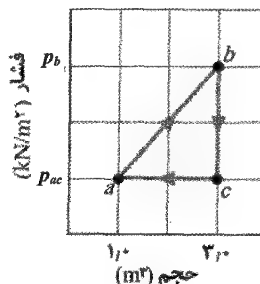
••۱۳- هوایی که در آغاز در فشار پیمانه‌ای $103/0\ kPa$ حجم $0/140\ m^3$ را اشغال کرده است به طور تکدما تا فشار $101/3\ kPa$ منبسط و سپس در فشار ثابت سرد می‌شود تا اینکه به حجم اولیهٔ خود برسد. کار انجام شده به وسیلهٔ هوا را محاسبه کنید. (فشار پیمانه‌ای عبارت است از اختلاف بین فشار واقعی و فشار جو) SSM ILW WWW

••۱۴- *نجات زیر دریایی.* وقتی زیر دریایی *اسکالوس*[1] امریکا در عمق $80\ m$ گرفتار شد، یک اتاقک استوانه‌ای از یک کشتی برای نجات خدمه پایین برده شد. شعاع اتاقک $1/00\ m$ و ارتفاع آن $4/00\ m$ بود، که از زیر باز می‌شد و دو نجات دهنده داشت. آن را توسط کابلی که غواصی به آن متصل بود تا دریچهٔ زیر دریایی هدایت کردند. وقتی اتاقک به دریچه رسید و به بدنه وصل شد، خدمه به داخل اتاقک وارد شدند و نجات پیدا کردند. در ضمن پایین رفتن، هوا از مخزنها آزاد می‌شد تا از ورود آب به اتاقک جلوگیری کند. فرض کنید که فشار هوا در داخل برابر با فشار آب در عمق $h$ باشد که با $p_0+\rho gh$ داده می‌شود، که در آن $p_0=1/000\ atm$ فشار سطح و $\rho=1024\ kg/m^3$ چگالی آب دریاست. همچنین فرض کنید دمای سطح $20/0°C$ و دمای آب در عمق فرورفته $-30/0°C$ باشد. (الف) حجم هوا در اتاقک در سطح چقدر است؟ (ب) اگر هوا از مخزنها خارج نمی‌شد، در عمق $h=80/00\ m$ حجم هوا در اتاقک چقدر می‌بود؟ (پ) چند مول هوا لازم بود تا خالی شود تا اینکه حجم هوای اولیه در اتاقک ثابت بماند؟ 

•••۱۵- نمونه‌ای از یک گاز آرمانی فرایند چرخه‌ای $abca$ نشان داده شده در شکل ۱۵-۲۱ را طی می‌کند. مقیاس محور عمودی

1. Squalus

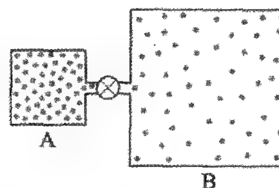
با $p_b = ۷/۵\text{kPa}$ و $p_{ac} = ۲/۵\text{kPa}$ مشخص شده است. (الف) چند مول گاز در این نمونه وجود دارد؟ (ب) دمای گاز در نقطهٔ $b$، (پ) دمای گاز در نقطهٔ $c$ و (ت) انرژی خالص داده شده به گاز به صورت گرما در این طول این چرخه، چقدر است؟




**شکل ۱۵-۲۱** مسئلهٔ ۱۵

●●●●۱۶- یک حباب هوا به حجم $۲۰\text{cm}^3$ در ته دریاچه‌ای به عمق $۴۰\text{m}$ قرار دارد و دما در آنجا $۴/۰°\text{C}$ است. حباب به سطح آب می‌رسد که در آنجا دما $۲۰°\text{C}$ است. دمای هوای حباب با دمای آبی که آن را احاطه کرده است یکسان است. درست وقتی که حباب به سطح می‌رسد حجم آن چقدر است؟

●●●۱۷- فشار گاز آرمانی محفظهٔ A در شکل ۱۵-۲۲ برابر با $۵/۰\times۱۰^۵\ \text{Pa}$ و دمای آن $۳۰۰\text{K}$ است. این محفظه با لولهٔ نازکی (و یک شیر بسته) به محفظهٔ B که حجم آن چهار برابر حجم محفظهٔ A است وصل شده است. در محفظهٔ B همان گاز آرمانی در فشار $۱/۰\times۱۰^۵\ \text{Pa}$ و دمای $۴۰۰\text{K}$ قرار دارد. شیر اتصال را باز می‌کنیم و در حالی که هر محفظه در دمای اولیه خود نگهداشته شده است، دو محفظه در یک فشار به تعادل می‌رسند. فشار نهایی در دو محفظه چقدر است؟




**شکل ۱۵-۲۲** مسئلهٔ ۱۶

### بخش ۱۵-۴ فشار، دما و تندی RMS

●۱۸- تندی rms اتمهای هلیوم را در $۱۰۰۰\text{K}$ محاسبه کنید. در مورد جرم مولی اتمهای هلیوم به پیوست ج نگاه کنید.

●۱۹- پایینترین دمای ممکن در فضاهای دور $۲/۷\text{K}$ است. تندی rms مولکولهای هیدروژن در این دما چقدر است؟ [جرم مولی مولکولهای هیدروژن $(H_2)$ در جدول ۱۵-۱ داده شده است]. SSM

●●۲۰- تندی rms اتمهای آرگون را در $۳۱۳\text{K}$ پیدا کنید. در مورد جرم مولی اتمهای آرگون به پیوسته ج نگاه کنید.

●۲۱- (الف) تندی rms مولکول نیتروژن را در $۲۰/۰°\text{C}$ محاسبه کنید. جرم مولی مولکولهای نیتروژن $(N_2)$ در جدول ۱۵-۱ داده شده است. در چه دماهایی تندی rms (ب) نصف این مقدار و (پ) دو برابر این مقدار است؟

●۲۲- دما در جو خورشید $۲/۰۰\times۱۰^۶\ \text{K}$ و فشار $۰/۰۳۰۰\text{Pa}$ است. تندی rms الکترونهای آزاد $(m=۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}\ \text{kg})$ آنجا را با فرض اینکه آنها گاز آرمانی باشند محاسبه کنید.

●●۲۳- باریکه‌ای از مولکولهای هیدروژن $(H_2)$ با زاویهٔ $۵۵°$ به خط عمود بر دیواری نشانه روی شده است. تندی هر مولکول در باریکه $۱/۰\text{km/s}$ و جرم آن $۳/۳\times۱۰^{-۲۴}\text{g}$ است. باریکه با آهنگ $۱۰^{۲۳}$ مولکول بر ثانیه به سطحی به مساحت $۲/۰\text{cm}^2$ از دیوار برخورد می‌کند. فشاری که باریکهٔ مولکولها بر دیوار وارد می‌کند چقدر است؟

●●۲۴- چگالی یک گاز در دمای $۲۷۳\text{K}$ و فشار $۱/۰۰\times۱۰^{-۲}\ \text{atm}$ برابر با $۱/۲۴\times۱۰^{-۵}\text{g/cm}^3$ است. (الف) مقدار $v_{rms}$ مولکولهای گاز را پیدا کنید. (ب) جرم مولی گاز را محاسبه و (ب) نوع گاز را شناسایی کنید. (*راهنمایی:* نام این گاز در جدول ۱۵-۱ آمده است.)

### بخش ۱۵-۵ انرژی جنبشی انتقالی

●۲۵- مقدار میانگین انرژی جنبشی انتقالی مولکولهای یک گاز آرمانی را در (الف) $۰/۰۰°\text{C}$ و (ب) $۱۰۰°\text{C}$ تعیین کنید. انرژی جنبشی انتقالی هر مول از گاز آرمانی در (پ) $۰/۰۰°\text{C}$ و (ت) $۱۰۰°\text{C}$ چقدر است؟

●۲۶- انرژی جنبشی انتقالی توسط مولکولهای نیتروژن در دمای $۱۶۰۰\text{K}$ چقدر است؟

●●۲۷- آبی که در ظرفی روباز در دمای $۳۲/۰°\text{C}$ قرار دارد به علت فرار تعدادی از مولکولهای سطح تبخیر می‌شود. گرمای تبخیر $(۵۳۹\ \text{cal/g})$ را می‌توان تقریباً برابر با $\varepsilon n$ گرفت که در آن $\varepsilon$ انرژی میانگین مولکولهای فرارکننده و $n$ تعداد مولکولهای موجود در هر گرم است. (الف) $\varepsilon$ را پیدا کنید. (ب) با فرض اینکه رابطهٔ انرژی جنبشی با دما همان باشد که مربوط به گازهاست، نسبت $\varepsilon$ به انرژی جنبشی متوسط مولکولهای $H_2O$ چقدر است؟

### بخش ۱۵-۶ پویش آزاد میانگین

●۲۸- پویش آزاد میانگین مولکولهای نیتروژن در دمای $۰/۰۰°\text{C}$ و فشار $۱/۰\text{atm}$ برابر با $۰/۸۰\times۱۰^{-۵}\ \text{cm}$ است. در این دما و فشار $۲/۷\times۱۰^{۱۹}$ مولکول در هر سانتی‌متر مکعب وجود دارد. قطر مولکولی چقدر است؟

●۲۹- چگالی جو در ارتفاع $۲۵۰۰\text{km}$ تقریباً ۱ مولکول$/\text{cm}^3$ است. (الف) با فرض اینکه قطر مولکولی $۲/۰\times۱۰^{-۸}\ \text{cm}$ باشد، پویش آزاد میانگین پیش‌بینی شده با معادلهٔ ۱۵-۲۵ را پیدا کنید. (ب) توضیح دهید که آیا مقدار پیش‌بینی شده معنا دارد. SSM

●۳۰- در چه بسامدی طول موج صوت در هوا با پویش آزاد میانگین مولکولهای اکسیژن در فشار ۱/۰atm و دمای ۰/۰۰°C برابر است؟ قطر مولکول اکسیژن برابر است با $۳/۰×۱۰^{-۸}$ cm.

●●۳۱- در نوعی شتابدهنده، پروتونها مسیری دایره‌ای به قطر ۲۳/۰m را در یک اتاقک خلأ طی می‌کنند که دمای گاز باقیمانده در آن ۲۹۵K و فشار آن $۱/۰۰×۱۰^{-۶}$ torr است. (الف) تعداد مولکولهای گاز در هر سانتی‌متر مکعب را در این فشار محاسبه کنید. (ب) اگر قطر مولکولی $۲/۰۰×۱۰^{-۸}$ cm باشد، پویش آزاد میانگین مولکولهای گاز چقدر است؟

●●۳۲- در دمای ۲۰°C و فشار ۷۵۰ torr، پویش آزاد میانگین گاز آرگون (Ar) و گاز نیتروژن ($N_۲$) عبارت‌اند از $\lambda_{Ar}=۹/۹×۱۰^{-۶}$ cm و $\lambda_{N_۲}=۲/۷۵×۱۰^{-۶}$ cm (الف) نسبت قطر اتم Ar به قطر مولکول $N_۲$ را پیدا کنید. پویش آزاد میانگین آرگون در (ب) ۲۰°C و ۱۵۰torr و (پ) ۴۰°C- و ۷۵۰torr چقدر است؟

## بخش ۱۵-۷ توزیع تندیهای مولکولی

●۳۳- ده ذره با تندیهای زیر حرکت می‌کنند: چهار ذره با ۲۰۰m/s، دو ذره با ۵۰۰m/s و چهار ذره با ۶۰۰m/s. مطلوب است (الف) تندی متوسط، (ب) تندی rms. (پ) آیا $v_{rms}>v_{avg}$ است؟

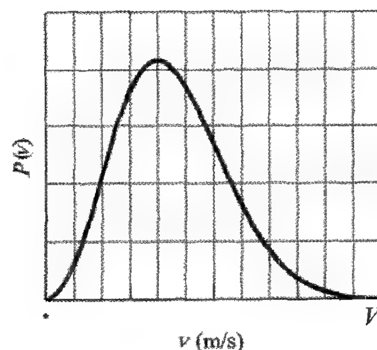
●۳۴- تندی ۲۲ ذره به صورت زیر است ($N_i$ تعداد ذره‌هایی هستند که تندی آنها $v_i$ است)

| $N_i$ | ۲ | ۴ | ۶ | ۸ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v_i$(cm/s) | ۱/۰ | ۲/۰ | ۳/۰ | ۴/۰ | ۵/۰ |

مطلوب است (الف) $v_{avg}$، (ب) $v_{rms}$ و (پ) $v_P$.

●۳۵- تندی ۱۰ مولکول عبارت‌اند از ۲/۰، ۳/۰، ۴/۰، ...، ۱۱ کیلومتر بر ثانیه. (الف) تندی متوسط و (ب) تندی rms آنها چقدر است؟ SSM

●●۳۶- شکل ۱۵-۲۳ توزیع احتمال گاز نیتروژن را به دست می‌دهد. (الف) دمای گاز و (ب) تندی rms مولکولها چقدر است؟




شکل ۱۵-۲۳ مسئلهٔ ۳۶

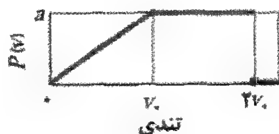
●●۳۷- در چه دمایی تندی rms (الف) $H_۲$ (مولکول هیدروژن) و (ب) $O_۲$ (مولکول اکسیژن) برابر با سرعت فرار از زمین است (جدول ۱۳-۲)؟ در چه دمایی تندی rms (پ) $H_۲$ و (ت) $O_۲$ برابر با تندی فرار از ماه است؟ (در ماه مقدار شتاب گرانشی در سطح ۰/۱۶g است). با بررسی پاسخهای (الف) و (ب)، آیا (ث) هیدروژن و (ج) اکسیژن در جو بالای زمین که دما تقریباً ۱۰۰۰K است، بیشتر است؟

●●۳۸- دمای دو محفظه یکسان است. یکی از محفظه‌ها محتوی گازی با فشار $p_۱$ است که جرم مولکولهای آن $m_۱$ و تندی rms آنها $v_{rms۱}$ است. محفظهٔ دیگر محتوی گازی با فشار $۲/۰p_۱$ است که جرم مولکولهای آن $m_۲$ و تندی متوسط آنها $v_{avg۲}=۲/۰v_{rms۱}$ است. نسبت جرم $m_۱/m_۲$ را پیدا کنید.

●●۳۹- یک مولکول هیدروژن (به قطر $۱/۰×۱۰^{-۸}$ cm) با تندی rms از کوره‌ای (با دمای $T=۴۰۰۰$K) به درون یک اتاقک حاوی اتمهای آرگون سرد (با قطر $۳/۰×۱۰^{-۸}$ cm) با چگالی $۴/۰×۱۰^{۱۹}$ اتم/$cm^۳$ فرار می‌کند. (الف) تندی مولکول هیدروژن چقدر است؟ (ب) اگر این مولکول با یک اتم آرگون برخورد کند، نزدیکترین فاصلهٔ بین مرکزهای آنها با فرض کروی بودن مولکولها، چقدر است؟ (*راهنمایی:* فرض کنید که اتمهای آرگون ساکن هستند. پویش آزاد میانگین مولکول هیدروژن با معادلهٔ ۱۵-۲۶ داده می‌شود نه با معادلهٔ ۱۵-۲۵.)

●●●۴۰- معلوم شده است که محتملترین تندی مولکولهای یک گاز در دمای (یکنواخت) $T_۲$ با تندی rms مولکولهای این گاز در دمای (یکنواخت) $T_۱$ برابر است. $T_۲/T_۱$ را محاسبه کنید.

●●۴۱- شکل ۱۵-۲۴ یک توزیع تندی فرضی را برای نمونه‌ای از $N$ ذره از یک گاز نشان می‌دهد [توجه کنید که به ازای $v>۲v_۰$ داریم $P(v)=۰$]. مقدارهای (الف) $av_۰$ (ب) $v_{avg}/v_۰$، و (پ) $v_{rms}/v_۰$، چقدر است؟ چه کسری از ذره‌ها دارای تندی برابر با $۱/۵v_۰$ و $۲/۰v_۰$ است؟ SSM WWW




شکل ۱۵-۲۴ مسئلهٔ ۴۱

## بخش ۱۵-۸ گرماهای ویژهٔ مولی گاز آرمانی

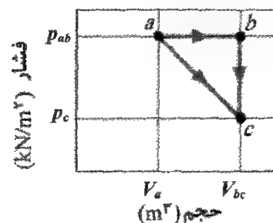
●۴۲- انرژی درونی ۱/۰mol را از یک گاز تک اتمی آرمانی در ۲۷۳K چقدر است؟

●●۴۳- دمای ۲/۰۰mol از یک گاز تک اتمی آرمانی در حجم ثابت به اندازهٔ ۱۵/۰K بالا برده می‌شود. (الف) کار $W$ انجام شده به وسیلهٔ گاز، (ب) انرژی انتقال یافته به صورت گرمای $Q$، (ب) تغییر $\Delta E_{int}$ در انرژی درونی گاز و (ت) تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی متوسط به ازای هر اتم چقدر است؟

●●۴۴- در فشار ثابت، دمای $۲/۰۰mol$ از یک گاز تک اتمی آرمانی $۱۵/۰K$ بالابرده می‌شود. (الف) کار $W$ انجام شده به وسیلهٔ گاز، (ب) انرژی انتقال یافته به صورت گرمای $Q$، (ب) تغییر $\Delta E_{int}$ در انرژی درونی گاز و (ت) تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی متوسط به ازای هر اتم چقدر است؟

●●۴۵- در محفظه‌ای مخلوطی از سه گاز قرار دارد که بر هم اثری ندارند. $۲/۴۰mol$ از گاز ۱ با $C_{V۱}=۱۲/۰J/mol\cdot K$، $۱/۵۰mol$ از گاز ۲ با $C_{V۲}=۱۲/۸\ J/mol\cdot K$، و $۳/۲۰mol$ از گاز ۳ با $C_{V۳}=۲۰/۰J/mol\cdot K$. مقدار $C_V$ مخلوط چقدر است؟ SSM

●●۴۶- یک مول از یک گاز دو اتمی آرمانی در راستای مسیر قطری از $a$ تا $c$ را در شکل ۱۵-۲۵ طی می‌کند. مقیاس محور عمودی با $p_{ab}=۵/۰kPa$ و $p_c=۲/۰kPa$ و مقیاس محور افقی با $V_{bc}=۴/۰m^۳$ و $V_a=۲/۰m^۳$ مشخص شده است. در این انتقال (الف) تغییر در انرژی درونی گاز چقدر است؟ و (ب) چقدر انرژی به صورت گرما به گاز داده می‌شود؟ (ب) اگر گاز در راستای مسیر غیر مستقیم $abc$ از $a$ تا $c$ را طی کند چقدر گرما لازم است؟




شکل ۱۵-۲۵ مسئلهٔ ۴۶

●●۴۷- جرم یک مولکول گاز را می‌توان از گرمای ویژهٔ آن در حجم ثابت $c_V$ محاسبه کرد. (توجه کنید که این همان $C_V$ نیست.) با قرار دادن $c_V=۰/۰۷۵cal/g\cdot C^\circ$ برای آرگون، (الف) جرم اتم آرگون و (ب) جرم مولی آرگون را محاسبه کنید. ILW

●●۴۸- هرگاه $۲۰/۹J$ انرژی به صورت گرما به گاز آرمانی خاصی افزوده شود، حجم گاز $۵۰/۰cm^۳$ به $۱۰۰cm^۳$ می‌رسد در حالی که فشار آن در $۱/۰۰atm$ ثابت می‌ماند. (الف) انرژی درونی گاز چقدر تغییر می‌کند؟ اگر مقدار گاز $۲/۰۰\times۱۰^{-۳}\ mol$ باشد، (ب) $C_p$ و (پ) $C_V$ را پیدا کنید.

●●۴۹- بدون اینکه فشار گاز تغییر کند، دمای $۳/۰۰mol$ از یک گاز دو اتمی آرمانی به اندازهٔ $۴۰/۰C^\circ$ افزایش می‌یابد. مولکولهای گاز چرخش می‌کنند ولی نوسان نمی‌کنند. (الف) چقدر انرژی به صورت گرما به گاز انتقال می‌یابد؟ (ب) تغییر در انرژی درونی گاز چقدر است؟ (پ) چقدر کار به وسیلهٔ گاز انجام می‌گیرد؟ (ت) انرژی جنبشی انتقالی گاز چقدر افزایش می‌یابد؟

## بخش ۱۵-۹ درجه‌های آزادی و گرماهای ویژهٔ مولی

●۵۰- مقدار $۷۰J$ انرژی به صورت گرما به یک گاز دو اتمی می‌دهیم تا در فشار ثابت منبسط شود. مولکولهای این گاز چرخش می‌کنند ولی نوسان نمی‌کنند. انرژی دورنی گاز چقدر افزایش می‌یابد؟

●۵۱- وقتی $۱/۰mol$ از گاز اکسیژن $(O_۲)$ با شروع از $۰^\circ C$ در فشار ثابت گرم شود، چقدر انرژی به صورت گرما باید به آن افزوده شود تا حجم آن دو برابر شود؟ (مولکولها چرخش می‌کنند ولی نوسان نمی‌کنند.) ILW

●●۵۲- فرض کنید $۱۲/۰g$ گاز اکسیژن $(O_۲)$ در فشار جوی ثابت از $۲۵/۰°C$ تا $۱۲۵°C$ گرم می‌شود. (الف) چند مول اکسیژن وجود دارد؟ (در مورد جرم مولی به جدول ۱۵-۱ نگاه کنید.) (ب) چقدر انرژی به صورت گرما به اکسیژن داده می‌شود؟ (مولکولها چرخش می‌کنند ولی نوسان نمی‌کنند.) (پ) چه کسری از گرما برای افزایش انرژی درونی اکسیژن مصرف می‌شود.

●●۵۳- فرض کنید دمای $۴/۰۰mol$ از یک گاز دو اتمی آرمانی که مولکولهایش چرخش می‌کنند اما نوسان نمی‌کنند، در تحت شرایط فشار ثابت به اندازهٔ $۶۰/۰K$ افزایش یابد. (الف) انرژی انتقال یافته به صورت گرمای $Q$، (ب) تغییر در $\Delta E_{int}$ انرژی درونی گاز، (پ) کار $W$ انجام شده به وسیلهٔ گاز و (ت) تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی انتقالی کل گاز چقدر است؟ SSM WWW

## بخش ۱۵-۱۱ انبساط بی‌دررو گاز آرمانی

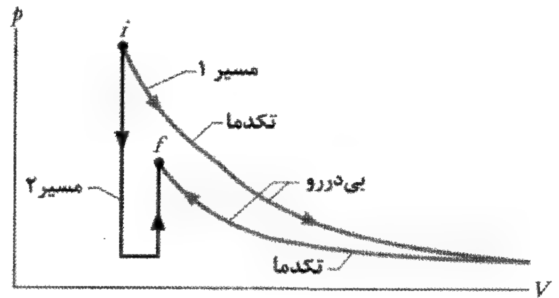
●۵۴- فرض کنید $۱/۰۰L$ گاز با $\gamma=۱/۳۰$ که در آغاز در $۲۳۷K$ و $۱/۰۰atm$ قرار دارد به طور ناگهانی و به طور بی‌دررو تا نصف حجم خود متراکم شود. (الف) فشار و (ب) دمای نهایی گاز را پیدا کنید (پ) اگر در دمای ثابت گاز تا $۲۳۷\ K$ سرد شود، حجم نهایی آن چقدر می‌شود؟

●۵۵- گاز معینی در فشار $۱/۲\ atm$ و دمای $۳۱۰K$ حجمی برابر با $۴/۳L$ را اشغال می‌کند. این گاز به طور بی‌دررو تا حجم $۰/۷۶L$ متراکم می‌شود. (الف) فشار و (ب) دمای نهایی را با فرض اینکه گاز آرمانی و برای آن $\gamma=۱/۴$ باشد، تعیین کنید.

●۵۶- می‌دانیم که برای یک فرایند بی‌دررو، ثابت $=pV^\gamma$ است. این مقدار «ثابت» را برای فرایند بی‌دررو مربوط به دقیقاً $۲/۰mol$ گاز آرمانی که از حالت دقیقاً $p=۱/۰atm$ و $T=۳۰۰K$ بگذرد محاسبه کنید. فرض کنید مولکول یک گاز دو اتمی است که مولکولهای آن چرخش می‌کنند ولی نوسان نمی‌کنند.

●●۵۷- شکل ۱۵-۲۶ دو مسیر را نشان می‌دهد که می‌توانند توسط یک گاز از نقطهٔ اولیهٔ $i$ تا نقطهٔ نهایی $f$ طی شود. مسیر ۱

شامل یک انبساط تکدما (اندازهٔ کار $50\,J$)، یک انبساط بی‌دررو (اندازهٔ کار $40\,J$)، یک تراکم تکدما (اندازهٔ کار $30\,J$) و سپس یک تراکم بی‌دررو (اندازهٔ کار $25\,J$) است. اگر گاز از نقطهٔ $i$ به نقطهٔ $f$ در راستای مسیر ۲ برود تغییر در انرژی درونی چقدر است؟




**شکل ۱۵-۲۶** مسئلهٔ ۵۷

●●۵۸- *باد بی دررو. جریان طبیعی هوا در کوههای راکی*[1] از غرب به شرق است. هوا رطوبت خود را از دست می‌دهد و وقتی ضلع غربی کوهها را می‌پیماید سرد می‌شود. وقتی به ضلع شرقی فرود می‌آید، افزایش در فشار به طرف ارتفاعهای پایینتر موجب افزایش دما می‌شود. جریان که باد چینوک[2] نامیده می‌شود می‌تواند دمای هوا را در کوهپایه به طور سریع افزایش دهد. فرض کنید که فشار $p$ هوا به ارتفاع $y$ با رابطهٔ $p = p_0 \exp(-ay)$ داده می‌شود که $p_0 = 1/00\,atm$ و $a = 1/16\times10^{-4}\,m^{-1}$ است. هم‌چنین فرض کنید که نسبت گرماهای ویژهٔ مولی $\gamma = \frac{4}{3}$ است. یک قسمت از هوا با دمای اولیهٔ $-5/00°C$ به طور بی دررو از $y_1 = 4267\,m$ به $y = 1567\,m$ می‌رسد. دما در انتهای این پایین آمدن چقدر است؟

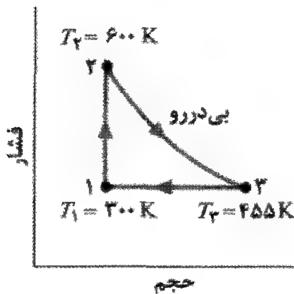
●●۵۹- گازی در حالت اولیهٔ $i$ تا حالت نهایی $f$ در مسیر ۱ یا در مسیر ۲ از نمودار $p$-$V$ منبسط می‌شود. مسیر ۱ سه مرحله دارد: یک انبساط تکدما (اندازهٔ کار $40\,J$)، یک انبساط بی‌دررو (اندازهٔ کار $20\,J$) و یک انبساط تکدمای دیگر (اندازهٔ کار $30\,J$). مسیر ۲ دو مرحله دارد: یک کاهش فشار در حجم ثابت و یک انبساط در فشار ثابت. تغییر در انرژی درونی گاز در مسیر ۲ چقدر است؟

●●۶۰- *باز کردن نوشابه.* در یک بطری نوشابه، مقداری گاز (عمدتاً کربن دی اکسید) بین مایع و درپوش در فشار $p_i = 5/00\,atm$ قرار دارد. وقتی در نوشابه از بطری جدا می‌شود، گاز یک انبساط بی در پیدا می‌کند تا اینکه فشار آن به فشار هوای محیط $1/00\,atm$ برسد. فرض کنید که نسبت گرماهای ویژه مولی $\gamma = \frac{4}{3}$ است. اگر دمای اولیهٔ گاز $T_i = 5/00°C$ باشد، دمای آن در انتهای انبساط بی‌دررو چقدر می‌شود؟

●●۶۱- حجم یک گاز آرمانی به طور بی‌دررو از $200\,L$ به $74/3\,L$ کاهش می‌یابد. فشار و دمای اولیه عبارت‌اند از $1/00\,atm$ و $300\,K$. فشار نهایی $4/00\,atm$ است. (الف) آیا گاز تک اتمی، دو اتمی یا چند اتمی است؟ (ب) دمای نهایی چقدر است؟ (پ) چند مول در گاز وجود دارد؟

●●●۶۲- یک گاز آرمانی دو اتمی با چرخش ولی بدون نوسان به طور بی‌دررو منبسط می‌شود. فشار اولیه و حجم اولیهٔ آن $1/20\,atm$ و $0/200\,m^3$ و فشار نهایی آن $2/40\,atm$ است. چقدر کار توسط گاز انجام می‌شود؟

●●●۶۳- شکل ۱۵-۲۷ چرخه‌ای را نشان می‌دهد که به وسیلهٔ $1/00\,mol$ از یک گاز تک اتمی آرمانی پیموده می‌شود. برای فرایند ۱←۲، (الف) گرمای $Q$، (ب) تغییر در انرژی درونی، $\Delta E_{int}$ و (پ) کار انجام شدهٔ $W$، چقدر است؟ در فرایند ۳←۲ (ت) $Q$، (ث) $\Delta E_{int}$ و (ج) $W$، چقدر است؟ در فرایند ۱←۳، (چ) $Q$، (ح) $\Delta E_{int}$ و (خ) $W$، چقدر است؟ در کل چرخه (د) $Q$، (ذ) $\Delta E_{int}$ و (ر) $W$، چقدر است؟ فشار اولیه در نقطهٔ ۱ برابر با $1/00\,atm$ $(=1/013\times10^5\,Pa)$ است. (ز) حجم و (ژ) فشار در نقطهٔ ۲ و (س) حجم و (ش) فشار در نقطهٔ ۳ چقدر است؟




**شکل ۱۵-۲۷** مسئلهٔ ۶۳

### مسئله‌های اضافی

۶۴- در یک ابرگازی بین سیاره‌ای در $50/0\,K$، فشار $1/00\times10^{-8}\,Pa$ با فرض اینکه قطر مولکولهای گاز در ابر برابر $20/0\,nm$ باشند، پویش آزاد میانگین چقدر است؟

۶۵- دمای $3/00\,mol$ از گازی با $C_V = 6/00\,cal/mol\cdot K$ تا $50/0\,K$ افزایش می‌یابد. اگر فرایند در حجم ثابت باشد، (الف) انرژی انتقال یافته به صورت گرمای $Q$، (ب) کار انجام شدهٔ $W$ به وسیلهٔ گاز، (پ) تغییر $\Delta E_{int}$ در انرژی درونی گاز و (ت) تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی انتقالی کلی، چقدر است؟ اگر فرایند در *فشار ثابت* باشد، (ث) $Q$، (ج) $W$، (چ) $\Delta E_{int}$ و (ح) $\Delta K$ چقدر است؟ اگر فرایند *بی‌دررو* باشد، (خ) $Q$، (د) $W$، (ذ) $\Delta E_{int}$ و (ر) $\Delta K$، چقدر است؟

1. Rocky
2. Chinook. نام این باد از یک قبیلهٔ سرخ‌پوستی به همین نام گرفته شده است.

۶۶- گاز اکسیژن ($O_2$) در دمای $237\,K$ و فشار $1/0\,atm$ در ظرفی مکعبی شکل به ضلع $10\,cm$ محبوس شده است. $\Delta U_g/K_{avg}$ را محاسبه کنید، که در آن $\Delta U_g$ تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی یک مولکول اکسیژن است که از ارتفاع ظرف سقوط می‌کند و $K_{avg}$ انرژی جنبشی انتقالی متوسط مولکول است.

۶۷- وزن کل پوشش و سبد یک بالون هوای گرم $2/45\,kN$ و ظرفیت پوشش آن (حجم) $2/18\times10^3\,m^3$ است. وقتی این بالون کاملاً باد شود، دمای هوای اطراف بالون باید چقدر باشد تا بالون توان بالابردن *ظرفیت کامل* خود را که برابر با $2/67\,kN$ (علاوه بر وزن بالون) است داشته باشد؟ فرض کنید هوای اطراف در دمای $20/0\,^\circ C$ دارای وزن بر یکای حجم $11/9\,N/m^3$ و جرم مولکولی $0/028\,kg/mole$ است و فشار $1/0\,atm$ باشد. SSM

۶۸- (الف) یک گاز آرمانی در ابتدا در فشار $p_0$ انبساط آزاد می‌یابد تا اینکه حجم آن $3/00$ برابر حجم اولیه شود. در این صورت نسبت فشار آن به $p_0$ چقدر می‌شود؟ (ب) سپس گاز به آرامی و به طور بی‌دررو متراکم می‌شود تا به حجم اولیه برگردد. پس از تراکم فشار برابر $(3/00)^{1/3}p_0$ است. آیا گاز تک اتمی، دو اتمی یا چند اتمی است؟ (پ) نسبت انرژی جنبشی متوسط هر مولکول در حالت نهایی به مقدار آن در حالت اولیه چقدر است؟

۶۹- دمای $2/00\,mol$ از یک گاز آرمانی یک اتمی در یک فرایند بی‌دررو $15/0\,K$ افزایش می‌یابد. (الف) کار انجام شدهٔ $W$ به وسیلهٔ گاز، (ب) انرژی انتقال یافته به صورت گرمای $Q$، (پ) تغییر $\Delta E_{int}$ در انرژی درونی گاز و (ت) تغییر $\Delta K$ در انرژی جنبشی متوسط هر اتم، چقدر است؟ SSM

۷۰- ضمن تراکمی در فشار ثابت $250\,Pa$، حجم یک گاز آرمانی از $0/80\,m^3$ به $0/20\,m^3$ کاهش می‌یابد. دمای اولیه $360\,K$ و گاز $210\,J$ را به صورت گرما از دست می‌دهد. (الف) تغییر در انرژی درونی گاز و (ب) دمای نهایی گاز، چقدر است.

۷۱- با چه بسامدی مولکولها در گاز اکسیژن ($O_2$) در دمای $400\,K$ و فشار $2/00\,atm$ برخورد می‌کنند؟ فرض کنید که قطر مولکولی $290\,pm$ و گاز آرمانی است. SSM

۷۲- یک گاز آرمانی از $1/50\,mol$ مولکولهای دو اتمی با چرخش ولی بدون نوسان تشکیل شده است. قطر مولکولی $250\,pm$ است. گاز در فشار ثابت $1/50\times10^5\,Pa$ با انتقال $200\,J$ به صورت گرما، انبساط می‌یابد. تغییر در پویش آزاد میانگین مولکولها چقدر است؟

۷۳- دمای یک گاز آرمانی تک اتمی در آغاز $330\,K$ و فشار آن $6/00\,atm$ است. این گاز از حجم $500\,cm^3$ تا $1500\,cm^3$ منبسط می‌شود. اگر انبساط تکدما باشد. (الف) فشار نهایی و (ب) کار انجام شده به وسیلهٔ گاز چقدر است؟ حال اگر انبساط بی‌دررو باشد، (پ) فشار نهایی و (ت) کار انجام شده به وسیلهٔ گاز چقدر است؟

۷۴- یک گاز آرمانی شامل $3/00\,mol$ در آغاز در حالت ۱ در فشار $p_1=20/0\,atm$ و حجم $V_1=1500\,cm^3$ قرار دارد. نخست این گاز را به حالت ۲ با فشار $p_2=0/50\,p_1$ و حجم $V_2=2/00V_1$ می‌بریم. سپس آن را به حالت ۳ با فشار $p_3=2/00\,p_1$ و حجم $V_3=0/50V_1$ می‌بریم. دمای گاز در (الف) حالت ۱ و (ب) حالت ۲ چقدر است؟ (پ) تغییر خالص در انرژی درونی از حالت ۱ به حالت ۳ چقدر است؟

۷۵- یک گاز آرمانی را با تراکم بی‌دررو از $p=1/0\,atm$، $V=1/0\times10^6\,L$، $T=0/0\,^\circ C$ به $p=1/0\times10^5\,atm$، $V=1/0\times10^3\,L$ می‌بریم. (الف) آیا گاز تک اتمی، دو اتمی یا چند اتمی است؟ (ب) دمای نهایی چقدر است؟ (پ) چند مول در گاز وجود دارد؟ انرژی جنبشی انتقالی کل بر مول (ت) پیش و (ث) پس از تراکم، چقدر است؟ (ج) نسبت مربع تندیهای rms پیش از تراکم و پس از آن چقدر است؟

۷۶- یک گاز آرمانی با دمای اولیهٔ $T_1$ و حجم اولیهٔ $2/0\,m^3$ به طور بی‌دررو تا حجم $4/0\,m^3$ منبسط می‌شود. سپس به طور تکدما تا حجم $10\,m^3$ منبسط شده و سپس به طور بی‌دررو به دمای $T_1$ متراکم می‌شود. حجم نهایی گاز چقدر است؟

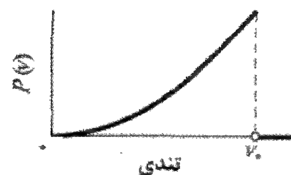
۷۷- نمونه‌ای از یک گاز آرمانی از فشار و حجم اولیهٔ $32\,atm$ و $1/0\,L$ به حجم نهایی $4/0\,L$ انبساط می‌یابد. دمای اولیه $300\,K$ است. اگر گاز تک اتمی و انبساط تکدما باشد، (الف) فشار نهایی $p_f$، دمای نهایی $T_f$ و (پ) کار انجام شدهٔ $W$ به وسیلهٔ گاز چقدر است؟ اگر گاز تک اتمی و انبساط بی‌دررو باشد، (ت) $p_f$، (ث) $T_f$ و (ج) $W$ چقدر است؟ اگر گاز دو اتمی و انبساط بی‌دررو باشد، (چ) $p_f$، (ح) $T_f$ و (خ) $W$ چقدر است؟ SSM

۷۸- کار انجام شده به وسیلهٔ یک عامل خارجی را در حین تراکم تکدمای $1/00\,mol$ اکسیژن از حجم $22/4\,L$ در $0\,^\circ C$ و $1/00\,atm$ تا حجم $16/8\,L$ محاسبه کنید.

۷۹- یک مخزن فولادی محتوی $300\,g$ گاز آمونیاک ($NH_3$) در فشار $1/35\times10^6\,Pa$ و دمای $77\,^\circ C$ است. (الف) حجم مخزن برحسب لیتر چقدر است؟ (ب) پس از مدتی دما $22\,^\circ C$ و فشار $8/7\times10^5\,Pa$ می‌شود. چند گرم از مخزن نشت کرده است؟

۸۰- در چه دمایی اتمهای گاز هلیوم دارای تندی rms برابر با تندی rms گاز هیدروژن در $20/0\,^\circ C$ است؟ (جرمهای مولی در جدول ۱۵-۱ داده شده‌اند.)

۸۱- شکل ۱۵-۲۸ یک توزیع تندی فرضی از ذره‌های گاز معینی را نشان می‌دهد: به ازای $0<v\le v_0$ داریم $P(v)=Cv^2$ و به ازای $v>v_0$ داریم $P(v)=0$. (الف) عبارتی را برای $C$ برحسب $v_0$ پیدا کنید، (ب) تندی متوسط ذره‌ها و (پ) تندی rms آنها را پیدا کنید. SSM




شکل ۱۵-۲۸ مسئلهٔ ۸۱

۸۲- در یک فرایند صنعتی حجم ۲۵/۰mol از یک گاز تک اتمی آرمانی با آهنگ یکنواخت از $۰/۶۱۶m^۳$ به $۰/۳۰۸m^۳$ در مدت ۲/۰۰h کاهش می‌یابد درحالی که دمای آن با آهنگ یکنواخت از ۲۷/۰°C به ۴۵۰°C افزایش می‌یابد. در طی این فرایند، گاز از حالتهای تعادل ترمودینامیکی می‌گذرد. (الف) کار به روش افزایش انجام شده روی گاز (ب) انرژی رو به افزایش جذب شده به صورت گرما توسط گاز و (پ) گرمای ویژهٔ مولی این فرایند، چقدر است؟ (*راهنمایی:* برای محاسبهٔ انتگرالی کار می‌توانید از انتگرال نامعین زیر استفاده کنید.)

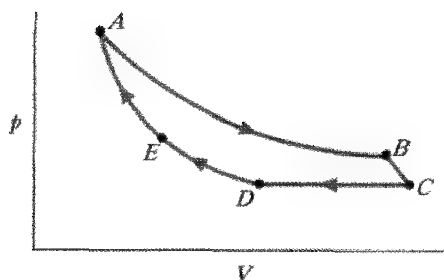
$$\int \frac{a+bx}{A+Bx}dx = \frac{bx}{B} + \frac{aB-bA}{B^۲}\ln(A+Bx)$$

فرض کنید این فرایند با یک فرایند دو مرحله‌ای که به همان حالت نهایی برسد جایگزین شود. در مرحلهٔ ۱ حجم گاز در دمای ثابت کاهش یابد و در مرحلهٔ ۲ در حجم ثابت دمای گاز افزایش یابد. برای این فرایند (ت) کار روبه افزایش انجام شده روی گاز، (ث) انرژی رو به افزایش جذب شده به صورت گرما توسط گاز و (ج) گرمای ویژهٔ مولی برای این فرایند چقدر است؟

۸۳- یک گاز آرمانی از حجم اولیهٔ $۴/۰۰m^۳$ تا حجم نهایی $۳/۰۰m^۳$ به صورت تکدما متراکم می‌شود. ۳/۵۰mol گاز وجود دارد و دمای آن ۱۰/۰°C است. (الف) چقدر کار به وسیلهٔ گاز انجام می‌گیرد؟ (ب) بین گاز و محیط اطراف آن چقدر انرژی به صورت گرما انتقال می‌یابد؟ SSM

۸۴- (الف)تعداد مولکولها بر متر مکعب در هوای ۲۰°C و فشار ۱atm ($=۱/۰۱\times۱۰^۵$ Pa) چقدر است؟ (ب) جرم $۱/۰m^۳$ از این هوا چقدر است؟ فرض کنید که ۷۵ درصد از مولکولها نیتروژن ($N_۲$) و ۲۵ درصد اکسیژن ($O_۲$) هستند.

۸۵- شکل ۱۵-۲۹ چرخه‌ای شامل پنج مسیر را نشان می‌دهد: *AB* تکدما در ۳۰۰K، BC بی‌دررو با کار ۵/۰J ، *CD* در فشار ثابت ۵atm، *DE* تکدما و *EA* بی‌دررو با تغییر در انرژی درونی ۸/۰J. تغییر در انرژی درونی گاز در طول مسیر *CD* چقدر است؟




شکل ۱۵-۲۹ مسئلهٔ ۸۵

۸۶- یک گاز آرمانی با دمای اولیهٔ ۳۰۰K در فشار ثابت $۲۵N/m^۲$ از حجم $۳/۰m^۳$ تا حجم $۱/۸m^۳$ متراکم می‌شود. در این فرایند ۷۵J به صورت گرما از دست می‌رود. (الف) تغییر در انرژی درونی گاز و (ب) دمای نهایی گاز چقدر است؟

۸۷- یک گاز آرمانی چرخهٔ کاملی را در سه مرحله طی می‌کند: انبساط بی‌دررو با کار برابر با ۱۲۵ J، تراکم تکدما در ۳۲۵ K و افزایش فشار در حجم ثابت. (الف) نمودار *p-V* را برای این سه مرحله رسم کنید. (ب) چقدر انرژی به صورت گرما در مرحلهٔ ۳ انتقال می‌یابد؟ و (پ) آیا انتقال به *گاز* صورت می‌گیرد یا *از آن*؟

۸۸- (الف) حجم اشغال شده به وسیلهٔ ۱/۰۰mol از یک گاز آرمانی در شرایط استاندارد - یعنی ۱/۰۰atm ($=۱/۰۱\times۱۰^۵$ Pa) و ۲۷۳ K ، چقدر است؟ نشان دهید که تعداد مولکول بر سانتی‌متر مکعب (*عدد لوشمیت*[1]) در شرایط استاندارد $۲/۶۹\times۱۰^۹$ است.

1. Loshmidt number

# ۱۶ انتروپی و قانون دوم ترمودینامیک



باد شدن بادکنکی با نفس شما و کشیده شدن نوار لاستیکی با دستان شما مستلزم تلاش است چون لاستیک (یا مواد لاستیک گونه) در برابر کشیده شدن مقاومت می‌کنند. در بیشتر مواد مقاومت در برابر کشیدن به دلیل نیروهایی است که اتمها و مولکولها را به یکدیگر پیوند می‌دهد. چون هر کشیدگی می‌خواهد اتمها و مولکولها را از یکدیگر جدا کند، نیروهای پیوندی در برابر کشیدگی مقاومت می‌کنند. با وجود این، لاستیک خیلی متفاوت است، چون کشسان بوده و در آن کشیدگی فاصلهٔ بین اتمها و مولکولها را زیاد نمی‌کند. بنابراین، مقاومت آن به دلیل نیروهای پیوندی نیست بلکه به دلیل کمیتی است که نسبت به گذشت زمان جهت دارد.

**چه چیزی موجب می‌شود یک نوار یا بادکنک لاستیکی در برابر کشیدگی مقاومت کند؟**

پاسخ آن در همین فصل.

## ۱۶-۱ فیزیک چیست؟

زمان جهت دارد، جهتی که در آن عمر ما می‌گذرد. به فرایندهای یک سویه خو گرفته‌ایم یعنی فرایندهایی که فقط می‌توانند با ترتیب معینی (راه درست) رخ می‌دهند و هرگز با ترتیب معکوس (راه نادرست) رخ نمی‌دهند. تخم مرغی روی کف اتاق می‌افتد، پیتزا پخته می‌شود، اتومبیلی به تیر چراغ برخورد می‌کند، ساحل ماسه‌ای بر اثر موجهای بزرگ فرسایش می‌یابد، این فرایندهای یک سویه **برگشت ناپذیر** هستند، به این معنی که نمی‌توانند تنها به کمک تغییرات کوچک در محیط خود معکوس شوند.

یکی از هدفهای فیزیک عبارت است از درک اینکه چرا زمان جهت دارد و چرا فرایندهای یک سویه برگشت ناپذیرند. اگر چه به نظر می‌رسد این فیزیک پیامد عملی در زندگی روزمره ندارد، ولی در واقع قلب هر موتوری مانند موتور یک اتومبیل است، چون تعیین می‌کند که یک موتور چگونه می‌تواند به خوبی کار کند.

کلید درک اینکه چرا فرایندهای یک سویه نمی‌توانند معکوس عمل کنند در کمیتی به نام *انتروپی* نهفته است.

## ۱۶-۲ فرایندهای برگشت ناپذیر و انتروپی

مشخصهٔ یک سویه بودن فرایندهای برگشت ناپذیر چنان‌فراگیر است که آنها را امری مسلم در نظر می‌گیریم. اگر این فرایندها در سوی نادرست *خودبه‌خود* (توسط خودشان) رخ می‌دادند، شگفت‌زده می‌شدیم. هنوز هیچ‌*کدام* از این فرایندها که در جهت نادرست روی دهند قانون پایستگی انرژی را نقض نکرده‌اند.

برای مثال اگر یک فنجان قهوهٔ داغ را در دست خود بگیرید، اگر دست شما سردتر و فنجان گرمتر شود، شگفت زده خواهید شد. آشکار است که این راهی نادرست برای انتقال انرژی است، ولی انرژی کل دستگاه بستهٔ (*دست + فنجان قهوه*) همان انرژی کلی خواهد بود که این فرایند از راه درست انجام گیرد. به عنوان مثال دیگر، اگریک بالون هلیومی را سوراخ کنید شگفت زده خواهید شد اگر پس از آن بتوانید همهٔ مولکولهای هلیوم را به شکل اولیهٔ بالون جمع‌آوری کنید. آشکار است که این برای پخش شدن مولکولها راه نادرستی است، ولی انرژی کل دستگاه بستهٔ (*مولکولها + اتاق*) همان خواهد بود که این کار از راه درست انجام گیرد.

بنابراین، تغییر انرژی در یک دستگاه بسته در جهت فرایندهای برگشت ناپذیر نیست. بلکه فرایند جهتی را به خود می‌گیرد که با خاصیت دیگری که در این فصل دربارهٔ آن بحث می‌کنیم – *تغییر در انتروپی* $\Delta S$ دستگاه مشخص می‌شود. تغییر در انتروپی یک دستگاه در بخش بعدی تعریف می‌شود، ولی در اینجا خاصیت اصلی آن را که اغلب *اصل موضوع انتروپی* نامیده می‌شود، بیان می‌کنیم:

> اگر یک فرایند برگشت ناپذیر، در یک دستگاه بسته رخ دهد، انتروپی $S$ دستگاه همیشه افزایش می‌یابد و هرگز کاهش پیدا نمی‌کند.

انتروپی از این نظر با انرژی فرق دارد که انتروپی از یک قانون پایستگی پیروی نمی‌کند. *انرژی* یک دستگاه بسته پایسته است، یعنی همیشه ثابت می‌ماند. در فرایندهای برگشت ناپذیر، *انتروپی* یک دستگاه بسته همیشه افزایش می‌یابد. به موجب این خاصیت، تغییر در انتروپی گاه «پیکان زمان» نامیده می‌شود. برای مثال، ترکیدگی یک دانهٔ ذرت را به جهت رو به جلوی زمان و افزایش در انتروپی نسبت می‌دهیم. جهت رو به عقب زمان (چرخش رو به عقب نوار ویدیوئی) متناظر با تشکیل دوبارهٔ ذرت ترکیده به صورت دانهٔ اولیه است. چون این فرایند رو به عقب با کاهش یافتن انتروپی همراه است هرگز رخ نمی‌دهد.

دو روش هم‌ارز برای تعریف تغییر در انتروپی یک دستگاه وجود دارد: (۱) برحسب دمای دستگاه و انرژیی که دستگاه به صورت گرما به دست می‌آورد یا از دست می‌دهد، و (۲) با شمارش راههایی که در آن اتمها یا مولکولهای سازندهٔ دستگاه بتوانند آرایش یابند. رویکرد اول را در بخش بعدی و دومی را در بخش ۱۶-۸ به کار خواهیم برد.

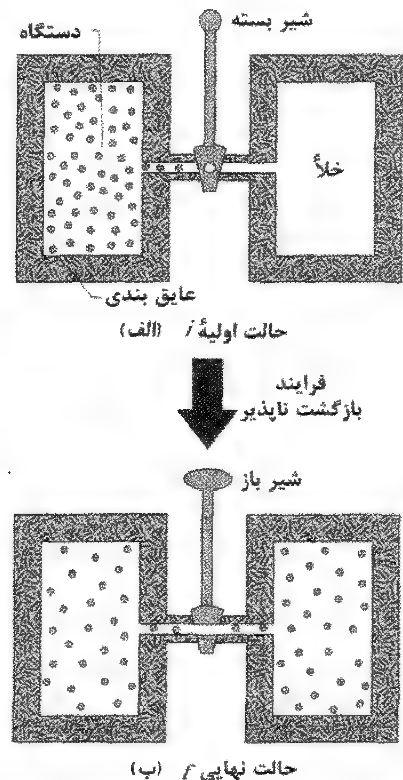
## ۱۶-۳ تغییر در انتروپی

تعریف *تغییر در انتروپی* را با نگاهی دوباره به فرایندی که در بخشهای ۱۴-۱۱ و ۱۵-۱۱ توصیف شد بررسی می‌کنیم: انبساط آزاد یک گاز آرمانی. شکل ۱۶-۱ الف گازی را در حالت تعادل اولیهٔ $i$ نشان می‌دهد که به وسیلهٔ شیری بسته در نیمهٔ چپ یک مخزن عایق‌بندی شده از نظر گرمایی محبوس شده است. اگر شیر را باز کنیم، گاز برای پرکردن تمام مخزن هجوم می‌آورد، تا سرانجام به حالت تعادل نهایی $f$ نشان داده شده در شکل ۱۶-۱ ب می‌رسد. این یک فرایند برگشت ناپذیر است، تمام مولکولهای گاز هرگز به سمت چپ مخزن بر نخواهند گشت.

نمودار $p$-$V$ این فرایند در شکل ۱۶-۲، فشار و حجم گاز را در حالت اولیهٔ $i$ و حالت نهایی $f$ نشان می‌دهد. فشار و حجم *خاصیتهای حالت* هستند، خاصیتهایی که فقط به حالت گاز بستگی دارند نه به چگونگی رسیدن به آن حالت. سایر خاصیتها دما و انرژی هستند. اکنون فرض می‌کنیم که گاز یک خاصیت حالت دیگر نیز به نام انتروپی دارد. افزون بر این **تغییر در انتروپی** $S_f - S_i$ یک دستگاه را در ضمن فرایندی که دستگاه از یک حالت اولیهٔ $i$ و حالت نهایی $f$ انتقال می‌یابد، به این صورت تعریف می‌کنیم

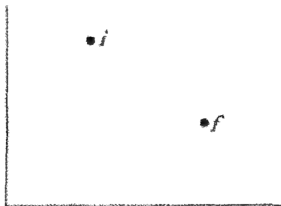
$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad \text{(تعریف تغییر در انتروپی)} \quad (۱-۱۶)$$

در اینجا $Q$ انرژی گرمایی داده شده به دستگاه یا گرفته شده از آن و $T$ دمای دستگاه برحسب کلوین است. بنابراین، تغییر در انتروپی نه فقط به انرژی انتقال یافته به صورت گرما بلکه به دمایی که در آن این انتقال صورت می‌گیرد نیز بستگی دارد. چون $T$ همیشه مثبت است، علامت $\Delta S$ همان علامت $Q$ است. از معادلهٔ ۱۶-۱ می‌توان دید که یکای SI انتروپی و تغییر انتروپی ژول بر کلوین است.




**شکل ۱۶-۱** انبساط آزاد یک گاز آرمانی، (الف) گاز به وسیلهٔ یک شیر بسته در نیمهٔ چپ مخزن عایق‌بندی شده محبوس است.(ب) هنگامی که شیر باز شود گاز برای پرکردن کل مخزن هجوم می‌برد. این فرایند برگشت ناپذیر است؛ یعنی جمع‌آوری خود به خودی گاز در نیمهٔ چپ مخزن به طور معکوس رخ نمی‌دهد.

اما در به کارگیری معادلهٔ ۱۶-۱ دربارهٔ انبساط آزاد شکل ۱۶-۱ مشکلی وجود دارد. وقتی که گاز برای پرکردن کل مخزن هجوم می‌برد، فشار، دما و حجم گاز به طور پیش‌بینی نشده افت و خیز می‌کند. به عبارت دیگر این کمیتها نمی‌توانند دنباله‌ای از مقدارهای تعادلی با تعریف معین را در طی مرحله‌های میانی تغییر از حالت اولیهٔ $i$ به حالت نهایی $f$ داشته باشند. بنابراین، برای انبساط آزاد روی نمودار $p$-$V$ شکل ۱۶-۲ نمی‌توان یک مسیر فشار - حجم را رسم کرد و مهمتر اینکه نمی‌توان رابطهٔ میان $Q$ و $T$ را که در انتگرالگیری معادلهٔ ۱۶-۱ مورد نیاز است، پیدا کرد.



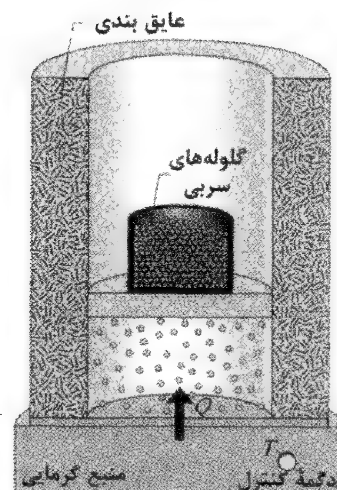

**شکل ۱۶-۲** نمودار $p$-$V$ که حالت اولیهٔ $i$ و حالت نهایی $f$ انبساط آزاد شکل ۱۶-۱ را نشان می‌دهد. حالتهای میانی گاز را نمی‌توان نشان داد چون آنها حالتهای تعادل نیستند.

البته اگر انتروپی به واقع یک خاصیت حالت باشد، تغییر انتروپی میان حالتهای $i$ و $f$ باید *فقط به آن حالتها* بستگی داشته باشد و هرگز به مسیری که دستگاه از یک حالت به حالت دیگر می‌رود بستگی نداشته باشد. حال فرض کنید که به جای انبساط آزاد برگشت ناپذیر شکل ۱۶-۱ فرایند *برگشت‌پذیر* را که حالتهای $i$ و $f$ را به هم وصل می‌کند در نظر بگیریم. با فرایند برگشت‌پذیر می‌توان مسیرفشار- حجم روی نمودار $p$-$V$ را رسم و رابطه‌ای میان $Q$ و $T$ پیدا کرد تا بتوان از معادلهٔ ۱۶-۱ تغییر انتروپی را به دست آورد.

در بخش ۱۵-۱۱ دیدیم که دمای یک گاز آرمانی در طی انبساط آزاد تغییر نمی‌کند: $T_i = T_f = T$ . پس، نقطه‌های $i$ و $f$ در شکل ۱۶-۲ باید روی یک تکدما واقع باشند. بنابراین، فرایند جایگزین مناسب عبارت است از یک انبساط تکدمای برگشت‌پذیر از حالت $i$ به حالت $f$ که در واقع در طول منحنی تکدما پیش می‌رود. به‌علاوه، چون $T$ در سراسر یک انبساط تکدمای برگشت‌پذیر ثابت است، انتگرال معادلهٔ ۱۶-۱ خیلی ساده می‌شود.

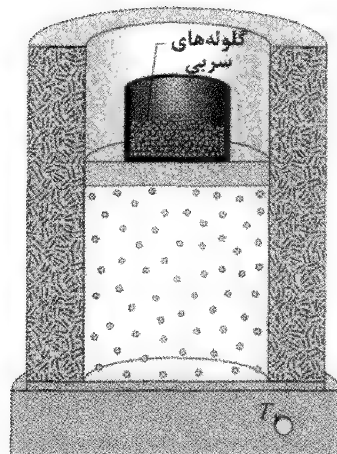
شکل ۱۶-۳ چگونگی ایجاد چنین انبساط تکدمای برگشت‌پذیری را نشان می‌دهد. گاز در یک استوانهٔ عایق‌بندی شده که روی یک منبع گرمایی با دمای $T$ قرار دارد محبوس شده است. به اندازه‌ای گلولهٔ سربی روی پیستون متحرک قرار می‌دهیم که فشار و حجم گاز درست برابر با مقدارهای مربوط به حالت اولیهٔ $i$ در شکل ۱۶-۱ الف باشد. سپس به آرامی (دانه به دانه) گلوله‌ها را برمی‌داریم تا فشار و حجم گاز به مقدارهای مربوط به حالت نهایی $f$ در شکل ۱۶-۱ ب برسد. دمای گاز تغییر نمی‌کند زیرا گاز در سراسر فرایند در تماس با منبع گرمایی است.

انبساط تکدمای برگشت‌پذیر شکل ۱۶-۳ از نظر فیزیکی با انبساط آزاد برگشت ناپذیر شکل ۱۶-۱ کاملاً متفاوت است. البته، *هر دو فرایند دارای یک حالت اولیه و یک حالت نهایی‌اند و بنابراین باید تغییر یکسانی در انتروپی داشته باشند.* چون گلوله‌های سربی را به آرامی برمی‌داریم، حالتهای میانی گاز حالتهای تعادل هستند، پس می‌توان آنها را روی یک نمودار $p$-$V$ (شکل ۱۶-۴) رسم کرد.










**شکل ۱۶-۳** انبساط تکدمای یک گاز آرمانی که به طور برگشت‌پذیر انجام می‌شود. گاز همان حالت اولیهٔ $i$ و حالت نهایی $f$ را دارد که در فرآیند برگشت‌ناپذیر شکلهای ۱۶-۱ و ۱۶-۲ داشته است.

برای به کار بردن معادلهٔ ۱۶-۱ در انبساط تکدما، دمای ثابت $T$ را از انتگرال بیرون می‌آوریم، داریم

$$\Delta S = S_f - S_i = \frac{1}{T}\int_i^f dQ$$

چون $\int dQ = Q$ ، که $Q$ در آن انرژی کل انتقال یافته به صورت گرما در طی فرایند است، داریم

$$\Delta S = S_f - S_i = \frac{Q}{T} \quad \text{(تغییر در انتروپی، فرایند تکدما)} \quad (۱۶-۲)$$

برای ثابت نگهداشتن دمای $T$ گاز در طی انبساط تکدمای شکل ۱۶-۳، گرمای $Q$ باید انرژی را *از منبع به گاز* انتقال دهد. بنابراین، $Q$ مثبت است و انتروپی گاز در طول فرایند تکدما و انبساط آزاد شکل ۱۶-۱ *افزایش می‌یابد*.

اگر خلاصه کنیم:

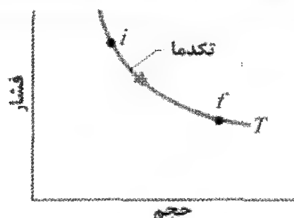
> ☜ برای یافتن تغییر انتروپی یک فرایند برگشت ناپذیر که در یک دستگاه بسته رخ می‌دهد، آن فرایند را با هر فرایند برگشت‌پذیری که همان حالتهای اولیه و نهایی را به هم مربوط می‌کند جایگزین می‌کنیم. تغییر انتروپی را برای این فرایند برگشت‌پذیر به کمک معادلهٔ ۱۶-۱ محاسبه می‌کنیم.

هرگاه تغییر دمای $\Delta T$ یک دستگاه نسبت به دمای (برحسب کلوین) پیش و پس از انجام شدن فرایند کوچک باشد، مقدار تقریبی تغییر در انتروپی عبارت است از

$$\Delta S = S_f - S_i \approx \frac{Q}{T_{\text{avg}}} \quad (۱۶-۳)$$

که $T_{\text{avg}}$ دمای میانگین دستگاه برحسب کلوین در طی فرایند است.

> ✔ ***نکتهٔ وارسی ۱*** آب روی اجاقی در حال گرم شدن است. تغییرات انتروپی آب را به ترتیب بزرگی آن وقتی دمای آن (الف) از ۲۰°C به ۳۰°C، (ب) از ۳۰°C به ۳۵°C و (پ) از ۸۰° به ۸۵° افزایش یابد مرتب کنید.




**شکل ۱۶-۴** نمودار $p$-$V$ برای انبساط تکدمای برگشت‌پذیر شکل ۱۶-۳. حالتهای میانی، که اکنون حالتهای تعادل هستند، نشان داده شده‌اند.

## *انتروپی به عنوان تابع حالت*

فرض کرده بودیم که انتروپی مانند فشار، انرژی و دما، خاصیت حالت یک دستگاه و مستقل از چگونگی رسیدن به آن حالت است. این امر که انتروپی به واقع یک *تابع حالت* است (معمولاً خاصیت حالت نامیده می‌شود) فقط می‌تواند از تجربه حاصل شود. البته می‌توان ثابت کرد که انتروپی یک تابع حالت برای مورد ویژه و مهمی است که در آن یک گاز آرمانی فرایند برگشت پذیری را طی می‌کند.

برای اینکه فرایندی برگشت‌پذیر باشد، باید فرایند به صورت رشته‌ای از مرحله‌های کوچک و به طور آهسته انجام گیرد تا اینکه گاز در انتهای هر مرحله در یک حالت تعادل باشد. در هر مرحلهٔ کوچک، انرژی گرمایی مبادله شده با گاز $dQ$ ، کار انجام شده به وسیلهٔ گاز $dW$ ، و تغییر در انرژی درونی $dE_{\text{int}}$

است. اینها از طریق قانون اول ترمودینامیک در شکل دیفرانسیلی زیر (معادلهٔ ۱۴-۲۷) به هم مربوط می‌شوند

$$dE_{\text{int}} = dQ - dW$$

چون این مرحله‌ها برگشت‌پذیرند و گاز در حالتهای تعادل است، از معادلهٔ ۱۴-۲۴ برای قراردادن $p\,dV$ به جای $dW$ و از معادلهٔ ۱۵-۴۵ برای قرار دادن $nC_V\,dT$ به جای $dE_{\text{int}}$ می‌توان استفاده کرد. با حل معادله برای $dQ$، خواهیم داشت

$$dQ = p\,dV + nC_V\,dT$$

با استفاده از قانون گازآرمانی، در این معادله به جای $p$ عبارت $nRT/V$ را قرار می‌دهیم. سپس دو طرف معادلهٔ به دست آمده را بر $T$ تقسیم می‌کنیم تا معادلهٔ زیر به دست آید

$$\frac{dQ}{T} = nR\frac{dV}{V} + nC_V\frac{dT}{T}$$

اکنون، از تمام جمله‌های این معادله بین یک حالت اولیهٔ اختیاری $i$ و یک حالت نهایی $f$ انتگرال می‌گیریم

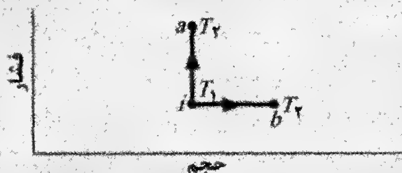
$$\int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_i^f nR\frac{dV}{V} + \int_i^f nC_V\frac{dT}{T}$$

جملهٔ سمت چپ تغییر در انتروپی $\Delta S\,(=S_f - S_i)$ است که به وسیلهٔ معادلهٔ ۱۶-۱ تعریف می‌شود. با قراردادن این مقدار و انتگرالگیری از کمیتهای سمت چپ خواهیم داشت

$$\Delta S = S_f - S_i = nR\ln\frac{V_f}{V_i} + nC_V\ln\frac{T_f}{T_i} \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

توجه کنید که در هنگام انتگرالگیری فرایند برگشت پذیر خاصی را مشخص نکردیم، پس، انتگرلگیری باید برای همهٔ فرایندهای برگشت پذیری که گاز از حالت $i$ به حالت $f$ می‌رود برقرار باشد. بنابراین، تغییر انتروپی $\Delta S$ بین حالتهای اولیه و نهایی یک گاز آرمانی فقط به خاصیتهای حالت اولیه ($V_i$ و $T_i$) و خاصیتهای حالت نهایی ($V_f$ و $T_f$) بستگی دارد؛ $\Delta S$ به این بستگی ندارد که یک گاز بین این دو حالت چگونه تغییر می‌کند.

**نکتهٔ وارسی ۲** یک گاز آرمانی که در حالت اولیهٔ $i$ دمای آن $T_1$ است در نمودار این شکل نشان داده شده است. این گاز می‌تواند در طول مسیرهای نشان داده شده به حالتهای نهایی $a$ و $b$ در دمای بالاتر $T_2$ برده شود. آیا تغییر انتروپی در طول مسیر تا حالت $a$ نسبت به مسیر تا حالت $b$ بزرگتر است یا کوچکتر یا مساوی‌اند؟




## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۱

فرض کنید ۱/۰ mol از گاز نیتروژن در سمت چپ مخزن شکل ۱۶-۱ الف محبوس شده است. هرگاه شیر باز شود، حجم گاز دو برابر می‌شود. تغییر انتروپی گاز در این فرایند برگشت ناپذیر چقدر است؟ گاز را آرمانی در نظر بگیرید.

**نکته‌های کلیدی** (۱) می‌توان تغییر انتروپی فرایند برگشت ناپذیر را با محاسبهٔ آن برای یک فرایند برگشت پذیر که همان تغییر حجم را داشته باشد تعیین کرد. (۲) دمای گاز در انبساط آزاد تغییر نمی‌کند. بنابراین، فرایند برگشت‌پذیر باید یک انبساط تکدما باشد یعنی یکی از شکلهای ۱۶-۳ و ۱۶-۴.

***محاسبه‌ها:*** از جدول ۱۵-۴ انرژی $Q$ اضافه شده به صورت گرما به گاز وقتی که به طور تکدما در دمای $T$ از حجم اولیهٔ $V_i$ به حجم نهایی $V_f$ منبسط می‌شود، عبارت است از

$$Q = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$$

که در آن $n$ تعداد مولهای گاز موجود در مخزن است. از معادلهٔ ۱۶-۲ تغییر انتروپی برای این فرایند برگشت‌پذیر عبارت است از

$$\Delta S_{\text{rev}} = \frac{Q}{T} = \frac{nRT\ln(V_f/V_i)}{T} = nR\ln\frac{V_f}{V_i}$$

با قرار دادن $n=۱/۰۰$ و $V_f/V_i=۲$، خواهیم داشت

$$\Delta S_{\text{rev}} = nR\ln\frac{V_f}{V_i} = (۱/۰۰\,\text{mol})(۸/۳۱\,\text{J/mol}\cdot\text{K})(\ln ۲)$$
$$= +۵/۷۶\,\text{J/K}$$

بنابراین، تغییر انتروپی برای انبساط آزاد (و همهٔ فرایندهایی که حالتهای اولیه و نهایی نشان داده شده در شکل ۱۶-۲ را به هم وصل می‌کنند) عبارت است از

$$\Delta S_{\text{irrev}} = \Delta S_{\text{rev}} = +۵/۷۶\,\text{J/K} \qquad \text{(پاسخ)}$$

چون $\Delta S$ مثبت است، انتروپی مطابق با اصل موضوع انتروپی در بخش ۱۶-۲ افزایش می‌یابد.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۲

شکل ۱۶-۵ الف دو قطعهٔ مسی مشابه به جرم $m=۱/۵\text{kg}$ را نشان می‌دهد: قطعهٔ $L$ در دمای $T_{iL}=۶۰^\circ\text{C}$ و قطعهٔ $R$ در دمای $T_{iR}=۲۰^\circ\text{C}$ قرار دارد. این قطعه‌ها در یک محفظهٔ عایق‌بندی شده از نظر گرما قرار دارند و به وسیلهٔ یک مانع عایق از یکدیگر جدا شده‌اند. وقتی مانع را برداریم، قطعه‌ها سرانجام در دمای $T_f=۴۰^\circ\text{C}$ به حالت تعادل می‌رسند (شکل ۱۶-۵ ب). تغییر انتروپی خالص این دستگاه دو قطعه‌ای در طی این فرایند برگشت ناپذیر چقدر است؟ گرمای ویژهٔ مس ۳۸۶ J/kg·K است.

**نکتهٔ کلیدی** برای محاسبهٔ تغییر انتروپی، باید فرایند برگشت‌پذیری را پیدا کنیم که در طی آن دستگاه از حالت اولیهٔ شکل ۱۶-۵ الف به حالت نهایی ۱۶-۵ ب برود. تغییر انتروپی خالص $\Delta S_{rev}$ فرایند برگشت‌پذیر را می‌توان با استفاده از معادلهٔ ۱۶-۱ محاسبه کرد و سپس تغییر انتروپی فرایند برگشت ناپذیر را برابر با $\Delta S_{rev}$ قرارداد.

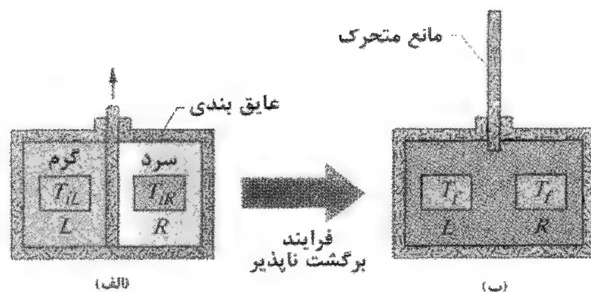
***محاسبه‌ها:*** برای فرایند برگشت‌پذیر به یک منبع گرمایی نیاز داریم که دمای آن بتواند به طور آهسته تغییر کند (مثلاً چرخاندن دگمه). سپس، قطعه‌ها را همان‌طور که در شکل ۱۶-۶ نشان داده شده است، از دو مرحله می‌گذرانیم.

**مرحلهٔ ۱:** دمای منبع را در $60°C$ قرار می‌دهیم و قطعهٔ $L$ را روی آن می‌گذاریم. (چون قطعه و منبع در دمای یکسانی قرار دارند، اینها قبلاً به تعادل گرمایی رسیده‌اند.) سپس دمای منبع و قطعه را به طور آهسته به $40°C$ پایین می‌آوریم. هنگامی که دمای قطعه در طی این فرایند به اندازهٔ $dT$ تغییر می‌کند، انرژی گرمایی $dQ$ از قطعه به منبع انتقال می‌یابد. با استفاده از معادلهٔ ۱۴-۱۴، این انتقال انرژی را می‌توان به صورت $dQ=mc\,dT$ نوشت، که در آن $c$ گرمای ویژهٔ مس است. بنابر معادلهٔ ۱۶-۱ تغییر انتروپی $\Delta S_L$ قطعه $L$ در طی تغییر کامل دما از دمای اولیهٔ $T_{iL}(=60°C=333K)$ به دمای نهایی $T_f(=40°C=313K)$ عبارت است از

$$\Delta S_L=\int_i^f \frac{dQ}{T}=\int_{T_{iL}}^{T_f}\frac{mc\,dT}{T}=mc\int_{T_{iL}}^{T_f}\frac{dT}{T}$$
$$=mc\ln\frac{T_f}{T_{iL}}$$

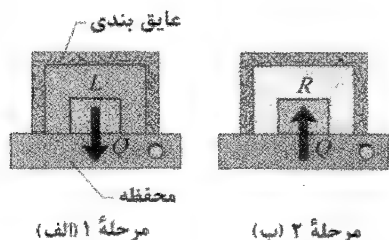
با قراردادن داده‌های معلوم خواهیم داشت

$$\Delta S_L=(1/5\,kg)(386\,J/kg\cdot K)\ln\frac{313\,K}{333K}$$
$$=-35/86\,J/K$$




**شکل ۱۶-۵** (الف) در حالت اولیهٔ، دو قطعهٔ $L$ و $R$ که به جز در دما مشابه‌اند در یک جعبهٔ عایق‌بندی شده قرار دارند که با مانعی از هم جدا شده‌اند. (ب) وقتی مانع برداشته شود، قطعه‌ها انرژی را به صورت گرما مبادله می‌کنند و به حالت نهایی می‌رسند که دمای آن $T_f$ است.

**مرحله ۲:** اکنون، با قراردادن دمای منبع در $20°C$، قطعهٔ $R$ را روی آن قرار می‌دهیم. سپس دمای منبع را به طور آهسته زیاد می‌کنیم تا دمای قطعه به $40°C$ برسد. با دلیل مشابهی که برای پیداکردن $\Delta S_L$ به کار رفت، می‌توان نشان داد که تغییر انتروپی $\Delta S_R$ قطعهٔ $R$ در طی این فرایند عبارت است از




**شکل ۱۶-۶** قطعه‌های شکل ۱۶-۵ می‌توانند به روشی برگشت‌پذیر از حالت اولیه به حالت نهایی خود برسند، اگر از منبعی با دمای قابل کنترل استفاده کنیم، (الف) تا گرما را به طور برگشت‌پذیر از قطعه $L$ بگیریم و (ب) گرما را به طور برگشت‌پذیر به قطعهٔ $R$ بدهیم.

$$\Delta S_R=(1/5\,kg)(386\,J/kg\cdot K)\ln\frac{313K}{293K}$$
$$=+38/23\,J/K$$

در نتیجه، تغییر انتروپی خالص $\Delta S_{rev}$ دستگاه دو قطعه‌ای در این فرایند برگشت‌پذیر دو مرحله‌ای عبارت است از

$$\Delta S_{rev}=\Delta S_L+\Delta S_R$$
$$=-35/86\,J/K+38/23J/K=2/4\,J/K.$$

بنابراین، تغییر انتروپی خالص $\Delta S_{irrev}$ دستگاه دو قطعه‌ای که فرایند برگشت ناپذیر واقعی طی کرده است برابراست با

$$\Delta S_{irrev}=\Delta S_{rev}=2/4\,J/K \qquad \text{(پاسخ)}$$

این نتیجهٔ مثبت با اصل موضوع مربوط به انتروپی بخش ۱۶-۲ سازگار است.

## ۱۶-۴ قانون دوم ترمودینامیک

در اینجا معمایی وجود دارد. در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۱ دیدیم که اگر فرایند برگشت‌پذیر شکل ۱۶-۳ را از (الف) تا (ب) انجام دهیم، تغییر در انتروپی گاز- که دستگاه ما به شمار می‌رود- مثبت است. ولی چون فرایند برگشت‌پذیر است، با افزودن آهستهٔ گلوله‌های سربی روی پیستون شکل ۱۶-۳ ب، فرایند می‌تواند به آسانی از (ب) تا (الف) انجام گیرد تا گاز به حجم اولیهٔ خود برگردد. در این فرایند معکوس، برای ثابت نگهداشتن دما، باید از گاز گرما بگیریم. از این رو $Q$ منفی است و بنابراین از معادلهٔ ۱۶-۲ انتروپی گاز باید کاهش یابد.

آیا این کاهش در انتروپی گاز اصل موضوع انتروپی بخش ۱۶-۲ را که بیان می‌کند انتروپی همیشه افزایش می‌یابد، نقض

نمی‌کند؟ خیر، چون آن اصل موضوع فقط برای فرایندهای *برگشت ناپذیر* که در دستگاههای بسته رخ می‌دهند، برقرار است. روش پیشنهاد شده در اینجا چنین شرایطی را ندارد. در اینجا فرایند برگشت‌ناپذیر *نیست* و (چون انرژی به صورت گرما از گاز به منبع انتقال یافته است) دستگاه- که فقط گاز است- بسته *نیست*.

با این حال، اگر منبع گرما را هم همراه گاز به عنوان بخشی از دستگاه منظور کنیم، آنگاه یک دستگاه بسته خواهیم داشت. حال تغییر انتروپی دستگاه بزرگتر *گاز + منبع* را برای فرایندی که در شکل ۱۶-۳ از (ب) تا (الف) رخ می‌دهد در نظر می‌گیریم. در طی این فرایند برگشت‌پذیر، انرژی به صورت گرما از گاز به منبع گرما - یعنی بخشی از دستگاه بزرگتر به بخش دیگر آن، انتقال می‌یابد. $|Q|$ را قدر مطلق (یا بزرگی) این گرما در نظر می‌گیریم. پس با معادلهٔ ۱۶-۲ می‌توان تغییر انتروپی گاز (که $|Q|$ را از دست می‌دهد) و منبع را (که $|Q|$ را به دست می‌آورد) به طور جداگانه محاسبه کرد. داریم

$$\Delta S_{\text{گاز}} = -\frac{|Q|}{T}$$

و

$$\Delta S_{\text{منبع}} = +\frac{|Q|}{T}$$

تغییر انتروپی دستگاه بسته برابر با مجموع این مقدار است که *صفر* است.

با این نتیجه، اصل موضوع انتروپی بخش ۱۶-۲ را می‌توان تغییر داد تا هر دو فرایندهای برگشت‌پذیر و برگشت‌ناپذیر را شامل شود:

> اگر فرایندی در یک دستگاه بسته رخ دهد، انتروپی برای فرایندهای برگشت ناپذیر افزایش می‌یابد و برای فرایندهای برگشت‌پذیر ثابت می‌ماند، ولی هرگز کاهش پیدا نمی‌کند.

اگر چه انتروپی ممکن است در بخشی از یک دستگاه بسته کاهش یابد همواره در بخش دیگری از دستگاه برابر با آن یا بیشتر افزایش می‌یابد، به‌طوری که انتروپی دستگاه در کل هرگز کاهش نمی‌یابد. این واقعیت، یکی از صورتهای **قانون دوم ترمودینامیک** است که می‌تواند با رابطهٔ زیر نوشته شود

$$\Delta S \geq 0 \qquad \text{(قانون دوم ترمودینامیک)} \qquad (۱۶\text{-}۵)$$

که در آن علامت بزرگتر برای فرایندهای برگشت‌ناپذیر و علامت مساوی برای فرایندهای برگشت‌پذیر به کار می‌رود. معادلهٔ ۱۶-۵ فقط برای دستگاههای بسته به کار می‌رود.

در جهان واقعی تقریباً همهٔ فرایندها به دلیل وجود اصطکاک، آشفتگی و عاملهای دیگر تا اندازه‌ای برگشت ناپذیرند، به طوری که انتروپی دستگاههای بسته واقعی که در آنها فرایندهای واقعی صورت می‌گیرند همیشه زیاد می‌شود. فرایندهایی که در آنها انتروپی دستگاه ثابت می‌ماند همیشه آرمانی‌اند.

## *نیروی ناشی از انتروپی*

برای درک مقاومت لاستیک در برابر کشیدگی، قانون اول ترمودینامیک را در مورد یک نوار لاستیکی می‌نویسیم که تحت افزایش طول کوچک $dx$ به هنگام کشیدن آن با دو دستمان قرار دارد

$$dE = dQ - dW$$

نیروی وارد شده از طرف نوار لاستیکی دارای بزرگی $F$ است و در جهت رو به داخل قرار دارد و در طی افزایش طول $dx$ کار $dW = -F\ dx$ را انجام می‌دهد. از معادلهٔ ۱۶-۲ $(\Delta S = Q/T)$ تغییرات کوچک در $Q$ و $S$ در دمای ثابت با رابطهٔ $dS = dQ/T$ یا $dQ = T\ dS$ به هم مربوط‌اند. بنابراین، اکنون قانون اول به صورت زیر نوشته می‌شود

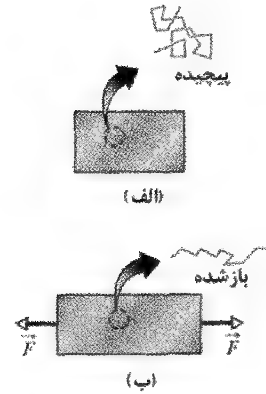
$$dE = T\,dS + F\,dx \qquad (۱۶\text{-}۶)$$

با تقریب خوبی، اگر کل کشیدگی نوار لاستیکی خیلی زیاد نباشد، تغییر $dE$ در انرژی درونی لاستیک صفر است. با قرار دادن صفر به جای $dE$ در معادلهٔ ۱۶-۶ عبارتی برای نیروی ناشی از نوار لاستیکی به دست می‌آید

$$F = -T\frac{dS}{dx} \qquad (۱۶\text{-}۷)$$

این حاکی از آن است که $F$ متناسب با آهنگ $dS/dx$ است که انتروپی نوار لاستیکی در ضمن تغییر کوچک $dx$ در طول نوار لاستیکی تغییر می‌کند. بنابراین، می‌توان اثر انتروپی را روی دو دست به هنگام کشیدن یک نوار لاستیکی احساس کرد.

برای درک رابطهٔ بین نیرو و انتروپی، مدل ساده‌ای از یک مادهٔ لاستیکی را در نظر می‌گیریم. لاستیک دارای زنجیرهٔ پلیمری (مولکولهای طویل با اتصال نردبانی به هم) وصل به هم است که شبیه به یک زیگزاگ سه بعدی است (شکل ۱۶-۷). وقتی طول نوار لاستیکی در حالت سکون قرار دارد، پلیمرها مانند یک رشته فرنگی به یکدیگر پیچیده شده‌اند. به دلیل عدم نظم برد بلند مولکولها، این حالت سکون دارای انتروپی زیادی است. وقتی نوار لاستیکی را می‌کشیم، بسیاری از این پلیمرها را باز می‌کنیم به طوری که آنها در جهت کشیدگی قرار می‌گیرند. چون این جهت‌گیری عدم نظم را کاهش می‌دهد، انتروپی نوار لاستیکی کشیده شده کم می‌شود. یعنی، تغییر $dS/dx$ در معادلهٔ ۱۶-۷ یک کمیت منفی می‌شود چون انتروپی با کشیده شدن کاهش می‌یابد. بنابراین، نیروی وارد بر دو دست از طرف نوار لاستیکی به دلیل این است که پلیمرها به حالت بی‌نظمی قبلی خود و مقدار زیاد انتروپی برمی‌گردند.




**شکل ۱۶-۷** مقطع یک نوار لاستیکی (الف) بدون کشیدگی و (ب) در حالت کشیده شده، و یک پلیمر در داخل آن (الف) پیچیده و (ب) باز شده.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۳**

نیروی یک نوار لاستیکی کشیده شده تقریباً با قانون هوک معادلهٔ ۷-۲۱ $(F_x = -kx)$ داده می‌شود که در آن $k$ *ثابت فنر* است. فرض کنید که یک نوار لاستیکی با $k = ۵۰/۰\ \mathrm{N/m}$ و در دمای $T = ۲۷°\mathrm{C}$ به اندازهٔ $x = ۱/۲\mathrm{cm}$ کشیده شده است. به ازای یک کشیدگی اضافی، با چه آهنگی $dS/dx$ انتروپی نوار لاستیکی کاهش می‌یابد؟

**نکتهٔ کلیدی** نیروی یک لاستیک کشیده شده به دلیل تغییر در انتروپی پلیمرها بنابر معادلهٔ ۱۶-۷ $(F = -T\, dS/dx)$ است.

***محاسبه:*** از معادلهٔ ۱۶-۷، می‌دانیم که بزرگی نیرو برابر با $T\,|dS/dx|$ است. از معادلهٔ ۷-۲۱، می‌دانیم که بزرگی آن نیز برابر با $k\,|x|$ است. پس،

$$T\left|\frac{dS}{dx}\right| = k\,|x|$$

که از آن خواهیم داشت

$$\left|\frac{dS}{dx}\right| = \frac{k\,|x|}{T} = \frac{(۵۰/۰\ \mathrm{N/m})(۰/۰۱۲\mathrm{m})}{(۲۷۳\,\mathrm{K} + ۲۷\,\mathrm{K})}$$

$$= ۲/۰ \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{J/K\cdot m}$$ (پاسخ)

## ۱۶-۵ انتروپی در جهان واقعی: ماشینها

یک **ماشین گرمایی** یا ساده‌تر، **ماشین** دستگاهی است که انرژی را از محیط خود به صورت گرما می‌گیرد و کار مفید انجام می‌دهد در قلب هر ماشینی یک *مادهٔ کاری* وجود دارد. در یک ماشین بخار، مادهٔ کاری آب، هم به صورت بخار و هم به صورت مایع است. در موتور اتومبیل مادهٔ کاری مخلوط بنزین و هواست. اگر بخواهیم ماشینی به صورت خود نگهدار کار کند، ماده کاری باید در یک چرخه عمل کند؛ یعنی مادهٔ کاری باید از یک رشته فرایندهای ترمودینامیکی بسته به نام ضربه بگذرد و دوباره و دوباره به هر حالت از چرخه برگردد. اکنون خواهیم دید که قانونهای ترمودینامیک چگونه می‌توانند عملکرد ماشینها را توضیح دهند.

### ماشین کارنو

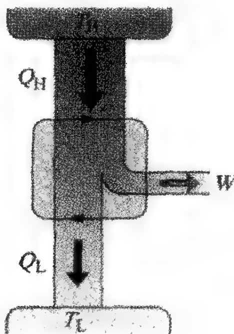
دیده بودیم که با تحلیل یک گاز آرمانی، که از قانون سادهٔ $pV = nRT$ پیروی می‌کند، دربارهٔ گازهای واقعی بیشتر می‌توان آموخت. این روش مفیدی است چون اگرچه گاز آرمانی وجود ندارد، ولی اگر چگالی هر گاز واقعی به اندازهٔ کافی کم شود، تا جایی که بخواهید به رفتار آرمانی نزدیک می‌شویم. با همین مفهوم با تحلیل رفتار یک **ماشین آرمانی** می‌توان یک ماشین واقعی را مورد بررسی قرار داد.

در یک ماشین آرمانی، تمام فرایندها برگشت پذیرند و هیچ گونه اتلاف انرژی مثلاً به صورت اصطکاک و آشفتگی صورت نمی‌گیرد.

حال به موضوع ماشین آرمانی خاصی به نام **ماشین کارنو** می‌پردازیم که به افتخار دانشمند و مهندس فرانسوی سدی کارنو[1] که برای اولین بار مفهوم ماشین را در سال ۱۸۲۴/۱۲۰۳ مطرح کرد نامگذاری شده است. معلوم شده است که این ماشین آرمانی (در اصل) در استفاده از انرژی به صورت گرما برای انجام کار مفید بهترین است. به طور شگفت‌انگیزی کارنو توانست عملکرد این ماشین را پیش از آنکه قانون اول ترمودینامیک و مفهوم انتروپی کشف شوند تحلیل کند.

شکل ۱۶-۸ عملکرد یک ماشین کارنو را به طور طرحوار نشان می‌دهد. در طی هر چرخه از این ماشین، مادهٔ کاری انرژی گرمایی $|Q_H|$ از یک منبع گرمایی در دمای ثابت $T_H$ می‌گیرد و انرژی گرمایی $|Q_L|$ را به منبع گرمایی دیگری در دمای ثابت و پایینتر $T_L$ می‌دهد.

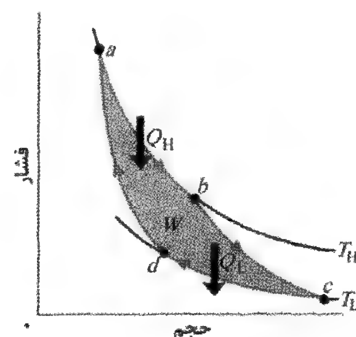
شکل ۱۶-۹ نمودار $p$-$V$ *چرخهٔ کارنو* یعنی چرخه‌ای را که مادهٔ کاری طی می‌کند، نشان می‌دهد. همان‌طور که با پیکانها




**شکل ۱۶-۸** اجزای یک ماشین کارنو. دو پیکان سیاه در حلقهٔ مرکزی نشان می‌دهد که مادهٔ کاری در یک چرخه مانند نمودار $p$-$V$ چگونه عمل می‌کند. انرژی $|Q_H|$ به صورت گرما از منبع دمای بالا در دمای $T_H$ به مادهٔ‌کاری انتقال می‌یابد. انرژی $|Q_L|$ به صورت گرما از مادهٔ کاری به منبع دمای پایین در دمای $T_L$ انتقال می‌یابد. کار $W$ به وسیلهٔ ماشین (در واقع توسط ماده‌کاری) روی چیزی در محیط انجام می‌شود.

1. N.L.sadi Carnot

نشان داده شده است، این چرخه در جهت ساعتگرد پیموده می‌شود. فرض کنید که مادهٔ کاری گازی محبوس در یک استوانهٔ عایق‌بندی شده باشد که پیستونی متحرک دارد. استوانه را می‌توان به دلخواه روی یکی از دو منبع گرمایی، مانند شکل ۱۶-۶، یا روی یک قطعهٔ عایق قرارداد. شکل ۱۶-۹ نشان می‌دهد که اگر استوانه در تماس با منبع گرمایی با دمای بالای $T_H$ قرار گیرد، وقتی که گاز با یک *انبساط* تکدما از حجم $V_a$ به حجم $V_b$ انتقال یابد گرمای $|Q_H|$ از این منبع به مادهٔ کاری داده می‌شود. هم چنین اگر مادهٔ کاری در تماس با منبع گرمایی دمای پایین $T_L$ قرار گیرد، وقتی که گاز با یک *تراکم* تکدما از حجم $V_c$ به حجم $V_d$ انتقال یابد گرمای $|Q_L|$ از این مادهٔ کاری به منبع با دمای پایین داده می‌شود.



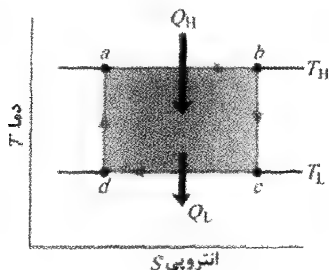

**شکل ۱۶-۹** نمودار فشار - حجم چرخه‌ای که به وسیلهٔ مادهٔ کاری ماشین کارنو در شکل ۱۶-۷ پیموده می‌شود. این چرخه دو فرایند تکدما ($ab$ و $cd$) و دو فرایند بی‌دررو ($bc$ و $da$) دارد. مساحت سایه‌دار مسدود توسط چرخه برابر است با کار $W$ که در هر چرخه به وسیلهٔ ماشین کارنو انجام می‌شود.

در ماشین شکل ۱۶-۸، فرض می‌کنیم که گرما *فقط* در طی فرایندهای تکدمای $ab$ و $cd$ شکل ۱۶-۹ به مادهٔ کاری یا از آن انتقال یابد. بنابراین، فرایندهای $bc$ و $da$ در آن شکل، که دو تکدما در دماهای $T_H$ و $T_C$ را به هم وصل می‌کنند باید فرایندهای بی‌دررو (برگشت پذیر) باشند؛ یعنی آنها باید فرایندهایی بدون هیچ انتقال انرژی گرمایی باشند. برای تضمین این امر، در طی فرایندهای $bc$ و $da$ وقتی که حجم مادهٔ کاری تغییر می‌کند، استوانه را روی یک پایهٔ عایق قرار می‌دهیم.

در طی فرایندهای متوالی $ab$ و $bc$ در شکل ۱۶-۹، مادهٔ کاری منبسط می‌شود و در نتیجه با بالا رفتن پیستون کار مثبت انجام می‌دهد. در شکل ۱۶-۹ این کار با مساحت سطح زیر منحنی $abc$ نمایش داده شده است. در طی فرایندهای متوالی $cd$ و $da$، مادهٔ کاری متراکم می‌شود، که بدان معناست که روی محیط خود کار منفی انجام می‌دهد، یا به طور معادل می‌توان گفت که وقتی پیستون بار شده پایین می‌آید توسط محیط روی مادهٔ کاری کار انجام می‌شود. این کار با مساحت سطح زیرمنحنی $cda$ نمایش داده شده است. *کار خالص* هر چرخه که در شکلهای ۱۶-۸ و ۱۶-۹ با $W$ نشان داده شده است، برابر با اختلاف بین این دو مساحت و کمیتی مثبت برابر با مساحت محصور توسط چرخهٔ $abcda$ در شکل ۱۶-۹ است. این کار $W$ روی هر جسم بیرونی، مانند باری که باید حرکت کند، انجام می‌شود.

از معادلهٔ ۱۶-۱ $(\Delta S = \int dQ/T)$ معلوم است که هرگونه انتقال انرژی به صورت گرما باید با تغییر انتروپی همراه باشد. برای نشان دادن تغییرات انتروپی یک ماشین کارنو، همان‌طور که در شکل ۱۶-۱۰ نشان داده شده است، چرخهٔ کارنو را در نمودار دما - انتروپی ($T$-$S$) رسم می‌کنیم. نقطه‌های $a$، $b$، $c$ و $d$ در شکل ۱۶-۱۰ متناظر با همان نقطه‌های مشخص شده در نمودار $p$-$V$ شکل ۱۶-۹ هستند. دو خط افقی در شکل ۱۶-۱۰ متناظربا دو فرایند تکدمای چرخهٔ کارنو هستند (چون دما ثابت است). فرایند $ab$ در این چرخه انبساط تکدما را نشان می‌دهد. وقتی مادهٔ کاری در طی انبساط (به طور برگشت پذیر) انرژی $|Q_H|$ را به صورت گرما در دمای $T_H$ جذب می‌کند، انتروپی آن زیاد می‌شود. همچنین در طی تراکم تکدمای $cd$، مادهٔ کاری (به طور برگشت‌پذیر) انرژی $|Q_L|$ را به صورت گرما در دمای ثابت $T_L$ از دست می‌دهد و انتروپی آن کاهش می‌یابد.

دو خط عمودی در شکل ۱۶-۱۰ متناظر با دو فرایند بی‌دررو چرخهٔ کارنو است. چون هیچ انرژیی به صورت گرما در طی این دو فرایند مبادله نمی‌شود، انتروپی مادهٔ کاری در ضمن آنها ثابت می‌ماند.




**شکل ۱۶-۱۰** چرخهٔ کارنو در شکل ۱۶-۸ روی نموار دما - انتروپی. در طی فرایندهای $ab$ و $cd$ دما ثابت می‌ماند. در طی فرایندهای $bc$ و $da$ انتروپی ثابت می‌ماند.

**کار** برای محاسبهٔ کار خالص انجام شده توسط ماشین کارنو در طی یک چرخه، معادلهٔ ۱۴-۲۶، قانون اول ترمودینامیک $(\Delta E_{int} = Q - W)$ را برای مادهٔ کاری به کار می‌بریم. این ماده در هر حالت اختیاری انتخاب شده در چرخه باید دوباره و دوباره برگشت داشته باشد. بنابراین، اگر $X$ نشان‌دهندهٔ هر خاصیت حالتی از مادهٔ کاری مانند فشار، دما، حجم، انرژی درونی یا انتروپی باشد، در هر چرخه‌ای باید $\Delta X = 0$ باشد. در مورد یک چرخهٔ کامل مادهٔ کاری داریم $\Delta E_{int} = 0$. با یادآوری اینکه $Q$ در معادلهٔ ۱۴-۲۶ عبارت است از گرمای *خالص* مبادله شده در چرخه و $W$ کار *خالص* انجام شده است، قانون اول ترمودینامیک را برای چرخهٔ کارنو می‌توان به صورت زیر نوشت

$$W = |Q_H| - |Q_L| \qquad (۸-۱۶)$$

***تغییرات انتروپی*** در یک ماشین کارنو، دو (و فقط دو) انتقال (برگشت پذیر) انرژی به صورت گرما وجود دارد و در نتیجه دو تغییر در انتروپی مادهٔ کاری- یکی در دمای $T_H$ و دیگری در دمای $T_L$ صورت می‌پذیرد. پس، تغییر خالص انتروپی در چرخه عبارت است از

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_L = \frac{|Q_H|}{T_H} - \frac{|Q_L|}{T_L} \qquad (۹-۱۶)$$

در اینجا $\Delta S_H$ مثبت است چون انرژی $|Q_H|$ به صورت گرما به مادهٔ کاری *اضافه می‌شود* (افزایش در انتروپی) و $\Delta S_L$ منفی است چون انرژی $|Q_L|$ به صورت گرما از مادهٔ کاری *گرفته می‌شود* (کاهش در انتروپی). چون انتروپی یک تابع حالت است، برای چرخهٔ کامل باید داشته باشیم $\Delta S = ۰$. با قرار دادن $\Delta S = ۰$ در معادلهٔ ۱۶-۹ خواهیم داشت

$$\frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{|Q_L|}{T_L} \qquad (۱۰-۱۶)$$

توجه کنید که چون $T_H > T_L$ است، داریم $|Q_H| > |Q_L|$؛ یعنی گرمای گرفته شده از منبع با دمای بالا بیشتر از گرمای داده شده به منبع با دمای پایین است.

اکنون برای به دست آوردن عبارتی برای بازده ماشین کارنو از معادله‌های ۱۶-۸ و ۱۶-۱۰ استفاده می‌کنیم.

### بازده ماشین کارنو

هدف هر ماشین عبارت است از تبدیل هر چه بیشتر انرژی گرفته شدهٔ $Q_H$ به کار تا جایی که امکان پذیر باشد. میزان موفقیت در این کار را با **بازده گرمایی** $\varepsilon$ اندازه می‌گیریم که به صورت کار ماشین در هر چرخه («انرژی به‌دست آمده») بخش بر انرژیی که به صورت گرما در چرخه توسط ماشین گرفته شده است (« انرژی مصرف شده») تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{\text{انرژی گرفته شده}}{\text{انرژی مصرف شده}} = \frac{|W|}{|Q_H|} \qquad \text{(بازده هر ماشین)} \quad (۱۱-۱۶)$$

در مورد ماشین کارنو $W$ را از معادلهٔ ۱۶-۸ به دست می‌آوریم و معادلهٔ ۱۶-۱۱ را به صورت زیر می‌نویسیم

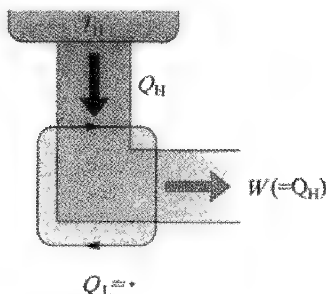
$$\varepsilon_C = \frac{|Q_H| - |Q_L|}{|Q_H|} = ۱ - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} \qquad (۱۲-۱۶)$$

با استفاده از معادلهٔ ۱۶-۱۰ این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\varepsilon_C = ۱ - \frac{T_L}{T_H} \qquad \text{(بازده ماشین کارنو)} \quad (۱۳-۱۶)$$

که در آن $T_L$ و $T_H$ برحسب کلوین هستند. چون $T_L < T_H$، پس بازده گرمایی ماشین کارنو لزوماً کمتر از یک است- یعنی کمتر از ۱۰۰ درصد. این امر در شکل ۱۶-۸ نشان داده شده است و بیانگر این است که فقط بخشی از انرژی گرمایی گرفته شده از منبع با دمای بالا می‌تواند کار انجام دهد و بقیه آن به منبع دمای پایین داده می‌شود. در بخش ۱۶-۷ نشان خواهیم داد که هیچ ماشین واقعی وجود ندارد که بازده گرمایی آن بزرگتر از مقدار محاسبه شده از معادلهٔ ۱۶-۱۳ باشد.

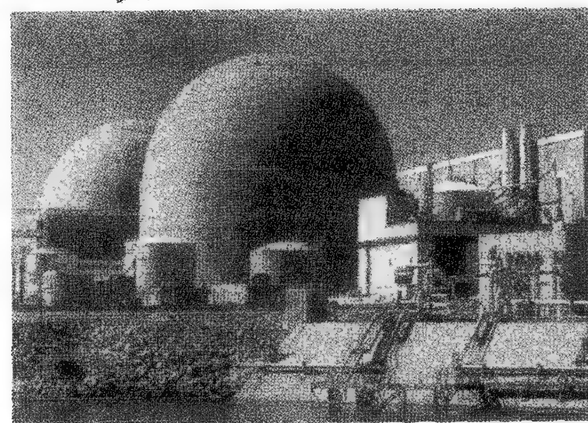
مخترعان همیشه سعی دارند با کاهش انرژی $|Q_L|$ یعنی آنچه که در هر چرخه «دور ریخته می‌شود» بازده ماشین را بهبود بخشند. رویای مخترعان است که *ماشین کاملی* را درست کنند، که در شکل ۱۶-۱۱ نشان داده شده است، که در آن $|Q_L|$ به صفر کاهش یافته و $|Q_H|$ به طور کامل به کار تبدیل شود. برای مثال چنین ماشینی در کشتی اقیانوس‌پیما می‌تواند انرژی را به صورت گرما از آب بگیرد و آن را بدون هیچ هزینه‌ای برای راندن پروانه‌ها به کار برد. موتور اتومبیلی که شامل چنین ماشینی است انرژی را به صورت گرما از هوای اطراف می‌گیرد و دوباره بدون هیچ هزینه‌ای آن را برای راندن اتومبیل به کار می‌برد. ماشین کامل فقط یک رویا است: بررسی معادلهٔ ۱۶-۱۳ نشان می‌دهد که فقط به شرطی بازده ماشین ۱۰۰ درصد است (یعنی $\varepsilon = ۱$) که $T_L = ۰$ یا $T_H \to \infty$ باشد، و این امری ناممکن است. در نتیجه دهها تجربهٔ عملی مهندسی به شکل دیگری از قانون دوم ترمودینامیک به این صورت انجامیده است:




**شکل ۱۶-۱۱** اجزای یک ماشین کامل - یعنی ماشینی که گرمای $Q_H$ را از دمای بالا به طور مستقیم با بازده ۱۰۰ درصد به کار $W$ تبدیل می‌کند.

> هیچ رشته‌ای از فرایندها که تنها نتیجهٔ آنها انتقال انرژی گرمایی از یک منبع گرمایی و تبدیل کامل این انرژی به کار باشد امکانپذیر نیست. به طور خلاصه، هیچ *ماشین کاملی وجود ندارد.*

خلاصه اینکه: بازده گرمایی داده شده با معادلهٔ ۱۶-۱۳ فقط در مورد ماشینهای کارنو معتبر است. ماشینهای واقعی که در آنها فرایندهای تشکیل دهندهٔ چرخه ماشین برگشت‌پذیر نیستند، بازده کمتری دارند. اگر اتومبیلی با ماشین کارنو کار کند، مطابق



**شکل ۱۶-۱۲** نیروگاه هسته‌ای آنای شمالی[1] در نزدیکی شارلوتسویل[2]، در ویرجینیا[3] که انرژی الکتریکی را با آهنگ ۹۰۰MW تولید می‌کند. این نیروگاه بنابر طراحی در عین حال انرژی را با آهنگ ۲۱۰۰MW به درون رودخانه مجاور می‌دهد. این نیروگاه و نیروگاههای دیگر مانند این، بیشترین مقدار انرژی را دور می‌ریزند و مقدار کمتری از آن را به عنوان انرژی مفید تحویل می‌دهند. این نیروگاه همتای واقعی برای ماشین آرمانی شکل ۱۶-۸ است.

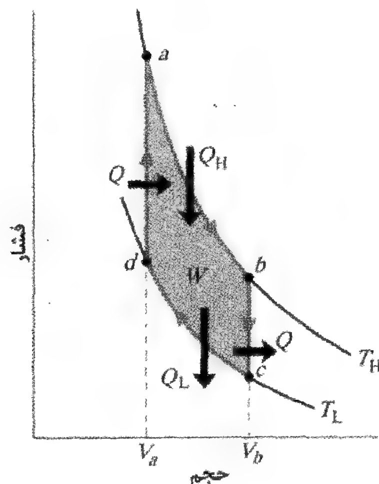
با معادلهٔ ۱۶-۱۳ بازده آن تقریباً ۵۵ درصد خواهد بود؛ در حالی که بازده واقعی آن احتمالاً حدود ۲۵ درصد است. یک نیروگاه هسته‌ای (شکل ۱۶-۱۲) در کل یک ماشین است. نیروگاه هسته‌ای انرژی را به صورت گرما از مغز راکتور می‌گیرد، به کمک یک توربین کار انجام می‌دهد و انرژی را به صورت گرما به رودخانه نزدیک می‌دهد. اگر نیروگاه به صورت ماشین کارنو کارکند، بازده آن تقریباً ۴۰ درصد می‌شود؛ ولی بازده واقعی آن حدود ۳۰ درصد است. در طراحی ماشینهایی از هر نوع، هیچ راه ساده‌ای وجود ندارد که بر محدودیت ایجاد شده با معادلهٔ ۱۶-۱۳ برای بازده غلبه کند.

## ماشین استرلینگ

معادلهٔ ۱۶-۱۳ نه تنها برای تمام ماشینهای آرمانی به کار برده می‌شود بلکه در مورد ماشینهایی که به صورت شکل ۱۶-۹ نمایش داده می‌شوند، یعنی در ماشینهای کارنو نیز به کار می‌رود. برای مثال شکل ۱۶-۱۳ چرخهٔ عملیاتی یک ماشین استرلینگ آرمانی را نشان می‌دهد. مقایسه با چرخهٔ کارنو در شکل ۱۶-۹ نشان می‌دهد که هر ماشینی در دماهای $T_H$ و $T_L$ انتقالهای گرمایی تکدما دارد. ولی دو تکدمای چرخهٔ ماشین استرلینگ مانند ماشین کارنو با فرایندهای بی‌دررو به هم وصل نشده‌اند بلکه با فرایندهای با حجم ثابت به هم مربوط شده‌اند. برای افزایش دمای گاز در حجم ثابت به طور برگشت‌پذیر از $T_L$ و $T_H$ (فرایند $da$ شکل ۱۶-۱۳) لازم است که انرژی به صورت گرما از منبع گرمایی که دمای آن بین این دو حد

1. North Anna
2. Charlottesville
3. Virginia

می‌تواند به آرامی تغییر کند به مادهٔ کاری انتقال یابد. همچنین انتقال معکوس انرژی در فرایند $bc$ ضروری است. بنابراین، انتقال برگشت‌پذیر گرما و (تغییر انتروپی متناظر با آن) در هر چهار فرایندی که چرخهٔ ماشین استرلینگ را می‌سازند صورت می‌گیرد، نه فقط دو فرآیند، مانند آنچه که در ماشین کارنو، رخ می‌دهد. بنابراین، روشی که به معادلهٔ ۱۶-۱۳ انجامید در مورد ماشین استرلینگ آرمانی صادق نیست. مهم این است که بازده یک ماشین استرلینگ آرمانی از بازده ماشین کارنو که بین همان دو دما کار می‌کند کمتر است. ماشینهای استرلینگ واقعی حتی بازده کمتری دارند.




**شکل ۱۶-۱۳** نمودار $p$-$V$ برای مادهٔ کاری ماشین استرلینگ آرمانی، با مادهٔ کاری که گاز آرمانی فرض می‌شود.

ماشین استرلینگ در سال ۱۸۱۶/۱۱۹۵ توسط رابرت استرلینگ اختراع شد. این ماشین، که مدتها فراموش شده بود، اینک برای استفاده در خودروها و سفینه‌های فضایی توسعه یافته است و توان خروجی آن تا ۵۰۰۰hp (۳/۷ MW) هم رسیده است.

> **✔ نکتهٔ وارسی ۳** سه ماشین کارنو بین دماهای (الف) ۴۰۰K و ۵۰۰K، (ب) ۶۰۰K و ۸۰۰K و (پ) ۴۰۰K و ۶۰۰K، کار می‌کنند. این ماشینها را به ترتیب بزرگی بازده گرمایی آنها مرتب کنید.

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۴

یک ماشین کارنو را که میان دماهای $T_H = ۸۵۰K$ و $T_L = ۳۰۰K$ کار می‌کند، در نظر می‌گیریم. این ماشین در هر چرخه ۱۲۰۰J کار را در مدت ۰/۲۵s انجام می‌دهد.

(الف) بازده این ماشین چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** بازده $\varepsilon$ ماشین کارنو فقط به نسبت $T_L/T_H$ (برحسب کلوین) دماهای منبعهای گرمایی بستگی دارد که ماشین به آنها وصل شده است.

***محاسبه:*** بنابراین، از معادلهٔ ۱۶–۱۳ داریم

(پاسخ) $$\varepsilon = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{300\,K}{850\,K} = 0/647 \approx 0/65$$

(ب) توان میانگین این ماشین چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** توان میانگین $P$ یک ماشین عبارت است از نسبت کار $W$ انجام شده به $t$ مدت زمان هر چرخه.

***محاسبه:*** در این ماشین کارنو داریم

(پاسخ) $$P = \frac{W}{t} = \frac{1200\,J}{0/25\,s} = 4800\,W = 4/8\,kW$$

(پ) در هر چرخه چقدر انرژی گرمایی $|Q_H|$ از منبع با دمای بالا گرفته می‌شود؟

**نکتهٔ کلیدی** در هر ماشینی، از جمله ماشین کارنو، بازده $\varepsilon$ عبارت است از نسبت کار $W$ که در هر چرخه انجام می‌شود به انرژی $|Q_H|$ که به صورت گرما از منبع دمای بالا در هر چرخه گرفته می‌شود ($\varepsilon = W/|Q_H|$).

***محاسبه:*** پس داریم

(پاسخ) $$|Q_H| = \frac{W}{\varepsilon} = \frac{1200\,J}{0/647} = 1855\,J$$

(ت) در هر چرخه چقدر انرژی $|Q_L|$ به صورت گرما به منبع با دمای پایین داده می‌شود؟

**نکتهٔ کلیدی** در ماشین کارنو، کار $W$ انجام شده در هر چرخه برابر با اختلاف در انتقالهای انرژی به صورت گرماست: مانند معادلهٔ ۱۶–۸ $|Q_H| - |Q_L|$.

***محاسبه:*** بنابراین، داریم

(پاسخ) $$|Q_L| = |Q_H| - W = 1855\,J - 1200\,J = 655\,J$$

(ث) در نتیجه انتقال انرژی از منبع با دمای بالا به مادهٔ کاری انتروپی آن چقدر تغییر می‌کند؟ از مادهٔ کاری به منبع دمای پایین چقدر است؟

**نکتهٔ کلیدی** هنگام انتقال انرژی گرمایی $Q$ در دمای ثابت $T$، تغییر انتروپی $\Delta S$ با معادلهٔ ۱۶–۲ ($\Delta S = Q/T$) داده می‌شود.

***محاسبه‌ها:*** پس، در انتقال مثبت انرژی $Q_H$ از منبع با دمای بالا در $T_H$، تغییر انتروپی مادهٔ کاری برابراست با

(پاسخ) $$\Delta S_H = \frac{Q_H}{T_H} = \frac{1855\,J}{850\,K} = +2/18\,J/K$$

همچنین برای انتقال *منفی* انرژی $Q_L$ به منبع با دمای پایین در $T_L$، داریم

(پاسخ) $$\Delta S_L = \frac{Q_L}{T_L} = \frac{-655\,J}{300\,K} = -2/18\,J/K$$

توجه کنید که تغییر خالص انتروپی مادهٔ‌کاری برای یک چرخه، همان‌طور که هنگام به دست آوردن معادلهٔ ۱۶–۱۰ بحث کردیم، صفر است.

## مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶–۵

مخترعی ادعا می‌کند که ماشینی ساخته است که هرگاه میان دو نقطهٔ جوش و انجماد آب عمل کند، بازده آن ٪۷۵ است. آیا این امکانپذیر است؟

**نکتهٔ کلیدی** بازده ماشین واقعی (با فرایندهای برگشت‌ناپذیر و اتلاف انرژی انتقال یافته) باید کمتر از یک ماشین کارنو که میان دماهای یکسان عمل می‌کند باشد.

***محاسبه:*** از معادلهٔ ۱۶–۱۳ معلوم است که بازده ماشین کارنو که میان نقطهٔ جوش و نقطهٔ انجماد آب کار می‌کند عبارت است از

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{(0+273)K}{(100+273)K} = 0/268 \approx \%27$$

بنابراین ادعای ٪۷۵ برای ماشین واقعی که میان دماهای داده شده عمل می‌کند ناممکن است.

# تدبیرهای حل مسئله

### *تدبیر ۱: زبان ترمودینامیک*

در مطالعه‌های علمی و مهندسی ترمودینامیک گاهی از زبانی معنی دار ولی گمراه کننده استفاده می‌شود. ممکن است عبارتهایی را ببینید که می‌گوید گرما اضافه می‌شود، جذب می‌شود، کم می‌شود، بیرون می‌رود، بیرون کشیده می‌شود، رانده می‌شود، تخلیه می‌شود، دور ریخته می‌شود، تحویل داده می‌شود، به دست می‌آید، از دست می‌رود، انتقال می‌یابد، یا از جسمی به جسمی دیگر شارش می‌یابد (مانند یک مایع). همچنین ممکن است بیانهایی را ببینید که می‌گوید جسمی *دارای* گرما است (مثل اینکه گرما می‌توانند نگهداشته شود یا جسمی دارای آن باشد) یا اینکه گرمای هر جسم افزایش یا کاهش یافته است. همیشه باید در ذهنتان باشد که منظور از واژهٔ *گرما* در علم و مهندسی چیست:

> ☜ گرما انرژیی است که به علت اختلاف دمای دو جسم از جسمی به جسم دیگر انتقال می‌یابد.

هرگاه یکی از جسمها را به عنوان دستگاه مورد نظر مشخص کنیم، هر نوع انتقال انرژی گرمایی $Q$ به دستگاه مثبت و هر انتقال انرژی گرمایی $Q$ از دستگاه منفی به شمار می‌رود.

*اصطلاح کار* نیز شایستهٔ توجه دقیقتری است. ممکن است عبارتهایی را ببینید که می‌گوید کار تولید می‌شود یا به وجود می‌آید یا با گرما ترکیب می‌شود یا با گرما تغییر می‌کند. در اینجا معنی *اصطلاح کار* به صورت زیر است

> کار انرژیی است که به علت نیرویی که بین دو جسم عمل می‌کند از یک جسم به جسم دیگر انتقال می‌یابد.

هرگاه یکی از جسمها را به عنوان دستگاه در نظر بگیریم، هر نوع انتقال انرژی به بیرون از دستگاه یا کار مثبت $W$ است که *توسط* دستگاه یا کار منفی $W$ است که *روی* دستگاه انجام می‌شود.

هر نوع انتقال انرژی به درون دستگاه، یا کار منفی است که توسط دستگاه انجام می‌گیرد یا کار مثبت است که روی دستگاه انجام می‌شود.(در اینجا واژه‌های توسط و روی اهمیت دارند.) آشکار است که این گمراه کننده خواهد بود- هر کجا کلمهٔ *کار* را دیدید بیشتر دقت کنید.

## ۱۶-۶ انتروپی در جهان واقعی: یخچالها

یخچال دستگاهی است که با انجام کار و تکرار پیوستهٔ یک رشته از فرایندهای ترمودینامیکی از یک منبع با دمای پایین به منبع با دمای بالا منتقل می‌شود. برای مثال، در یک یخچال خانگی، کار به وسیلهٔ یک متراکم کنندهٔ برقی برای انتقال انرژی گرمایی از مواد غذایی (منبع با دمای پایین) به اتاق (منبع با دمای بالا) انجام می‌گیرد.

دستگاههای تهویه و پمپهای گرمایی نیز مانند یخچال کار می‌کنند و تفاوت آنها فقط در نوع منبعهای دمای بالا و پایین است. در دستگاههای تهویه، منبع با دمای پایین اتاقی است که باید خنک شود و منبع با دمای بالا هوای (گرمتر) بیرون اتاق است. پمپ گرمایی دستگاه تهویه‌ای است که برای گرم کردن اتاق به طور معکوس عمل می‌کند. در اینجا اتاق منبع دمای بالاست و گرما از هوای (سردتر) بیرون به آن انتقال می‌یابد.

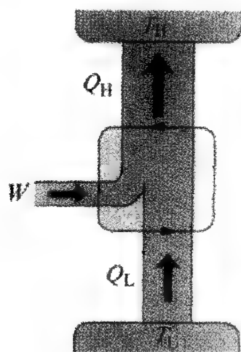
*یخچال آرمانی* را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

> در یخچال آرمانی، همه فرایندها برگشت پذیرند و هیچ‌گونه اتلاف انرژی منتقل شده مثلاً در نتیجهٔ اصطکاک و آشفتگی وجود ندارد.

شکل ۱۶-۱۴ اجزای اصلی یک یخچال آرمانی را نشان می‌دهد. توجه کنید که عملکرد آن عکس عملکرد ماشین کارنو در شکل ۱۶-۷ است. به عبارت دیگر، تمام انتقالهای انرژی به صورت گرما یا کار عکس گرما یا کار ماشین کارنو است. چنین یخچال آرمانی را **یخچال کارنو** می‌نامند.

طراح یک یخچال می‌خواهد تا جایی که ممکن است گرمای بیشتر $|Q_L|$ را از منبع دمای پایین (چیزی که می‌خواهیم) و مقدار کمتری کار $|W|$ (چیزی که برای آن پول می‌پردازیم) انجام دهد. پس معیاری از بازده یک یخچال عبارت است از

$$K=\frac{\text{چیزی که می‌خواهیم}}{\text{چیزی که مصرف می‌شود}}=\frac{|Q_L|}{|W|} \quad \text{(ضریب کارایی هر یخچال)} \quad (۱۶-۱۴)$$




**شکل ۱۶-۱۴** اجزای یک یخچال، دو پیکان سیاه در حلقهٔ مرکزی نشان می‌دهند که مادهٔ کاری، مانند نمودار $p$-$V$ در یک چرخه عمل می‌کند. انرژی گرمایی $Q_L$ از منبع با دمای پایین به مادهٔ کاری و انرژی گرمایی $Q_H$ از مادهٔ کاری به منبع با دمای بالا انتقال می‌یابد. کار $W$ به وسیلهٔ عاملی در محیط روی یخچال (روی مادهٔ کاری) انجام می‌شود.

که در آن $K$ *ضریب کارایی* نامیده می‌شود. در مورد یخچال کارنو از قانون اول ترمودینامیک داریم $|W|=|Q_H|-|Q_L|$ ، که $|Q_H|$ اندازهٔ انرژی گرمایی داده شده به منبع با دمای بالاست. بنابراین، از معادلهٔ ۱۶-۱۲ خواهیم داشت

$$K_C=\frac{|Q_L|}{|Q_L|-|Q_L|} \quad (۱۶-۱۵)$$

چون یخچال کارنو همان ماشین کارنو است که معکوس عمل می‌کند، می‌توان معادلهٔ ۱۶-۱۰ را با معادلهٔ ۱۶-۱۵ ترکیب کرد؛ پس از اندک عملیات جبری، خواهیم داشت

$$K_C=\frac{T_L}{T_H-T_L} \quad \text{(ضریب کارایی، یخچال کارنو)} \quad (۱۶-۱۶)$$

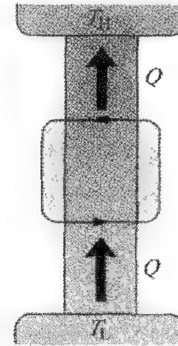
در مورد یک دستگاه تهویهٔ نوعی $K\approx ۲/۵$ است. در مورد یخچالهای خانگی $K\approx ۵$ است. هر چه دماهای دو منبع به یکدیگر نزدیکتر باشند مقدار $K$ بیشتر است. به همین دلیل است که پمپهای گرمایی در محیطهای با دماهای معتدل خیلی مؤثرتر از آب و هواهایی که دمای بیرون به طور وسیعی تغییر می‌کند کار می‌کنند.

جالب است یخچالی داشته باشیم که نیاز به کار ورودی نداشته باشد - یعنی یخچالی که مثلاً بدون زدن دو شاخه به برق کار کند. شکل ۱۶-۱۵ «رویای مخترع» دیگری را نشان می‌دهد که یک *یخچال کامل* است و انرژی را به صورت گرمای $Q$ بدون نیاز به انجام کار از منبع سرد به منبع گرم انتقال می‌دهد. چون این دستگاه به صورت چرخه‌ای کار می‌کند، انتروپی مادهٔ کاری در طی یک چرخه کامل تغییر نمی‌کند. ولی انتروپیهای دو منبع تغییر می‌کنند: تغییر انتروپی برای منبع سرد $-|Q|/T_L$ ، و برای منبع گرم $+|Q|/T_H$ است. بنابراین، تغییر خالص انتروپی کل دستگاه عبارت است از

$$\Delta S=-\frac{|Q|}{T_L}+\frac{|Q|}{T_H}$$

چون $T_H > T_L$ ، علامت سمت راست این معادله منفی و در نتیجه تغییر خالص انتروپی در هر چرخهٔ دستگاه بستهٔ *یخچال + منبعها* نیز منفی است. چون چنین کاهشی در انتروپی قانون دوم ترمودینامیک (معادلهٔ ۱۶-۵) را نقض می‌کند، پس یخچال کامل نمی‌تواند وجود داشته باشد. (اگر می‌خواهید یخچال شما کار کند باید دو شاخهٔ آن را به برق بزنید.)

این نتیجه ما را به فرمولبندی (هم‌ارز) دیگری از قانون دوم ترمودینامیک راهنمایی می‌کند




**شکل ۱۶-۱۵** اجزای یک یخچال کامل- یعنی یخچالی که بدون هیچ کار ورودی، انرژی را از یک منبع با دمای پایین به منبع با دمای بالا انتقال می‌دهد.

> هیچ دسته فرایندی وجود ندارد که تنها نتیجهٔ آنها انتقال انرژی گرمایی از یک منبع در یک دمای معین به منبعی در یک دمای بالاتر باشد.

به طور خلاصه، هیچ یخچال کاملی وجود ندارد.

> **نکتهٔ وارسی ۴** می‌خواهیم ضریب کارایی یک یخچال آرمانی را افزایش دهیم. این کار را می‌توان با (الف) به کار انداختن اتاقک سرد در دمای اندکی بالاتر، (ب) به کار انداختن آن در دمای اندکی کمتر، (پ) بردن آن به اتاقی که کمی گرمتر است، یا (ت) بردن آن به اتاقی که کمی سردتر است، انجام داد. در هر چهار مورد تغییرات دما یکسان است. تغییرات ایجاد شده را به ترتیب بزرگی ضریبهای کارایی مرتب کنید.

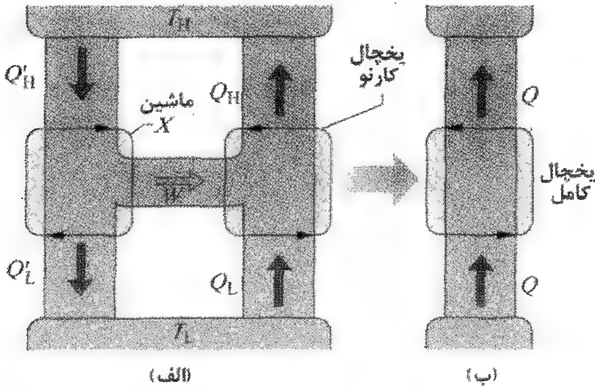
## ۱۶-۷ بازده ماشینهای واقعی

$\varepsilon_C$ را بازده یک ماشین کارنو در نظر بگیرید که میان دو دمای معین کار می‌کند. در این بخش ثابت می‌کنیم که هیچ ماشین واقعی وجود ندارد که میان این دو دما کار کند و بازده آن بیش از $\varepsilon_C$ باشد. اگر چنین ماشینی وجود داشته باشد، قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود.

فرض کنید که مخترعی که در کارگاه خودکار می‌کند ماشین $X$ را ساخته است که ادعا می‌کند بازده $\varepsilon_X$ آن از $\varepsilon_C$ بیشتر است

$$\varepsilon_X > \varepsilon_C \quad \text{(یک ادعا)} \qquad (۱۶-۱۷)$$

مانند شکل ۱۶-۱۶ الف ماشین $X$ را به یخچال کارنو متصل می‌کنیم. مرحله‌های کار یخچال کارنو را طوری تنظیم می‌کنیم که کار مورد نیاز آن در هر چرخه دقیقاً برابر با کاری باشد که ماشین $X$ فراهم می‌کند. بنابراین، هیچ کار (خارجی)روی یا توسط ترکیب *ماشین + یخچال* شکل ۱۶-۱۶ الف که به عنوان دستگاه خود در نظر گرفته‌ایم انجام نمی‌گیرد.




**شکل ۱۶-۱۶** (الف) ماشین $X$ یک یخچال کارنورا راه می‌اندازد. (ب) اگر همان‌طور که ادعا شده است، بازده ماشین $X$ بیشتر از بازده موتور کارنو باشد، آنگاه ترکیب نشان داده شده در (الف) معادل با یخچال کامل نشان داده شده در اینجا خواهد بود. این قانون دوم ترمودینامیک را نقض می‌کند. پس نتیجه می‌گیریم که ماشین $X$ نمی‌تواند بازده بیشتری از بازده ماشین کارنو داشته باشد.

اگر معادلهٔ ۱۶-۱۷ درست باشد، از تعریف بازده (معادلهٔ ۱۶-۱۱) باید داشته باشیم

$$\frac{|W|}{|Q'_H|} > \frac{|W|}{|Q_H|}$$

که علامت پریم مربوط به ماشین $X$ است و سمت راست نامساوی بازده یخچال کارنو در وقتی است که به عنوان ماشین عمل می‌کند. از این نامساوی خواهیم داشت

$$|Q_H| > |Q'_H| \qquad (۱۶-۱۸)$$

چون کار انجام شده به وسیلهٔ ماشین $X$ برابر با کار انجام شده روی یخچال کارنو است، از قانون اول ترمودینامیک به گونه‌ای که با معادلهٔ ۱۶-۸ داده شده است، خواهیم داشت

$$|Q_H| - |Q_L| = |Q'_H| - |Q'_L|$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$|Q_H| - |Q'_H| = |Q_L| - |Q'_L| = Q \qquad (۱۶-۱۹)$$

با توجه به معادلهٔ ۱۶-۱۸، کمیت $Q$ در معادلهٔ ۱۶-۱۹ باید مثبت باشد.

مقایسهٔ معادلهٔ ۱۶-۱۹ با معادلهٔ ۱۶-۱۶ نشان می‌دهد که اثر نهایی ماشین $X$ و یخچال کارنو که به طور ترکیبی کار می‌کنند

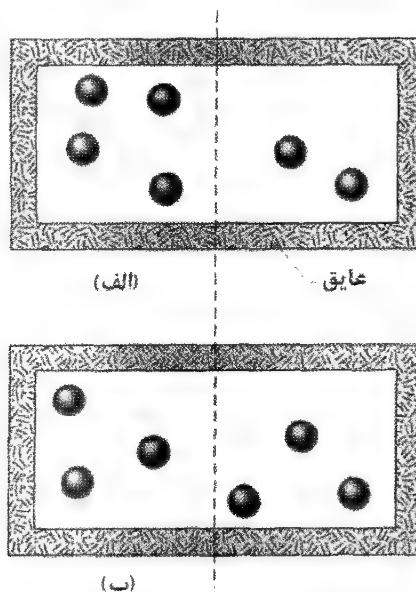
عبارت است از انتقال انرژی گرمایی $Q$ از یک منبع دمای پایین به یک منبع دمای بالا بدون انجام کار. بنابراین، این ترکیب مانند یخچال کامل شکل ۱۶-۱۵ کار می‌کند و وجود آن نقض قانون دوم ترمودینامیک است.

چیزی با یک یا چند فرض ما جور در نمی‌آید و آن هم فقط می‌تواند معادلهٔ ۱۶-۱۷ باشد. نتیجه می‌گیریم که *هیچ ماشین واقعی که بتواند بازده بیشتری از بازده ماشین کارنو داشته باشد، در حالی که هر دو ماشین میان دو دمای یکسان کار کنند، وجود ندارد.* همیشه،بازده ماشین واقعی حداکثر برابر با بازده ماشین کارنو است. در چنین حالتی ماشین واقعی یک ماشین کارنو است.

## ۱۶-۸ دیدگاه آماری انتروپی

در فصل ۱۵ دیدیم که خواص ماکروسکوپی گازها می‌تواند برحسب رفتار میکروسکوپی یا مولکولی آنها توصیف شود. به عنوان مثال، به یاد دارید که فشار وارد شده به وسیلهٔ یک گاز بر دیواره‌های ظرف را می‌توان برحسب اندازه حرکت انتقال یافته به آن دیواره به علت واجهیدن مولکولهای گاز محاسبه کرد. چنین توصیفهایی بخشی از مطالعهٔ **مکانیک آماری** است.

در اینجا توجه خود را به مسئله‌ای معطوف می‌کنیم که به توزیع مولکولهای گاز بین دو نیمهٔ یک جعبهٔ عایق‌بندی شده مربوط است. این مسئله برای تحلیل به طور معقولی ساده است و اجازه می‌دهد تا از مکانیک آماری برای محاسبهٔ تغییر انتروپی در انبساط آزاد یک گاز آرمانی استفاده کنیم. در مسئلهٔ نمونهٔ




**شکل ۱۶-۱۷** یک جعبهٔ عایق‌بندی شده دارای شش مولکول گاز است. هر مولکول احتمال یکسانی دارد که در نیمهٔ چپ جعبه یا در نیمهٔ راست آن باشد. آرایش در (الف) مطابق با پیکربندی III در جدول ۱۶-۱ و آرایش در (ب) مطابق با پیکربندی IV آن جدول است.

۱۶-۷ خواهید دید که مکانیک آماری به همان تغییر انتروپی که در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۱ با استفاده از ترمودینامیک به دست آوردیم می‌انجامد.

شکل ۱۶-۱۷ جعبه‌ای را نشان می‌دهد که در آن شش مولکول یکسان (و در نتیجه غیر قابل تمیز) از یک گاز وجود دارد. در هر لحظه یک مولکول مشخص یا در نیمهٔ چپ است یا در نیمه راست؛ چون حجم دو نیمهٔ جعبه برابرند، این مولکول شانس یا احتمال یکسانی دارد که در یکی از دو نیمه باشد.

جدول ۱۶-۱ *هفت* پیکربندی از شش مولکول را نشان می‌دهد که هر یک با یک عدد رومی نشانه‌گذاری شده است. برای مثال در پیکربندی I همهٔ شش مولکول در نیمهٔ چپ جعبه $(n_1=۶)$ قرار دارند و هیچ مولکولی در نیمهٔ راست وجود ندارد $(n_2=۰)$. می‌بینیم که در حالت کلی هر پیکربندی داده شده به تعداد راه‌های مختلفی قابل دستیابی است. این آرایشهای مختلف مولکولها را *میکروحالت* می‌نامند. حال می‌خواهیم تعداد میکرو حالتهایی را که متناظر با یک پیکربندی معینی باشند محاسبه کنیم.

**جدول ۱۶-۱**
شش مولکول در یک جعبه

| نشانه | $n_1$ | $n_2$ | چندتایگی $W$ (تعداد میکرو حالتها) | محاسبهٔ $W$ (معادلهٔ ۱۶-۱۸) | انتروپی $10^{-23}$J/K (معادلهٔ ۱۶-۲۱) |
|---|---|---|---|---|---|
| I | ۶ | ۰ | ۱ | ۶!/(۶!۰!)=۱ | ۰ |
| II | ۵ | ۱ | ۶ | ۶!/(۵!۱!)=۶ | ۲/۴۷ |
| III | ۴ | ۲ | ۱۵ | ۶!/(۴!۲!)=۱۵ | ۳/۷۴ |
| IV | ۳ | ۳ | ۲۰ | ۶!/(۳!۳!)=۲۰ | ۴/۱۳ |
| V | ۲ | ۴ | ۱۵ | ۶!/(۲!۴!)=۱۵ | ۳/۷۴ |
| VI | ۱ | ۵ | ۶ | ۶!/(۱!۵!)=۶ | ۲/۴۷ |
| VII | ۰ | ۶ | ۱ | ۶!/(۰!۶!)=۱ | ۰ |
| | | | کل =۶۴ | | |

فرض کنید $N$ مولکول داریم که با $n_1$ مولکول در یک نیمهٔ جعبه و $n_2$ مولکول در نیمهٔ دیگر آن توزیع شده‌اند. (پس، $n_1+n_2=N$). فرض کنید که مولکولها را هر چند وقت یک بار «با دست» توزیع می‌کنیم. اگر $N=۶$ باشد، مولکول اول را می‌توان با شش راه مستقل انتخاب کرد؛ یعنی هر یک از شش مولکول را می‌توان برداشت. مولکول دوم را با پنج راه، با هر کدام از پنج مولکول باقیمانده می‌توان برداشت؛ و نظیر آن. تعداد کل راههایی که تمام شش مولکول را می‌توان انتخاب کرد عبارت است از ضرب این راههای مستقل، یا $۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰$ می‌توان با نماد ریاضی کوتاه این

ضرب را به صورت ۷۲۰=!۶ نوشت، که !۶ «فاکتوریل شش» خوانده می‌شود. با ماشین حساب می‌توان فاکتوریلها را محاسبه کرد. برای استفاده درآینده نیاز داریم بدانیم که ۱=!۰. (این را در ماشین حساب خود آزمایش کنید.)

با وجود این، چون مولکولها تمیز ناپذیرند، همهٔ این ۷۲۰ آرایش متفاوت نیستند. مثلاً موردی که $n_1=۴$ باشد (پیکر بندی III در جدول ۱۶-۱) ترتیبی که چهار مولکول در یک نیمهٔ جعبه قرار بگیرد مهم نیست، چون پس از اینکه همهٔ چهار مولکول را در داخل گذاشتیم، هیچ راهی وجود ندارد که ترتیب انجام آن را مشخص کند. تعداد راههایی که می‌توان چهار مولکول را مرتب کرد ۲۴=!۴ است. همچنین تعداد راههایی که می‌توان دو مولکول را در نیمهٔ دیگر جعبه قرارداد به طور ساده ۲=!۲ است. برای به دست آوردن تعداد آرایشهای *مختلفی* که به تقسیم‌بندی (۲ و ۴) در پیکربندی III می‌انجامد، باید ۷۲۰ را بر ۲۴ و همچنین بر ۲ تقسیم کنیم. کمیت به دست آمده که تعداد میکروحالتهای متناظر با پیکربندی داده شده را نشان می‌دهد، *چندتایگی* $W$ آن پیکربندی می‌گویند. پس، در مورد پیکربندی III داریم

$$W_{\text{III}}=\frac{۶!}{۴!\,۲!}=\frac{۷۲۰}{۲۴\times۲}=۱۵$$

بنابراین، جدول ۱۶-۱ نشان می‌دهد که ۱۵ میکروحالت مستقل وجود دارد که متناظر با پیکربندی III هستند. توجه کنید که، به صورتی که جدول نیز نشان می‌دهد، تعداد کل میکروحالتهای شش مولکول توزیع شده در هفت پیکربندی ۶۴ است.

با برونیابی از شش مولکول به حالت کلی $N$ مولکول خواهیم داشت

$$W=\frac{N!}{n_1!\,n_2!} \qquad \text{(چندتایگی پیکربندی)} \qquad (۱۶-۲۰)$$

می‌توان نشان داد که معادلهٔ ۱۶-۲۰ چندتایگی همهٔ پیکربندیهای فهرست شده در جدول ۱۶-۱ را به دست می‌دهد.

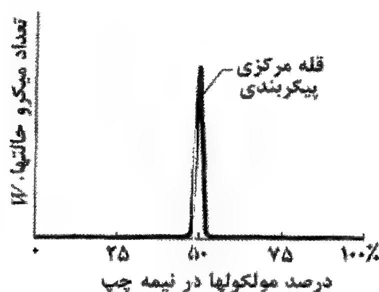
فرض اصلی مکانیک آماری چنین است:

☜ کلیهٔ میکروحالتها احتمال یکسان دارند.

به عبارت دیگر اگر عکسهای- فوری زیادی از شش مولکول درون جعبه شکل ۱۶-۱۷ موقع جابه‌جا شدن آنها بگیریم و سپس تعداد دفعه‌های هر میکروحالت رخ داده را به شماریم، در خواهیم یافت که همهٔ ۶۴ میکروحالت به طور برابر رخ می‌دهند. بنابراین، دستگاه به طور متوسط مدت زمان مساوی را در هر ۶۴ میکروحالت گذرانده است.

چون همهٔ میکروحالتها احتمال وجود یکسانی دارند ولی پیکربندیهای مختلف تعداد میکرو حالتهای متفاوتی را شامل می‌شوند، پیکربندیها همگی احتمال وقوع مساوی ندارند. در جدول ۱۶-۱ پیکربندی IV با ۲۰ میکرو حالت، با احتمال ۰/۳۱۳=۲۰/۶۴، *متحملترین پیکربندی* است. این نتیجه بدان معناست که دستگاه ۳۱/۳٪ زمان در پیکربندی TV بوده است. پیکربندیهای I و III که در آنها مولکولها در یک نیمهٔ جعبه هستند، هر یک با احتمال ۰/۰۱۶=۱/۶۴ یا ۱/۶٪ کمترین احتمال را داشته‌اند. جای تعجب نیست که متحملترین پیکربندی، مربوط به حالتی است که مولکولها به طور مساوی در دو نیمه جعبه تقسیم شده باشند، چون این چیزی است که در تعادل گرمایی انتظار داریم. با وجود این جای تعجب *دارد* که *این* احتمال، حتی اندک، وجود دارد که همهٔ شش مولکول در یک نیمهٔ جعبه جمع شوند و نیمهٔ دیگر آن خالی باشد.

به‌ازای مقدارهای بیشتر $N$ تعداد میکروحالتهای خیلی زیادی وجود دارد، ولی همان‌طور که در شکل ۱۶-۱۸ نشان داده شده است تقریباً همهٔ میکروحالتها به پیکربندیی تعلق دارند که در آن مولکولها بین دو نیمه جعبه به طور مساوی تقسیم شده‌اند. حتی اگر دما و فشار اندازه‌گیری شدهٔ گاز ثابت بمانند، وقتی مولکولهای گاز همهٔ میکروحالتهای ممکن را با احتمال برابر «دیدار می‌کنند» گاز بی وقفه به هم می‌خورد. با این وجود، چون تعداد خیلی کمی از میکروحالتها در بیرون قلهٔ پیکربندی مرکزی باریک شکل ۱۶-۱۸ قرار می‌گیرند، می‌توان فرض کرد که مولکولهای گاز همیشه به طور برابر بین دو نیمهٔ جعبه تقسیم می‌شوند. همان‌طور که خواهیم دید، این پیکربندی بیشترین انتروپی را دارد.




**شکل ۱۶-۱۸** برای تعداد *زیادی* از مولکولها در یک جعبه، نمودار تعداد میکروحالتها برحسب درصدهای مختلفی از مولکولهای موجود در نیمهٔ جعبه نشان داده شده است. تقریباً همهٔ میکروحالتها با سهم تقریباً مساوی مولکولها بین دو نیمه جعبه متناظرند، این میکرو حالتها قلهٔ پیکربندی مرکزی را روی نمودار تشکیل داده‌اند. به‌ازای $N\approx ۱۰^{۲۲}$ قلهٔ پیکربندی مرکزی خیلی باریکتر از آنی است که بتوان آن را روی این نمودار رسم کرد.

**مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۶**

فرض کنید که ۱۰۰ مولکول تمیز ناپذیر در جعبهٔ شکل ۱۶-۱۶ وجود دارند. چند میکروحالت به پیکربندی $n_1=۵۰$ و $n_2=۵۰$ و چند میکرو حالت به پیکربندی $n_1=۱۰۰$ و $n_2=۰$ مربوط است؟ نتیجه‌ها را برحسب احتمال نسبی این دو پیکربندی تفسیر کنید.

**نکتهٔ کلیدی** چندتایگی $W$ پیکربندی مولکولهای تمیز ناپذیر در یک جعبه بسته، همان‌طور که با معادلهٔ ۱۶-۲۰ داده شده است، برابر است با تعداد میکروحالتهای مستقل با آن پیکربندی.

***محاسبه‌ها:*** برای پیکربندی ($n_1$ و $n_2$) یعنی (۵۰ و ۵۰) از آن معادله خواهیم داشت

$$W=\frac{N!}{n_1!\,n_2!}=\frac{100!}{50!\,50!}=\frac{9/33\times10^{157}}{(3/04\times10^{64})(3/04\times10^{64})}=1/01\times10^{29} \quad \text{(پاسخ)}$$

همچنین در مورد پیکربندی (۱۰۰،۰) خواهیم داشت

$$W=\frac{N!}{n_1!\,n_2!}=\frac{100!}{100!\,0!}=\frac{1}{0!}=\frac{1}{1}=1 \quad \text{(پاسخ)}$$

***مفهوم:*** بنابراین، توزیع ۵۰-۵۰ با ضریب تقریباً $1\times10^{29}$ دارای احتمال بیشتری نسبت به توزیع ۰-۱۰۰ است. اگر تعداد میکرو حالتهای متناظر با توزیع ۵۰-۵۰ را در هر یک نانو ثانیه یک میکرو حالت بشماریم، تقریباً $3\times10^{12}$ سال طول می‌کشد که تقریباً ۲۰۰ برابر سن جهان است، حتی ۱۰۰ مولکول هنوز تعداد خیلی کمی است. در نظر بگیرید که برای یک مول از مولکولها یعنی حدود $N=10^{24}$ این احتمالهای محاسبه شده چقدر خواهد بود. بنابراین برای تنفس در هر گوشه‌ای از اتاق، هرگز نگران پیدا شدن ناگهانی همهٔ مولکولهای هوا در گوشهٔ دیگری از اتاق نباشید!

## احتمال و انتروپی

در سال ۱۸۷۷/۱۲۵۶ لودویگ بولتزمن (همان بولتزمن ثابت بولتزمن $k$) فیزیکدان اتریشی رابطه‌ای میان انتروپی $S$ پیکربندی یک گاز و چندتایگی $W$ آن پیکربندی به دست آورد. این رابطه عبارت است از

$$S=k\ln W \quad \text{(معادلهٔ انتروپی بولتزمن)} \quad (16\text{-}21)$$

این فرمول مهم روی سنگ آرامگاه بولتزمن حک شده است.

اینکه $S$ و $W$ با یک تابع لگاریتمی به یکدیگر مربوط باشند طبیعی به نظر می‌رسد. انتروپی کل دو دستگاه برابر است با مجموع انتروپیهای جداگانهٔ آنها و احتمال وجود هر دو دستگاه مستقل برابر است با ضرب احتمالهای جداگانهٔ آنها. چون $\ln ab=\ln a+\ln b$ است، به نظر می‌رسد که لگاریتم یک راه منطقی برای ارتباط این کمیتها باشد.

جدول ۱۶-۱ انتروپیهای پیکربندی شش مولکول دستگاه شکل ۱۶-۱۷ را نشان می‌دهد که با استفاده از معادلهٔ ۱۶-۲۱ محاسبه شده است. پیکربندی IV که بیشترین چندتایگی را دارد، دارای بیشترین انتروپی نیز هست.

وقتی که از معادلهٔ ۱۶-۲۰ برای محاسبهٔ $W$ استفاده می‌کنیم، ممکن است در محاسبه فاکتوریل عددهای بزرگ ماشین حساب شما «سرریزش» کند. خوشبختانه تقریب خیلی خوبی به نام **تقریب استرلینگ** نه برای $N!$ بلکه برای $\ln N!$ وجود دارد که دقیقاً همان چیزی است که در معادلهٔ ۱۶-۲۱ مورد نیاز است. تقریب استرلینگ عبارت است از

$$\ln N!=N(\ln N)-N \quad \text{(تقریب استرلینگ)} \quad (16\text{-}22)$$

استرلینگ این تقریب ریاضیدان انگلیسی است، روبرت استرلینگ ماشین معروف نیست.

> ✓ ***نکتهٔ وارسی ۵*** در جعبه‌ای ۱ mol گاز قرار دارد. دو پیکربندی را در نظر بگیرید: (الف) هر نیمه جعبه نصف مولکولها را دارد و (ب) هر یک سوم جعبه یک سوم مولکولها را دارد. کدام پیکربندی میکروحالت بیشتری دارد؟

### مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۷

در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۱ نشان دادیم که هرگاه حجم $n$ مول از یک گاز آرمانی در انبساط آزاد دو برابر شود، افزایش انتروپی آن از حالت اولیهٔ $i$ به حالت نهایی $f$ عبارت است از $S_f-S_i=nR\ln 2$. این نتیجه را با مکانیک آماری به دست آورید.

**نکتهٔ کلیدی** انتروپی هر پیکربندی معینی از مولکولهای گاز را می‌توان با استفاده از معادلهٔ ۱۶-۲۱ ($S=k\ln W$) به چندتایگی $W$ میکروحالتهای آن پیکربندی ارتباط داد.

***محاسبه‌ها:*** دو پیکربندی مورد توجه است: پیکربندی نهایی $f$ (که مولکولها تمام حجم ظرف خود درشکل ۱۶-۱ ب را اشغال می‌کنند) و پیکربندی اولیهٔ $i$ (که مولکولها در نیمهٔ چپ ظرف خود قرار دارند). چون، مولکولها در یک ظرف بسته قرار دارند، چندتایگی $W$ میکروحالتهای آنها را می‌توان با معادلهٔ ۱۶-۲۰ محاسبه کرد. در اینجا $N$ مولکول در $n$ مول گاز موجود است. در ابتدا همهٔ مولکولها در نیمهٔ چپ ظرف قرار دارند که پیکربندی ($n_1$ و $n_2$) آنها ($N$ و ۰) است. بنابراین، از معادلهٔ ۱۶-۲۰ چندتایگی به صورت زیر به دست می‌آید

$$W_i=\frac{N!}{N!\,0!}=1$$

سرانجام، وقتی مولکولهای گاز در تمام حجم پخش شوند، پیکربندی ($n_1$ و $n_2$) آنها به صورت $(N/2,N/2)$ است. پس، از معادلهٔ ۱۶-۱۸ چندتایگی به صورت زیر خواهد شد

$$W_f=\frac{N!}{(N/2)!\,(N/2)!}$$

از معادلهٔ ۱۶-۲۰ انتروپیهای اولیه و نهایی عبارت‌اند از

$$S_i=k\ln W_i=k\ln 1=0$$

و

$$S_f=k\ln W_f=k\ln(N!)-2k\ln[(N/2)!] \quad (16\text{-}23)$$

در نوشتن معادلهٔ ۱۶-۲۳ از رابطهٔ زیر استفاده شده است

$$\ln\frac{a}{b^{۲}}=\ln a-۲\ln b$$

حال برای محاسبهٔ معادلهٔ ۱۶-۲۳ از معادلهٔ ۱۶-۲۲ استفاده می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}S_f &= k\ln(N!)-۲k\ln[(N/۲)!]\\ &=k[N(\ln N)-N]-۲k[(N/۲)\ln(N/۲)-(N/۲)]\\ &=k[N(\ln N)-N-N\ln(N/۲)+N]\\ &=k[N(\ln N)-N(\ln N-\ln ۲)]=Nk\ln ۲\end{aligned}\qquad(۱۶\text{-}۲۴)$$

از معادلهٔ ۱۵-۸ به جای $Nk$ کمیت $nR$ را قرار می‌دهیم که $R$ ثابت جهانی گازهاست. بنابراین، از معادلهٔ ۱۶-۲۴ خواهیم داشت

$$S_f=nR\ln ۲$$

پس تغییر در انتروپی از حالت اولیه تا نهایی عبارت است از

$$\begin{aligned}S_f-S_i&=nR\ln ۲-۰\\ &=nR\ln ۲\end{aligned}\qquad\text{(پاسخ)}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم. در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۱ این افزایش انتروپی را برای یک انبساط آزاد با ترمودینامیک یک فرایند برگشت پذیر هم‌ارز و محاسبه تغییر انتروپی برای آن فرایند برحسب دما و انتقال گرما محاسبه کردیم. در این مسئلهٔ نمونه، همان افزایش در انتروپی را با مکانیک آماری با استفاده از این واقعیت که دستگاه مرکب از مولکولهاست محاسبه کردیم. به طور خلاصه، دو رهیافت بسیار متفاوت پاسخ یکسانی به دست می‌دهند.

## بازنگری و خلاصهٔ درس

**فرایندهای یک سویه** فرایند **برگشت ناپذیر** فرایندی است که به کمک تغییرات کوچکی در محیط نتوان آن را معکوس کرد. جهتی که در آن یک فرایند برگشت ناپذیر رخ می‌دهد با *تغییر در انتروپی* $\Delta S$ دستگاهی که فرایند را انجام می‌دهد مشخص می‌شود. انتروپی $S$ یک *خاصیت حالت* (یا *تابع حالت*) دستگاه است؛ یعنی فقط به حالت دستگاه بستگی دارد و به چگونگی راهی که دستگاه به آن رسیده است بستگی ندارد. *اصل موضوع انتروپی* (در قسمتی) می‌گوید: *اگر فرایند برگشت ناپذیری در دستگاهی بسته رخ دهد، انتروپی دستگاه همیشه افزایش می‌یابد.*

**محاسبهٔ تغییر انتروپی** **تغییر انتروپی** $\Delta S$ یک فرایند برگشت ناپذیر که دستگاهی را از یک حالت اولیهٔ $i$ به یک حالت نهایی $f$ می‌برد دقیقاً برابر است با تغییر انتروپی $\Delta S$ هر *فرایند برگشت‌پذیری* که دستگاه میان همان حالتها انجام می‌دهد. تغییر انتروپی اخیر (نه قبلی) را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد

$$\Delta S=S_f-S_i=\int_i^f\frac{dQ}{T}\qquad(۱۶\text{-}۱)$$

در اینجا $Q$ انرژی گرمایی مبادله شده با دستگاه در طی فرایند و $T$ دمای دستگاه برحسب کلوین در طی فرایند است.

در مورد یک فرایند تکدمای برگشت پذیر، معادلهٔ ۱۶-۱ به صورت زیر ساده می‌شود

$$\Delta S=S_f-S_i=\frac{Q}{T}\qquad(۱۶\text{-}۲)$$

هرگاه تغییر دمای $\Delta T$ دستگاهی نسبت به دمای (برحسب کلوین) پیش و پس از فرایند کوچک باشد، تغییر انتروپی را با تقریب می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta S=S_f-S_i\approx\frac{Q}{T_{\text{avg}}}\qquad(۱۶\text{-}۳)$$

که در آن $T_{\text{avg}}$ دمای میانگین دستگاه در طی فرایند است.

هرگاه یک گاز آرمانی به طور برگشت‌پذیر از یک حالت اولیه با دمای $T_i$ و حجم $V_i$ به یک حالت نهایی با دمای $T_f$ و حجم $V_f$ تغییر کند، تغییر $\Delta S$ در انتروپی گاز عبارت است از

$$\Delta S=S_f-S_i=nR\ln\frac{V_f}{V_i}+nC_V\ln\frac{T_f}{T_i}\qquad(۱۶\text{-}۴)$$

**قانون دوم ترمودینامیک** این قانون که از تعمیم اصل موضوع انتروپی به دست می‌آید بیان می‌کند که: *اگر فرایندی در یک دستگاه بسته رخ دهد، انتروپی دستگاه برای فرایندهای برگشت‌ناپذیر افزایش می‌یابد و برای فرایندهای برگشت پذیر ثابت می‌ماند. انتروپی هرگز کاهش نمی‌یابد.* در شکل معادله داریم

$$\Delta S\geq ۰\qquad(۱۶\text{-}۵)$$

**ماشینها** **ماشین** وسیله‌ای است که با عمل در یک چرخه، انرژی گرمایی $|Q_{\text{H}}|$ را از منبع با دمای بالا می‌گیرد و مقدار معین کار $|W|$ را انجام می‌دهد. *بازده* $\varepsilon$ هر ماشین به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varepsilon=\frac{\text{انرژی به دست آمده}}{\text{انرژی مصرف شده}}=\frac{|W|}{|Q_{\text{H}}|}\qquad(۱۶\text{-}۱۱)$$

در یک **ماشین آرمانی** همهٔ فرایندها برگشت‌پذیرند و هیچ اتلاف انرژی مثلاً براثر اصطکاک و آشفتگی صورت نمی‌گیرد. **ماشین کارنو** یک ماشین آرمانی است که از چرخهٔ شکل ۱۶-۹ پیروی می‌کند. بازده آن عبارت است از

$$\varepsilon_C=۱-\frac{|Q_{\text{L}}|}{|Q_{\text{H}}|}=۱-\frac{T_{\text{L}}}{T_{\text{H}}}\qquad(۱۶\text{-}۱۲\text{، }۱۶\text{-}۱۳)$$

که در آن $T_{\text{H}}$ و $T_{\text{L}}$ به ترتیب منبعهای با دمای بالا و دمای پایین هستند. بازده ماشینهای واقعی همیشه کمتر از مقداری است که با معادلهٔ ۱۶-۱۳ داده می‌شود. بازده ماشینهای آرمانی که ماشینهای کارنو نیستند نیز کمتر از مقداری است که با معادلهٔ ۱۶-۱۳ داده می‌شود.

*ماشین کامل* یک ماشین فرضی است که در آن انرژی گرمایی گرفته شده از منبع با دمای بالا به طور کامل به کار

تبدیل می‌شود. چنین ماشینی قانون دوم ترمودینامیک را نقض می‌کند که به صورت زیر بیان می‌شود: هیچ رشته فرایندی که نتیجهٔ آن گرفتن انرژی گرمایی از یک منبع و تبدیل کامل آن به کار باشد امکانپذیر نیست.

**یخچالها** یخچال وسیله‌ای است که به صورت چرخه‌ای کار می‌کند و باگرفتن انرژی گرمایی $|Q_L|$ از یک منبع با دمای پایین روی آن کار $W$ را انجام می‌دهد. ضریب کارایی $K$ یک یخچال به صورت زیر تعریف می‌شود

$$K = \frac{\text{آنچه که می‌خواهیم}}{\text{آنچه که می‌پردازیم}} = \frac{|Q_L|}{|W|} \qquad (۱۶-۱۴)$$

**یخچال کارنو** ماشینی است، که به طور معکوس عمل می‌کند. در مورد یخچال کارنو، معادلهٔ ۱۶-۱۴ چنین خواهد شد

$$K_C = \frac{|Q_L|}{|Q_H| - |Q_L|} = \frac{T_L}{T_H - T_L} \qquad (۱۶-۱۵ ، ۱۶-۱۶)$$

*یخچال کامل* یک یخچال فرضی است که در آن انرژی گرمایی گرفته شده از منبع با دمای پایین به طور کامل و بدون نیاز به انجام کار به منبع با دمای بالا داده می‌شود. چنین یخچالی قانون دوم ترمودینامیک را نقض می‌کند که به صورت زیر بیان می‌شود: هیچ رشته فرایندی که نتیجهٔ آن فقط انتقال انرژی گرمایی از منبع در دمای معین به منبعی در دمای بالاتر باشد امکانپذیر نیست.

**انتروپی از دیدگاه آماری** انتروپی یک دستگاه را می‌توان برحسب توزیعهای ممکن مولکولهای آن تعریف کرد. برای مولکولهای یکسان، هر توزیع امکان‌پذیر از مولکولها یک **میکروحالت** دستگاه نامیده می‌شود. تمام میکروحالتهای معادل در یک **پیکربندی** دستگاه قرار می‌گیرند. تعداد میکروحالتهای یک پیکربندی **چندتایگی** $W$ آن پیکربندی نامیده می‌شود.

برای دستگاهی شامل $N$ مولکول که می‌توانند بین دو نیمهٔ یک جعبه توزیع شود، چندتایگی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$W = \frac{N!}{n_1! n_2!} \qquad (۱۶-۲۰)$$

که در آن $n_1$ تعداد مولکولهای یک نیمهٔ جعبه و $n_2$ تعداد نیمهٔ دیگر است. فرض اساسی **مکانیک آماری** این است که همهٔ میکروحالتها احتمال یکسانی دارند. بنابراین، اغلب پیکربندیهای با چند تایگی زیاد رخ می‌دهند. هرگاه $N$ خیلی زیاد باشد (مثلاً $N=10^{22}$ مولکول یا بیشتر) مولکولها تقریباً همیشه در پیکربندی $n_1 = n_2$ قرار می‌گیرند.

چندتایگی $W$ پیکربندی دستگاهی و انتروپی $S$ دستگاه در آن پیکربندی با معادلهٔ انتروپی بولتزمن به هم مربوط می‌شوند

$$S = k \ln W \qquad (۱۶-۲۱)$$

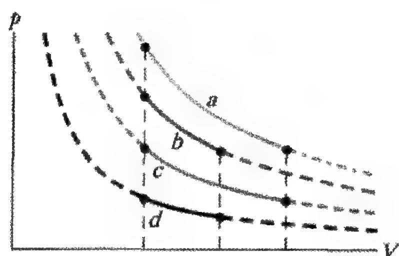
که $k = 1.38 \times 10^{-23}\,\text{J/K}$ ثابت بولتزمن است.

هرگاه $N$ خیلی بزرگ باشد (حالت معمول)، با تقریب *استرلینگ* می‌توان رابطه $\ln N!$ را به صورت تقریبی زیرنوشت

$$\ln N! \approx N(\ln N) - N \qquad (۱۶-۲۲)$$

## پرسشها

۱- در چهار آزمایش، ۲/۵mol گاز هیدروژن با شروع از حجم یکسان ولی دماهای متفاوت انبساط تکدمای برگشت‌پذیر می‌یابد. نمودارهای مربوطهٔ $p$-$V$ در شکل ۱۶-۱۹ نشان داده شده است. این وضعیتها را مطابق با تغییر در انتروپی گاز به ترتیب بزرگی مرتب کنید. (*راهنمایی*: به مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۱ نگاه کنید.)

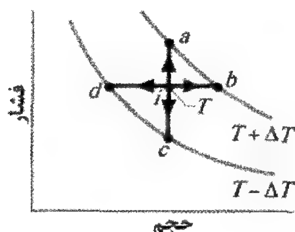



**شکل ۱۶-۱۹** پرسش ۱

۲- در چهار آزمایش، قطعه‌های $A$ و $B$ را که دماهای اولیهٔ مختلفی دارند داخل جعبه‌ای (مانند مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶-۲) عایقبندی شده قرار می‌دهیم تا به دمای نهایی مشترکی برسند. مقدارهای مربوط به تغییر انتروپی قطعه‌ها (برحسب ژول بر کلوین) چهار مقدار زیر است ولی به ترتیب نوشته نشده‌اند. تعیین کنید که کدام مقدار $A$ با کدام مقدار $B$ متناظر است.

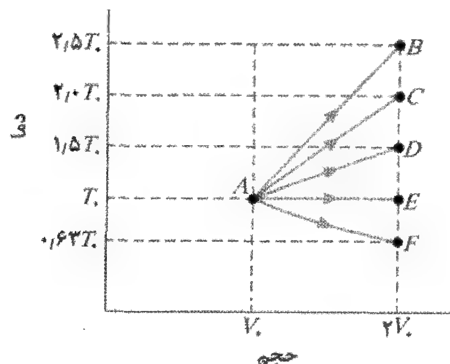
| قطعه | مقدارها | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | ۸ | ۵ | ۳ | ۹ |
| $B$ | ۳- | ۸- | ۵- | ۲- |

۳- نقطهٔ $i$ در شکل ۱۶-۲۰ حالت اولیهٔ یک گاز آرمانی را در دمای $T$ نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن علامتهای جبری، تغییرات انتروپی گاز را به هنگام پیمودن متوالی و برگشت‌پذیر از نقطهٔ $i$ به نقطه‌های $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ به ترتیب بزرگی مرتب کنید.




**شکل ۱۶-۲۰** پرسش ۳

۴- یک گاز آرمانی تک اتمی در دمای اولیهٔ $T_0$ (برحسب کلوین) با هریک از پنج فرایند نشان داده شده در نمودار $T$-$V$ شکل ۱۶-۲۱ از حجم اولیهٔ $V_0$ تا حجم $2V_0$ منبسط می‌شود. در کدام فرایند انبساط (الف) تکدما، (ب) تک فشار (فشار ثابت) و (پ) بی‌دررو است؟ جواب خود را شرح دهید. (ت) در کدام فرآیند انتروپی گاز کاهش می‌یابد؟




**شکل ۱۶-۲۱** پرسش ۴

۵- گازی محبوس در یک استوانهٔ عایق بندی شده به طور بی‌دررو متراکم می‌شود تا به نصف حجم خود برسد. آیا انتروپی گاز در این فرایند افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟

۶- سه ماشین کارنو میان دماهای (الف) ۴۰۰K، ۵۰۰K، (ب) ۵۰۰K، ۶۰۰K و (پ) ۴۰۰K، ۶۰۰K کار می‌کنند. هر یک از این ماشینها در هر چرخه از منبع با دمای بالا مقدار یکسانی انرژی گرمایی می‌گیرد. بزرگیهای کار انجام شده به وسیلهٔ ماشینها را در هر چرخه به ترتیب بزرگی مرتب کنید.

۷- مخترعی ادعا می‌کند که می‌خواهد چهار ماشین اختراع کند که هر یک میان منبعهایی با دمای ثابت در ۴۰۰K و ۳۰۰K کار کنند. داده‌های هر ماشین در هر چرخهٔ کاری عبارت‌اند از:
ماشین $A$، $Q_H = ۲۰۰J$ ، $Q_L = -۱۷۵J$ و $W = ۴۰۰J$ ؛
ماشین $B$، $Q_H = ۵۰۰J$ ، $Q_L = -۲۰۰J$ و $W = ۴۰۰J$ ؛
ماشین $C$، $Q_H = ۶۰۰J$ ، $Q_L = -۲۰۰J$ و $W = ۴۰۰J$ ؛
ماشین $D$، $Q_H = ۱۰۰J$ ، $Q_L = -۹۰J$ و $W = ۱۰J$ . از قانونهای اول و دوم ترمودینامیک کدامیک با عملکرد یکی از ماشینها نقض می‌شود؟

۸- آیا انتروپی در هر چرخه (الف) در یک یخچال کارنو، (ب) در یک یخچال واقعی و (پ) در یک یخچال کامل (که البته ساخت آن امکان ندارد) افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان می‌ماند؟

۹- آیا انتروپی در هر چرخه (الف) در یک ماشین کارنو، (ب) در یک ماشین واقعی و (پ) در یک ماشین کامل (که البته ساخت آن امکان ندارد) افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان می‌ماند؟

۱۰- جعبه‌ای ۱۰۰ اتم در یک پیکربندی دارد که ۵۰ اتم در هر نیمه است. فرض کنید که بتوان میکروحالتهای مختلف مربوط به این پیکربندی را با آهنگ ۱۰۰ میلیارد حالت در ثانیه با استفاده از یک ابررایانه شمارش کرد. بدون محاسبهٔ حدس بزنید که چه مدت زمان برای این کار نیاز است: یک روز، یک سال یا بیشتر از یک سال.

## مسئله‌ها

GO مسئله‌های آموزشی قابل دسترس (در نسخهٔ مدرس)
SSM: پاسخ قابل دسترس در کتاب حل مسئله‌ها
WWW: پاسخ در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
ILW: پاسخ یادگیری تعاملی در http://www.wiley.com/college/halliday داده شده است.
•-••• تعداد نقطه‌ها درجهٔ دشوار بودن سطح مسئله را نشان می‌دهد.
اطلاعات اضافی در سیرک پرندهٔ فیزیک و در flyingcircusofphysics.com قابل دسترس است.

### بخش ۱۶-۳ تغییر انتروپی

•۱- ۲٫۵۰mol از نمونه‌ای از یک گاز آرمانی به طور برگشت‌پذیر و تکدما در دمای ۳۶۰K منبسط می‌شود تا حجم آن دو برابر شود. افزایش انتروپی گاز چقدر است؟ **ILW**

•۲- اگر انتروپی یک گاز آرمانی در انبساط تکدمای برگشت‌پذیر در دمای ۱۳۲°C برابر با ۴۶٫۰J/K باشد، چقدر انرژی باید به صورت گرما انتقال یابد؟

•۳- (الف) انرژی جذب شده به صورت گرما و (ب) تغییر در انتروپی یک قطعهٔ ۲٫۰۰kg مسی را که دمای آن به طور برگشت‌پذیر از ۲۵٫۰°C تا ۱۰۰°C افزایش می‌یابد، پیدا کنید. گرمای ویژهٔ مس ۳۸۶J/kg·K است. **ILW**

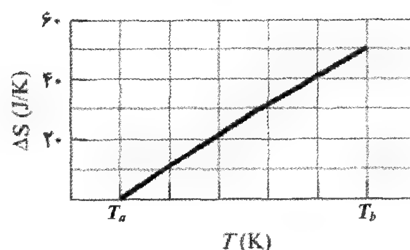
•۴- (الف) تغییر انتروپی یک قطعه یخ به جرم ۱۲۰g که در یک سطل آب که دمای آن اندکی بالاتر از نقطهٔ انجماد آب است به طور کامل ذوب می‌شود، چقدر است؟ (ب) تغییر انتروپی یک قاشق آب به جرم ۵٫۰۰g که روی صفحهٔ داغی که دمای آن اندکی بالاتر از نقطهٔ جوش آب است به طور کامل تبخیر شود، چقدر است؟

•۵- فرض کنید ۴٫۰۰mol از یک گاز آرمانی با انبساط تکدما از حجم $V_1$ به حجم $V_2 = ۲٫۰۰V_1$ در دمای $T = ۴۰۰K$ می‌رود. (الف) کار انجام شده به وسیلهٔ گاز و (ب) تغییر انتروپی گاز را پیدا کنید. (پ) اگر انبساط برگشت‌پذیر و به جای تکدما بی‌دررو باشد، تغییر انتروپی گاز چقدر است؟ **SSM**

•۶- حجم یک گاز آرمانی در انبساط تکدمای برگشت‌پذیر در ۷۷٫۰°C از ۱٫۳۰L به ۳٫۴۰L افزایش می‌یابد. تغییر انتروپی گاز ۲۲٫۰J/K است. چند مول از گاز وجود داشته است.

•۷- در آزمایشی، ۲۰۰g آلومینیوم (با گرمای ویژهٔ ۹۰۰J/kg·K) در دمای ۱۰۰°C با ۵۰/۰g آب در دمای ۲۰/۰°C، در ظرفی که از نظر گرمایی عایق بندی شده است مخلوط می‌شود. (الف) دمای تعادل چقدر است؟ تغییر انتروپی (ب) آلومینیوم، (پ) آب و (ت) دستگاه آلومینیوم- آب چقدر است؟ **SSM WWW**

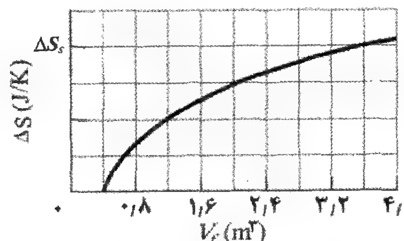
••۸- قطعه‌ای به جرم ۳۶۴g در تماس با یک منبع گرمایی قرارداده شده است. در آغاز دمای اولیهٔ قطعه از منبع کمتر است. فرض کنید انتقال انرژی به صورت گرما از منبع به قطعه برگشت‌پذیر است. شکل ۱۶-۲۲ تغییر در انتروپی $\Delta S$ قطعه را تا رسیدن به تعادل گرمایی نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $T_a = ۲۸۰K$ ، $T_b = ۳۸۰K$ مشخص شده است. گرمای ویژهٔ قطعه چقدر است؟




**شکل ۱۶-۲۲** مسئلهٔ ۸

••۹- در فرایند برگشت‌ناپذیر شکل ۱۶-۵، دمای اولیهٔ قطعه‌های مشابه $L$ و $R$ به ترتیب ۳۰۵/۵K و ۲۹۴/۵K است و میان قطعه‌ها برای رسیدن به دمای تعادل ۲۱۵J انرژی مبادله می‌شود. در فرایندهای برگشت ناپذیر شکل ۱۶-۶ تغییر انتروپی $\Delta S$ برای (الف) قطعهٔ $L$ ، (ب) منبع آن، (پ) قطعهٔ $R$ ، (ت) منبع آن، (ث) دستگاه دو قطعه‌ای و (ج) دستگاه دو قطعه‌ای و دو منبع، چقدر است؟

••۱۰- نمونه‌ای از یک گاز به طور تکدمای برگشت پذیر منبسط می‌شود. شکل ۱۶-۲۳ تغییر $\Delta S$ در انتروپی گاز را برحسب حجم نهایی $V_f$ گاز به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\Delta S_s = ۶۴J/K$ مشخص شده است. چند مول در نمونه وجود دارد؟

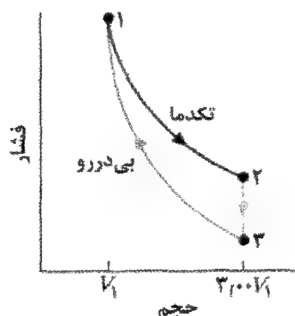



**شکل ۱۶-۲۳** مسئلهٔ ۱۰

••۱۱- یک قطعهٔ مسی به جرم ۵۰/۰g و با دمای ۴۰۰K در یک جعبهٔ عایق‌بندی محتوی یک قطعهٔ سربی به جرم ۱۰۰g با دمای ۲۰۰K قرار داده شده است. (الف) دمای تعادل دستگاه دو قطعه چقدر است؟ (ب) تغییر در انرژی درونی دستگاه میان حالت اولیه و حالت تعادل چقدر است؟ (پ) تغییر در انتروپی دستگاه چقدر است؟ (به جدول ۱۴-۳ نگاه کنید.) **ILW**

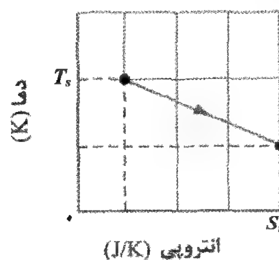
••۱۲- در دماهای خیلی پایین، گرمای ویژهٔ مولی $C_V$ بسیاری از جامدها تقریباً $C_V = AT^۳$ است، که در آن $A$ به مادهٔ خاص بستگی دارد. در آلومینیوم $A = ۳/۱۵ \times ۱۰^{-۵}$ J/mol·K⁴ است. تغییر انتروپی ۴/۰۰mol آلومینیوم را وقتی دمای آن از ۵/۰۰K به ۱۰/۰K برسد، پیدا کنید.

••۱۳- برای $n$ مول از یک گاز آرمانی دو اتمی که چرخهٔ شکل ۱۶-۲۴ را با چرخش مولکولها و بدون نوسان می‌پیماید، و در آن $V_۲ = ۳/۰۰ V_۱$ (الف) $p_۲/p_۱$ ، (ب) $p_۳/p_۱$ و (پ) $T_۳/T_۱$ چقدر است؟ در مسیر ۱←۲، (ت) $W/nRT_۱$ ، (ث) $Q/nRT_۱$ ، (ج) $\Delta E_{int}/nRT_۱$ و (چ) $\Delta S/nR$ چقدر است؟ در مسیر ۲←۳، (ح) $W/nRT_۱$، (خ) $Q/nRT_۱$، (د) $\Delta E_{int}/nRT_۱$ (ذ) $\Delta S/nR$ چقدر است؟ در مسیر ۳←۱ (ر) $W/nRT_۱$ ، (ز) $Q/nRT_۱$، (ژ) $\Delta E_{int}/nRT_۱$، (س) $\Delta S/nR$ چقدر است؟




**شکل ۱۶-۲۴** مسئلهٔ ۱۳

••۱۴- ۲/۰۰mol از یک گاز تک اتمی آرمانی فرایند نشان داده شده در شکل ۱۶-۲۵ را به طور برگشت پذیر انجام می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $T_s = ۴۰۰/۰K$ و مقیاس محور افقی با $S_s = ۲۰/۰ J/K$ مشخص شده است. (الف) چقدر انرژی به صورت گرما توسط گاز جذب می‌شود؟ (ب) تغییر در انرژی درونی گاز چقدر است؟ (پ) کار انجام شده به وسیلهٔ گاز چقدر است؟

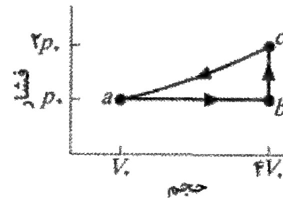



**شکل ۱۶-۲۵** مسئلهٔ ۱۴

••۱۵- یک قطعهٔ یخ به جرم ۱۰g با دمای ۱۰°C- در استخر آبی با دمای ۱۵°C انداخته می‌شود. تغییر در انتروپی دستگاه

قطعه- استخر را وقتی که قطعه یخ با استخر به حالت تعادل در می‌آید محاسبه کنید. گرمای ویژهٔ یخ $2220\,J/kg\cdot K$ است (*راهنمایی*: آیا قطعه یخی بر دمای استخر تأثیر می‌گذارد؟)

••۱۶- (الف) $1/0\,mol$ گاز آرمانی تک اتمی چرخهٔ شکل ۱۶-۲۶ را طی می‌کند، وقتی که گاز از حالت $a$ به حالت $c$ در راستای مسیر $abc$ برود $W/p_0V_0$ چقدر است؟ $\Delta E_{int}/p_0V_0$ در طول (ب) از $b$ به $c$ و (پ) در یک چرخهٔ کامل چقدر است؟ $\Delta S$ در طول (ت) از $b$ به $c$ و (ث) در یک چرخهٔ کامل چقدر است؟




**شکل ۱۶-۲۶** مسئلهٔ ۱۶

••۱۷- آمیزه‌ای از $1773g$ آب و $227g$ یخ در حالت تعادل اولیه با دمای $0/000°C$ قرار دارند. سپس، این آمیزه در یک فرایند برگشت پذیر به حالت تعادل بعدی که در آن در دمای $0/000°C$ نسبت جرمی آب به یخ برابر با $1/00:1/00$ است برده می‌شود. (الف) تغییر انتروپی دستگاه را در طی این فرایند محاسبه کنید (گرمای ذوب آب $333\,kJ/kg$ است). (ب) سپس، این دستگاه با یک فرایند برگشت ناپذیر (مثلاً با استفاده از شعلهٔ چراغ) به حالت تعادل اولیه برگردانده می‌شود. تغییر انتروپی دستگاه را در طی این فرایند محاسبه کنید. (پ) آیا پاسخهای شما با قانون دوم ترمودینامیک سازگاری دارند؟

••۱۸- قطعه یخی به جرم $8/0g$ در دمای $-10°$ در فلاسک محتوی $100cm^3$ آب $20°C$ قرار داده می‌شود. در حالت تعادل انتروپی دستگاه قطعه- آب چقدر تغییر می‌کند؟ گرمای ویژهٔ یخ $2220\,J/kg\cdot K$ است.

•••۱۹- از آب واقع در نقطهٔ انجماد طبیعی ($0/0°C$ در فشار جو) و حتی زیر آن می‌توان انرژی را به صورت گرما گرفت بدون آنکه موجب یخ زدن آب شود، در این صورت به آب ابرسرد گفته می‌شود. فرض کنید که $1/00g$ آب ابر سرد شود تا اینکه دمای آن به دمای محیط اطراف خود که $-5/00°C$ است برسد. این افت ناگهان و به طور برگشت ناپذیر باعث یخ زدن می‌شود و انرژی را به صورت گرما به هوا منتقل می‌کند. تغییر انتروپی برای این افت چقدر است؟ (*راهنمایی*: یک فرایند سه مرحله‌ای برگشت‌پذیر در نظر بگیرید به گونه‌ای که گویا آب از نقطهٔ انجماد طبیعی گذشته است.) گرمای ویژهٔ یخ $2220\,J/kg\cdot K$ است.

•••۲۰- $130g$ آب $80/0°C$ داخل یک فلاسک عایق‌بندی شده قرار دارد. با افزودن $12/0g$ یخ $0°C$ به آن، دستگاه *یخ + آب اولیه* تشکیل می‌شود. (الف) دمای تعادل دستگاه چقدر است؟ تغییر انتروپی آبی که در آغاز یخ بوده است، (ب) وقتی یخ ذوب می‌شود و (پ) وقتی برای رسیدن به دمای تعادل گرم می‌شود، چقدر است؟ (ت) تغییر انتروپی آب اولیه وقتی با سردشدن به دمای تعادل می‌رسد؟ (ث) تغییر انتروپی خالص دستگاه *یخ + آب اولیه* وقتی که به دمای تعادل می‌رسد، چقدر است؟

•••۲۱- فرض کنید $1/00\,mol$ گاز آرمانی تک اتمی از فشار اولیهٔ $p_1$ و حجم اولیهٔ $V_1$ دو مرحله را طی کند: (۱) یک انبساط تکدما به حجم $2/00V_1$ و (۲) افزایش فشار به مقدار $2/00p_1$ در حجم ثابت. $Q/p_1V_1$ برای (الف) مرحلهٔ ۱ و (ب) مرحلهٔ ۲ چقدر است؟ $W/p_1V_1$ برای (پ) مرحلهٔ ۱ و (ت) مرحلهٔ ۲ چقدر است؟ برای کل فرایند، (ث) $\Delta E_{int}/p_1V_1$ و (ج) $\Delta S$، چقدر است؟ گاز به حالت اولیه خود برمی‌گردد و دوباره به همان حالت نهایی ولی با دو مرحلهٔ زیر بازگردانده می‌شود: (۱) یک تراکم تکدما به فشار $2/00p_1$ و (۲) یک افزایش حجم به $2/00V_1$ در فشار ثابت. $Q/p_1V_1$ برای (چ) مرحلهٔ ۱ و (ح) مرحلهٔ ۲، چقدر است؟ $W/p_1V_1$ برای (خ) مرحلهٔ ۱ و (د) مرحلهٔ ۲ چقدر است؟ در کل فرایند (د) $\Delta E_{int}/p_1V_1$ و (ذ) $\Delta S$ چقدر است؟

•••۲۲- $1/00\,mol$ گاز تک اتمی که در آغاز در $5/00\,kPa$ و $600K$ قرار دارد از حجم اولیهٔ $V_i=1/00m^3$ به حجم نهایی $V_f=2/00m^3$ منبسط می‌شود. در هر لحظه از انبساط، فشار $p$ و حجم $V$ گاز با رابطهٔ $p=5/00\exp[(V_i-V)/a]$ به هم مربوط‌اند، که $p$ برحسب کیلوپاسکال، $V_i$ و $V$ برحسب مترمکعب و $a=1/00m^3$ است. (الف) فشار و (ب) دمای نهایی گاز چقدر است؟ (پ) در طی انبساط چقدر کار انجام می‌گیرد؟ (ت) $\Delta S$ برای انبساط چقدر است؟ (*راهنمایی*: برای پیداکردن $\Delta S$ دو فرایند سادهٔ برگشت‌پذیر را در نظر بگیرید.)

### بخش ۱۶-۵ انتروپی در جهان واقعی: ماشینها

•۲۳- بازده یک ماشین کارنو ٪۲۲/۰ است. این ماشین میان منبعهایی با دمای ثابت که اختلاف دمای آنها $75/0°C$ است کار می‌کند. دمای (الف) منبع دمای پایین و (ب) منبع دمای بالا چقدر است؟

•۲۴- سوخت یک راکتور همجوشی هسته‌ای فرضی، گاز دوتریوم در دمای $7\times10^8K$ است. اگر این گاز برای کار یک ماشین کارنو با $T_L=100°C$ به کار برده شود، بازده ماشین چقدر خواهد شد؟ هر دو دما را دقیق در نظر بگیرید و پاسخ خود را تا هفت رقم با معنا محاسبه کنید.

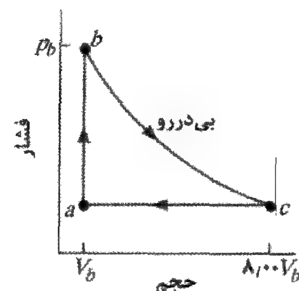
•۲۵- یک ماشین کارنو که میان دماهای $235°C$ و $115°C$ کارمی‌کند در هر چرخه $6/30\times10^4\,J$ انرژی در دمای بالاتر جذب می‌کند. (الف) بازده ماشین چقدر است؟ (ب) این ماشین در هر چرخه چه مقدار کار می‌تواند انجام دهد؟ SSM WWW

●۲۶- یک ماشین کارنو ۵۲ kJ انرژی گرمایی جذب می‌کند و در هر چرخه ۳۶ kJ انرژی گرمایی از دست می‌دهد. (الف) بازده موتور چقدر است؟ (ب) کار انجام شده در هر چرخه را برحسب کیلوژول محاسبه کنید.

●۲۷- بازده یک ماشین کارنو که منبع دمای پایین آن در ۱۷°C قرار دارد ۴۰٪ است. دمای منبع چقدر باید افزایش یابد تا بازده به ۵۰٪ برسد؟

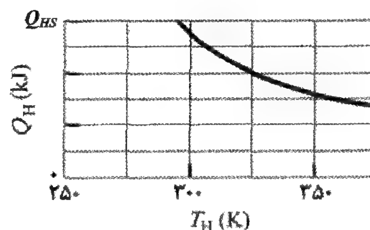
●●۲۸- یک ماشین کارنوی ۵۰۰ W میان منبعهای با دمای ثابت ۱۰۰°C و ۶۰٫۰°C کار می‌کند. آهنگی که انرژی (الف) به صورت گرما توسط ماشینی گرفته می‌شود و (ب) به صورت گرما توسط ماشین خارج می‌شود چقدر است؟

●●۲۹- شکل ۱۶-۲۷ چرخهٔ برگشت‌پذیری را نشان می‌دهد که ۱٫۰۰mol از یک گاز آرمانی تک اتمی طی می‌کند. فرایند $bc$ یک انبساط بی‌دررو با $p_b = ۱۰٫۰\text{atm}$ و $V_b = ۱٫۰۰\times۱۰^{-۳}\ \text{m}^۳$ است. مطلوب است (الف) انرژی گرمایی داده شده به گاز، (ب) انرژی گرمایی خارج شده از گاز، (پ) کار خالص انجام شده به وسیلهٔ گاز و (ت) بازده چرخه، ILW SSM



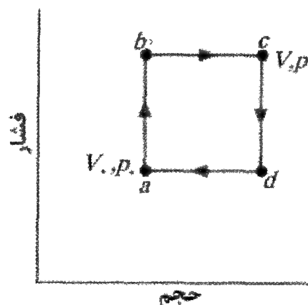

**شکل ۱۶-۲۷** مسئلهٔ ۲۹

●●۳۰- یک ماشین کارنو برای تولید کار معین $W$ در هر چرخه تنظیم شده است. در هر چرخه انرژی به شکل گرمای $Q_H$ از منبع گرمایی با دمای بالاتر و قابل تنظیم $T_H$ به مادهٔ کاری ماشین داده می‌شود. منبع گرمایی با دمای پایینتر در دمای $T_L = ۲۵۰\text{K}$ نگهداشته شده است. شکل ۱۶-۲۸، $Q_H$ را در گستره‌ای از $T_H$ نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $Q_H = ۶٫۰\,\text{kJ}$ مشخص شده است. اگر $T_H$ با ۵۵۰K مشخص شود، $Q_H$ چقدر است؟



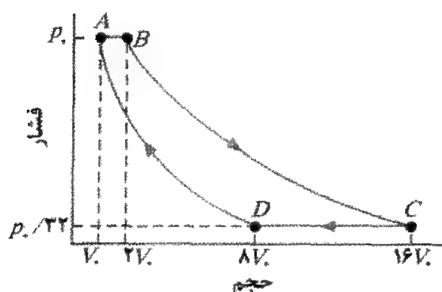

**شکل ۱۶-۲۸** مسئلهٔ ۳۰

●●۳۱- شکل ۱۶-۲۹ چرخهٔ برگشت‌پذیری را نشان می‌دهد که ۱٫۰۰mol گاز تک اتمی آن را طی می‌کند. فرض کنید $p = ۲p_۰$ ، $V = ۲V_۰$ ، $p_۰ = ۱٫۰۱\times۱۰^۵\ \text{Pa}$ و $V_۰ = ۰٫۰۲۲۵\text{m}^۳$. مطلوب است (الف)کار انجام شده در طی چرخه، (ب) انرژی گرمایی داده شده در طول مرحلهٔ $abc$ و (پ) بازده چرخه . (ت) بازده یک ماشین کارنو که میان بالاترین و پایینترین دماهای موجود در این چرخه کار می‌کند چقدر است؟ (ث) آیا این از بازده محاسبه شده دربند (پ) بیشتر است یا کمتر؟




**شکل ۱۶-۲۹** مسئلهٔ ۳۱

●●۳۲- یک گاز آرمانی (۱٫۰mol) مادهٔ کاری در ماشینی است که در چرخه نشان داده شده در شکل ۱۶-۳۰ کار می‌کند. فرایندهای $BC$ و $DA$ برگشت پذیر و بی‌دررو هستند. (الف) آیا گاز تک اتمی، دو اتمی یا چند اتمی است؟ بازده ماشین چقدر است؟



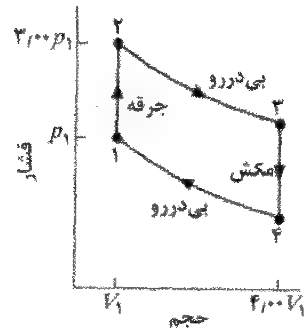

**شکل ۱۶-۳۰** مسئلهٔ ۳۲

●●۳۳- وقتی ماشین خاصی در هر چرخه ۸٫۲ kJ کار انجام می‌دهد بازده آن ۲۵٪ است فرض کنید که فرایند برگشت‌پذیر است. (الف) انرژی که موتور در هر چرخه به صورت گرمای $Q_g$ از سوزاندن سوخت به دست می‌آورد و (ب) انرژیی که ماشین در هر چرخه به صورت گرمای $Q_e$ از دست می‌دهد چقدر است؟ اگر تنظیم ماشین بازده را تا ۳۱٪ افزایش دهد، (پ) $Q_g$ و (ت) $Q_e$ با همان مقدار کار چقدر می‌شود؟

●●۳۴- در مرحلهٔ اول یک ماشین کارنوی دو مرحله‌ای، انرژی گرمایی $Q_۱$ در دمای $T_۱$ جذب، کار $W_۱$ انجام و انرژی به صورت $Q_۲$ در دمای پایینتر $T_۲$ جذب، کار $W_۲$ انجام و انرژی گرمایی $Q_۳$ در دمای پایینتر $T_۳$ خارج می‌شود. ثابت کنید که بازده این ماشین $(T_۱-T_۳)/T_۱$ است.

●●●۳۵- چرخهٔ نشان داده شده در شکل ۱۶-۳۱ طرز کار یک ماشین درونسوز بنزینی را نشان می‌دهد. فرض کنید که مخلوط

بنزین- هوای مکیده شده، گازی آرمانی با $\gamma=1/30$ است. نسبتهای (الف) $T_2/T_1$، (ب) $T_3/T_1$، (پ) $T_4/T_1$، (ت) $p_3/p_1$، (ث) $p_4/p_1$ چقدر است؟ (ج) بازده ماشین چقدر است؟




**شکل ۱۶-۳۱** مسئلهٔ ۳۵

## بخش ۱۶-۶ انتروپی در جهان واقعی: یخچالها

•۳۶- موتور الکتریکی یک پمپ گرمایی انرژی را به صورت گرما از بیرون به اتاقی که دمای آن $17°C$ است انتقال می‌دهد. اگر پمپ گرمایی یک پمپ گرمایی کارنو باشد، (ماشین کارنو که معکوس عمل می‌کند) به ازای هر ژول انرژی الکتریکی مصرف شده، چند ژول انرژی گرمایی به اتاق انتقال می‌یابد؟

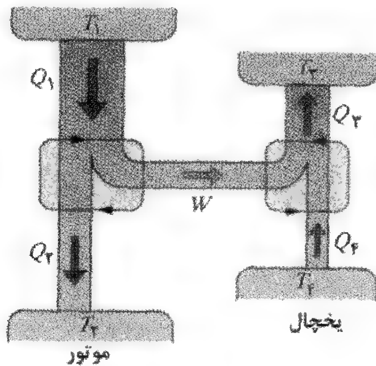
•۳۷- یک دستگاه تهویهٔ کارنو انرژی را از انرژی گرمایی اتاقی با دمای $70°F$ می‌گیرد و آن را به بیرون که دمای آن $96°F$ است انتقال می‌دهد. به ازای هر ژول انرژی الکتریکی مورد نیاز برای کارکردن دستگاه تهویه، چند ژول گرما از اتاق خارج می‌شود؟ SSM

•۳۸- برای تولید یخ، یخساز که به صورت ماشین کارنوی معکوس عمل می‌کند، در هر چرخه $42$ kJ را به صورت گرما در $-15°C$ با ضریب کارایی ۵/۷ می‌گیرد. دمای اتاق $30/3°C$ است. (الف) در هر چرخه چه مقدار انرژی به صورت گرما به اتاق داده می‌شود و (ب) کار مورد نیاز در هر چرخه برای کارکردن یخساز چقدر است؟

•۳۹-یک پمپ گرمایی برای گرم‌کردن یک ساختمان به کار می‌رود. دمای هوای بیرون $-5/0°C$ و دمای داخل ساختمان در $22°C$ نگهداشته شده است. ضریب کارایی پمپ ۳/۸ و پمپ گرمایی در هر ساعت $7/54$ MJ به صورت گرما به ساختمان می‌دهد. اگر پمپ گرمایی یک ماشین کارنو باشد که معکوس کار می‌کند، برای کارکردن پمپ با چه آهنگی باید کار انجام گیرد؟ SSM

•۴۰- برای انتقال $1/0$ J انرژی گرمایی (الف) از منبع در دمای $7/0°C$ به منبع در دمای $27°C$، (ب) از منبع در دمای $-73°C$ به منبع در دمای $27°C$، (پ) از منبع در دمای $-173°C$ به منبع در دمای $27°C$ و (ت) از منبع در دمای $-223°C$ به منبع در دمای $27°C$ توسط یک یخچال کارنو چقدر کار باید انجام گیرد؟

••۴۱- شکل ۱۶-۳۲ یک ماشین کارنو را نشان می‌دهد که میان دماهای $T_1=400$K و $T_2=150$K کار می‌کند و یک یخچال را به کار می‌اندازد که میان دماهای $T_3=325$K و $T_4=225$K کار می‌کند. نسبت $Q_3/Q_1$ چقدر است؟ GO




**شکل ۱۶-۳۲** مسئلهٔ ۴۱

••۴۲- (الف) در طی هر چرخه، یک ماشین کارنو $750$ J انرژی را به صورت گرما از منبع دمای بالا در $360$K و منبع دمای پایین واقع در $280$K جذب می‌کند. در هر چرخه چقدر کار انجام می‌شود؟ (ب) سپس این ماشین به صورتی دراورده می‌شود که به طور معکوس با عملکرد یک یخچال کارنو میان همان دو منبع کار کند. در طی هر چرخه برای گرفتن $1200$ J انرژی به صورت گرما از منبع دمای پایین چقدر کار مورد نیاز است؟

••۴۳- یک دستگاه تهویه که میان $93°F$ و $70°F$ کار می‌کند دارای ظرفیت سرمایش $4000$ Btu/h است. ضریب کارایی دستگاه ۲۷٪ ضریب کارایی یک یخچال کارنو است که میان همان دو دما کار می‌کند. چند اسب بخار برای موتور این دستگاه تهویه لازم است؟ ILW

••۴۴- توان موتور یک یخچال $200$ W است. اگر دمای قسمت سردکن $270$K و دمای هوای بیرون $300$ K باشد و با فرض اینکه بازده یک یخچال کارنو برای آن در نظر گرفته شود بیشینهٔ مقدار انرژی که به صورت گرما می‌توان در مدت $10/0$min از قسمت سردکن گرفت چقدر است؟

## بخش ۱۶-۸ دیدگاه آماری انتروپی

•۴۵- برای هشت مولکول، جدولی مانند جدول ۱۶-۱ درست کنید.

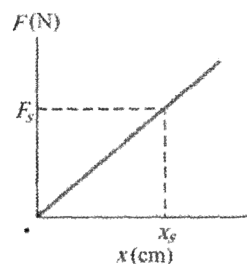
••۴۶- $N$ مولکول مشابه گاز به طور مساوی در دو نیمهٔ جعبه‌ای تقسیم شده‌اند. به ازای $N=50$ (الف) چندتایگی $W$ پیکربندی مرکزی و (ب) تعداد کل میکروحالتها و (پ) درصد زمانی که دستگاه در پیکربندی مرکزی صرف می‌کند چقدر

است؟ به ازای $N=10$ ، (ت) پیکربندی مرکزی، (ث) تعداد کل میکروحالتها و (ج) درصد زمانی که دستگاه در پیکربندی مرکزی صرف می‌کند چقدر است؟ به ازای $N=200$ ، (چ) $W$ پیکربندی، (ح) تعداد کل میکروحالتها و (خ) درصد زمانی که دستگاه پیکربندی مرکزی صرف می‌کند چقدر است؟ (د) آیا زمان صرف شده در پیکربندی مرکزی با افزایش $N$ افزایش می‌یابد یا کاهش؟

**۴۷●●●**- جعبه‌ای $N$ مولکول گاز دارد. فرض کنید که جعبه به سه قسمت مساوی تقسیم شده باشد. (الف) با تعمیم معادلهٔ ۲۰-۱۸ ، فرمولی برای چندتایگی هر پیکربندی معین بنویسید. (ب) دو پیکربندی زیر را درنظر بگیرید: پیکربندی $A$ با تعداد مساوی مولکولها در هر سه قسمت جعبه و پیکربندی $B$ با تعداد مساوی مولکولها در هر نیمهٔ جعبه که به دو قسمت تقسیم شده باشد. نسبت $W_A/W_B$ چندتایگی پیکربندی $A$ به پیکربندی $B$ چقدر است؟ (پ) مقدار $W_A/W_B$ را به ازای $N=100$ حساب کنید. (چون ۱۰۰ به ۳ قسمت قابل تقسیم نیست، ۳۴ مولکول در یک قسمت از سه قسمت پیکربندی $A$ و ۳۳ مولکول در هریک از دو قسمت دیگر می‌توان درنظر گرفت.) **SSM WWW**

### مسئله‌های اضافی

**۴۸**- شکل ۱۶-۳۳ بزرگی نیروی $F$ را برحسب فاصلهٔ کشیدگی $x$ در مورد یک نوار لاستیکی، با مقیاس محور $F$ با $F_s = 1/50\,\text{N}$ و مقیاس محور $x$ با $x_s = 3/50\,\text{cm}$ به دست می‌دهد. دما $2/00^\circ\text{C}$ است. وقتی نوار لاستیکی به اندازهٔ $x = 1/70\,\text{cm}$ کشیده شود، با چه آهنگی انتروپی نوار لاستیکی در ضمن یک کشیدگی اضافی کوچک تغییر می‌کند؟




**شکل ۱۶-۳۳** مسئلهٔ ۴۸

**۴۹**- وقتی که دمای نمونه‌ای از گاز نیتروژن ($N_2$) در حجم ثابت افزایش یابد، توزیع تندیهای مولکولی افزایش می‌یابد. یعنی، همانطور که در شکل ۱۵-۸ ب مشاهده شد، تابع توزیع احتمال $P(v)$ به سمت مقدارهای بیشتر تندی گسترش می‌یابد. یک راه برای بیان گسترش در $P(v)$ اندازه گیری اختلاف $\Delta V$ بین محتملترین تندی $V_p$ و تندی rms یعنی $V_{\text{rms}}$ است و هرگاه $P(v)$ به سمت تندیهای بالاتر گسترش یابد، $\Delta V$ افزایش می‌یابد. فرض کنید که گازآرمانی و مولکولهای $N_2$ چرخش می‌کنند ولی نوسان نمی‌کنند. به ازای $1/5\,\text{mol}$، دمای اولیهٔ $250\text{K}$ و دمای نهایی $5000\text{K}$، (الف) اختلاف اولیهٔ $\Delta v_i$، (ب) اختلاف نهایی $\Delta v_f$ و (پ) تغییر انتروپی $\Delta S$ گاز چقدر است؟ **SSM**

**۵۰**- $3/4\text{mol}$ از یک گاز آرمانی دو اتمی یک چرخهٔ سه مرحله‌ای را طی می‌کند: (۱) دمای گاز در حجم ثابت از $200\text{K}$ به $500\text{K}$ افزایش می‌یابد؛ (۲) سپس گاز به طور تکدما تا فشار اولیهٔ خود منبسط می‌شود؛ (۳) پس از آن گاز در فشار ثابت متراکم می‌شود تا به حجم اولیهٔ خود برگردد. در سراسر چرخه، مولکولها چرخش می‌کنند ولی نوسان نمی‌کنند. بازده چرخه چقدر است؟

**۵۱**- فرض کنید که در پوستهٔ زمین و در نزدیکی یکی از قطبها که در آن دمای سطح زمین $-40^\circ\text{C}$ است یک چاه تا عمقی حفر شود که در آنجا دما $800^\circ\text{C}$ است. (الف) حد نظری بازده ماشینی که میان این دو دما عمل می‌کند چقدر است؟ (ب) اگر همه انرژی گرمایی داده شده به منبع با دمای پایین برای ذوب یخی که در آغاز در دمای $-40^\circ\text{C}$ بوده است به کار رود، با چه آهنگی آب $0^\circ\text{C}$ یک نیروگاه با توان $100\text{MW}$ (که یک ماشین در نظر گرفته می‌شود) تولید می‌شود؟ گرمای ویژهٔ یخ $2220\,\text{J/kg}\cdot\text{k}$ و گرمای ذوب یخ $333\,\text{KJ/kg}$ است. (توجه کنید که در این حالت ماشین می‌تواند فقط میان $0^\circ\text{C}$ و $800^\circ\text{C}$ کار کند. انرژی خروجی در دمای $-40^\circ\text{C}$ نمی‌تواند چیزی را بالاتر از $-40^\circ\text{C}$ گرم کند).

**۵۲**- (الف) یک ماشین کارنو بین یک منبع گرم در $320\text{K}$ و یک منبع سرد در $260\text{K}$ کار می‌کند. اگر ماشین $500\text{J}$ را به صورت گرما در هر چرخه از منبع گرما جذب کند، چقدر در هر چرخه کار انجام می‌گیرد؟ (ب) اگر ماشین مانند یخچال بین همان منبعها به طور معکوس کار کند، برای برداشتن $1000\text{J}$ انرژی به صورت گرما از منبع سرد چقدر کار باید انجام شود؟

**۵۳**- یک تکه مس به جرم $600\text{g}$ و دمای $80/0^\circ\text{C}$ در $70/0\text{g}$ آب $10/0^\circ\text{C}$ داخل یک محفظهٔ عایق بندی شده قرار داده می‌شود. (در مورد گرمای ویژه به جدول ۱۸-۳ نگاه کنید.) (الف) دمای تعادل دستگاه مس- آب چقدر است؟ تغییر انتروپی (ب) مس (پ) آب و (ت) دستگاه مس- آب موقع رسیدن به دمای تعادل چقدر است؟

**۵۴**- فرض کنید $0/550\text{mol}$ از یک گاز آرمانی به طور تکدما و برگشت پذیر در چهار وضعیت که در زیر داده شده است منبسط می‌شود. تغییر در انتروپی گاز برای هر وضعیت چقدر است؟

| وضعیت | (a) | (b) | (c) | (d) |
|---|---|---|---|---|
| دما (K) | ۲۵۰ | ۳۵۰ | ۴۰۰ | ۴۵۰ |
| حجم اولیه ($\text{cm}^3$) | ۰/۲۰۰ | ۰/۲۰۰ | ۰/۳۰۰ | ۰/۳۰۰ |
| حجم نهایی ($\text{cm}^3$) | ۰/۸۰۰ | ۰/۸۰۰ | ۱/۲۰ | ۱/۲۰ |

۵۵- $0/600\,kg$ آب در آغاز به صورت یخ در دمای $-20^\circ c$ است. اگر دمای آن به $40^\circ C$ افزایش یابد، تغییر انتروپی چقدر است؟ SSM

۵۶- تغییر انتروپی $3/20\,mol$ از یک گاز آرمانی تک اتمی وقتی در حجم ثابت دما از $380\,K$ به $425\,K$ برسد چقدر است؟

۵۷- یک چرخهٔ سه مرحله‌ای به طور برگشت‌پذیر با $4/00\,mol$ از یک گاز آرمانی طی می‌شود با (۱) یک انبساط بی‌دررو که حجم گاز را $2/00$ برابر حجم اولیه می‌کند، (۲) یک فرایند در حجم ثابت، (۳) یک تراکم تکدما که گاز را به حالت اولیه برمی‌گرداند. نمی‌دانیم که گاز تک اتمی است یا دو اتمی؛ اگر دو اتمی باشد، نمی‌دانیم که مولکولهای آن چرخش می‌کنند یا نوسان. تغییر انتروپی (الف) چرخه ،(ب) فرایند ۱، (پ) فرایند ۳ و (ت) فرایند ۲، چقدر است؟

۵۸- فرض کنید $1/0\,mol$ از یک گاز آرمانی تک اتمی که در آغاز $10\,L$ و در دمای $300\,K$ قرار دارد در حجم ثابت تا $600\,K$ گرم می‌شود، سپس می‌گذاریم تا به طور تکدما تا رسیدن به فشار اولیهٔ خود منبسط شود و سرانجام در فشار ثابت تا حجم، فشار و دمای اولیه متراکم می‌شود. در طی این چرخه، (الف) انرژی خالص وارد شده به دستگاه (گاز) به صورت گرما و (ب) کار خالص انجام شده به وسیلهٔ گاز چقدر است؟ بازده چرخه چقدر است؟

۵۹- $2/00\,mol$ از یک گاز دو اتمی با دمای اولیهٔ $300\,K$ این چرخه را طی می‌کند: (۱) در حجم ثابت تا $800\,K$ گرم می‌شود، (۲) سپس به طور تکدما تا فشار اولیه منبسط می‌شود، (۳) سپس در فشار ثابت تا حالت اولیه متراکم می‌شود. با فرض اینکه مولکولهای گاز نه چرخش می‌کنند و نه نوسان دارند، (الف) انرژی خالص انتقال یافته به گاز به صورت گرما، (ب) کار خالص انجام شده به وسیلهٔ گاز و (پ) بازده چرخه چقدر است؟

۶۰- قطعه‌ای تنگستن به جرم $45/0\,g$ در دمای $30/0^\circ C$ و قطعه‌ای نقره به جرم $25/0\,g$ در دمای $-120^\circ C$ با هم در یک محفظهٔ عایق‌بندی شده قرار داده می‌شوند. (در مورد گرماهای ویژه به جدول ۱۴-۳ نگاه کنید.) (الف) دمای تعادل چقدر است؟ تغییر انتروپی (ب) تنگستن، (پ) نقره، و (ت) دستگاه تنگستن- نقره هنگام رسیدن به دمای تعادل چقدر است؟

۶۱- یک میلهٔ مسی استوانه‌ای شکل به طول $1/50\,m$ و شعاع $2/00\,cm$ عایق بندی شده است تا از اتلاف گرما از سطح استوانه‌ای شکل جلوگیری شود. یک انتهای میله به منبع گرمایی در $300/0^\circ C$ و انتهای دیگر آن به منبع گرمایی در $30/0^\circ C$ متصل شده است. آهنگ افزایش انتروپی دستگاه میله – منبعها چقدر است؟

۶۲- یک یخچال آرمانی برای برداشتن $560\,J$ انرژی به صورت گرما از اجزای سرد آن $150\,J$ کار انجام می‌دهد. (الف) ضریب کارایی یخچال چقدر است؟ (ب) چقدر گرما در هر چرخه به آشپزخانه داده می‌شود؟

۶۳- یک یخچال کارنو $35/0\,kJ$ انرژی را به صورت گرما در طی هر چرخه می‌گیرد و ضریب کارایی آن $4/60$ است. (الف) انرژی هر چرخه که به صورت گرما به اتاق انتقال می‌یابد چقدر است؟ (ب) کار انجام شده در هر چرخه چقدر است؟ SSM

۶۴- چهار ذره در جعبهٔ عایق‌بندی شدهٔ شکل ۱۶-۱۷ قرار دارند. (الف) کمترین چندتایگی، (ب) بیشترین چندتایگی، (پ) کمترین انتروپی و (ت) بیشترین انتروپی دستگاه چهار ذره‌ای چقدر است؟

۶۵- یک انتهای یک میلهٔ برنجی در تماس با منبع دمای ثابت $130^\circ C$ و انتهای دیگر آن در تماس با منبع با دمای ثابت در $24/0^\circ C$ قرار دارد. (الف) وقتی $5030\,J$ انرژی از طریق میله از یک منبع به منبع دیگر رسانش شود، تغییر انتروپی کل دستگاه میله- منبعها را محاسبه کنید. (ب) آیا انتروپی میله تغییر می‌کند؟

۶۶- وسیله‌ای که هلیوم را مایع می‌کند در اتاقی با دمای $300\,K$ قرار دارد. اگر دمای هلیوم داخل وسیله در $4/0\,K$ باشد، کمینهٔ نسبت $Q_1/Q_2$ چقدر است، که در آن $Q_1$ انرژی گرمایی داده شده به اتاق و $Q_2$ انرژی برداشته شده از هلیوم به صورت گرما است؟

۶۷- دستگاه $A$ با سه ذره و دستگاه $B$ با پنج ذره در جعبهٔ عایق بندی شده‌ای مشابه با جعبهٔ شکل ۱۶-۱۷ قرار دارند. کمترین چندتایگی $W$ (الف) دستگاه $A$ و (ب) دستگاه $B$ چقدر است؟ بیشترین چندتایگی $W$ (پ) $A$ و (ت) $B$ چقدر است؟ بیشترین انتروپی (ث) $A$ و (ج) $B$ چقدر است؟ SSM

۶۸- بازده یک نیروگاه سوخت فسیلی که ۳۸۰ تن متریک زغال‌سنگ در هر ساعت برای تولید کار مفید با آهنگ $750\,MW$ مصرف می‌کند، محاسبه کنید. گرمای اشتعال زغال سنگ (گرمای ناشی از سوخت آن) $28\,MJ/kg$ است.

۶۹- دمای $1/00\,mol$ گاز آرمانی تک اتمی به طور برگشت‌پذیر از $300\,K$ به $400\,K$ افزایش داده می‌شود ولی حجم آن ثابت نگهداشته می‌شود. تغییر انتروپی گاز چقدر است؟

۷۰- مسئله ۶۹ را در فشار ثابت تکرار کنید.

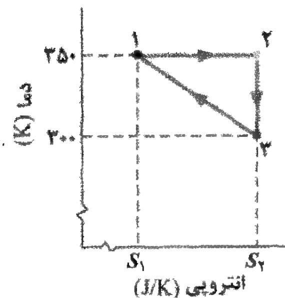
۷۱- فرض کنید که $260\,J$ از یک منبع با دمای ثابت در دمای $400\,K$ به منبع دیگر در دمای (الف) $100\,K$ ، (ب) $200\,K$ ، (پ) $300\,K$ و (ت) $360\,K$ ، رسانش می‌شود. تغییر خالص در انتروپی $\Delta S_{net}$ منبعها در هر مورد چقدر است؟ (ث) وقتی اختلاف دمای دو منبع کاهش یابد، آیا $\Delta S_{net}$ افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان می‌ماند؟

۷۲- بازده یک ماشین کارنو با دمای منبع بالای $400\,K$ برابر با $30/0$٪ است. دمای منبع دمای پایین چقدر باید تغییر کند تا بازده ماشین به $40/0$٪ برسد؟

۷۳-در جعبه‌ای بـا $N$ مولکـول دو پیکربنـدی وجـود دارد: پیکربندی $A$ با تقسیم‌بندی مساوی مولکولها بین دو نیمهٔ جعبه و پیکربندی $B$ با ٪۶۰/۰ مولکول در نیمهٔ چپ جعبـه و ٪۴۰/۰ در نیمهٔ راست جعبه. بـه ازای $N$=۵۰ ، (الـف) چنـدتایگی $W_A$ پیکربنـدی $A$، (ب) چنـد تـایگی $W_B$ پیکربنـدی $B$ و (پ) نسبت $f_{B/A}$ زمان صرف شده در پیکربندی $A$، چقدر است؟ به ازای $N$=۱۰۰ ، (ت) $W_A$ ، (ث) $W_B$ و (ج) $f_{B/A}$ چقـــدر است؟ بـه ازای $N$=۲۰۰ ، (چ) $W_A$ ، (ح) $W_B$ و (خ) $f_{B/A}$ چقدر است؟ (د) با افزایش $N$، $f$ افزایش می‌یابد یـا کـاهش یـا ثابت می‌ماند؟

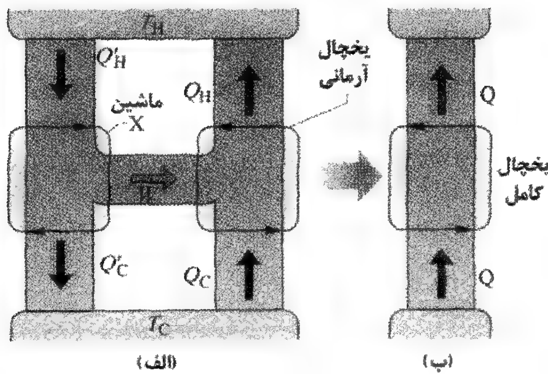
۷۴-فرض کنید ۲/۰۰mol از یک گاز دو اتمی به طور برگشت پذیر چرخهٔ نشان داده شده در نمودار $T$-$S$ شکل ۱۶-۳۴ را طی کند. کـه $S_1 = ۶/۰۰\,\text{J/K}$ و $S_2 = ۸/۰۰\,\text{J/K}$ اسـت. مولکولهـا چرخش یا نوسان نمی‌کنند. انرژی انتقال یافته به صورت گرمای $Q$ برای (الـف) مسیر ۱←۲، (ب) مسـیر ۲←۳ و (پ) کـل چرخه چقدر اسـت؟ (ت) کـار $W$ بـرای فراینـد تکـدما چقـدر است؟ حجم $V_1$ در حالت ۱ برابر با $۰/۲۰۰\,\text{m}^3$ است. حجم در (ث) حالت ۲ و (ج) حجم حالت ۳ چقدر است؟

تغییر $\Delta E_{\text{int}}$ برای (چ) مسیر ۱←۲ ، (ح) مسـیر ۲←۳ و (خ) کل چرخه چقدر است؟ (*راهنمایی*: بند (ح) را می‌توانید بـا استفاده از بخش ۱۵-۸ در یک یا دو خط و با استفاده از بخـش ۱۵-۱۱ در یک صـفحه محاسـبه کنیـد.) (د) کـار $W$ در فراینـد بی‌دررو چقدر است؟




**شکل ۱۶-۳۴** مسئلهٔ ۷۴

۷۵- مخترعی ماشین X را ساخته و ادعا می‌کند کـه بـازده $\varepsilon_X$ آن بزرگتر از بازده $\varepsilon$ یک ماشین آرمانی است که میان همان دو دما کار می‌کند. فرض کنید ماشین X را به یک یخچـال آرمـانی متصل کنیم (شکل ۱۶-۳۵ الف) و چرخـهٔ ماشین X را طـوری تنظیم کنیم که کاری که در هر چرخه انجام مـی‌شود برابـر بـا کاری باشد که در هر چرخهٔ یخچال آرمانی مورد نیاز است. این ترکیب را یک دستگاه واحد در نظر بگیرید. نشان دهید که اگـر ادعای مخترع صحیح باشد (اگـر $\varepsilon_X > \varepsilon$)، دسـتگاه مرکـب، بـا انتقال انرژی به صورت گرما از منبع با دمای پـایین بـه منبـع بـا دمای بالا بدون نیاز به کار، به صورت یک یخچال کامل (شـکل ۱۶-۳۵ ب) عمل خواهد کرد.




**شکل ۱۶-۳۵** مسئلهٔ ۷۵

# پیوست الف — دستگاه بین المللی یکاها (SI)[1]

## ۱- یکاهای اصلی SI

| کمیت | نام | نماد | تعریف |
|---|---|---|---|
| طول | متر | m | «... مسافتی است که نور در فاصلهٔ زمانی ۱/۲۹۹,۷۹۲,۴۵۸ ثانیه در خلأ طی می‌کند.» (۱۳۶۱/۱۹۸۳) |
| جرم | کیلوگرم | kg | «... این نمونهٔ اصلی [استوانهٔ معینی از پلاتین - ایریدیم است] از این پس یکای جرم خواهد بود.» (۱۲۶۸/۱۸۸۹) |
| زمان | ثانیه | s | «... مدت زمان ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ برابر دورهٔ تناوب تابش مربوط به گذر میان ترازهای فوق ریز حالت پایهٔ اتم سزیم ۱۳۳ است» (۱۳۴۶/۱۹۶۷). |
| جریان الکتریکی | آمپر | A | «... جریان ثابتی است که اگر از دو رسانای راست موازی بینهایت دراز با سطح مقطع دایره‌ای ناچیز و به فاصلهٔ ۱ متر از یکدیگر در خلأ بگذرد نیرویی برابر با $۲\times۱۰^{-۷}$ نیوتون بر متر بین آنها ایجاد می‌کند.» (۱۳۲۵/۱۹۴۶). |
| دمای ترمودینامیکی | کلوین | K | «... عبارت است از ۱/۲۷۳٫۱۶ دمای ترمودینامیکی نقطهٔ سه گانهٔ آب.» (۱۳۴۶/۱۹۶۷). |
| مقدار ماده | مول | mol | «... مقدار ماده یک دستگاه است که تعداد موجودات بنیادی آن برابر تعداد اتمهای موجود در ۰/۰۱۲ کیلوگرم کربن ۱۲ است.» (۱۹۷۱/ ۱۳۵۰). |
| شدت نور | شمع | cd | «... عبارت است از شدت نور در جهت عمود بر سطحی به مساحت ۱/۶۰۰٫۰۰۰ متر مربع از یک جسم سیاه در دمای نقطهٔ انجماد پلاتین و فشار ۱۰۱/۳۲۵ نیوتون بر مترمربع ...» (۱۳۴۶/۱۹۶۷). |

۱. اقتباس شده از

"The International system of Units (SI)," National Bureau of Standards Special publication 330, 1972 edition.

تعریفهای بالا در تاریخهای نوشته شده به وسیلهٔ کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها، به عنوان یک مرجع جهانی پذیرفته شده است. در این کتاب از یکای شمع استفاده نمی‌کنیم

۲- برخی یکاهای فرعی SI

| کمیت | نام یکا | نماد | |
|---|---|---|---|
| مساحت | متر مربع | $m^2$ | |
| حجم | متر مکعب | $m^3$ | |
| بسامد | هرتز | Hz | $s^{-1}$ |
| چگالی جرمی (چگالی) | کیلوگرم بر متر مکعب | $kg/m^3$ | |
| تندی، سرعت | متر بر ثانیه | m/s | |
| سرعت زاویه‌ای | رادیان بر ثانیه | rad/s | |
| شتاب | متر بر ثانیه بر ثانیه | $m/s^2$ | |
| شتاب زاویه‌ای | رادیان بر ثانیه بر ثانیه | $rad/s^2$ | |
| نیرو | نیوتون | N | $kg.m/s^2$ |
| فشار | پاسکال | Pa | $N/m^2$ |
| کار، انرژی، مقدار گرما | ژول | J | N.m |
| توان | وات | W | J/s |
| مقدار بار الکتریکی | کولن | C | A.s |
| اختلاف پتانسیل، نیروی محرکه | ولت | V | W/A |
| شدت میدان الکتریکی | ولت برمتر (نیوتون بر کولن) | V/m | N/C |
| مقاوت الکتریکی | اهم | Ω | V/A |
| ظرفیت | فاراد | F | A.s/V |
| شار مغناطیسی | وبر | Wb | V.s |
| القایش | هانری | H | V.s/A |
| چگالی شار مغناطیسی | تسلا | T | $Wb/m^2$ |
| شدت میدان مغناطیسی | آمپر بر متر | A/m | |
| انتروپی | ژول بر کلوین | J/K | |
| گرمای ویژه | ژول بر کیلوگرم کلوین | J/(kg.K) | |
| رسانندگی گرمایی | وات بر متر کلوین | W/(m.K) | |
| شدت تابشی | وات بر استرادیان | W/sr | |

۳- یکاهای تکمیلی SI

| کمیت | نام یکا | نماد |
|---|---|---|
| زاویهٔ تخت | رادیان | rad |
| زاویهٔ فضایی | استرادیان | Sr |

# پیوست ب چند ثابت بنیادی فیزیک[1]

| ثابت | نماد | اندازه محاسبه شده | اندازه[1] | عدم قطعیت[2] |
|---|---|---|---|---|
| تندی نور در خلأ | $c$ | $۳/۰۰\times۱۰^{۸}$ m/s | ۲/۹۹۷۹۲۴۵۸ | دقیق |
| بار بنیادی | $e$ | $۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}$C | ۱/۶۰۲۱۷۶۴۶۲ | ۰/۳۳۹ |
| ثابت گرانشی | $G$ | $۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}$ $m^۳/s^۲.kg$ | ۶/۶۷۳ | ۱۵۰۰ |
| ثابت جهانی گاز | $R$ | ۸/۳۱J/mol.K | ۸/۳۱۴۴۷۲ | ۱/۷ |
| ثابت آووگادرو | $N_A$ | $۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}$ $mol^{-۱}$ | ۶/۰۲۲۱۴۱۹۹ | ۰/۰۷۹ |
| ثابت بولتزمن | $k$ | $۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}$J/K | ۱/۳۸۰۶۵۰۳ | ۱/۷ |
| ثابت استفان - بولتزمن | $\sigma$ | $۵/۶۷\times۱۰^{-۸}$ $W/m^۲.K^۴$ | ۵/۶۷۰۴۰۰ | ۷ |
| حجم مولی گاز کامل در STP[4] | $V_m$ | $۲/۲۷\times۱۰^{-۲}$ $m^۳/mol$ | ۲/۲۲۷۱۰۹۸۱ | ۱/۷ |
| ثابت گذردهی | $\varepsilon_۰$ | $۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}$ F/m | ۸/۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲ | دقیق |
| ثابت تراوایی | $\mu_۰$ | $۱/۲۶\times۱۰^{-۶}$ H/m | ۱/۲۵۶۶۳۷۰۶۱۴۳ | دقیق |
| ثابت پلانک | $h$ | $۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}$ J/s | ۶/۶۲۶۰۶۸۷۶ | ۰/۰۷۸ |
| جرم الکترون[3] | $m_e$ | $۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}$ kg | ۹/۱۰۹۳۸۱۸۸ | ۰/۰۷۹ |
| | | $۵/۴۹\times۱۰^{-۴}$ u | ۵/۴۸۵۷۹۹۱۱۰ | ۰/۰۰۲۱ |
| جرم پروتون[3] | $m_p$ | $۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}$kg | ۱/۶۷۲۶۲۱۵۸ | ۰/۰۷۹ |
| | | ۱/۰۰۷۳u | ۱/۰۰۷۲۷۶۴۶۶۸۸ | $۱/۳\times۱۰^{-۴}$ |
| نسبت جرم پروتون به جرم الکترون | $m_p / m_e$ | ۱۸۴۰ | ۱۸۳۶/۱۵۲۶۶۷۵ | ۰/۰۰۲۱ |
| نسبت بار الکترون به جرم آن | $e / m_e$ | $۱/۷۶\times۱۰^{۱۱}$C/kg | ۱/۷۵۸۸۲۰۱۷۴ | ۰/۰۴۰ |
| جرم نوترون[3] | $m_n$ | $۱/۶۸\times۱۰^{-۲۷}$kg | ۱/۶۷۴۹۲۷۱۶ | ۰/۰۷۹ |
| | | ۱/۰۰۸۷u | ۱/۰۰۸۶۶۴۹۱۵۷۸ | $۵/۴\times۱۰^{-۴}$ |
| جرم اتم هیدروژن[3] | $m_{۱H}$ | ۱/۰۰۷۸u | ۱/۰۰۷۸۲۵۰۳۱۶ | ۰/۰۰۰۵ |
| جرم اتم دوترون[3] | $m_{۲H}$ | ۲/۰۱۴۱u | ۲/۰۱۴۱۰۱۷۷۷۹ | ۰/۰۰۰۵ |
| جرم اتمی هلیوم اتمی[3] | $m_{۴He}$ | ۴/۰۰۲۶u | ۴/۰۰۲۶۰۳۲ | ۰/۰۶۷ |
| جرم میون | $m_\mu$ | $۱/۸۸\times۱۰^{-۲۸}$kg | ۱/۸۸۳۵۳۱۰۹ | ۰/۰۸۴ |
| گشتاور مغناطیسی الکترون | $\mu_e$ | $۹/۲۸\times۱۰^{-۲۴}$ J/T | ۹/۲۸۴۷۶۳۶۲ | ۰/۰۴۰ |
| گشتاور مغناطیسی پروتون | $\mu_p$ | $۱/۴۱\times۱۰^{-۲۶}$ J/T | ۱/۴۱۰۶۰۶۶۳ | ۰/۰۴۱ |
| مگنتون بور | $\mu_B$ | $۹/۲۷\times۱۰^{-۲۴}$ J/T | ۹/۲۷۴۰۰۸۹۹ | ۰/۴۰ |
| مگنتون هسته‌ای | $\mu_N$ | $۵/۰۵\times۱۰^{-۲۷}$ J/T | ۵/۰۵۰۷۸۳۱۷ | ۰/۴۰ |
| شعاع بور | $r_B$ | $۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱}$m | ۵/۲۹۱۷۷۲۰۸۳ | ۰/۰۰۳۷ |
| ثابت ریدبرگ | $R$ | $۱/۱۰\times۱۰^{۷}$ $m^{-۱}$ | ۱/۰۹۷۳۷۳۱۵۶۸۵۴۸ | $۷/۶\times۱۰^{-۶}$ |
| طول موج کامپتون الکترون | $\lambda_C$ | $۲/۴۳\times۱۰^{-۱۲}$m | ۲/۴۲۶۳۱۰۲۱۵ | ۰/۰۰۷۳ |

۱- اندازه داده شده در این ستون باید همان یکا و توان ۱۰ مربوط به اندازه محاسبه شده را داشته باشد. ۲- در میلیون. ۳- جرمهای داده شده برحسب u یعنی یکای جرم اتمی یکی شده هستند، که در آن $1u=۱/۶۶۰۵۳۸۷۳\times۱۰^{-۲۷}kg$ است. ۴- STP به معنای دما و فشار استاندارد است: $۰°C$ و ۱/۰atm (۰/۱MPa)

۱ .مقدارهای این جدول از مقدارهای توصیه شدهٔ CODATA در سال ۱۹۹۸ (www. Physics.nist.gov) برگزیده شده‌اند.

# پیوست پ — برخی داده‌های نجومی

### برخی فاصله‌ها از زمین

| | |
|---|---|
| تا ماه[1] | $۳/۸۲ \times ۱۰^{۸}$ m |
| تا خورشید[1] | $۱/۵۰ \times ۱۰^{۱۱}$ m |
| تا نزدیکترین ستاره (پروکسیمای قنطورس) | $۴/۰۴ \times ۱۰^{۱۶}$ m |
| تا مرکز کهکشان ما | $۲/۲ \times ۱۰^{۲۰}$ m |
| تا کهکشهان آندرومدا (امرأة المسلسله) | $۲/۱ \times ۱۰^{۲۲}$ m |
| تا کرانهٔ جهان قابل مشاهده | $\sim ۱۰^{۲۶}$ m |

۱. فاصلهٔ میانگین

### خورشید، زمین و ماه

| کمیت | یکا | خورشید | زمین | ماه |
|---|---|---|---|---|
| جرم | kg | $۱/۹۹ \times ۱۰^{۳}$ | $۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴}$ | $۷/۳۶ \times ۱۰^{۲۲}$ |
| شعاع میانگین | m | $۶/۹۶ \times ۱۰^{۸}$ | $۶/۳۷ \times ۱۰^{۶}$ | $۱/۷۴ \times ۱۰^{۶}$ |
| چگالی میانگین | $kg/m^{۳}$ | ۱۴۱۰ | ۵۵۲۰ | ۳۳۴۰ |
| شتاب سقوط آزاد در سطح | $m/s^{۲}$ | ۲۷۴ | ۹/۸۱ | ۱/۶۷ |
| سرعت فرار | km/s | ۶۱۸ | ۱۱/۲ | ۲/۳۸ |
| دورهٔ تناوب چرخش[1] | - | ۳۷ روز در قطبها[2]<br>۲۶ روز در استوا[2] | ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه | ۲۷/۳ روز |
| توان تابشی[3] | W | $۳/۹۰ \times ۱۰^{۲۶}$ | | |

۱- اندازه‌گیری شده نسبت به ستارگان

۲- خورشید گلوله‌ای از گاز است و به صورت یک جسم صلب نمی‌چرخد.

۳- با فرض تابش عمودی، درست در بیرون جوّ زمین انرژی خورشیدی با آهنگ ۱۳۴۰ $W/m^{۲}$ دریافت می‌شود.

## خواصی از سیاره‌ها

| | عطارد | زهره | زمین | مریخ | مشتری | زحل | اورانوس | نپتون | پلوتون |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| فاصلهٔ میانگین از خورشید ($10^6$ km) | ۵۷/۹ | ۱۰۸ | ۱۵۰ | ۲۲۸ | ۷۷۸ | ۱۴۳۰ | ۲۸۷۰ | ۴۵۰۰ | ۵۹۰۰ |
| دورهٔ گردش، $y$ | ۰/۲۴۱ | ۰/۶۱۵ | ۱/۰۰ | ۱/۸۸ | ۱۱/۹ | ۲۹/۵ | ۸۴/۰ | ۱۶۵ | ۲۴۸ |
| دورهٔ چرخش[1]، d | ۵۸/۷ | -۲۴۳[2] | ۰/۹۹۷ | ۱/۰۳ | ۰/۴۰۹ | ۰/۴۲۶ | -۰/۴۵۱[2] | ۰/۶۵۸ | ۳۹/۶ |
| تندی مداری km/h | ۴۷/۹ | ۳۵/۰ | ۲۹/۸ | ۲۴/۱ | ۱۳/۱ | ۹/۶۴ | ۶/۸۱ | ۵/۴۳ | ۴/۷۴ |
| انحراف محور نسبت به مدار | <۲۸° | ≈۳° | ۲۳/۴° | ۲۵/۰° | ۳/۰۸° | ۲۶/۷° | ۹۷/۹° | ۲۹/۶° | ۵۷/۵° |
| انحراف مدار نسبت به مدار زمین | ۷/۰۰ | ۳/۳۹° | | ۱/۸۵° | ۱/۳۰° | ۲/۴۹° | ۰/۷۷° | ۱/۷۷° | ۱۷/۲° |
| خروج از مرکز مدار | ۰/۲۰۶ | ۰/۰۰۶۸ | ۰/۰۰۱۶۷ | ۰/۰۹۳۴ | ۰/۰۴۸۵ | ۰/۰۵۵۶ | ۰/۰۴۷۲ | ۰/۰۰۸۶ | ۰/۲۵۰ |
| قطر استوایی km | ۴,۸۸۰ | ۱۲,۱۰۰ | ۱۲,۸۰۰ | ۶,۷۹۰ | ۱۴۳۰۰۰ | ۱۲۰,۰۰۰ | ۵۱,۸۰۰ | ۴۹,۵۰۰ | ۲,۳۰۰ |
| جرم (زمین =۱) | ۰/۰۵۵۸ | ۰/۸۱۵ | ۱/۰۰۰ | ۰/۱۰۷ | ۳۱۸ | ۹۵/۱ | ۱۴/۵ | ۱۷/۲ | ۰/۰۰۲ |
| چگالی (آب =۱) | ۵/۶۰ | ۵/۶۰ | ۵/۵۲ | ۳/۹۵ | ۱/۳۱ | ۰/۷۰۴ | ۱/۲۱ | ۱/۶۷ | ۲/۰۳ |
| اندازه g در سطح[3] $m/s^2$ | ۳/۷۸ | ۸/۶۰ | ۹/۷۸ | ۳/۷۲ | ۲۲/۹ | ۹/۰۵ | ۷/۷۷ | ۱۱/۰ | ۰/۵ |
| سرعت فرار[3] km/s | ۴/۳ | ۱۰/۳ | ۱۱/۲ | ۵/۰ | ۹۵/۵ | ۳۵/۶ | ۲۱/۲ | ۲۳/۶ | ۱/۱ |
| قمرهای شناخته شده | ۰ | ۰ | ۱ | ۲ | حلقه+۶۰ | حلقه‌ها +۳۱ | حلقه‌ها+۲۱ | حلقه‌ها+۱۱ | ۱ |

۱– نسبت به ستارگان دور اندازه‌گیری شده است.

۲– زهره و اورانوس در خلاف جهت حرکت مداریشان می‌چرخند.

۳– شتاب گرانشی در استوای سیاره اندازه‌گیری شده است.

# پیوست ت ضریبهای تبدیل

ضریبهای تبدیل را به طور مستقیم از این جدولها می‌توان به‌دست آورد. برای نمونه، ۱ درجه مساوی ۲/۷۷۸×۱۰$^{-۳}$ دور است، پس ۱۶/۷°=۱۶/۷×۲/۷۷۸×۱۰$^{-۳}$rev.

کمیتهای SI با حروف سیاه مشخص شده‌اند. برگرفته از G. Shortley and D. Williams, *Elements of physics* – 1971 ، Prentice- Hall, Englewood Cliffs, NJ.

### زاویهٔ تخت

| | ° | ″ | , | **رادیان** | دور |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ درجه = | ۱ | ۶۰ | ۳۶۰۰ | ۱/۷۴۵×۱۰$^{-۲}$ | ۲/۷۷۸×۱۰$^{-۳}$ |
| ۱ دقیقه = | ۱/۶۷۷×۱۰$^{-۲}$ | ۱ | ۶۰ | ۲/۹۰۹×۱۰$^{-۴}$ | ۱/۶۳۰×۱۰$^{-۵}$ |
| ۱ ثانیه = | ۲/۷۷۸×۱۰$^{-۴}$ | ۱/۶۷۷×۱۰$^{-۲}$ | ۱ | ۴/۸۴۸×۱۰$^{-۶}$ | ۷/۷۱۶×۱۰$^{-۷}$ |
| ۱ **رادیان** = | ۵۷/۳۰ | ۳۴۳۸ | ۲/۰۶۳×۱۰$^{۵}$ | ۱ | ۱ |
| ۱ دور = | ۳۶۰ | ۲/۱۶×۱۰$^{۴}$ | ۱/۲۹۶×۱۰$^{۶}$ | ۶/۲۸۳ | ۱ |

### زاویهٔ فضایی

۱کره = ۴$\pi$ استرادیان = ۱۲/۵۷ استرادیان

### طول

| | cm | **متر** | km | in. | ft | mi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ سانتی‌متر= | ۱ | ۱۰$^{-۲}$ | ۱۰$^{-۵}$ | ۰/۳۹۳۷ | ۳/۲۸۱×۱۰$^{-۲}$ | ۶/۲۱۴×۱۰$^{-۶}$ |
| ۱ **متر** = | ۱۰۰ | ۱ | ۱۰$^{-۳}$ | ۳۹/۳۷ | ۳/۲۸۱ | ۶/۲۱۴×۱۰$^{-۴}$ |
| ۱ کیلومتر= | ۱۰$^{۵}$ | ۱۰۰۰ | ۱ | ۳/۹۳۷×۱۰$^{-۵}$ | ۳۲۸۱ | ۰/۶۲۱۴ |
| ۱ اینچ = | ۲/۵۴۰ | ۲/۵۴۰×۱۰$^{-۲}$ | ۲/۵۴۰×۱۰$^{-۵}$ | ۱ | ۸/۳۳۳×۱۰$^{-۲}$ | ۱/۵۷۸×۱۰$^{-۵}$ |
| ۱ فوت = | ۳۰/۴۸ | ۰/۳۰۴۸ | ۳/۰۴۸×۱۰$^{۵}$ | ۱۲ | ۱ | ۱/۸۹۴×۱۰$^{-۴}$ |
| ۱ مایل = | ۱/۶۰۹×۱۰$^{۵}$ | ۱۶۰۹ | ۱/۶۰۹ | ۶/۳۳۶×۱۰$^{۴}$ | ۵۲۸۰ | ۱ |

۱ انگستروم = ۱۰$^{-۱۰}$ متر    ۱ فرمی = ۱۰$^{-۱۵}$ متر    ۱ فاتوم = ۶ فوت    ۱ راد = ۱۶/۵ فوت

۱ مایل دریایی = ۱۸۵۲ متر    ۱ سال نوری = ۹/۴۶۰×۱۰$^{۱۲}$ کیلومتر    ۱ شعاع بور = ۵/۲۹۲×۱۰$^{-۱۱}$ متر    ۱ میل = ۱۰$^{-۳}$ اینچ

۶۰۷۶ فوت = ۱/۱۵۱ مایل    ۱ پارسک = ۳/۰۸۴×۱۰$^{۱۳}$ کیلومتر    ۱ یارد = ۳ فوت    ۱ نانومتر = ۱۰$^{-۹}$ متر

### مساحت

| | **متر مربع**$^{۲}$ | cm$^{۲}$ | ft$^{۲}$ | in.$^{۲}$ |
|---|---|---|---|---|
| ۱ متر مربع = | ۱ | ۱۰$^{۴}$ | ۱۰/۷۶ | ۱۵۵۰ |
| ۱ سانتی‌متر مربع= | ۱۰$^{-۴}$ | ۱ | ۱۰/۷۶×۱۰$^{-۴}$ | ۰/۱۵۵۰ |
| ۱ فوت مربع = | ۹/۲۹۰×۱۰$^{-۲}$ | ۹۲۹/۰ | ۱ | ۱۴۴ |
| ۱ اینچ مربع = | ۶/۴۵۲×۱۰$^{-۴}$ | ۶/۴۵۲ | ۶/۹۴۴×۱۰$^{-۳}$ | ۱ |

۱ مایل مربع = ۲/۷۸۸×۱۰$^{۷}$ فوت مربع = ۶۴۰ ایکر    ۱ ایکر = ۴۳/۵۶۰ فوت مربع

۱ هکتار = ۱۰$^{۴}$ متر مربع = ۲/۴۷۱ ایکر    ۱ بارن = ۱۰$^{-۲۸}$ متر مربع

## حجم

| | متر مکعب | $cm^3$ | L | $ft^3$ | $in.^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ **متر مکعب** = | ۱ | $۱۰^{۶}$ | ۱۰۰۰ | ۳۵/۳۱ | $۶/۱۰۲\times ۱۰^{۴}$ |
| ۱ سانتی‌متر مکعب = | $۱۰^{-۶}$ | ۱ | $۱/۰۰۰\times ۱۰^{-۳}$ | $۳/۵۳۱\times ۱۰^{-۵}$ | $۶۱/۱۰۲\times ۱۰^{-۲}$ |
| ۱ لیتر = | $۱/۰۰۰\times ۱۰^{-۳}$ | ۱۰۰۰ | ۱ | $۳/۵۳۱\times ۱۰^{-۲}$ | ۶۱/۰۲ |
| ۱ فوت مکعب = | $۲/۸۳۲\times ۱۰^{-۲}$ | $۲/۸۳۲\times ۱۰^{۴}$ | ۲۸/۳۲ | ۱ | ۱۷۲۸ |
| ۱ اینچ مکعب = | $۱/۶۳۹\times ۱۰^{-۵}$ | ۱۶/۳۹ | $۱/۶۳۹\times ۱۰^{-۲}$ | $۵/۷۸۷\times ۱۰^{-۴}$ | ۱ |

۱ گالن آمریکایی مایع = ۴ کوارت آمریکایی مایع = ۸ پینت آمریکایی = ۱۲۸ اونس آمریکایی مایع = ۲۳۱ اینچ مکعب.

۱ گالن امپریال بریتانیایی = ۲۷۷/۴ اینچ مکعب = ۱/۲۰۱ گالن آمریکایی مایع

## جرم

کمیتهایی که در ناحیه‌های سایه‌دار آمده‌اند یکای جرم نیستند ولی اغلب به این عنوان به کار برده می‌شوند. برای نمونه، هرگاه بنویسیم "1kg"="2/205lb"، این بدان معناست که یک کیلوگرم جرمی است که در مکانی که g دارای مقدار استاندارد $۹/۸۰۶۶۵ m/s^2$ باشد، ۲/۲۰۵ پوند وزن دارد.

| | g | **کیلوگرم** | Slug | u | oz | lb | **ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ گرم = | ۱ | ۰/۰۰۱ | $۶/۸۵۲\times ۱۰^{-۵}$ | $۶/۰۲۲\times ۱۰^{۲۳}$ | $۳/۵۲۷\times ۱۰^{-۲}$ | $۲/۲۰۵\times ۱۰^{-۳}$ | $۱/۱۰۲\times ۱۰^{-۶}$ |
| ۱ **کیلوگرم** = | ۱۰۰۰ | ۱ | $۶/۸۵۲\times ۱۰^{-۲}$ | $۶/۰۲۲\times ۱۰^{۲۶}$ | ۳۵/۲۷ | ۲/۲۰۵ | $۱/۱۰۲\times ۱۰^{-۳}$ |
| ۱ اسلاگ = | $۱/۴۵۹\times ۱۰^{۴}$ | ۱۴/۵۹ | ۱ | $۸/۷۸۶\times ۱۰^{۲۷}$ | ۵۱۴/۸ | ۳۲/۱۷ | $۱/۶۰۹\times ۱۰^{-۲}$ |
| ۱ یکای جرم اتمی = | $۱/۶۶۱\times ۱۰^{-۲۴}$ | $۱/۶۶۱\times ۱۰^{-۲۷}$ | $۱/۱۳۸\times ۱۰^{-۲}$ | ۱ | $۵/۸۵۷\times ۱۰^{-۲۶}$ | $۳/۶۶۲\times ۱۰^{-۲۷}$ | $۱/۸۳۰\times ۱۰^{-۳۰}$ |
| ۱ اونس = | ۲۸/۳۵ | $۲/۸۳۵\times ۱۰^{-۲}$ | $۱/۹۴۳\times ۱۰^{-۳}$ | $۱/۷۱۸\times ۱۰^{۲۵}$ | ۱ | $۶/۲۵۰\times ۱۰^{-۲}$ | $۳/۱۲۵\times ۱۰^{-۵}$ |
| ۱ پوند = | ۴۵۳/۶ | ۰/۴۵۳۶ | $۳/۱۰۸\times ۱۰^{-۲}$ | $۲/۷۳۲\times ۱۰^{۲۶}$ | ۱۶ | ۱ | ۰/۰۰۰۵ |
| ۱ تن = | $۹/۰۷۲\times ۱۰^{۵}$ | ۹۰۷/۲ | ۶۲/۱۶ | $۵/۴۶۳\times ۱۰^{۲۹}$ | $۳/۲\times ۱۰^{۴}$ | ۲۰۰۰ | ۱ |

۱ تن متریک = ۱۰۰۰kg

## چگالی

کمیتهایی که در ناحیه‌های سایه‌دار آمده‌اند چگالیهای وزنی هستند و از نظر ابعادی با چگالیهای جرمی فرق دارند. به جدول جرم نگاه کنید.

| | $Slug/ft^3$ | **کیلوگرم/متر مکعب** | $g/cm^3$ | $lb/ft^3$ | $lb/in.^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ اسلاگ بر فوت مکعب = | ۱ | ۵۱۵/۴ | ۰/۵۱۵۴ | ۳۲/۱۷ | $۱/۸۶۲\times ۱۰^{-۲}$ |
| ۱ **کیلوگرم** بر **متر مکعب** = | $۱/۹۴۰\times ۱۰^{-۳}$ | ۱ | ۰/۰۰۱ | $۶/۲۴۳\times ۱۰^{-۲}$ | $۳/۶۱۳\times ۱۰^{-۵}$ |
| ۱ گرم بر سانتی‌متر مکعب = | ۱/۹۴۰ | ۱۰۰۰ | ۱ | ۶۲/۴۳ | $۳/۶۱۳\times ۱۰^{-۲}$ |
| ۱ پوند بر فوت مکعب = | $۳/۱۰۸\times ۱۰^{-۲}$ | ۱۶/۰۲ | $۱/۶۰۲\times ۱۰^{-۲}$ | ۱ | $۳/۶۱۳\times ۱۰^{-۲}$ |
| ۱ پوند بر اینچ مکعب = | ۵۳/۷۱ | $۲/۷۶۸\times ۱۰^{۴}$ | ۲۷/۶۸ | ۱۷۲۸ | ۱ |

## زمان

| | y | d | h | min | ثانیه |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ سال = | ۱ | ۳۶۵/۲۵ | $۸/۷۶۶ \times ۱۰^{۳}$ | $۵/۲۵۹ \times ۱۰^{۵}$ | $۳/۱۵۶ \times ۱۰^{۷}$ |
| ۱ روز = | $۲/۷۳۸ \times ۱۰^{-۳}$ | ۱ | ۲۴ | ۱۴۴۰ | $۸/۶۴۰ \times ۱۰^{۴}$ |
| ۱ ساعت = | $۱/۱۴۱ \times ۱۰^{-۴}$ | $۴/۱۶۷ \times ۱۰^{-۲}$ | ۱ | ۶۰ | ۳۶۰۰ |
| ۱ دقیقه = | $۱/۹۰۱ \times ۱۰^{-۶}$ | $۶/۹۴۴ \times ۱۰^{-۴}$ | $۱/۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$ | ۱ | ۶۰ |
| ۱ **ثانیه** = | $۳/۱۶۹ \times ۱۰^{-۸}$ | $۱/۱۵۷ \times ۱۰^{-۵}$ | $۲/۷۷۸ \times ۱۰^{-۴}$ | $۱/۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$ | ۱ |

## تندی

| | ft/s | km/h | **ثانیه/متر** | mi/h | cm/s |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ فوت بر ثانیه = | ۱ | ۱/۰۹۷ | ۰/۳۰۴۸ | ۰/۶۸۱۸ | ۳۰/۴۸ |
| ۱ کیلومتر بر ساعت = | ۰/۹۱۱۳ | ۱ | ۰/۲۷۷۸ | ۰/۶۲۱۴ | ۲۷/۷۸ |
| ۱ **متر بر ثانیه** = | ۳/۲۸۱ | ۳/۶ | ۱ | ۲/۲۳۷ | ۱۰۰ |
| ۱ مایل بر ساعت = | ۱/۴۶۷ | ۱/۶۰۹ | ۰/۴۴۷۰ | ۱ | ۴۴/۷۰ |
| ۱ سانتی‌متر بر ثانیه = | $۳/۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$ | $۳/۶ \times ۱۰^{-۲}$ | ۰/۰۱ | $۲/۲۳۷ \times ۱۰^{-۲}$ | ۱ |

۱ گره = ۱ مایل دریایی بر ساعت = ۱/۶۸۸ فوت بر ثانیه

۱ مایل بر دقیقه = ۸۸/۰۰ فوت بر ثانیه = ۶۰/۰۰ مایل بر ساعت

## نیرو

یکاهای نیروهایی که در ناحیه‌های سایه‌دار نوشته شده‌اند امروزه کاربرد کمی دارند. به طور مثال: ۱ گرم نیرو (=1gf) نیروی گرانشی است که بر جسمی به جرم ۱ گرم در جایی که g دارای مقدار استاندارد $۹/۸۰۶۶۵ m/s^{۲}$ است، وارد می‌شود.

| | dyne | **نیوتون** | lb | pdl | gf | kgf |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ دین = | ۱ | $۱۰^{-۵}$ | $۲/۲۴۸ \times ۱۰^{-۶}$ | $۷/۲۳۳ \times ۱۰^{-۵}$ | $۱/۰۲۰ \times ۱۰^{-۳}$ | $۱/۰۲۰ \times ۱۰^{-۶}$ |
| ۱ **نیوتون** = | $۱۰^{۵}$ | ۱ | ۰/۲۲۴۸ | ۷/۲۳۳ | ۱۰۲/۰ | ۰/۱۰۲ |
| ۱ پوند = | $۴/۴۴۸ \times ۱۰^{۵}$ | ۴/۴۴۸ | ۱ | ۳۲/۱۷ | ۴۵۳/۶ | ۰/۴۵۳۶ |
| ۱ پوندال = | $۱/۳۸۳ \times ۱۰^{۴}$ | ۰/۱۳۸۳ | $۳/۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$ | ۱ | ۱۴/۱۰ | $۱/۴۱۰ \times ۱۰^{-۲}$ |
| ۱ گرم نیرو = | ۹۸۰/۷ | $۹/۸۰۷ \times ۱۰^{-۳}$ | $۲/۲۰۵ \times ۱۰^{-۳}$ | $۷/۰۹۳ \times ۱۰^{-۲}$ | ۱ | ۰/۰۰۱ |
| ۱ کیلوگرم نیرو = | ۹/۸۰۷× ۱۰۵ | ۹/۸۰۷ | ۲/۲۰۵ | ۷۰/۹۳ | ۱۰۰۰ | ۱ |

۱ تن = ۲۰۰۰ پوند

## فشار

| ° | | atm | dyn/cm۲ | اینچ آب | cm Hg | **پاسکال** | $lb/in^2$ | $lb/ft^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ اتمسفر | = | ۱ | $۱/۰۱۳\times۱۰^{۶}$ | ۴۰۶/۸ | ۷۶ | $۱/۰۱۳\times۱۰^{۵}$ | ۱۴/۷ | ۲۱۱۶ |
| ۱ دین بر سانتی‌متر مربع | = | $۹/۸۶۹\times۱۰^{-۷}$ | ۱ | $۴/۰۱۵\times۱۰^{-۴}$ | $۷/۵۰۱\times۱۰^{-۵}$ | ۰/۱۰ | $۱/۴۰۵\times۱۰^{-۵}$ | $۲/۰۸۹\times۱۰^{-۳}$ |
| ۱ اینچ آب[1] در ۴°C | = | $۲/۴۵۸\times۱۰^{-۳}$ | ۲۴۹۱ | ۱ | ۰/۱۸۶۸ | ۲۴۹/۱ | $۳/۶۱۳\times۱۰^{-۲}$ | ۵/۲۰۲ |
| ۱ سانتی‌متر جیوه[1] در ۰°C | = | $۱/۳۱۶\times۱۰^{-۲}$ | $۱/۳۳۳\times۱۰^{۴}$ | ۵/۳۵۳ | ۱ | ۱۳۳۳ | ۰/۱۹۳۴ | ۲۷/۸۵ |
| ۱ **پاسکال** | = | $۹/۸۶۹\times۱۰^{-۶}$ | ۱۰ | $۴/۰۱۵\times۱۰^{-۳}$ | $۷/۵۰۱\times۱۰^{-۴}$ | ۱ | $۱/۴۵۰\times۱۰^{-۴}$ | $۲/۰۸۹\times۱۰^{-۲}$ |
| ۱ پوند بر اینچ مربع | = | $۶/۸۰۵\times۱۰^{-۲}$ | $۶/۸۹۵\times۱۰^{۴}$ | ۲۷/۶۸ | ۵/۱۷۱ | $۶/۸۹۵\times۱۰^{۳}$ | ۱ | ۱۴۴ |
| ۱ پوند بر فوت مربع | = | $۴/۷۲۵\times۱۰^{-۴}$ | ۴۷۸/۸ | ۰/۱۹۲۲ | $۳/۵۹۱\times۱۰^{-۲}$ | ۴۷/۸۸ | $۶/۹۴۴\times۱۰^{-۳}$ | ۱ |

۱- در جایی که مقدار استاندارد شتاب گرانشی ۹/۸۰۶۶۵ $m/s^2$ است.
۱ بار= $۱۰^{۶}$ دین بر سانتی‌متر مربع = ۰/۱ مگا پاسکال
۱ میلی بار= $۱۰^{۳}$ دین بر سانتی‌متر مربع= $۱۰^{۲}$ پاسکال
۱ تور= یک میلی‌متر جیوه

## توان

| | | Btu/h | ft.lb/s | hp | cal/s | kW | **وات** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ یکای بریتانیایی گرما بر ساعت | = | ۱ | ۰/۲۱۶۱ | $۳/۹۲۹\times۱۰^{-۴}$ | $۶/۹۹۸\times۱۰^{-۲}$ | $۲/۹۳۰\times۱۰^{-۴}$ | ۰/۲۹۳۰ |
| ۱ فوت- ۱ پوند بر ثانیه | = | ۴/۶۲۸ | ۱ | $۱/۸۱۸\times۱۰^{-۳}$ | ۰/۳۲۳۹ | $۱/۳۵۶\times۱۰^{-۳}$ | ۱/۳۵۶ |
| ۱ اسب بخار | = | ۲۵۴۵ | ۵۵۰ | ۱ | ۱۷۸/۱ | ۰/۷۴۷۵ | ۷۴۵/۷ |
| ۱ کالری بر ثانیه | = | ۱۴/۲۹ | ۳/۰۸۸ | $۵/۶۱۵\times۱۰^{-۳}$ | ۱ | $۴/۱۸۶\times۱۰^{-۳}$ | ۴/۱۸۶ |
| ۱ کیلو وات | = | ۳۴۱۳ | ۷۳۷/۶ | ۱/۳۴۱ | ۲۳۸/۹ | ۱ | ۱۰۰۰ |
| ۱ **وات** | = | ۳/۴۱۳ | ۰/۷۳۷۶ | $۱/۳۴۱\times۱۰^{-۳}$ | ۰/۲۳۸۹ | ۰/۰۰۱ | ۱ |

## میدان مغناطیسی

| | | گاؤس | **تسلا** | میلی‌گاؤس |
|---|---|---|---|---|
| ۱ گاؤس | = | ۱ | $۱۰^{-۴}$ | ۱۰۰۰ |
| ۱ **تسلا** | = | $۱۰^{۴}$ | ۱ | $۱۰^{۷}$ |
| ۱ میلی گاؤس | = | ۰/۰۰۱ | $۱۰^{-۷}$ | ۱ |

۱ تسلا = متر مربع/ وبر ۱

## شار مغناطیسی

| | | ماکسول | **وبر** |
|---|---|---|---|
| ۱ ماکسول | = | ۱ | $۱۰^{-۸}$ |
| ۱ **وبر** | = | $۱۰^{۸}$ | ۱ |

## انرژی ، کار، گرما

کمیتهایی که در ناحیه‌های سایه‌دار آمده‌اند یکاهای خاص انرژی نیستند ولی به مناسبتهایی ذکر شده‌اند. این کمیتها از فرمول هم ارزی نسبیتی جرم- انرژی $E=mc^{۲}$ به دست می‌آیند و انرژی آزاد شده را هنگام تبدیل کامل یک کیلوگرم یا یک یکای جرم اتمی وحدت یافته (u) به کیلوگرم (دو سطر زیرین) یا جرمی را که باید به طور کامل به یک یکای انرژی تبدیل شود (دو ستون سمت چپ) نشان می‌دهند.

| | | Btu | erg | ft . lb | hp . h | ژول | cal | kW . h | eV | Mev | kg | u |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ یکای بریتانیایی گرما | = | ۱ | $۱/۰۵۵\times ۱۰^{۱۰}$ | ۷۷۷/۹ | $۳/۹۲۹\times ۱۰^{-۴}$ | ۱۰۵۵ | ۲۵۲/۰ | $۲/۹۳۰\times ۱۰^{-۴}$ | $۶/۵۸۵\times ۱۰^{۲۱}$ | $۶/۵۸۵\times ۱۰^{۱۵}$ | $۱/۱۷۴\times ۱۰^{-۱۴}$ | $۷/۰۷۰\times ۱۰^{۱۲}$ |
| ۱ ارگ | = | $۹/۴۸۱\times ۱۰^{-۱۱}$ | ۱ | $۷/۳۷۶\times ۱۰^{-۸}$ | $۳/۷۲۵\times ۱۰^{-۱۴}$ | $۱۰^{-۷}$ | $۲/۳۸۹\times ۱۰^{-۸}$ | $۲/۷۷۸\times ۱۰^{-۱۴}$ | $۶/۲۴۲\times ۱۰^{۱۱}$ | $۶/۲۴۲\times ۱۰^{۵}$ | $۱/۱۱۳$ $۱۰^{-۲۴}$ | ۶۷۰/۲ |
| ۱ فوت- پوند | = | $۱/۲۸۵\times ۱۰^{-۳}$ | $۱/۳۵۶\times ۱۰^{۷}$ | ۱ | $۵/۰۵۱\times ۱۰^{-۷}$ | ۱/۳۵۶ | ۰/۳۲۳۸ | $۳/۷۶۶\times ۱۰^{-۷}$ | $۸/۶۴۶\times ۱۰^{۱۸}$ | $۸/۴۶۴\times ۱۰^{۱۲}$ | $۱/۵۰۹$ $۱۰^{-۱۷}$ | $۹/۰۳۷\times ۱۰^{۹}$ |
| ۱ اسب بخار - ساعت | = | ۲۵۴۵ | $۲/۶۸۵\times ۱۰^{۱۳}$ | $۱/۹۸۰\times ۱۰^{۶}$ | ۱ | $۲/۶۸۵\times ۱۰^{۶}$ | $۶/۴۱۳\times ۱۰^{۵}$ | ۰/۷۴۵۷ | $۱/۶۷۶\times ۱۰^{۲۵}$ | $۱/۶۷۶\times ۱۰^{۱۹}$ | $۲/۹۸۸\times ۱۰^{-۱۱}$ | $۱/۷۹۹\times ۱۰^{۱۶}$ |
| **۱ ژول** | = | $۹/۴۸۱\times ۱۰^{-۴}$ | $۱۰^{۷}$ | ۰/۷۳۷۶ | $۳/۷۲۵\times ۱۰^{-۷}$ | ۱ | ۰/۲۳۸۹ | $۲/۷۷۸\times ۱۰^{-۷}$ | $۶/۲۴۲\times ۱۰^{۱۸}$ | $۶/۲۴۲\times ۱۰^{۱۲}$ | $۱/۱۱۳\times ۱۰^{-۱۷}$ | $۶/۷۰۲\times ۱۰^{۹}$ |
| ۱ کالری | = | $۳/۹۶۹\times ۱۰^{-۳}$ | $۴/۱۸۶\times ۱۰^{۷}$ | ۳/۰۸۸ | $۱/۵۶۰\times ۱۰^{-۶}$ | ۴/۱۸۶ | ۱ | $۱/۱۶۳\times ۱۰^{-۶}$ | $۲/۶۱۳\times ۱۰^{۱۹}$ | $۲/۶۱۳\times ۱۰^{۱۳}$ | $۴/۶۶۰\times ۱۰^{-۱۷}$ | $۲/۸۰۶\times ۱۰^{۱۰}$ |
| ۱ کیلو وات - ساعت | = | ۳۴۳۱ | $۳/۶۰۰\times ۱۰^{۱۳}$ | $۲/۶۵۵\times ۱۰۶$ | ۱/۳۴۱ | $۳/۶۰۰\times ۱۰^{۶}$ | $۸/۶۰۰\times ۱۰^{۵}$ | ۱ | $۲/۲۴۷\times ۱۰^{۲۵}$ | $۲/۲۴۷\times ۱۰^{۱۹}$ | $۴/۰۰۷\times ۱۰^{-۱۱}$ | $۲/۴۱۳\times ۱۰^{۱۶}$ |
| ۱ الکترون ولت | = | $۱/۵۱۹\times ۱۰^{-۲۲}$ | $۱/۶۰۲\times ۱۰^{-۱۲}$ | $۱/۱۸۲\times ۱۰^{-۱۹}$ | $۵/۹۶۷\times ۱۰^{-۲۰}$ | $۱/۶۰۲\times ۱۰^{-۱۹}$ | $۳/۸۲۷\times ۱۰^{-۲۰}$ | $۴/۴۵۰\times ۱۰^{-۲۶}$ | ۱ | $۱۰^{-۶}$ | $۱/۷۸۳\times ۱۰^{-۳۶}$ | $۱/۰۷۴\times ۱۰^{-۹}$ |
| ۱ میلیون الکترون ولت | = | $۱/۵۱۹\times ۱۰^{-۱۶}$ | $۱/۶۰۲\times ۱۰^{-۶}$ | $۱/۱۸۲\times ۱۰^{-۱۳}$ | $۵/۹۶۷\times ۱۰^{-۲۰}$ | $۱/۶۰۲\times ۱۰^{-۱۳}$ | $۳/۸۲۷\times ۱۰^{-۱۴}$ | $۴/۴۵۰\times ۱۰^{-۲۰}$ | $۱۰^{-۶}$ | ۱ | $۱/۷۸۳\times ۱۰^{-۳۰}$ | $۱/۰۷۴\times ۱۰^{-۳}$ |
| ۱ کیلوگرم | = | $۸/۵۲۱\times ۱۰^{۱۳}$ | $۸/۹۸۷\times ۱۰^{۲۳}$ | $۶/۶۲۹\times ۱۰^{۱۶}$ | $۳/۳۴۸\times ۱۰^{۱۰}$ | $۸/۹۸۷\times ۱۰^{۱۶}$ | $۲/۱۴۶\times ۱۰^{۱۶}$ | $۲/۴۹۷\times ۱۰^{۱۰}$ | $۵/۶۱۰\times ۱۰^{۳۵}$ | $۵/۶۱۰\times ۱۰^{۲۹}$ | ۱ | $۶/۰۰۲\times ۱۰^{۲۶}$ |
| ۱ یکای اتمی یکی شده | = | $۱/۴۱۵\times ۱۰^{-۱۳}$ | $۱/۴۹۲\times ۱۰^{-۳}$ | $۱/۱۰۱\times ۱۰^{-۱۰}$ | $۵/۵۵۹\times ۱۰^{-۱۷}$ | $۱/۴۹۲\times ۱۰^{-۱۰}$ | $۳/۵۶۴\times ۱۰^{-۱۱}$ | $۴/۱۴۶\times ۱۰^{-۱۷}$ | $۹/۳۲۰\times ۱۰^{۸}$ | ۹۳۲/۰ | $۱/۶۶۱\times ۱۰^{-۲۷}$ | ۱ |

# پیوست ث فرمولهای ریاضی

### هندسه

در دایره به شعاع $r$: پیرامون = $۲\pi r$؛ مساحت = $\pi r^۲$
در کره به شعاع $r$: مساحت = $۴\pi r^۲$ ؛ حجم = $(۴/۳)\pi r^۳$؛ در استوانه قائمی به شعاع $r$ و ارتفاع $h$:
مساحت = $۲\pi r^۲ + ۲\pi rh$؛ حجم= $\pi r^۲ h$
در مثلثی به قاعدهٔ $a$ و ارتفاع $h$: مساحت = $(۱/۲)ah$

### فرمول معادلهٔ درجهٔ دو

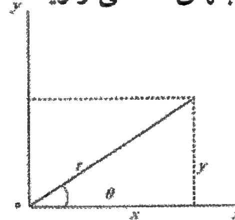
اگر $ax^۲+bx+c=۰$ ، آنگاه $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$

### تابعهای مثلثاتی زاویهٔ $\theta$

$\sin\theta=\frac{y}{r}$ , $\cos\theta=\frac{x}{r}$

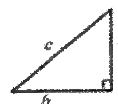
$\tan\theta=\frac{y}{x}$ , $\cot\theta=\frac{x}{y}$

$\sec\theta=\frac{r}{x}$ , $\csc\theta=\frac{r}{x}$




### قضیهٔ فیثاغورس

در مثلث قائم الزاویه




$a^۲+b^۲=c^۲$

### مثلثها

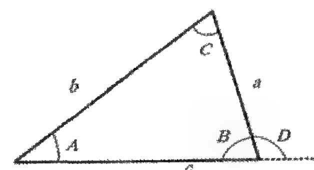
$A$، $B$ و $C$ زاویه و $a$، $b$ و $c$ ضلعهای مقابل به آنها هستند،

$A+B+C=۱۸۰°$

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C$

(زاویهٔ خارجی) $D=A+C$




### علامتها و نمادهای ریاضی

= مساوی است
≈ تقریباً مساوی است
~ مرتبهٔ بزرگی
≠ مساوی نیست با
≡ متحد است با، تعریف می‌شود به صورت
> بزرگتر است از (>> خیلی بزرگتر است از)
< کوچکتر است از (<< خیلی کوچکتر است از)
≥ بزرگتر است از یا مساوی است با
≤ کوچکتر است از یا مساوی است با
± به اضافه یا منها
∝ متناسب است با
Σ مجموع
$\bar{x}$ مقدار میانگین $x$

### اتحادهای مثلثاتی

$\sin(۹۰°-\theta)=\cos\theta$
$\cos(۹۰°-\theta)=\sin\theta$
$\sin\theta/\cos\theta=\tan\theta$
$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$
$\sec^۲\theta-\tan^۲\theta=۱$
$\csc^۲\theta-\cot^۲\theta=۱$
$\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta$
$\cos ۲\theta=\cos^۲\theta-\sin^۲\theta=۲\cos^۲\theta-۱=۱-۲\sin^۲\theta$
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}$
$\sin\alpha\pm\sin\beta=۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha\pm\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha\mp\beta)$
$\cos\alpha+\cos\beta=۲\cos\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$
$\cos\alpha-\cos\beta=-۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\sin\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$

### قضیهٔ دوجمله‌ای

$(۱+x)^n=۱+\frac{nx}{۱!}+\frac{n(n-۱)x^۲}{۲!}+\ldots \qquad (x^۲<۱)$

### بسط نمایی

$e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\ldots$

### بسط لگاریتمی

$\ln(۱+x)=x-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۳}x^۳-\ldots \qquad (|x|<۱)$

بسطهای مثلثاتی ($\theta$ برحسب رادیان)

$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^۳}{۳!}+\frac{\theta^۵}{۵!}-\ldots$

$\cos\theta=۱-\frac{\theta^۲}{۲!}+\frac{\theta^۴}{۴!}-\ldots$

$\tan\theta=\theta+\frac{\theta^۳}{۳}+\frac{۲\theta^۵}{۱۵}+\ldots$

### قاعدهٔ کرامر

جواب دو معادله با مجهولهای x و y

$a_۱x+b_۱y=c_۱$ و $a_۲x+b_۲y=c_۲$

به این صورت است

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_۱ & b_۱\\ c_۲ & b_۲\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_۱ & b_۱\\ a_۲ & b_۲\end{vmatrix}}=\frac{c_۱b_۲-c_۲b_۱}{a_۱b_۲-a_۲b_۱}$$

و

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

### ضرب بردارها

**i** و **j** و **k** را بردارهای یکه در راستای $x$، $y$ و $z$ در نظر بگیرید. داریم

$$\mathbf{i}.\mathbf{i}=\mathbf{j}.\mathbf{j}=\mathbf{k}.\mathbf{k}=1 \quad و \quad \mathbf{i}.\mathbf{j}=\mathbf{j}.\mathbf{k}=\mathbf{k}.\mathbf{i}=0$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} \quad و \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} \quad و \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

برداری مانند **a** با مؤلفه‌های $a_x$، $a_y$ و $a_z$ در راستای محور $x$، $y$ و $z$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{a}=a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k}$$

**a**، **b** و **c** را بردارهای اختیاری به بزرگیهای $a$، $b$ و $c$ در نظر بگیرید، داریم

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

$$(s\,\mathbf{a})\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times(s\,\mathbf{b})=s(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad (s=\text{نرده‌ای})$$

اگر $\theta$ کوچکترین زاویهٔ بین **a** و **b** باشد، داریم

$$\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{a}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=ab\cos\theta$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ a_x & a_z\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$$

$$=(a_yb_z-b_ya_z)\,\mathbf{i}+(a_zb_x-b_za_x)\mathbf{j}+(a_xb_y-b_xa_y)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=ab\sin\theta$$

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$$

### مشتقها و انتگرالها

در رابطه‌های زیر، $u$ و $v$ تابعهایی از $x$ هستند و $a$ و $m$ ثابت‌اند. برای هر یک از انتگرالهای نامعین باید یک ثابت اختیاری انتگرالگیری افزوده شود.

*Handbook of Chemistry and Physics (CRC Press Inc)*

جدولهای خیلی گسترده‌ای را ارائه می‌دهد.

۱- $\frac{dx}{dx}=1$

۲- $\frac{d}{dx}(au)=a\frac{du}{dx}$

۳- $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$

۴- $\frac{d}{dx}x^m=mx^{m-1}$

۵- $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$

۶- $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

۷- $\frac{d}{dx}e^x=e^x$

۸- $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$

۹- $\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$

۱۰- $\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$

۱۱- $\frac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x$

۱۲- $\frac{d}{dx}\sec x=\tan x\sec x$

۱۳- $\frac{d}{dx}\csc x=-\cot x\csc x$

۱۴- $\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}$

۱۵- $\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}$

۱۶- $\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}$

۱- $\int dx=x$

۲- $\int au\,dx=a\int u\,dx$

۳- $\int(u+v)\,dx=\int u\,dx+\int v\,dx$

۴- $\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}(m\neq-1)$

۵- $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|$

۶- $\int u\frac{dv}{d}dx=uv-\int v\frac{du}{x}dx$

۷- $\int e^x dx=e^x$

۸- $\int\sin x\,dx=-\cos x$

۹- $\int\cos x\,dx=\sin x$

۱۰- $\int\tan x\,dx=\ln|\sec x|$

۱۱- $\int\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$

۱۲- $\int e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}$

۱۳- $\int xe^{-ax}dx=-\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$

۱۴- $\int x^2e^{-ax}dx=-\frac{1}{a^3}(a^2x^2+2ax+2)e^{-ax}$

۱۵- $\int_0^\infty x^ne^{-ax}dx=\frac{n!}{a^n+1}$

۱۶- $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx=\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

۱۷- $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

۱۸- $\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=-\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$

۱۹- $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$

۲۰- $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}dx=\frac{n!}{2a^{n+1}}(a>0)$

۲۱- $\int\frac{x\,dx}{x+d}=x-d\ln(x+d)$

# پیوست ج | خواص عنصرها

همهٔ خواص فیزیکی در فشار ۱atm هستند در غیر این صورت مشخص شده‌اند.

| عنصر | نماد | عدد اتمی Z | جرم مولی g/mol | چگالی $g/cm^3$ در $20°C$ | نقطهٔ ذوب °C | نقطهٔ جوش °C | گرمای ویژه J/(g.°C) در $25°C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| آکتینیم | Ac | ۸۹ | (۲۲۷) | ۱۰/۰۶ | ۱۳۲۳ | (۳۴۷۳) | ۰/۰۹۲ |
| آلومینیوم | Al | ۱۳ | ۲۶/۹۸۱۵ | ۲/۶۹۹ | ۶۶۰ | ۲۴۵۰ | ۰/۹۰۰ |
| آمریسیم | Am | ۹۵ | (۲۴۳) | ۱۳/۶۷ | ۱۵۴۱ | – | – |
| انتیموان | Sb | ۵۱ | ۱۲۱/۷۵ | ۶/۶۹۱ | ۶۳۰/۵ | ۱۳۸۰ | ۰/۲۰۵ |
| آرگون | Ar | ۱۸ | ۳۹/۹۴۸ | ۱/۶۶۲۶×$۱۰^{-۳}$ | −۱۸۹/۴ | −۱۸۵/۸ | ۰/۵۲۳ |
| ارسنیک | As | ۳۳ | ۷۴/۹۲۱۶ | ۵/۷۸ | ۸۱۷(۲۸atm) | ۶۱۳ | ۰/۳۳۱ |
| استاتین | At | ۸۵ | (۲۱۰) | – | (۳۰۲) | – | – |
| باریم | Ba | ۵۶ | ۱۳۷/۳۴ | ۳/۵۹۴ | ۷۲۹ | ۱۶۴۰ | ۰/۲۰۵ |
| برکلیم | Bk | ۹۷ | (۲۴۷) | ۱۴/۷۹ | – | – | – |
| بریلیم | Be | ۴ | ۹/۰۱۲۲ | ۱/۸۴۸ | ۱۲۸۷ | ۲۷۷۰ | ۱/۸۳ |
| بیسموت | Bi | ۸۳ | ۲۰۸/۹۸۰ | ۹/۷۴۷ | ۲۷۱/۳۷ | ۱۵۶۰ | ۰/۱۲۲ |
| بور | B | ۵ | ۱۰/۸۱۱ | ۲/۳۴ | ۲۰۳۰ | – | ۱/۱۱ |
| برم | Br | ۳۵ | ۷۹/۹۰۹ | (مایع) ۳/۱۲ | −۷/۲ | ۵۸ | ۰/۲۹۳ |
| کادمیم | Cd | ۴۸ | ۱۱۲/۴۰ | ۸/۶۵ | ۳۲۱/۰۳ | ۷۶۵ | ۰/۲۲۶ |
| کلسیم | Ca | ۲۰ | ۴۰/۰۸ | ۱/۵۵ | ۸۳۸ | ۱۴۴۰ | ۰/۶۲۴ |
| کالیفرنیم | Cf | ۹۸ | (۲۵۱) | – | – | – | – |
| کربن | C | ۶ | ۱۲/۰۱۱۱۵ | ۲/۲۶ | ۳۷۲۷ | ۴۸۳۰ | ۰/۶۹۱ |
| سریم | Ce | ۵۸ | ۱۴۰/۱۲ | ۶/۷۶۸ | ۸۰۴ | ۳۴۷۰ | ۰/۱۸۸ |
| سزیم | Cs | ۵۵ | ۱۳۲/۹۰۵ | ۱/۸۷۳ | ۲۸/۴۰ | ۶۹۰ | ۰/۲۴۳ |
| کلر | Cl | ۱۷ | ۳۵/۴۵۳ | ۳/۲۱۴×$۱۰^{-۳}$ | −۱۰۱ | −۳۴/۷ | ۰/۴۸۶ |
| کرم | Cr | ۲۴ | ۵۱/۹۹۶ | ۷/۱۹ | ۱۸۵۷ | ۲۶۶۵ | ۰/۴۴۸ |
| کبالت | Co | ۲۷ | ۵۸/۹۳۳۲ | ۸/۸۵ | ۱۴۹۵ | ۲۹۰۰ | ۰/۴۲۳ |
| مس | Cu | ۲۹ | ۶۳/۵۴ | ۸/۹۶ | ۱۰۸۳/۴۰ | ۲۵۹۵ | ۰/۳۸۵ |
| کوریم | Cm | ۹۶ | (۲۴۷) | ۱۳/۳ | – | – | – |
| دیسپروزیم | Dy | ۶۶ | ۱۶۲/۵۰ | ۸/۵۵ | ۱۴۰۹ | ۲۳۳۰ | ۰/۱۷۲ |
| اینشتینیم | Es | ۹۹ | (۲۵۴) | – | – | – | – |
| اربیم | Er | ۶۸ | ۱۶۷/۲۶ | ۹/۱۵ | ۱۵۲۲ | ۲۶۳۰ | ۰/۱۶۷ |
| اروپیم | Eu | ۶۳ | ۱۵۱/۹۶ | ۵/۲۴۳ | ۸۱۷ | ۱۴۹۰ | ۰/۱۶۳ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| فرمیم | Fm | ۱۰۰ | (۲۷۳) | – | – | – | – |
| فلوئور | F | ۹ | ۱۸/۹۹۸۴ | ۱/۶۹۶×۱۰$^{-۳}$(۰ °C) | −۲۱۹/۶ | −۱۸۸/۲ | ۰/۷۵۳ |
| فرانسیم | Fr | ۸۷ | (۲۲۳) | – | (۲۷) | – | – |
| گادولینیم | Gd | ۶۴ | ۱۵۷/۲۵ | ۷/۹۰ | ۱۳۱۲ | ۲۷۳۰ | ۰/۲۳۴ |
| گالیم | Ga | ۳۱ | ۶۹/۷۲ | ۵/۹۰۷ | ۲۹/۷۵ | ۲۲۳۷ | ۰/۳۷۷ |
| ژرمانیم | Ge | ۳۲ | ۷۲/۵۹ | ۵/۳۲۳ | ۹۳۷/۲۵ | ۲۸۳۰ | ۰/۳۲۲ |
| طلا | Au | ۷۹ | ۱۹۶/۹۶۷ | ۱۹/۳۲ | ۱۰۶۴/۴۳ | ۲۹۷۰ | ۰/۱۳۱ |
| هافنیم | Hf | ۷۲ | ۱۷۸/۴۹ | ۱۳/۳۱ | ۲۲۲۷ | ۵۴۰۰ | ۰/۱۴۴ |
| هاهنیم | Ha | ۱۰۵ | – | – | – | – | – |
| هاسیوم | Hs | ۱۰۸ | – | – | – | – | – |
| هلیوم | He | ۲ | ۴/۰۰۲۶ | ۰/۱۶۶۴×۱۰$^{-۳}$ | −۲۶۹/۷ | −۲۶۸/۹ | ۵/۲۳ |
| هولمیم | Ho | ۶۷ | ۱۶۴/۹۳۰ | ۸/۷۹ | ۱۴۷۰ | ۲۳۳۰ | ۰/۱۶۵ |
| هیدروژن | H | ۱ | ۱/۰۰۷۹۷ | ۰/۰۸۳۷۵×۱۰$^{-۳}$ | −۲۵۹/۱۹ | −۲۵۲/۷ | ۱۴/۴ |
| ایندیم | In | ۴۹ | ۱۱۴/۸۲ | ۷/۳۱ | ۱۵۶/۶۳۴ | ۲۰۰۰ | ۰/۲۳۳ |
| ید | I | ۵۳ | ۱۲۶/۹۰۴۴ | ۴/۹۳ | ۱۱۳/۷ | ۱۸۳ | ۰/۲۱۸ |
| ایریدیم | Ir | ۷۷ | ۱۹۲/۲ | ۲۲/۵ | ۲۴۴۷ | (۵۳۰۰) | ۰/۱۳۰ |
| آهن | Fe | ۲۶ | ۵۵/۸۴۷ | ۷/۸۷۴ | ۱۵۳۶/۵ | ۳۰۰۰ | ۰/۴۴۷ |
| کریپتون | Kr | ۳۶ | ۸۳/۸۰ | ۳/۴۸۸×۱۰$^{-۳}$ | −۱۵۷/۳۷ | −۱۵۲ | ۰/۲۴۷ |
| لانتان | La | ۵۷ | ۱۳۸/۹۱ | ۶/۱۸۹ | ۹۲۰ | ۳۴۷۰ | ۰/۱۹۵ |
| لورنسیم | Lr | ۱۰۳ | (۲۵۷) | | – | – | |
| سرب | Pb | ۸۲ | ۲۰۷/۱۹ | ۱۱/۳۵ | ۳۲۷/۴۵ | ۱۷۲۵ | ۰/۱۲۹ |
| لیتیم | Li | ۳ | ۶/۹۳۹ | ۰/۵۳۴ | ۱۸۰/۵۵ | ۱۳۰۰ | ۳/۵۸ |
| لوتسیم | Lu | ۷۱ | ۱۷۴/۹۷ | ۹/۸۴۹ | ۱۶۶۳ | ۱۹۳۰ | ۰/۱۵۵ |
| منیزیم | Mg | ۱۲ | ۲۴/۳۱۲ | ۱/۷۳۸ | ۶۵۰ | ۱۱۰۷ | ۱/۰۳ |
| منگنز | Mn | ۲۵ | ۵۴/۹۳۸۰ | ۷/۴۴ | ۱۲۴۴ | ۲۱۵۰ | ۰/۴۸۱ |
| میتنریم | Mt | ۱۰۹ | – | – | – | – | – |
| مندلویم | Md | ۱۰۱ | (۲۵۶) | – | – | – | – |
| جیوه | Hg | ۸۰ | ۲۰۰/۵۹ | ۱۳/۵۵ | −۳۸/۸۷ | ۳۵۷ | ۰/۱۳۸ |
| مولیبدن | Mo | ۴۲ | ۹۵/۹۴ | ۱۰/۲۲ | ۲۶۱۷ | ۵۵۶۰ | ۲۵۱ |
| نئودیمیم | Nd | ۶۰ | ۱۴۴/۲۴ | ۷/۰۰۷ | ۱۰۱۶ | ۳۱۸۰ | ۰/۱۸۸ |
| نئون | Ne | ۱۰ | ۲۰/۱۸۳ | ۰/۸۳۸۷×۱۰$^{-۳}$ | −۲۴۸/۵۹۷ | −۲۴۶/۰ | ۱/۰۳ |
| نپتونیم | Np | ۹۳ | (۲۳۷) | ۲۰/۲۵ | ۶۳۷ | – | ۱/۲۶ |
| نیکل | Ni | ۲۸ | ۵۸/۷۱ | ۸/۹۰۲ | ۱۴۵۳ | ۲۷۳۰ | ۰/۴۴۴ |
| نیلزبوریم | Ns | ۱۰۷ | – | – | – | – | – |
| نیوبیم | Nb | ۴۱ | ۹۲/۹۰۶ | ۸/۵۷ | ۲۴۶۸ | ۴۹۲۷ | ۰/۲۶۴ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| نیتروژن (ازت) | N | ۷ | ۱۴/۰۰۶۷ | $۱/۱۶۴۹\times ۱۰^{-۳}$ | -۲۱۰ | -۱۹۵/۸ | ۱/۰۳ |
| نوبلیم | No | ۱۰۲ | (۲۵۵) | – | – | – | – |
| اسمیم | Os | ۷۶ | ۱۹۰/۲ | ۲۲/۵۹ | ۳۰۲۷ | ۵۵۰۰ | ۰/۱۳۰ |
| اکسیژن | O | ۸ | ۱۵/۹۹۹۴ | $۱/۳۳۱۸\times ۱۰^{-۳}$ | -۲۱۸/۸۰ | -۱۸۳/۰ | ۰/۹۱۳ |
| پالادیم | Pb | ۴۶ | ۱۰۶/۴ | ۱۲/۰۲ | ۱۵۵۲ | ۳۹۸۰ | ۰/۲۴۳ |
| فسفر | P | ۱۵ | ۳۰/۹۷۳۸ | ۱/۸۳ | ۴۴/۲۵ | ۲۸۰ | ۰/۷۴۱ |
| پلاتین | Pt | ۷۸ | ۱۹۵/۰۹ | ۲۱/۴۵ | ۱۷۶۹ | ۴۵۳۰ | ۰/۱۳۴ |
| پلوتونیم | Pu | ۹۴ | (۲۴۴) | ۱۹/۸ | ۶۴۰ | ۳۲۳۵ | ۰/۱۳۰ |
| پولونیم | Po | ۸۴ | (۲۱۰) | ۹/۳۲ | ۲۵۴ | – | – |
| پتاسیم | K | ۱۹ | ۹۳/۱۰۲ | ۰/۸۶۲ | ۶۳/۲۰ | ۷۶۰ | ۰/۷۵۸ |
| پرازئودیمیم | Pr | ۵۹ | ۱۴۰/۹۰۷ | ۶/۷۷۳ | ۹۳۱ | ۳۰۲۰ | ۰/۱۹۷ |
| پرومتیم | Pm | ۶۱ | (۱۴۵) | ۷/۲۲ | (۱۰۲۷) | – | – |
| پروتاکتینیم | Pa | ۹۱ | (۲۳۱) | (براورد) ۱۵/۳۷ | ۱۲۳۰ | – | – |
| رادیم | Ra | ۸۸ | (۲۲۶) | ۵/۰ | ۷۰۰ | – | – |
| رادون | Rn | ۸۶ | (۲۲۲) | $۹/۹۶\times ۱۰^{-۳}$ | (-۷۱) | -۶۱/۸ | ۰/۰۹۲ |
| رنیم | Re | ۷۵ | ۱۸۶/۲ | ۲۱/۰۲ | ۳۱۸۰ | ۵۹۰۰ | ۰/۱۳۴ |
| رودیم | Rh | ۴۵ | ۱۰۲/۹۰۵ | ۱۲/۴۱ | ۱۹۶۳ | ۴۵۰۰ | ۰/۲۴۳ |
| روبیدیم | Rb | ۳۷ | ۸۵/۴۷ | ۱/۵۳۲ | ۳۹/۴۹ | ۶۸۸ | ۰/۳۶۴ |
| روتنیم | Ru | ۴۴ | ۱۰۱/۱۰۷ | ۱۲/۳۷ | ۲۲۵۰ | ۴۹۰۰ | ۰/۲۳۹ |
| راترفوردیم | Rf | ۱۰۴ | – | – | – | – | – |
| ساماریم | Sm | ۶۲ | ۱۵/۰۳۵ | ۷/۵۲ | ۱۰۷۲ | ۱۶۳۰ | ۰/۱۹۷ |
| اسکاندیم | Sc | ۲۱ | ۴۴/۹۵۶ | ۲/۹۹ | ۱۵۳۹ | ۲۷۳۰ | ۰/۵۶۹ |
| سیبورکیم | Sg | ۱۰۶ | – | – | – | – | – |
| سلنیم | Se | ۳۴ | ۷۸/۹۶ | ۴/۷۹ | ۲۲۱ | ۶۸۵ | ۰/۳۱۸ |
| سیلیسیم | Si | ۱۴ | ۲۸/۰۸۶ | ۲/۳۳ | ۱۴۱۲ | ۲۶۸۰ | ۰/۷۱۲ |
| نقره | Ag | ۴۷ | ۱۰۷/۸۷۰ | ۱۰/۴۹ | ۹۶۰/۸ | ۲۲۱۰ | ۰/۲۳۴ |
| سدیم | Na | ۱۱ | ۲۲/۹۸۹۸ | ۰/۹۷۱۲ | ۹۷/۸۵ | ۸۹۲ | ۱/۲۳ |
| استرونسیم | Sr | ۳۸ | ۸۷/۶۲ | ۲/۵۴ | ۷۶۸ | ۱۳۸۰ | ۰/۷۳۷ |
| گوگرد | S | ۱۶ | ۳۲/۰۶۴ | ۲/۰۷ | ۱۱۹/۰ | ۴۴۴/۶ | ۰/۷۰۷ |
| تانتال | Ta | ۷۳ | ۱۸۰/۹۴۸ | ۱۶/۶ | ۳۰۱۴ | ۵۴۲۵ | ۰/۱۳۸ |
| تکنسیم | Tc | ۴۳ | (۹۹) | ۱۱/۴۶ | ۲۲۰۰ | – | ۰/۲۰۹ |
| تلور یا تلوریم | Te | ۵۲ | ۱۲۷/۶۰ | ۶/۲۴ | ۴۴۹/۵ | ۹۹۰ | ۰/۲۰۱ |
| تربیم | Tb | ۶۵ | ۱۵۸/۹۲۴ | ۸/۲۲۹ | ۱۳۵۷ | ۲۵۳۰ | ۰/۱۸۰ |
| تالیم | Ti | ۸۱ | ۲۰۴/۳۷ | ۱۱/۸۵ | ۳۰۴ | ۱۴۵۷ | ۰/۱۳۰ |
| توریم | Th | ۹۰ | (۲۳۲) | ۱۱/۷۲ | ۱۷۵۵ | (۳۸۵۰) | ۰/۱۱۷ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| قلع | Sn | ۵۰ | ۱۱۸/۶۹ | ۷/۲۹۸۴ | ۲۳۱/۸۶۸ | ۲۲۷۰ | ۰/۲۲۶ |
| تیتان یا تیتانیم | Ti | ۲۲ | ۴۷/۹۰ | ۴/۵۴ | ۱۶۷۰ | ۳۲۶۰ | ۰/۵۲۳ |
| تنگستن | W | ۷۴ | ۱۸۳/۸۵ | ۱۹/۳ | ۳۳۸۰ | ۵۹۳۰ | ۰/۱۳۴ |
| اورانیم | U | ۹۲ | (۲۳۸) | ۱۸/۹۵ | ۱۱/۳۲ | ۳۸۱۸ | ۰/۱۱۷ |
| وانادیم | V | ۲۳ | ۵۰/۹۴۲ | ۶/۱۱ | ۱۹۰۲ | ۳۴۰۰ | ۰/۴۹۰ |
| گزنون | Xe | ۵۴ | ۱۳۱/۳۰ | $۵/۴۹۵\times ۱۰^{-۳}$ | −۱۱۱/۷۹ | −۱۰۸ | ۰/۱۵۹ |
| ایتربیم | Yb | ۷۰ | ۱۷۳/۰۴ | ۶/۹۶۵ | ۸۲۴ | ۱۵۳۰ | ۰/۱۵۵ |
| ایتریم | Y | ۳۹ | ۸۸/۹۰۵ | ۴/۴۶۹ | ۱۵۲۶ | ۳۰۳۰ | ۰/۲۹۷ |
| روی | Zn | ۳۰ | ۶۵/۳۷ | ۷/۱۳۳ | ۴۱۹/۵۸ | ۹۰۶ | ۰/۳۸۹ |
| زیرکونیم | Zr | ۴۰ | ۹۲/۲۲ | ۶/۵۰۶ | ۱۸۵۲ | ۳۵۸۰ | ۰/۲۷۶ |

اندازه‌های درون پرانتزها در ستون جرمهای مولی، عددهای جرمی ایزوتوپهای با عمر طولانی عنصرهایی‌اند که پرتوزا هستند.

نقطه‌های ذوب و نقطه‌های جوش در پرانتزها قطعیتی ندارند.

داده‌های گازها فقط هنگامی که اینها در حالت مولکولی معمولی مانند $H_2$، He، $O_2$ و Ne و غیره هستند معتبر است.

گرماهای ویژهٔ گاز مقدارهای در فشار ثابت‌اند.

**منبع:** برگرفته از J. Emsley, The Elements, 3rd ed., 1998, Clarendon Press, Oxford. همچنین برای دیدن آخرین مقدارها و جدیدترین عنصرها به www.webelements.com مراجعه کنید.

# پیوست چ — جدول تناوبی عنصرها

فلزها — شبه فلزها — نافلزها

فلزهای قلیایی — گازهای نادر — فلزهای واسطه — تناوبهای افقی

| تناوب | IA | IIA | IIIB | IVB | VB | VIB | VIIB | VIIIB | VIIIB | VIIIB | IB | IIB | IIIA | IVA | VA | VIA | VIIA | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ H | | | | | | | | | | | | | | | | | ۲ He |
| ۲ | ۳ Li | ۴ Be | | | | | | | | | | | ۵ B | ۶ C | ۷ N | ۸ O | ۹ F | ۱۰ Ne |
| ۳ | ۱۱ Na | ۱۲ Mg | | | | | | | | | | | ۱۳ Al | ۱۴ Si | ۱۵ P | ۱۶ S | ۱۷ Cl | ۱۸ Ar |
| ۴ | ۱۹ K | ۲۰ Ca | ۲۱ Sc | ۲۲ Ti | ۲۳ V | ۲۴ Cr | ۲۵ Mn | ۲۶ Fe | ۲۷ Co | ۲۸ Ni | ۲۹ Cu | ۳۰ Zn | ۳۱ Ga | ۳۲ Ge | ۳۳ As | ۳۴ Se | ۳۵ Br | ۳۶ Kr |
| ۵ | ۳۷ Rb | ۳۸ Sr | ۳۹ Y | ۴۰ Zr | ۴۱ Nb | ۴۲ Mo | ۴۳ Tc | ۴۴ Ru | ۴۵ Rh | ۴۶ Pd | ۴۷ Ag | ۴۸ Cd | ۴۹ In | ۵۰ Sn | ۵۱ Sb | ۵۲ Te | ۵۳ I | ۵۴ Xe |
| ۶ | ۵۵ Cs | ۵۶ Ba | ۵۷-۷۱ * | ۷۲ Hf | ۷۳ Ta | ۷۴ W | ۷۵ Re | ۷۶ Os | ۷۷ Ir | ۷۸ Pt | ۷۹ Au | ۸۰ Hg | ۸۱ Tl | ۸۲ Pb | ۸۳ Bi | ۸۴ Po | ۸۵ At | ۸۶ Rn |
| ۷ | ۸۷ Fr | ۸۸ Ra | ۸۹-۱۰۳ † | ۱۰۴ Rf | ۱۰۵ Db | ۱۰۶ Sg | ۱۰۷ Bh | ۱۰۸ Hs | ۱۰۹ Mt | ۱۱۰ Ds | ۱۱۱ | ۱۱۲ | ۱۱۳ | ۱۱۴ | ۱۱۵ | ۱۱۶ | ۱۱۷ | ۱۱۸ |

فلزهای واسطه داخلی

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * رشتهٔ لانتانیدها | ۵۷ La | ۵۸ Ce | ۵۹ Pr | ۶۰ Nd | ۶۱ Pm | ۶۲ Sm | ۶۳ Eu | ۶۴ Gd | ۶۵ Tb | ۶۶ Dy | ۶۷ Ho | ۶۸ Er | ۶۹ Tm | ۷۰ Yb | ۷۱ Lu |
| † رشتهٔ آکتینیدها | ۸۹ Ac | ۹۰ Th | ۹۱ Pa | ۹۲ U | ۹۳ Np | ۹۴ Pu | ۹۵ Am | ۹۶ Cm | ۹۷ Bk | ۹۸ Cf | ۹۹ Es | ۱۰۰ Fm | ۱۰۱ Md | ۱۰۲ No | ۱۰۳ Lr |

عنصرهای ۱۱۱ ، ۱۱۲ ، ۱۱۴ و ۱۱۶ کشف شده‌اند ولی تا سال ۲۰۰۳ هنوز نامگذاری نشده‌اند. شواهد کشف عنصرهای ۱۱۳ و ۱۱۵ گزارش شده‌اند. برای آخرین اطلاعات و جدیدترین عنصرها به www.webelements.com مراجعه کنید.

# پیوست ج برندگان جایزه نوبل در فیزیک

۱۹۰۱ ویلهم کونراد رونتگن
Wilhelm Konrad Röntgen (۱۹۲۳-۱۸۴۵) برای کشف پرتوهای X.

۱۹۰۲ هنریک آنتون لورنس
Hendrik Antoon Lorentz (۱۹۲۸-۱۸۵۳) و پیتر زیمان
Pieter Zeeman (۱۹۴۳-۱۸۶۵) به خاطر پژوهشهایشان در مورد اثر مغناطیس بر پدیده‌های تابشی.

۱۹۰۳ آنتونی هنری بکرل
Antoine Henri Becquerel (۱۹۰۸-۱۸۵۲) به خاطر کشف پرتوزایی خود به خودی.
پیرکوری
Pierre Curie (۱۹۰۶-۱۸۵۹) و ماری اسکلوسکاکوری
Marie Sklowdowska-Curie (۱۹۳۴-۱۸۶۷) به خاطر پژوهشهای مشترک خود در پدیده‌های تابشی که به وسیلهٔ بکرل کشف شده بود.

۱۹۰۴ لرد ریلی (جان ویلیام استوارت)
Loard Rayleigh (John William Strutt) (۱۹۱۹-۱۸۴۲) به خاطر بررسیهایش در مورد چگالی گازهای خیلی مهم و به خاطر کشف آرگون.

۱۹۰۵ فیلیپ ادوارد آنتون فون لنارد
Philipp Eduard Anton von Lenard (۱۹۴۷-۱۸۶۲) به خاطر کار در زمینهٔ پرتوهای کاتدی.

۱۹۰۶ جوزف جان تامسون
Joseph John Thomson (۱۹۴۰-۱۸۵۶) به خاطر بررسیهای نظری و تجربی در مورد رسانایی الکتریکی گازها.

۱۹۰۷ آلبرت ابراهام مایکلسون
Albert Abraham Michelson (۱۹۳۱-۱۸۵۲) به خاطر ابزارهای دقیق نوری و بررسیهای اندازهٔ شناختی انجام شده به کمک آنها.

۱۹۰۸ گابریل لیپمان
Gabriel Lippmann (۱۹۲۱-۱۸۴۵) به خاطر روش باز تولید رنگها از طریق عکاسی بر پایهٔ پدیده‌های تداخل.

۱۹۰۹ گوگلیلمو مارکونی
Guglielmo Marconi (۱۹۳۷-۱۸۴۷) و کارل فردیناند براون Carl Ferdinand Braun (۱۹۱۸-۱۸۵۰) به خاطر کوششهایشان در گسترش تلگراف بدون سیم.

۱۹۱۰ یوهان دیدریک واندروالس
Johannes Diderik van der Waals (۱۹۳۲-۱۸۳۷) به خاطر کار روی معادلهٔ حرکت گازها و مایعات.

۱۹۱۱ ویلهم وین
Wilhelm Wien (۱۹۲۸-۱۸۶۴) به خاطر کشفهایش دربارهٔ قانونهای حاکم بر تابش گرمایی.

۱۹۱۲ نیلز گوستاف دالن
Nils Gustaf Dalen (۱۹۳۷-۱۸۶۹) به خاطر اختراع تنظیم کننده‌های خودکار برای استفاده از انباره‌های گازی برای روشن ساختن فانوسهای دریایی و شناورها.

۱۹۱۳ هایک کامرلینگ اونس
Heike Kamerling Onnes (۱۹۲۶-۱۸۵۳) به خاطر بررسیهایی دربارهٔ خواص مواد در دماهای پایین که افزون بر نتایج دیگر به تولید هلیوم مایع انجامید.

۱۹۱۴ ماکس فون لاوه
Max von Laue (۱۹۶۰-۱۸۷۹) به خاطر کشف پراش پرتوهای رونتگن به وسیلهٔ بلورها.

۱۹۱۵ ویلیام هنری براگ
William Henry Bragg (۱۹۴۲-۱۸۶۲) و ویلیام لورنس براگ William Lawrence Bragg (۱۹۷۱-۱۸۹۰) به خاطر خدماتشان در تحلیل ساختار بلوری به وسیلهٔ پرتوهای رونتگن.

۱۹۱۷ چارلز گلاور بارکلا
Charles Glover Barkla (۱۹۴۴-۱۸۷۷) به خاطر کشف پرتوهای x مشخصهٔ عنصرها.

۱۹۱۸ ماکس پلانک
Max Planck (۱۹۴۷-۱۸۵۸) به خاطر کشف کوانتوم انرژی.

۱۹۱۹ یوهانس اشتارک
Johannes Stark (۱۹۵۷-۱۸۷۴) به خاطر کشف پدیدهٔ دوپلر در پرتوهای کانالی و تجزیهٔ خطهای طیفی در میدانهای الکتریکی.

۱۹۲۰ شارل ادوارد گییوم
Charles-Edouard Guillaume (۱۹۳۸-۱۸۶۱) به خاطر خدمتی که با کشف ناهنجاریهای موجود در آلیاژهای فولاد نیکل به اندازه‌گیریهای دقیق در فیزیک کرده است.

۱۹۲۱ آلبرت اینشتین
Albert Einstein (۱۹۵۵-۱۸۷۹) به خاطر خدماتش به فیزیک نظری و به ویژه به‌خاطر کشف‌قانون اثر فوتوالکتریک

۱۹۲۲ نیلس بور

Niels Bohr (۱۹۶۲-۱۸۸۵) به خاطر بررسی ساختار اتمها و تابشی که از آنها سرچشمه می‌گیرد.

**۱۹۲۳** رابرت اندروز میلیکان

Robert Andrews Millikan (۱۹۵۳-۱۸۶۸) به خاطر کار در زمینهٔ بار بنیادی الکتریسیته و اثر فوتوالکتریک.

**۱۹۲۴** کارل مان گئورگ زیگبان

Karl Manne George Siegbahn (۱۹۷۹-۱۸۸۸) به خاطر کشف و پژوهش در زمینه طیف‌نمایی پرتو x .

**۱۹۲۵** جیمز فرانک

James Franck (۱۹۶۴-۱۸۸۲) و گوستاو هرتز Gustav Hertz (۱۹۷۵-۱۸۸۷) به خاطر کشف قانونهای حاکم بر برخورد الکترون با اتم

**۱۹۲۶** ژان باپتیست پرن

Jean Baptiste Perrin (۱۹۴۲-۱۸۷۰) به خاطر کار روی ساختار ناپیوستهٔ ماده و به ویژه به خاطر کشف تعادل ته‌نشینی.

**۱۹۲۷** آرتور هالی کامپتون

Arthur Holly Compton (۱۹۶۲-۱۸۹۲) به خاطر کشف پدیدهٔ کامپتون. چارلز تامسن ریزویلسون Charles Thomson Rees Wilson (۱۹۵۹-۱۸۷۹) به خاطر ابداع مرئی کردن مسیر ذره‌های باردار توسط چگالش بخار.

**۱۹۲۸** اوئن ویلانز ریچاردسون

Owen Willans Richardson (۱۹۵۹-۱۸۷۹) به خاطر کار روی پدیدهٔ گرما یونی و به ویژه به خاطر کشف قانونی که به نام او نامیده شد.

**۱۹۲۹** پرنس لویی ویکتور دوبروی

Prince Louis Victor de Braglie (۱۹۸۷-۱۸۹۲) به خاطر کشف طبیعت موجی الکترونها.

**۱۹۳۰** چاندرا سکارا ونکاتا رامان

Sir Chandra sekhara Venkata Raman (۱۹۷۰-۱۸۸۸) به خاطر کار روی پراکندگی نور و کشف اثری که به نام او نامیده شد.

**۱۹۳۲** ورنر هایزنبرگ

Werner Heisenberg (۱۹۷۶-۱۹۰۱) به خاطر ابداع مکانیک کوانتومی که کاربرد آن افزون بر چیزهای دیگر به کشف شکلهای آلوتروپی هیدروژن انجامید.

**۱۹۳۳** اروین شرودینگر

Erwin Schrödinger (۱۹۶۱-۱۸۸۷) و پل آدرین موریس دیراک Paul Adrien Maurice Dirac (۱۹۸۴-۱۹۰۲) به خاطر کشف شکلهای تازه و خلاق نظریهٔ اتمی.

**۱۹۳۵** جیمز چادویک

James Chadwick (۱۹۷۴-۱۸۹۱) به خاطر کشف نوترون.

**۱۹۳۶** ویکتور فرانتس هس

Victor Franz Hess (۱۹۶۴-۱۸۸۳) به خاطر کشف تابش کیهانی.

**۱۹۳۷** کلینتون جوزف داویسون

Clinton Joseph Davisson (۱۹۵۸-۱۸۸۱) و جورج پاگت تامسون George Paget Thomson (۱۹۷۵-۱۸۹۲) به خاطر کشف تجربی پراش الکترونها به وسیلهٔ بلورها.

**۱۹۳۸** انریکو فرمی

Enrico Fermi (۱۹۵۴-۱۹۰۱) به خاطر اثبات وجود عناصر پرتوزای جدیدی که به وسیلهٔ پرتوافکنی نوترونی تولید می‌شود و نیز به خاطر کشف واکنشهای هسته‌ای حاصل از نوترونهای کند.

**۱۹۳۹** ارنست اورلاندو لورنس

Ernest Orlando Lawrence (۱۹۵۸-۱۹۰۱) به خاطر اختراع و تکمیل سیکلوترون و نتایج حاصل از آن، به ویژه تولید عنصرهای پرتوزای مصنوعی.

**۱۹۴۳** اتو اشترن

Otto Stern (۱۹۶۹-۱۸۸۸) به خاطر سهم او در توسعهٔ روش پرتو مولکولی و کشف گشتاور مغناطیسی پروتون.

**۱۹۴۴** ایزیدور ایزاک رابی

Isidor Isaac Rabi (۱۹۸۸-۱۸۹۸) به خاطر ابداع روش تشدید برای ثبت خواص مغناطیسی هسته‌های اتمی.

**۱۹۴۵** ولفگانگ پائولی

Wolfgang Pauli (۱۹۵۸-۱۹۰۰) به خاطر کشف اصل طرد (که اصل پائولی نیز نامیده می‌شود).

**۱۹۴۶** پرسی ویلیامز بریجمن

Percy Williams Bridgman (۱۹۶۱-۱۸۸۲) به خاطر اختراع وسیله‌ای برای تولید فشارهای خیلی زیاد و کشفهایی که از این طریق در زمینهٔ فیزیک فشار بالا داشته است.

**۱۹۴۷** ادوارد ویکتور اپلتون

Sir Edward Victor Appleton (۱۹۶۵-۱۸۹۲) به خاطر پژوهشهایش در فیزیک جو بالا، به ویژه به خاطر کشف لایه‌ای به نام اپلتون.

**۱۹۴۸** پاتریک ماینارد استوارت بلاکت

Patrich Maynard Stuart Blackett (۱۹۷۴-۱۸۹۷) به خاطر تکمیل روش اتاق ابر ویلسون و کشفهایی که در فیزیک هسته‌ای و تابش کیهانی داشته است.

**۱۹۴۹** هیدکی یوکاوا

Hideki Yukawa (۱۹۸۱-۱۹۰۷) به خاطر پیش‌بینی وجود مزونها در نیروهای هسته‌ای بر پایهٔ کار نظری.

**۱۹۵۰** سسیل فرانک پاول
Cecil Frank Powell (۱۹۶۹-۱۹۰۳) به خاطر بسط روش عکاسی مطالعهٔ فرایندهای هسته‌ای و کشفهای انجام شده توسط او در مورد مزونها با این روش.

**۱۹۵۱** جان داگلاس کوک کرافت
Sir John Douglas Cockroft (۱۹۶۷-۱۸۹۷) و ارنست توماس سینتون والتون Ernest Thomas Sinton Walton ( -۱۹۰۳) به خاطر پیشگامی در بررسی استحالهٔ هسته‌های اتمی به وسیلهٔ ذره‌های اتمی که به طور مصنوعی شتاب گرفته‌اند.

**۱۹۵۲** فلیکس بلوخ
Felix Bloch (۱۹۸۳-۱۹۰۵) و ادوارد میلز پورسل Edward Mills Purcell ( -۱۹۱۲) به خاطر طرح روشهای نو برای آزمایشهای دقیق مغناطیس هسته‌ای و کشفهای مربوط به آن.

**۱۹۵۳** فریتس زرنیکه
Frits Zernike (۱۹۶۶-۱۸۸۸) به خاطر ارائهٔ روش تباین فاز، به ویژه به خاطر اختراع میکروسکوپ تباین فاز.

**۱۹۵۴** ماکس بورن
Max Born (۱۹۷۰-۱۸۸۲) به خاطر پژوهش بنیادی در مکانیک کوانتومی، به ویژه به خاطر تعبیر آماری او از تابع موج.
والتر بوته
Walther Bothe (۱۹۵۷-۱۸۹۱) به خاطر روش تطابق و کشفهایی که به وسیلهٔ آن حاصل شد.

**۱۹۵۵** ویلیز اوژن لمب
Willis Eugene Lamb ( -۱۹۱۳) به خاطر کشفهایی دربارهٔ ساختار ریز طیف هیدروژن
پولی کارپ کوش
Polykarp Kusch (۱۹۹۳-۱۹۱۱) به خاطر تعیین دقیق گشتاور مغناطیسی الکترون.

**۱۹۵۶** ویلیام شاکلی
William Shockley (۱۹۸۹-۱۹۰۰)، جان باردین John Bardeen (۱۹۹۱-۱۹۰۸) و والتز هاوزر براتین Walter Houser Brattain (۱۹۸۷-۱۹۰۲) به خاطر پژوهشهایشان دربارهٔ نیمرساناها و کشف اثر ترانزیستور.

**۱۹۵۷** چن نینگ یانگ
Chen Ning Yang ( -۱۹۲۲) و تسونگ دائو لی Tsung Dao Lee ( -۱۹۲۶) به خاطر پژوهش مؤثر آنها در مورد قانونهای پاریته که به کشفهای مهمی در فیزیک ذره‌های بنیادی انجامیده است.

**۱۹۵۸** پاول الکسی یویچ چرنکوف
Pavel Aleksejevičv Čerenko ( -۱۹۰۴) ایل یا میخائیلویچ فرانک Il ja Michajlovc Frank (۱۹۹۰-۱۹۰۸) و ایگور ایوانویچ تام Igor Evgenevič Tamm (۱۹۷۱-۱۸۹۵) به خاطر کشف و تعبیر اثر چرنکوف.

**۱۹۵۹** امیلیو جینو سگره
Emilio Gino Segre (۱۹۸۹-۱۹۰۵) و اون چمبرلین Owen Chamberlain ( -۱۹۲۰) به خاطر کشف پادپروتون.

**۱۹۶۰** دونالد آرتور گلاسر
Donald Arthur Glaser ( -۱۹۲۶) به خاطر اختراع اتاقک حباب.

**۱۹۶۱** روبرت هوفشتاتر
Robert Hofstadter (۱۹۹۰-۱۹۱۵) به خاطر مطالعات پیشگامانه دربارهٔ پراکندگی الکترون در هسته‌های اتمی و کشفهایی که به آن وسیله در مورد ساختار نوکلوئونها به عمل آورد.
رودلف لودویگ موسباثر
Rudolf Ludwig Mössbauer ( -۱۹۲۹) به خاطر پژوهشهایش دربارهٔ جذب تشدیدی پرتوهای γ و کشف اثری در این مورد که به نام اوست.

**۱۹۶۲** لف داویدوویچ لاندائو
Lev Davidsovic Landau (۱۹۶۸-۱۹۰۸) به خاطر نظریه‌های پیشگامانه در مورد ماده چگال، به ویژه هلیوم مایع.

**۱۹۶۳** اوژن پی. ویگنر
Eugene P. Wigner (۱۹۹۵-۱۹۰۲) به خاطر سهم او در نظریهٔ هستهٔ اتم و ذره‌های بنیادی، به ویژه کشف و کاربرد اصول اساسی تقارن.
ماریا جو پرت مایر
Maria Goeppert Mayer (۱۹۷۲-۱۹۰۶) و جی. هانس دی. جنسن J. Hans D. Jensen (۱۹۷۳-۱۹۰۷) به خاطر کشفهایشان دربارهٔ ساختار پوسته‌ای هسته.

**۱۹۶۴** چارلز اچ. تاونز
Charkes H. Townes ( -۱۹۱۵). نیکلای جی. باسوف Nikolai G. Basov ( -۱۹۲۲) و الکساندر ام. پروخوروف Alexander M.Prochorov ( -۱۹۱۶) به خاطر کارهای اساسی در زمینهٔ الکترونیک کوانتومی که به ساخت نوسانگرها و تقویت کننده‌ها بر اساس میزر-لیزر انجامید.

**۱۹۶۵** سن - ایتیرو توموناگا
Sin - itiro Tomonoga (۱۹۷۹-۱۹۰۶) جولیان شوینگر Julian Schwinger (۱۹۹۴-۱۹۱۸) و ریچارد فاینمن

Richard P. Feynman (۱۹۸۸-۱۹۱۸) به خاطر کارهای بنیادیشان در الکترودینامیک کوانتومی که پیامدهای مهمی برای فیزیک ذره‌های بنیادی داشت.

**۱۹۶۶** آلفرد کاستلر

Alfred Kastler (۱۹۸۴-۱۹۰۲) به خاطر کشف و گسترش روشهای نوری برای مطالعهٔ تشدید هرتزی در اتمها.

**۱۹۶۷** هانس البریخت بته

Hans Albrecht Beathe ( -۱۹۰۶)

به خاطر سهم وی در نظریهٔ واکنشهای هسته‌ای به ویژه کشفهای او در مورد تولید انرژی در ستاره‌ها.

**۱۹۶۸** لوویس دبلیو. آلوارز

Luis W.Alvarez (۱۹۱۱-۱۹۸۸) به خاطر سهم تعیین کننده وی در فیزیک ذره‌های بنیادی، به ویژه کشف شمار زیادی از حالتهای تشدیدی که از طریق گسترش فنون به کارگیری اتاقک حباب هیدروژن و تحلیل داده‌های آن امکان پذیر شد.

**۱۹۶۹** مورای گلمان

Murray Gell - mann ( -۱۹۲۹) به خاطر سهم وی در کشفهای مربوط به رده‌بندی ذره‌های بنیادی و برهم‌کنشهای آنها.

**۱۹۷۰** هانس آلفن

Hannes Alfve'n (۱۹۰۸-۱۹۹۵) به خاطر کار بنیادی و کشفهای وی در مغناطو- هیدرودینامیک یا کاربردهای مفید آنها در بخشهای مختلف فیزیک پلاسما.

لویی نئل

Louis Ne'el ( -۱۹۰۴) به خاطر کار بنیادی و کشفهای وی در پاد فرومغناطیس و فرومغناطیس که به کاربردهای مهمی در فیزیک حالت جامد انجامید.

**۱۹۷۱** دنیس گابور

Dennis Gabor (۱۹۰۰-۱۹۷۹) به خاطر کشف اصول تمام نگاری.

**۱۹۷۲** جان باردین

John Bardeen (۱۹۰۸-۱۹۹۱)،

لئون ان. کوپر

Leon N. Cooper ( -۱۹۳۰)

جی. روبرت شریفر

J. Robert Schrieffer ( -۱۹۳۱)به خاطر پرداختن به نظریه‌ای در مورد ابر رسانایی.

**۱۹۷۳** لئو اساکی

Leo Esaki ( -۱۹۲۵) به خاطر کشف تونل زنی در نیمرساناها.

ایوار جیاور

Ivar Giaever ( -۱۹۲۹) به خاطر کشف تونل زنی در ابررسانها.

برایان دی. جوزفسون

Brian D. Josephson ( -۱۹۰۴) به خاطر پیش‌بینی نظری خواص یک ابر جریان در یک سر تونلی.

**۱۹۷۴** آنتونی هویش

Antony Hewish ( -۱۹۲۴) به خاطر کشف تپ اخترها.

سرمارتین رایله

Sir Martin Ryleh (۱۹۸۴-۱۹۱۸) به خاطر کار پیشگامانه‌اش در اختر شناسی رادیویی.

**۱۹۷۵** اگه بور

Aage Bohr ( -۱۹۲۲)،

بن موتلسون

Ben Mottelson و

جیمز رین واتر

James Rainwater (۱۹۸۶-۱۹۱۷) به خاطر کشف ارتباط بین حرکت گروهی و حرکت ذره‌ای و گسترش نظریهٔ ساختار هسته‌های اتمی بر پایهٔ این ارتباط.

**۱۹۷۶** بورتون ریشتر

Burton Richter ( -۱۹۳۱) و

ساموئل چائوچونگ تینگ

Samuel Chao Chung Ting ( -۱۹۳۶) به خاطر کشف (مستقل) یک ذرهٔ بنیادی مهم.

**۱۹۷۷** فیلیپ وارن اندرسون

Philip Warren Anderson ( -۱۹۲۳)،

نویل فرانسیس موت

Nevill Francis Mott ( -۱۹۰۵)

جان هاسبروک وان‌ولک

John Hasbrouck Van Vleck (۱۹۸۰-۱۸۹۹) به خاطر پژوهشهای نظری بنیادی دربارهٔ ساختار الکترونی دستگاههای مغناطیسی و بی نظم.

**۱۹۷۸** پتر ال. کاپیتزا

Peter L. Kapitza (۱۸۹۴-۱۹۸۴) به خاطر اختراعهای اساسی و کشفهای وی در فیزیک دماهای پایین.

آرنو آ. پنزیاس

Arno A. Penzias ( -۱۹۳۳) و

روبرت وودرو ویلسون

Robert Woodrow Wilson ( -۱۹۳۶) به خاطر کشف تابش زمینهٔ میکروموج کیهانی

**۱۹۷۹** شلدون لی گلاشو

Sheldon Lee Glashow ( -۱۹۳۲)

عبدالسلام

Abdus salam (۱۹۲۶-۱۹۹۶)

استون واینبرگ
Steven Weinberg (  -۱۹۳۳) به خاطر مدل وحدت بخش از کنش نیروهای ضعیف و الکترومغناطیسی و به خاطر پیش‌بینی آنها از وجود جریانهای خنثی.

۱۹۸۰ جیمز دبلیو. کرانین
James W. Cronin (  -۱۹۳۱) و
وال ال. فیچ Val L. Fitch (  -۱۹۲۳) به خاطر کشف تناقض در اصول بنیادی تقارن در واپاشی مزونهای K خنثی.

۱۹۸۱ نیکلاس بلومبرگن
Nicolaas Bloembergen (  -۱۹۲۰) و
آرتور لئونارد شاولو
Arthur Leonard Schawlow (  -۱۹۲۱) به خاطر سهم آنها در گسترش طیف نمایی لیزری.
کای ام. زیگبان
Kai M. Siegbahn (  -۱۹۱۸) به خاطر سهم وی در طیف نمایی الکترونی با توان تفکیک بالا.

۱۹۸۲ کنت گدز ویلسون
Kenneth Geddes Wilson (  -۱۹۳۶) به خاطر روش تحلیل پدیده‌های بحرانی ذاتی در تغییرات ماده بر اثر فشار و دما.

۱۹۸۳ سابرامانیان چاندراسکار
Subrehmanyan Chandrasekhar (۱۹۹۵-۱۹۱۰) به خاطر مطالعات نظری وی از ساختار و تحول ستارگان.
ویلیام آ. فأولر
William A. Fowler (۱۹۹۵-۱۹۱۱) به خاطر مطالعات وی دربارهٔ تشکیل عنصرهای شیمیایی در گیتی.

۱۹۸۴ کارلورابیا
Carlo Rubbia (  -۱۹۳۴)
سیمون فون درمیر
Simon van der Meer (  -۱۹۲۵) به خاطر سهم تعیین کنندهٔ آنها در پروژه بزرگی که به کشف ذره‌های $W$ و $Z$ و عوامل بر هم کنش ضعیف انجامید.

۱۹۸۵ کلاس فون کلاسینگ
Klaus van Klitzing (  -۱۹۴۳) به خاطر کشف مقاومت هال کوانتیده.

۱۹۸۶ ارنست روسکا
Ernest Ruska (۱۹۸۸-۱۹۰۶) به خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی.
گرد بینیگ
Gerd Binning (  -۱۹۴۷)
هانریش روهر
Heinrich Rohrer (  -۱۹۳۳) به خاطر اختراع میکروسکوپ تونلی روبشی.

۱۹۸۷ کارل آلکس مولر
Karl Alex Müller (  -۱۹۲۷) و
جی. جورج بدنورز
J. George Bednorz (  -۱۹۵۰) به خاطر کشف دستهٔ تازه‌ای از ابررساناها.

۱۹۸۸ لئون ام. لدرمن
Leon M. Lederman (  -۱۹۲۲)،
ملوین شوارتز Melvin Schwartz (  -۱۹۲۳) و
جک اشتنبرگر
Jack Steinberger (  -۱۹۲۱) به خاطر اولین بهره برداری از یک باریکهٔ نوترینو و کشف نوترینوی میونی.

۱۹۸۹ نورمن رامسی
Norman Ramsey (  -۱۹۱۵)،
هانس دهملت
Hans Dehmelt (  -۱۹۲۲) و
ولفگانگ پل
Wolfgang Paul (۱۹۹۳-۱۹۱۳) به خاطر کاری که به گسترش ساعتهای اتمی و گاهشماری دقیق انجامید.

۱۹۹۰ ژروم آی. فریدمن
Jerome I. Friedman (  -۱۹۳۰)،
هنری دبلیو. کندال
Henry W. Kendall (  -۱۹۲۰) و
ریچارد ای. تیلور
Richard E. Taulor (  -۱۹۲۹) به خاطر اثبات اینکه پروتونها و نوترونها از کوارکها ساخته شده‌اند.

۱۹۹۱ پیر دو جنز
Pierre de Gennes (  -۱۹۳۲) به خاطر مطالعات دربارهٔ پدیده‌های منظم در بلورهای مایع و بسپارها.

۱۹۹۲ جورج چارپاک
George Charpak (  -۱۹۲۴) به خاطر اختراع آشکارسازهای الکترونیکی سریع در ذره‌های پر انرژی.

۱۹۹۳ جوزف اچ. تیلور
Joseph H. Taylor (  -۱۹۴۱) و
راسل ای. هالز
Russel A. Hulse (  -۱۹۵۰) به خاطر کشف و تفسیر اولین تپ اختر دو تایی.

۱۹۹۴ برترام ان. براکهاوس
Berttram N. Brockhouse (  -۱۹۱۸) و
کلیفرد جی. شول
Clifford G. Shull (  -۱۹۱۵) به خاطر گسترش روشهای پراکندگی نوترون.

**۱۹۹۵** مارتین ال. پرل
Martin L. Perl (  -۱۹۲۷) به خاطر کشف لپتون.
فریدریک راینس
Frederick Reines (  -۱۹۱۸) به خاطر آشکار سازی نوترینو.

**۱۹۹۶** دیوید ام. لی
David M.Lee (  -۱۹۳۱)، داگلاس دی. اشروف
Douglas D. Osheroff (...-۱۹۴۵) و رابرت سی. ریچاردسون
Robert C.Richardson (  -۱۹۳۷) به خاطر کشف ابرشارگی در هلیوم ۳.

**۱۹۹۷** استیون چی
Steven Chu (  -۱۹۴۸)، کلود کوهن - تانوجی
Claude Cohen-Tannoudji (  -۱۹۳۳) و ویلیام دی. فیلیپس
William D.Phillips (  -۱۹۴۸) به خاطر تکامل روشهای سروکردن و تله انداختن اتمها با نور لیزر

**۱۹۹۸** رابرت پی. لافلین
Robert B.Laughlin (  -۱۹۵۰)، هورست ال. اشتورمر
Horst L.Stormer (  -۱۹۴۹) و دانیل سی. تسو
Daniel C.Tsui (  -۱۹۳۹) به خاطر کشف شکل جدیدی از شارهٔ کوانتومی

**۱۹۹۹** جراردوس هوفت
Gerardust Hooft (  -۱۹۴۶) و مارتینوس جی جی ولتمن
Martinus J.G.Veltman (  -۱۹۳۱) به خاطر توصیف ساختار کوانتومی برهم کنشهای الکتروضعیف در فیزیک

**۲۰۰۰** زورس آی. آلفروف
Zhores I.Alferof (  -۱۹۳۰)،
هربرت کرومر
Herbert Kroemer (  -۱۹۲۸) و جک اس. کیلبی
Jack S.Kilby (...-۱۹۲۳)
برای کارهای اساسی روی فناوری اطلاعات و ارتباطات، به ویژه به خاطر تکامل نیمرسانای چند ساختاری که در الکترونیک سرعت - بالا و نوری به کار می‌رود.

**۲۰۰۱** اریک ای. کورنل
Eric A.Cormell (  -۱۹۶۱) و ولفگانگ کترل
Wolfgange Ketterle (  -۱۹۵۷) و کارل ای. وایمن
Carl E.Wieman (  -۱۹۵۱)
به خاطر موفقیت در چگالش بوز-اینشتین (در ۱۹۹۵) در گازهای اتمهای قلیایی رقیق، و برای بررسیهای اساسی اولیه در خواص چگالیده‌ها.

**۲۰۰۲** ریموند دیویس، پسر
Raymond Davis, Jr (  -۱۹۱۴)،
ماساتوشی کوشیبا
Masatoshi Koshiba (  -۱۹۲۶) و
ریکاردو جیاکنی
Riccardo Giacconi (  -۱۹۳۱)
به خاطر سهم پیشتاز آنها در اختر فیزیک، به ویژه برای آشکارسازی نوترینوهای کیهانی

**۲۰۰۳** الکسی ای. آبریکوزوف
Alexei A.Abrikosov (  -۱۹۲۸)،
ویتالی ال. گینزبورگ
Vitaly L.Ginzburg (  -۱۹۱۶) و
آنتونی جی. لگت
Anthony J.Leggett (  -۱۹۳۸)
به خاطر سهم پیشتاز آنها در نظریهٔ ابررساناها و ابرشاره‌ها

**۲۰۰۴** دیوید جی. گروس
David J.Geoss (  -۱۹۴۱)،
اچ. دیوید پولیتزز
H.David Politzer (  -۱۹۴۹) و
فرانک ویلچک
Frank Wilczek (  -۱۹۵۱)
به خاطر کشف آزادی مجانبی در نظریهٔ برهم کنشهای قوی.

**۲۰۰۵** روی جی گلابر
Roy J.Glauber (  -۱۹۲۵)
جان ال هال
John L.Hall (  -۱۹۳۴)
تئودور دبلیوهانش
Theodor W.Hansch (  -۱۹۴۱)
برای کارهای اساسی روی نظریهٔ کوانتومی همدوسی نوری و توسعهٔ طیف نمایی دقیق با لیزر.

**۲۰۰۶** جان سی. متر
John C.Matter (  -۱۹۴۶)
جورج اف. اسموت
George F. Smoot (  -۱۹۴۵)
به خاطر کشف اینکه تابش زمینهٔ میکروموج کیهانی به شکل تابش جسم سیاه و ناهمسانگرد است

**۲۰۰۷** پیتر گرونبرگ
Peter Grunberg (  -۱۹۳۹)
آلبرت فرت
Albert Fert (  -۱۹۳۸)
برای کشف مغناطومقاومت عظیم (GMR)

# پاسخهای نکته‌های وارسی و پرسشها و مسئله‌های فرد

## فصل ۱

### مسئله‌ها

۱- (الف) $۱۰^{۹}$ μm؛ (ب) $۱۰^{-۴}$، (پ) $۹/۱\times۱۰^{۵}$ μm، ۳- (الف) ۱۶۰rods؛ (ب) ۴۰chains، ۵- (الف) $۴/۰۰\times۱۰^{۴}$ km؛ (ب) $۵/۱۰\times۱۰^{۸}$ km$^{۲}$؛ (پ) $۱/۰۸\times۱۰^{۱۲}$ km$^{۳}$، ۷- $۱/۹\times۱۰^{۲۲}$ cm$^{۳}$، ۹- $۱/۱\times۱۰^{۳}$ acre – feet، ۱۱- $۱/۲۱\times۱۰^{۱۲}$ μs، ۱۳- (الف) ۱/۴۳؛ (ب) ۰/۸۶۴، ۱۵- (الف) ۴۹۵s؛ (ب) ۱۴۱s؛ (پ) ۱۹۸s؛ (ت) ۲۴۵s-، ۱۷- C، D، A، B، E؛ معیار مهم از تغییرات روزانه است نه بزرگی آن، ۱۹- $۵/۲\times۱۰^{۶}$ m، ۲۱- (الف) $۱\times۱۰^{۳}$ kg؛ (ب) ۱۵۸kg/s، ۲۳- اتم $۹/۰\times۱۰^{۴۹}$، ۲۵- (الف) $۱/۱۸\times۱۰^{-۲۹}$ m$^{۳}$؛ (ب) ۰/۲۸۲nm، ۲۷- ۱۷۵۰kg، ۲۹- $۱/۹\times۱۰^{۵}$ kg ۳۱- ۱/۴۳kg/min، ۳۳- (الف) ۲۲pecks؛ (ب) ۵/۵ امپریال بوشل؛ (پ) ۲۰۰L، ۳۵- (الف) ۱۸/۸ گالن؛ (ب) ۲۲/۵ گالن، ۳۷- (الف) ۱۱/۳m$^{۲}$/L؛ (ب) $۱/۱۳\times۱۰^{۴}$ m$^{-۱}$؛ (پ) $۲/۱۷\times۱۰^{-۳}$ gal/ft$^{۲}$؛ (ت) تعداد گالونها یک فوت مربع را پر می‌کند، ۳۹- ۰/۳cord، ۴۱- (الف) ۲۹۳ گالنUSA؛ (ب) $۳/۸۱\times۱۰^{۳}$ بوشل امریکایی، ۴۳- $۸\times۱۰^{۲}$ km، ۴۵- ۰/۱۲AU/min، ۴۷- ۳/۸mg/s ۴۹- هابانرو ۱۰/۷، ۵۱- (الف) بلی؛ (ب) ۸/۶univers seconds، ۵۳- (الف) ۳/۸۸، (ب) ۷/۶۵؛ (پ) ۱۵۶ken$^{۳}$؛ (ت) $۱/۱۹\times۱۰^{۳}$ m$^{۳}$، ۵۵- ۱/۲m، ۵۷- (الف) $۴/۹\times۱۰^{-۶}$ pc؛ (ب) $۱/۶\times۱۰^{-۵}$ ly، ۵۹- (الف) ۴/۸m و ۳/۹m؛ (ب) $۴/۸\times۱۰^{۳}$ mm و $۳/۹\times۱۰^{۴}$ mm (پ) ۴/۲m$^{۳}$ و ۲/۲m$^{۳}$

## فصل ۲

### نکته‌های وارسی

۱- b و c ۲- (مشتق $dx/dt$ را بررسی کنید) (الف) ۱ و ۴؛ (ب) ۲ و ۳ ۳- (الف) مثبت؛ (ب) منفی؛ (پ) منفی؛ (ت) مثبت، ۴- ۱ و ۴ ($a=d^{۲}x/dt^{۲}$ باید ثابت باشد)، ۵- (الف) مثبت (جابه‌جایی رو به بالا روی محور $y$)؛ (ب) منفی (جابه‌جایی منفی رو به پایین روی محور $y$)؛ $a=-g=-۹/۸\text{m/s}^{۲}$

### پرسشها

۱- (الف) همگی یکسان؛ (ب) ۴ با ۱ یکسان و ۲ سپس ۳، ۳- (الف) منفی؛ (ب) مثبت؛ (پ) بلی؛ (ت) مثبت؛ (ث) ثابت، ۵- (الف) جهت مثبت؛ (ب) جهت منفی؛ (پ) ۳ و ۵؛ (ت) ۲ و ۶ یکسان، سپس ۳ و ۵ یکسان، سپس ۱ و ۴ یکسان (صفر)، ۷- (الف) ۳، ۲، ۱؛ (ب) ۱، ۲، ۳؛ (پ) همگی یکسان؛ (ت) ۱، ۲، ۳؛ (پ) همگی یکسان؛ (ت) ۱، ۲، ۳، ۹- (الف) D؛ (ب) E

### مسئله‌ها

۱- (الف) ۴۰km/h+؛ (ب) ۴۰km/h، ۳- ۱۳m، ۵- (الف) صفر، (ب) ۲m-؛ (پ) صفر؛ (ت) ۱۲m؛ (ث) ۱۲m+؛ (ج) ۷m/s+، ۷- ۱/۴m، ۹- ۱۲۸km/h، ۱۱- ۶۰km، ۱۳- (الف) ۷۳km/h؛ (ب) ۶۸km/h؛ (پ) ۷۰km/h؛ (ت) صفر، ۱۵- (الف) ۶m/s-؛ (ب) جهت $-x$؛ (پ) ۶m/s؛ (ت) کاهش؛ (ث) ۲s؛ (ج) خیر، ۱۷- (الف) ۲۸/۵cm/s؛ (ب) ۱۸/۰cm/s؛ (پ) ۴۰/۵cm/s؛ (ت) ۲۸/۱cm/s؛ (ث) ۳۰/۳cm/s، ۱۹- ۲۰m/s$^{۲}$-، ۲۱- (الف) m/s$^{۲}$؛ (ب) m/s$^{۳}$؛ (پ) ۱/۰s؛ (ت) ۸۲m؛ (ث) ۸۰m-؛ (ج) صفر (چ) ۱۲m/s-؛ (ح) ۳۶m/s-؛ (خ) ۷۲m/s-؛ (د) ۶m/s$^{۲}$-؛ (ذ) ۱۸m/s$^{۲}$-؛ (ر) ۳۰m/s$^{۲}$-؛ (ز) ۴۲m/s$^{۲}$-، ۲۳- (الف) ۱/۶m/s+؛ (ب) ۱۸m/s+، ۲۵- (الف) $۳/۱\times۱۰^{۶}$ s؛ (ب) $۴/۶\times۱۰^{۱۳}$ m، ۲۷- $۱/۶۲\times۱۰^{۱۵}$ m/s$^{۲}$، ۲۹- (الف) ۳۰s؛ (ب) ۳۰۰m، ۳۱- (الف) ۱۰/۶m؛ (ب) ۴۱/۵s ۳۳- (الف) ۳/۵۶m/s$^{۲}$؛ (ب) ۸/۴۳m/s، ۳۵- (الف) ۴/۰m/s$^{۲}$؛ (ب) $+x$، ۳۷- (الف) ۲/۵m/s$^{۲}$- (ب) ۱؛ (پ) صفر با (ت) ۲، ۳۹- ۴۰m، ۴۱- ۰/۹۰m/s$^{۲}$، ۴۳- (الف) ۱۵/۰m؛ (ب) ۹۴km/h، ۴۵- (الف) ۲۹/۴m؛ (ب) ۲/۴۵s، ۴۷- (الف) ۳۱m/s؛ (ب) ۶/۴s، ۴۹- (الف) ۵/۴s؛ (ب) ۴۱m/s، ۵۱- ۴/۰m/s، ۵۳- (الف) ۲۰m؛ (ب) ۵۹m، ۵۵- (الف) ۸۵۷m/s$^{۲}$؛ (ب) بالا، ۵۷- (الف) $۱/۲۶\times۱۰^{۳}$ m/s؛ (ب) بالا، ۵۹- (الف) ۸۹cm؛ (ب) ۲۲cm، ۶۱- ۲/۳۴m، ۶۳- ۲۰/۴m، ۶۵- (الف) ۲/۲۵m/s؛ (ب) ۳/۹۰m/s، ۶۷- ۰/۵۶m/s ۶۹- ۱۰۰m، ۷۱- (الف) ۸۲m؛ (ب) ۱۹m/s، ۷۳- (الف) ۲/۰۰s؛ (ب) ۱۲m؛ (پ) ۹/۰۰cm/s$^{۲}$-؛ (ت) راست؛ (ث) چپ؛ (ج) ۳/۴۶s، ۷۵- (الف) ۴۸/۵m/s؛ (ب) ۴/۹۵s؛ (پ) ۳۴/۳m/s؛ (ت) ۳/۵۰s، ۷۷- ۴۱۴ms، ۷۹- ۹۰m، ۸۱- (الف) ۳/۰s؛ (ب) ۹/۰m، ۸۳- ۲/۷۸m/s$^{۲}$، ۸۵- (الف) ۰/۷۴s؛ (ب) ۶/۲m/s$^{۲}$، ۸۷- ۱۷m/s، ۸۹- ۴۷m/s+، ۹۱- (الف) ۳/۱m/s$^{۲}$، (ب) ۴۵m؛ (پ) ۱۳s، ۹۳- (الف) ۱/۲۳cm؛ (ب) ۴ برابر؛ (پ) ۹ برابر؛ (ت) ۱۶ برابر، (ث) ۲۵ برابر ۹۵- ۲۵km/h، ۹۷- ۱/۲h، ۹۹- ۴H، ۱۰۱- (الف) ۳/۲s؛ (ب) ۱/۳s، ۱۰۳- (الف) ۱۰/۲s؛ (ب) ۱۰/۰m، ۱۰۵- (الف) ۸/۸۵m/s؛ (ب) ۱/۰۰m، ۱۰۷- (الف) ۲/۰m/s$^{۲}$، (ب) ۱۲m/s؛ (پ) ۴۵cm، ۱۰۹- ۳/۷۵ms، ۱۱۱- (الف) ۵/۴۴s؛ (ب) ۵۳/۳m/s؛ (پ) ۵/۸۰m، ۱۱۳- (الف) ۹/۰۸m/s$^{۲}$؛ (ب) ۰/۸۲۶$g$؛ (پ) ۶/۱۲s؛ (ت) ۱۵/۳$T_r$؛ (ث) ترمز کردن؛ (ج) ۵/۵۶m

## فصل ۳

### نکته‌های وارسی

۱- (الف) ۷m ($\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک جهت هستند)؛ (ب) ۱m ($\vec{a}$ و $\vec{b}$ در جهت مخالف هستند) ۲- $c$ ، $d$ ، $f$ مولفه‌ها باید انتها به ابتدا باشند؛ $\vec{a}$ باید از ابتدای یک مؤلفه به انتهای دیگری باشد)، ۳- (الف) + ، + ؛ (ب) + ، - ؛ (پ) + ، + (بردار را از ابتدای $\vec{d}_1$ به انتهای $d_2$ رسم کنید)، ۴- (الف) ۹۰° ؛ (ب) ۰° (بردارها موازی- در یک جهت)؛ (پ) ۱۸۰° (بردارها پادموازی- جهت مخالف)، ۵- (الف) ۰° یا ۱۸۰° ؛ (ب) ۹۰°

### پرسشها

۱- یا ترتیب $\vec{d}_2$ ، $\vec{d}_1$ یا ترتیب $\vec{d}_2$ ، $\vec{d}_2$ , $\vec{d}_3$ ، ۳- بلی، وقتی بردارها در یک جهت باشند، ۵- (الف) بلی؛ (ب) بلی؛ (پ) خیر، ۷- همه غیر از e ، ۹- (الف) $+x$ برای (۱)، $+z$ برای (۲)، $+z$ برای (۳)؛ (ب) $-x$ برای (۱)، $-z$ برای (۲)، $-z$ برای (۳)

### مسئله‌ها

۱- (الف) ۴۷/۲m ؛ (ب) ۱۲۲° ، ۳- (الف) -۲/۵m ؛ -۶/۹m ، ۵- ۱۵۶km ؛ (ب) ۳۹/۸° غرب شمال، ۷- (الف) ۶/۴۲m ؛ (ب) خیر؛ (پ) بلی؛ (ت) بلی؛ (ث) یک پاسخ ممکن: $(۴/۳۰m)\hat{i}+(۳/۷۰m)\hat{j}+(۳/۰۰m)\hat{k}$ ؛ (ج) ۷/۹۶m ، ۹- (الف) $(-۹/۰m)\hat{i}+(۱۰m)\hat{j}$ ؛ (ب) ۱۳m ؛ (پ) ۱۳۲° ، ۱۱- ۴/۷۴km ، ۱۳- (الف) $(۳/۰m)\hat{i}-(۲/۰m)\hat{j}+(۵/۰m)\hat{k}$ ؛ (ب) $(۵/۰m)\hat{i}-(۴/۰m)\hat{j}-(۳/۰m)\hat{k}$ ؛ (پ) $(-۵/۰m)\hat{i}+(۴/۰m)\hat{j}+(۳/۰m)\hat{k}$ ؛ ۱۵- (الف) -۷۰/۰cm (ب) ۸۰/۰cm ، (پ) ۱۴۱cm ؛ (ت) -۱۷۲° ، ۱۷- (الف) ۱/۵۹m ؛ (ب) ۱۲/۱m ؛ (پ) ۱۲/۲m ؛ (ت) ۸۲/۵° ، ۱۹- (الف) ۳۸m ؛ (ب) -۳۷/۵° ؛ (پ) ۱۳۰m ؛ (ت) ۱/۲° ؛ (ث) ۶۲m ؛ (ج) ۱۳۰° ، ۲۱- ۵/۳۹m در ۲۱/۸° چپ جلو، ۲۳- ۲/۶km ، ۲۵- ۳/۲ ، ۲۷- (الف) ۷/۵cm ؛ (ب) ۹۰° ؛ (پ) ۸/۶cm ؛ (ت) ۴۸° ، ۲۹- (الف) $۸\hat{i}+۱۶\hat{j}$ ؛ (ب) $۲\hat{i}+۴\hat{j}$ ، ۳۱- (الف) $a\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}$ ؛ (ب) $-a\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}$ ؛ (پ) $a\hat{i}-a\hat{j}+a\hat{k}$ ؛ (ت) $-a\hat{i}-a\hat{j}+a\hat{k}$ ؛ (ث) ۵۴/۷° ؛ (ج) $۳^{۰/۵}a$ ، ۳۳- (الف) -۱۸/۸ یکا؛ (ب) ۲۶/۹ یکا جهت $+z$ ۳۵- (الف) -۲۱ ؛ (ب) -۹ ؛ (پ) $۵\hat{i}-۱۱\hat{j}-۹\hat{k}$ ، ۳۷- (الف) ۱۲ ؛ (ب) $+z$ ؛ (پ) ۱۲ ؛ (ت) $-z$ ؛ (ث) ۱۲ ؛ (ج) $+z$ ، ۳۹- ۲۲° ، ۴۱- ۷۰/۵° ، ۴۳- (الف) ۳/۰۰m ؛ (ب) ۰ ؛ (پ) ۳/۴۶m ؛ (ت) ۲/۰۰m ؛ (ث) -۵/۰۰m ؛ (ج) ۸/۶۶m ؛ (چ) -۶/۶۷ ؛ (ح) ۴/۳۳ ، ۴۵- (الف) ۲۷/۸m (ب) ۱۳/۴m ۴۷- (الف) ۳۰ ؛ (ب) ۵۲ ، ۴۹- (الف) -۲/۸۳m ؛ (ب) -۲/۸۳m ؛ (پ) ۵/۰۰m ؛ (ت) ۰ ؛ (ث) ۳/۰۰m ؛ (ج) ۵/۲۰m ؛ (چ) ۵/۱۷m ؛ (ح) ۲/۳۷m ؛ (خ) ۵/۶۹m ؛ (د) ۲۵۰° شمال شرق؛ (ذ) ۵/۶۹m ؛ (ر) ۲۵° جنوب غرب، ۵۱- (الف) ۱۰۳km ؛ (ب) ۶۰/۹° شمال غرب، ۵۳- (الف) ۱۴۰° ؛ (ب) ۹۰/۰° ؛ (پ) ۹۹/۱° ، ۵۵- (الف) -۸۳/۴ ؛ (ب) $(۱/۱۴×۱۰^{۳})\hat{k}$ ؛ (پ) $۱/۱۴×۱۰^{۳}$ ، $\theta$ تعریف نشده، $\phi=۰°$ ؛ (ت) ۹۰/۰° ؛ (ث) $-۵/۱۴\hat{i}+۶/۱۳\hat{j}+۳/۰۰\hat{k}$ ؛ (ج) ۸/۵۴ ، $\theta=۱۳۰°$ ، $\phi=۶۹/۴°$ ، ۵۷- (الف) $۳/۰m^{۲}$ ؛ (ب) $۵۲m^{۳}$ ؛ (پ) $(۱۱m^{۲})\hat{i}+(۹/۰m^{۲})\hat{j}+(۳/۰m^{۲})\hat{k}$ ، ۵۹- (الف) $+y$ ؛ (ب) $-y$ ؛ (پ) ۰ ؛ (ت) ۰ ؛ (ث) $+z$ ؛ (ج) $-z$ ؛ (چ) $ab$ ؛ (ح) $ab$ ؛ (خ) $ab/d$ ؛ (د) $+z$ ، ۶۱- (الف) ۰ ؛ (ب) ۰ ؛ (پ) -۱ ؛ (ت) غرب؛ (ث) بالا؛ (ج) غرب، ۶۳- وال پل (جایی که زندان ایالتی قرار دارد.) ۶۵- (الف) $(۹/۱۹m)\hat{i}+(۷/۷۱m)\hat{j}$ ؛ (ب) $(۱۴/۰m)\hat{i}+(۳/۴۱m)\hat{j}$ ، ۶۷- (الف) $۱۱\hat{i}+۵/۰\hat{j}-۷/۰\hat{k}$ ؛ (ب) ۱۲۰° ؛ (پ) -۴/۹ ؛ (ت) ۷/۳ ، ۶۹- (الف) $(-۴۰\hat{i}-۲۰\hat{j}+۲۵\hat{k})m$ ؛ (ب) ۴۵m ، ۷۱- ۴/۱

## فصل ۴

### نکته‌های وارسی

۱- $\vec{v}$ را مماس به مسیر بکشید، ابتدای آن روی مسیر باشد (الف) اول؛ (ب) سوم، ۲- مشتق دوم را نسبت به زمان بگیرید (۱) و (۳) $a_x$ و $a_y$ هردو ثابت‌اند پس $\vec{a}$ ثابت است؛ (۲) و (۴) $a_y$ ثابت ولی $a_x$ ثابت نیست، پس $\vec{a}$ ثابت نیست ۳- خیر، ۴- (الف) $v_x$ ثابت است؛ (ب) $v_y$ در آغاز مثبت، به صفر کاهش می‌یابد و سپس به تدریج منفی‌تر می‌شود؛ (پ) $a_x=۰$ در سراسر، (ت) $a_y=-g$ در سراسر ، ۵- (الف) $-(۴m/s)\hat{i}$ (ب) $-(۸m/s^{۲})\hat{j}$

### پرسشها

۱- (الف) $(۷m)\hat{i}+(۱m)\hat{j}+(-۲m)\hat{k}$ ؛ (ب) $(۵m)\hat{i}+(-۳m)\hat{j}+(۱m)\hat{k}$ ؛ (پ) $(-۲m)\hat{i}$ ، ۳- همگی یکسان؛ (ب) ۱ و ۲ برابر (موشک به طرف بالا پرتاب می‌شود)، سپس ۳ و ۴ یکسان (به طرف زمین پرتاب می‌شود!)، ۵- کاهش می‌یابد، ۷- (الف) همگی یکسان؛ (ب) همگی یکسان؛ (پ) ۳ ، ۲ ، ۱ ؛ (ت) ۳ ، ۲ ، ۱ ، ۹- (الف) ۰ ؛ (ب) ۳۵۰km/h ؛ (پ) ۳۵۰km/h ؛ (ت) یکسان (چیزی نسبت به حرکت قائم تغییر نکرده است)، ۱۱- (الف) ۹۰° و ۲۷۰° ؛ (ب) ۰ و ۱۸۰° ؛ (پ) ۹۰° و ۲۷۰°، ۱۳- ۲ ، سپس ۱ و ۴ یکسان و سپس ۳

### مسئله‌ها

۱- (الف) ۶/۲m ، ۳- $(-۲/۰m)\hat{i}+(۶/۰m)\hat{j}-(۱۰m)\hat{k}$ ، ۵- $(-۰/۷۰m/s)\hat{i}+(۱/۴m)\hat{j}-(۰/۴m)\hat{k}$ ، ۷- (الف) ۷/۵۹km/h ؛ (ب) ۲۲/۵° شرق شمال، ۹- (الف) ۰/۸۳cm/s ؛ (ب) ۰ ؛ (پ) ۰/۱۱m/s ؛ (ت) -۶۳° ، ۱۱- (الف) $(۸m/s^{۲})t\hat{j}+(۱m/s)\hat{k}$ ؛ (ب) $(۸m/s^{۲})\hat{j}$ ، ۱۳- (الف) $(۶/۰۰m)\hat{i}-(۱۰۶m)\hat{j}$ ؛ (ب) $(۱۹/۰m/s)\hat{i}-(۲۲۴m/s)\hat{j}$ ؛ (پ) $(۲۴/۰m/s^{۲})\hat{i}-(۳۳۶m/s^{۲})\hat{j}$ ؛ (ت) -۸۵/۲° ، ۱۵- $(۳۲m/s)\hat{i}$ ، ۱۷- (الف) $(-۱/۵۰m/s)\hat{j}$ ؛ (ب)

$(۴/۵۰m)\hat{i}-(۲/۲۵m)\hat{j}$ ، **۱۹**- (الف) $(۹۰/۷m)\hat{i}+(۷۲/۰m)\hat{j}$ ؛ (ب) ۴۹/۵° ، **۲۱**- (الف) ۳/۰۳s ؛ (ب) ۷۵۸m ؛ (پ) ۲۹/۷m/s ، **۲۳**- ۴۳/۱m/s (۱۵۵km/h) ، **۲۵**- (الف) ۱۸cm ؛ (ب) ۱/۹m ، **۲۷**- (الف) ۱۰/۰s ؛ (ب) ۸۹۷m ، **۲۹**- (الف) ۱/۶۰m ؛ (ب) ۶/۸۶m ؛ (پ) ۲/۸۶m ، **۳۱**- (الف) ۲۰۲m/s ؛ (ب) ۸۰۶m ؛ (پ) ۱۶۱m/s ؛ (ت) −۱۷۱m/s ، **۳۳**- ۳/۳۵m ، **۳۵**- ۷۸/۵° ، **۳۷**- (الف) ۱۱m ؛ (ب) ۲۳m ؛ (پ) ۱۷m/s؛ (ت) ۶۳° ، **۳۹**- ۴/۸۴cm ، **۴۱**- (الف) ۳۲/۳m ؛ (ب) ۲۱/۹m/s ؛ (پ) ۴۰/۴° ، (ت) زیر، **۴۳**- (الف) شیب ؛ (ب) ۵/۸۲m ؛ (پ) ۳۱/۰° ، **۴۵**- ۶۴/۸° ، **۴۷**- (الف) بلی؛ (ب) ۲/۵۶m ، **۴۹**- (الف) ۲/۳° ؛ (ب) ۱/۴m ؛ (پ) ۱۸° ، **۵۱**- (الف) ۳۱° ؛ (ب) ۶۳° ، **۵۳**- سوم، **۵۵**- (الف) ۷۵/۰m ؛ (ب) ۳۱/۹m/s ؛ (پ) ۶۶/۹° ؛ (ت) ۲۵/۵m ، **۵۷**- (الف) ۱۲s ؛ (ب) $۴/۱m/s^{۲}$ ؛ (پ) پایین؛ (ت) $۴/۱m/s^{۲}$ ؛ (ث) بالا، **۵۹**- (الف) $۱/۳\times۱۰^{۵}$ m/s ؛ (ب) $۷/۹\times۱۰^{۵}$ $m/s^{۲}$ ؛ (پ) افزایش، **۶۱**- (الف) ۷/۳۲m ؛ (ب) غرب؛ (پ) شمال. **۶۳**- $(۳/۰۰m/s^{۲})\hat{i}+(۶/۰۰m/s^{۲})\hat{j}$ ، **۶۵**- ۲/۹۲m ، **۶۷**- $۱۶۰m/s^{۲}$ ، **۶۹**- (الف) $۱۳m/s^{۲}$ ؛ (ب) به طرف شرق؛ (پ) $۱۳m/s^{۲}$ ؛ (ت) به طرف شرق، **۷۱**- ۱/۶۷ ، **۷۳**- (الف) ۳۸ گره؛ (ب) ۱/۵° شرق شمال؛ (پ) ۴/۲h ؛ (ت) ۱/۵° غرب شمال، **۷۵**- ۶۰° ، **۷۷**- ۳۲m/s ، **۷۹**- (الف) $(۸۰km/h)\hat{i}-(۶۰km/h)\hat{j}$ ؛ (ب) ۰ ؛ (پ) پاسخها تغییر نمی‌کنند. **۸۱**- (الف) $(-۳۲km/h)\hat{i}-(۴۶km/h)\hat{i}$ ؛ (ب) $[(۲/۵km)-(۳۲km/h)t]\hat{i}+[(۴/۰km)-(۴۶km/h)t]\hat{j}$ ؛ (پ) ۰/۰۸۴h ؛ (ت) $۲\times۱۰^{۲}$ m ، **۸۳**- (الف) ۲/۷km ؛ (ب) ۷۶° ساعتگرد، **۸۵**- ۲/۶۴m ، **۸۷**- (الف) ۲/۵m ؛ (ب) ۰/۸۲m ؛ (پ) $۹/۸m/s^{۲}$ ؛ (ت) $۹/۸m/s^{۲}$ ، **۸۹**- (الف) −۳۰° ؛ (ب) ۶۹min ، (پ) ۸۰min ؛ (ت) ۸۰min ؛ (ث) ۰ ، (ج) ۶۰min ، **۹۱**- (الف) ۶۲ms ؛ (ب) $۴/۸\times۱۰^{۲}$ m/s ، **۹۳**- (الف) $۶/۷\times۱۰^{۶}$ m/s ؛ (ب) $۱/۴\times۱۰^{-۷}$ s ، **۹۵**- (الف) ۴/۲m ، ۴۵° ؛ (ب) ۵/۵m ، ۶۸° ؛ (پ) ۶/۰m ، ۹۰° ، (ت) ۴/۲m ، ۱۳۵° ؛ (ث) ۰/۸۵m/s ، ۱۳۵° ؛ (ج) ۰/۹۴m/s ، ۹۰° ؛ (چ) ۰/۹۴m/s ، ۱۸۰° ؛ (ح) $۰/۳۰m/s^{۲}$ ، ۱۸۰° ؛ (خ) $۰/۳۰m/s^{۲}$ ، ۲۷۰° ، **۹۷**- (الف) ۶/۷۹km/h ؛ (ب) ۶/۹۶° ، **۹۹**- (الف) ۱۶ m/s ؛ (ب) ۲۳° ؛ (پ) بالا؛ (ت) ۲۷m/s ؛ (ث) ۵۷° ؛ (ج) زیر، **۱۰۱**- (الف) ۲۴m/s ؛ (ب) ۶۵° ، **۱۰۳**- (الف) ۱/۵ ؛ (ب) (۵۴m و ۳۶m) ، **۱۰۵**- (الف) $۰/۰۳۴m/s^{۲}$ ؛ (ب) ۸۴min ، **۱۰۷**- (الف) ۴۴m ؛ (ب) ۱۳m ؛ (پ) ۸/۹m ، **۱۰۹**- (الف) $۲/۶\times۱۰^{۲}$ $m/s^{۲}$ ؛ (ب) ۴۵s ؛ (ب) افزایش، **۱۱۱**- (الف) ۴۵m ؛ (ب) ۲۲m/s ، **۱۱۳**- (الف) ۲/۰۰ns ، (ب) ۲/۰۰mm ؛ (پ) $۱/۰۰\times۱۰^{۷}$ m/s ؛ (ت) $۲/۰۰\times۱۰^{۶}$ m/s ، **۱۱۵**- (الف) $۴/۶\times۱۰^{۱۲}$ m ؛ (ب) $۲/۴\times۱۰^{۵}$ s ، **۱۱۷**- ۹۳° از جهت حرکت ماشین **۱۱۹**- (الف) ۸/۴۳m ؛ (ب) −۱۲۹° ، **۱۲۱**- (الف) ۶۳km ؛ (ب) ۱۸° جنوب شرق؛ (پ) ۰/۷۰km/h ؛ (ت) ۱۸° جنوب شرق؛ (ث) ۱/۶km/h ؛ (ج) ۱/۲km/h ؛ (چ) ۳/۳° شمال شرق، **۱۲۳**- $۳\times۱۰^{۱}$ m **۱۲۵**- (الف) ۱۴m/s ؛ (ب) ۱۴m/s ؛ (پ) −۱۰m ؛ (ت) −۴/۹m ؛ (ث) +۱۰m ؛ (ج) −۴/۹m ، **۱۲۷**- ۶۷km/h ، **۱۲۹**- (الف) از ۷۵° شرق جنوب؛ (ب) ۳۰° شرق شمال. برای مجموعه دوم پاسخها، به جای شرق، غرب قرار دهید. **۱۳۱**- (الف) ۱۱m ؛ (ب) ۴۵ m/s

## فصل ۵

### نکته‌های وارسی

**۱**- c ، d و e ($\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ باید از انتها به ابتدا باشند، $\vec{F}_{net}$ باید از ابتدای یکی از آنها به انتهای دیگری باشد) **۲**- (الف) و (ب) 2N ، به طرف چپ (در هر وضعیت شتاب صفر است)، **۳**- (الف) برابر ؛(ب) بیشتر (شتاب به طرف بالا است، بنابراین نیروی خالص وارد بر جسم باید به طرف بالا باشد) **۴**- (الف) برابر، (ب) بیشتر؛ (پ) کمتر ، **۵**- (الف) افزایش؛ (ب) بلی؛ (پ) یکسان؛ (ت) بلی

### پرسشها

**۱**- افزایش، **۳**- (الف) ۲ و ۴ ؛ (ب) ۲ و ۴ ، **۵**- (الف) ۲ ، ۳ ، ۴ ؛ (ب) ۱ ، ۳ ، ۴ ؛ (پ) ۱ ، $+y$ ؛ ۲ ، $+x$ ؛ ۳ ، ربع چهارم؛ ۴ ، ربع سوم، **۷**- (الف) ۲۰kg ؛ (ب) ۱۸kg ؛ (پ) ۱۰kg ؛ (ت) همگی یکسان؛ (ث) ۳ ، ۲ ، ۱ ، **۹**- (الف) از مقدار اولیه mg افزایش می‌یابد؛ (ب) کاهش از mg به صفر (پس از آن قطعه از کف به بالا حرکت می‌کند)، **۱۱**- (الف) $M$ ؛ (ب) $M$ ؛ (پ) $M$ ؛ (ت) $۲M$ ؛ (ث) $۳M$

### مسئله‌ها

**۱**- (الف) ۱/۸۸N ؛ (ب) ۰/۶۸۴N ؛ (پ) $(۱/۸۸N)\hat{i}+(۰/۶۸۴N)\hat{j}$ ، **۳**- $۲/۹m/s^{۲}$ **۵**- (الف) $(-۳۲/۰N)\hat{i}-(۲۰/۸N)\hat{j}$ ؛ (ب) ۳۸/۲N ؛ (پ) −۱۴۷° ، **۷**- (الف) $(۰/۸۶m/s^{۲})\hat{i}-(۰/۱۶m/s^{۲})\hat{j}$ ؛ (ب) $۰/۸۸m/s^{۲}$ ؛ (پ) −۱۱° ، **۹**- $۹/۰m/s^{۲}$ ، **۱۱**- (الف) ۸/۳۷N ؛ (ب) −۱۳۳° ؛ (پ) −۱۲۵° ، **۱۳**- (الف) ۱۰۸N ؛ (ب) ۱۰۸N ؛ (پ) ۱۰۸N ، **۱۵**- (الف) ۴/۰kg ؛ (ب) ۱/۰kg ؛ (پ) ۴/۰kg ؛ (ت) ۱/۰kg ، **۱۷**- (الف) $-۹/۸۰\hat{j}m/s^{۲}$ ؛ (ب) $۲/۳۵\hat{j}m/s^{۲}$ ؛ (پ) ۱/۳۷s ؛ (ت) $(-۵/۵۶\times۱۰^{-۳}N)\hat{j}$ ؛ (ث) $(۱/۳۳۳\times۱۰^{-۳}N)\hat{j}$ ، **۱۹**- (الف) ۴۲N ؛ (ب) ۷۲N ؛ $۴/۹m/s^{۲}$ ، **۲۱**- (الف) ۱۱/۷N ؛ (ب) −۵۹/۰° ، **۲۳**- (الف) $۰/۰۲۲m/s^{۲}$ ؛ (ب) $۸/۳\times۱۰^{۴}$ km ؛ (پ) $۱/۹\times۱۰^{۳}$ m/s ، **۲۵**- $۱/۲\times۱۰^{۵}$ N ، **۲۷**- (الف) ۴۹۴N ؛ (ب) بالا؛ (پ) ۴۹۴N ؛ (ت) پایین، **۲۹**- ۱/۵mm ، **۳۱**- (الف) ۴۶/۷° ؛ (ب) ۲۸/۰° ، **۳۳**- (الف) $۰/۶۲m/s^{۲}$ ؛ (ب) $۰/۱۳m/s^{۲}$ ؛ (پ) ۲/۶m ، **۳۵**- (الف) ۱/۸m ؛ (ب) ۰/۶۷۴s ؛ (پ)

۳/۵۰m/s ، **۳۷**- (الف) $۲/۲\times۱۰^{-۳}$ N ؛ (ب) $۳/۷\times۱۰^{-۳}$ N **۳۹**- $۱/۸\times۱۰^{۴}$ N ، **۴۱**- (الف) ۳۱/۳kN ؛ ۲۴/۳kN ، **۴۳**- (الف) ۱/۴m/s$^{۲}$ ؛ (ب) ۴/۱m/s ، **۴۵**- (الف) ۱/۲۳N ؛ (ب) ۲/۴۶N ؛ (پ) ۳/۶۹N ؛ (ت) ۴/۹۲N ؛ (ث) ۶/۱۵N ؛ (ج) ۰/۲۵۰N ، **۴۷**- (الف) ۲/۱۸m/s$^{۲}$ ؛ (ب) ۱۱۶N ؛ (پ) ۲۱/۰m/s$^{۲}$ ، **۴۹**- $۶/۴\times۱۰^{۳}$ N ، **۵۱**- (الف) ۰/۹۷۰m/s$^{۲}$ ؛ (ب) ۱۱/۶N ؛ (پ) ۳۴/۹N ، **۵۳**- (الف) ۱/۱N ؛ **۵۵**- (الف) ۳/۶m/s$^{۲}$ ؛ (ب) ۱۷N ، **۵۷**- (الف) ۴/۹m/s$^{۲}$ ؛ (ب) ۲/۰m/s$^{۲}$ ؛ (پ) بالا؛ (ت) ۱۲۰N ؛ **۵۹**- (الف) ۰/۷۳۵m/s$^{۲}$ ؛ (ب) پایین؛ (پ) ۲۰/۸N ، **۶۱**- $۲Ma/(a+g)$ ، **۶۳**- (الف) ۰/۶۵۳m/s$^{۳}$ ؛ (ب) ۰/۸۹۶m/s$^{۳}$ ؛ (پ) ۶/۵۰s ، **۶۵**- ۸۱/۷N ، **۶۷**- (الف) ۸/۰m/s ؛ (ب) $+x$ ، **۶۹**- (الف) ۱۳۵۹۷kg ؛ (ب) ۴۹۱۷L ؛ (پ) ۶۱۷۲ kg ؛ (ت) ۲۰۰۷۵L ؛ (ث) ٪۴۵ ، **۷۱**- (الف) ۰ ؛ (ب) ۰/۸۳m/s$^{۲}$ ؛ (پ) ۰ ، **۷۳**- (الف) ۰/۷۴m/s$^{۲}$ ؛ (ب) ۷/۳m/s$^{۲}$ ، **۷۵**- (الف) طناب پاره می‌شود؛ (ب) ۱/۶m/s$^{۲}$ ، **۷۷**- ۲/۴N ، **۷۹**- (الف) ۴/۶m/s$^{۲}$ ؛ (ب) ۲/۶m/s$^{۲}$، **۸۱**- (الف) ۶۵N ؛ (ب) ۴۹N ، **۸۳**- (الف) ۱۱N ؛ (ب) ۲/۲kg ؛ (پ) ۰ ؛ (ت) ۲/۲kg ، **۸۵**- (الف) $۴/۶\times۱۰^{۳}$ N ؛ (ب) $۵/۸\times۱۰^{۳}$ N ، **۸۷**- (الف) ۴kg ؛ (ب) ۶/۵m/s$^{۲}$ ؛ (پ) ۱۳N **۸۹**- ۱۹۵N ، **۹۱**- (الف) ۴۴N ؛ (ب) ۷۸N ؛ (پ) ۵۴N ؛ (ت) ۱۵۲N ، **۹۳**- ۱۶N ، **۹۵**- (الف) $۱/۸\times۱۰^{۲}$ N ؛ (ب) $۶/۴\times۱۰^{۲}$ N ، **۹۷**- (الف) $(۵/۰\text{m/s})\hat{i}+(۴/۳\text{m/s})\hat{j}$ ؛ (ب) $(۱۵\text{m})\hat{i}+(۶/۴\text{m})\hat{j}$ ، **۹۹**- ۱۶N ، **۱۰۱**- (الف) ۲/۶N ؛ (ب) ۱۷° ، **۱۰۳**- (الف) ۴/۱m/s$^{۲}$ ؛ (ب) ۸۳۶N

## فصل ۶

### نکته‌های وارسی

**۱**- (الف) صفر (چون تلاشی برای لغزیدن وجود ندارد)؛ (ب) ۵N (پ) خیر؛ (ت) بلی؛ (ث) ۸N ، **۲**- ($\vec{a}$ به طرف مرکز مسیر دایره‌ای است) (الف) $\vec{a}$ به طرف پایین، $F_N$ به طرف بالا؛ (ب) $\vec{a}$ و $\vec{F}_N$ به طرف بالا

### پرسشها

**۱**- (الف) یکسان؛ (ب) افزایش؛ (پ) افزایش؛ (ت) خیر، **۳**- (الف) کاهش؛ (ب) کاهش؛ (پ) افزایش، ؛ (ت) افزایش؛ (ث) افزایش، **۵**- (الف) به طرف بالا؛ (ب) افقی، به طرف شما، (پ) بدون تغییر ؛ (ت) افزایش؛ (ث) افزایش، **۷**- ابتدا، $\vec{f}_s$ در جهت بالای شیب و بزرگی آن از $mg\sin\theta$ افزایش می‌یابد تا به $f_{s,\max}$ برسد. پس از آن نیرو اصطکاک جنبشی به طرف بالای شیب، با بزرگی $f_k$(مقدار ثابتی کوچکتر از $f_{s,\max}$)، **۹**- (الف) همگی مساوی؛ (ب) همگی یکسان؛ (پ) ۲ ، ۳ ، ۱ ، **۱۱**- ۴ ، ۳ سپس ۱ ، ۲ و ۵ یکسان.

### مسئله‌ها

**۱**- (الف) $۲/۰\times۱۰^{۲}$ N ؛ (ب) $۱/۲\times۱۰^{۲}$ N ، **۳**- (الف) $۱/۹\times۱۰^{۲}$ N ؛ (ب) ۰/۵۶m/s$^{۲}$ ، **۵**- ۳۶m ، **۷**- (الف) ۱۱N ، (ب) ۰/۱۴m/s$^{۲}$ ، **۹**- (الف) ۶/۰N ؛ (ب) ۳/۶N ؛ (پ) ۳/۱N ، **۱۱**- (الف) $۱/۳\times۱۰^{۲}$ N ؛ (ب) خیر؛ (پ) $۱/۱\times۱۰^{۲}$ N ؛ (ت) ۴۶N ؛ (ث) ۱۷N ، **۱۳**- (الف) $۳/۰\times۱۰^{۲}$ N ؛ ۱/۳m/s$^{۲}$ **۱۵**- ۲° ، **۱۷**- (الف) خیر؛ (ب) $(-۱۲\text{N})\hat{i}+(۵/۰\text{N})\hat{j}$ ، **۱۹**- (الف) ۱۹° ؛ (ب) ۳/۳kN ، **۲۱**- (الف) $(۱۷\text{N})\hat{i}$ ؛ (ب) $(۲۰\text{N})\hat{i}$ ؛ (پ) $(۱۵\text{N})\hat{i}$ ، **۲۳**- $۱/۰\times۱۰^{۲}$ N، **۲۵**- ۰/۳۷ **۲۷**- (الف) ۳/۵m/s$^{۲}$ ؛ (ب) ۰/۲۱N ، **۲۹**- (الف) ۰ ؛ (ب) $(-۳/۹\text{m/s}^{۲})\hat{i}$ ، (پ) $(-۱/۰\text{m/s}^{۲})\hat{i}$، **۳۱**- (الف) ۶۶N ؛ (ب) ۲/۳m/s$^{۲}$ ، **۳۳**- $۴/۹\times۱۰^{۲}$ N ، **۳۵**- ۹/۹s ، **۳۷**- ۲/۳ ، **۳۹**- (الف) $۳/۲\times۱۰^{۲}$ km/h ؛ (ب) $۶/۵\times۱۰^{۲}$ km/h ؛ (پ) خیر، **۴۱**- ۲۱m ، **۴۳**- ۰/۶۰ ، **۴۵**- (الف) ۱۰s ؛ (ب) $۴/۹\times۱۰^{۲}$ N ؛ (پ) $۱/۱\times۱۰^{۳}$ N ، **۴۷**- $۱/۳۷\times۱۰^{۳}$ N ، **۴۹**- (الف) سبک ؛ ۷۷۵N ؛ (پ) ۲۲۳N ؛ (ت) ۱/۱۱kN، **۵۱**- ۱۲°، **۵۳**- ۲/۲km ، **۵۵**- ۱/۸۱m/s ، **۵۷**- $۲/۶\times۱۰^{۳}$ N ؛ **۵۹**- (الف) ۸/۷۴N ؛ (ب) ۳۷/۹N ؛ (پ) ۶/۴۵m/s ؛ (ت) به طور شعاعی به داخل؛ **۶۱**- (الف) ۶۹km/h ؛ (ب) ۱۳۹km/h ؛ (پ) بلی؛ **۶۳**- (الف) ۷/۵m/s$^{۲}$ ؛ (ب) پایین؛ (پ) ۹/۵m/s$^{۲}$ ؛ (ت) پایین، **۶۵**- (الف) ۲۷N ؛ (ب) ۳/۰m/s$^{۲}$ ، **۶۷**- (الف) ۳۵/۳N ؛ (ب) ۳۹/۷N ؛ (پ) ۳۲۰N ، **۶۹**- $g(\sin\theta-۲^{۰/۵}\mu_k\cos\theta)$ ، **۷۱**- (الف) $۳/۰\times۱۰^{۵}$ N ؛ (ب) ۱/۲° ، **۷۳**- ۱۴۷m/s ، **۷۵**- (الف) ۵۶N ؛ (ب) ۵۹N ؛ (پ) $۱/۱\times۱۰^{۳}$ N ، **۷۷**- (الف) ۲۷۵N ؛ (ب) ۸۷۷N ، **۷۹**- (ب) ۲۴۰N ؛ (پ) ۰/۶۰ ، **۸۱**- (الف) ۱۳N ؛ (ب) ۱/۶m/s$^{۲}$ ، **۸۳**- ۰/۷۶ ، **۸۵**- (الف) $۳/۲۱\times۱۰^{۳}$ N ؛ (ب) بلی، **۸۷**- ۳/۴m/s$^{۲}$ ، **۸۹**- (الف) ۸۴/۲N ؛ ۵۲/۸N ؛ (پ) ۱/۸۷m/s$^{۲}$ ، **۹۱**- (الف) ۲۲۲N ؛ (ب) ۳۳۴N ؛ (پ) ۳۱۱N ؛ (ت) ۳۱۱N ؛ (ث) c ، d **۹۳**- (الف) ۶/۸۰s ؛ (ب) ۶/۷۶s ، **۹۵**- ٪۳/۴ ، **۹۷**- (الف) $\mu_k mg/(\sin\theta-\mu_k\cos\theta)$ ؛ (ب) $\theta_۰=\tan^{-۱}\mu_s$ ، **۹۹**- (الف) $v_۰^{۲}/(۴g\sin\theta)$ ؛(ب) خیر؛ **۱۰۱**- (الف) ۳۰cm/s ؛ (ب) ۱۸۰cm/s$^{۲}$ ؛ (پ) به داخل؛ (ت) $۳/۶\times۱۰^{-۳}$ N ؛ (ث) به داخل ؛ (ج) ۰/۳۷ ، **۱۰۳**- (الف) ۰/۳۴ ، (ب) ۰/۲۴ ، **۱۰۵**- ۰/۱۸ ، **۱۰۷**- ۰/۵۶ ، **۱۰۹**- (الف) ۲/۱m/s$^{۲}$ ؛ (ب) پایین صفحه؛ (پ) ۳/۹m ؛ (ت) ساکن

## فصل ۷

### نکته‌های وارسی

**۱**- (الف) کاهش؛ (پ) یکسان؛ (پ) منفی، صفر، **۲**- (الف) مثبت؛ (ب) منفی؛ (پ) صفر **۳**- صفر.

## پرسشها

۱- (الف) مثبت؛ (ب) منفی؛ (پ) منفی، ۳- همگی یکسان، ۵- همگی یکسان، ۷- $b$ (کار مثبت)؛ $a$ (کار صفر)، $c$ (کار منفی)، $b$ (کار منفی‌تر)، ۹- (الف) $A$؛ (ب) $B$

## مسئله‌ها

۱- (الف) $۵\times۱۰^{۱۴}$ J؛ (ب) ۰/۱ مگاتن TNT؛ (ب) ۸ بمب، ۳- (الف) $۲/۹\times۱۰^{۷}$ m/s؛ (ب) $۲/۱\times۱۰^{-۱۳}$ J، ۵- (الف) ۲/۴m/s؛ (ب) ۴/۸m/s، ۷- ۲۰J، ۹- ۰/۹۶J، ۱۱- (الف) $۱/۷\times۱۰^{۲}$ N؛ (ب) $۳/۴\times۱۰^{۲}$ m؛ (پ) $-۵/۸\times۱۰^{۴}$ J؛ (ت) $۳/۴\times۱۰^{۲}$ N؛ (ث) $۱/۷\times۱۰^{۲}$ m؛ (ج) $-۵/۸\times۱۰^{۴}$ J، ۱۳- (الف) ۱/۵۰J؛ (ب) افزایش، ۱۵- (الف) °۶۲/۳؛ (ب) °۱۱۸ ۱۷- (الف) ۱۲kJ؛ (ب) -۱۱kJ؛ (پ) ۱/۱kJ؛ (ت) ۵/۴m/s، ۱۹- (الف) $-۳Mgd/۴$؛ (ب) Mgd؛ (پ) $Mgd/۴$ (ت) $(gd/۲)^{۰/۵}$، ۲۱- ۴/۴۱J، ۲۳- ۲۵J، ۲۵- (الف) ۲۵/۹kJ؛ (ب) ۲/۴۵N، ۲۷- (الف) ۷/۲J؛ (ب) ۷/۲J؛ (پ) ۰؛ (ت) -۲۵J، ۲۹- (الف) ۶/۶m/s (ب) ۴/۷m، ۳۱- (الف) ۰/۰۹۱J؛ (ب) ۲/۱J؛ (پ) ۰، ۳۳- (الف) ۰/۱۲m؛ (ب) ۰/۳۶J؛ (پ) -۰/۳۶J؛ (ت) ۰/۰۶۰m؛ (ث) ۰/۰۹۰J، ۳۵- (الف) ۰؛ (ب) ۰، ۳۷- $۵/۳\times۱۰^{۲}$ J، ۳۹- (الف) ۴۲J؛ (ب) ۳۰J؛ (پ) ۱۲J؛ (ت) ۶/۵m/s، محور $+x$ (ث) ۵/۵m/s، محور $+x$؛ (ج) ۳/۵m/s، محور $+x$، ۴۱- ۴/۰۰N/m ۴۳- $۴/۹\times۱۰^{۲}$ W، ۴۵- (الف) ۰/۸۳J؛ (ب) ۲/۵J؛ (پ) ۴/۲J؛ (ت) ۵/۰W، ۴۷- $۷/۴\times۱۰^{۲}$ W، ۴۹- (الف) $۱/۰\times۱۰^{۲}$ J؛ (ب) ۸/۴W، ۵۱- (الف) ۳۲/۰J؛ (ب) ۸/۰۰W؛ (پ) °۷۸/۳، ۵۳- (الف) $۱\times۱۰^{۵}$ مگاتن TNT؛ (ب) $۱\times۱۰^{۷}$ بمب، ۵۵- -۶J، ۵۷- (الف) ۹۷N؛ (ب) ۴/۰cm؛ (پ) ۳/۹J؛ (ت) -۳/۹J، ۵۹- -۳۷J، ۶۱- ۱۶۵kW، ۶۳- (الف) $۱/۸\times۱۰^{۵}$ ft.lb (ب) ۰/۵۵hp، ۶۵- (الف) ۷۹۷N؛ (ب) ۰؛ (پ) -۱/۵۵kJ؛ (ت) ۰؛ (ث) ۱/۵۵kJ؛ (ج) F ضمن جابه‌جایی تغییر می‌کند. ۶۷- (الف) ۱/۲۰J؛ (ب) ۱/۱۰m/s، ۶۹- (الف) ۳۱۴J؛ (ب) -۱۵۵J؛ (پ) ۰؛ (ت) ۱۵۸J، ۷۱- (الف) ۲/۳mm؛ (ب) ۴۵N، ۷۳- ۲۳۵kW، ۷۵- (الف) ۱۳J؛ (ب) ۱۳J، ۷۷- (الف) ۰/۶J؛ (ب) ۰، (پ) -۰/۶J؛ ۷۹- (الف) ۶J؛ (ب) ۶/۰J

# فصل ۸

## نکته‌های وارسی

۱- خیر (مسیر را روی حلقه کوچک درنظر بگیرید) ۲- ۳، ۱، ۲ (به معادلهٔ ۸-۶ نگاه کنید)، ۳- (الف) همگی یکسان؛ (ب) همگی یکسان، ۴- CD، AB، BC (۰) (بزرگی شیبها را بررسی کنید)؛ (ب) جهت مثبت $x$، ۵- همگی یکسان

## پرسشها

۱- (الف) ۱۲J؛ (ب) -۲J، ۳- (الف) ۳، ۲، ۱؛ (ب) ۱، ۲، ۳ ۵- ۲، ۱، ۳ ۷- +۳۰J، ۹- (الف) افزایش؛ (ب) کاهش؛ (پ) کاهش، (ت) در A و B ثابت، در CD کاهش.

## مسئله

۱- (الف) ۱۶۷J؛ (ب) -۱۶۷J؛ (پ) ۱۹۶J؛ (ت) ۲۹J؛ (ث) ۱۶۷J؛ (ج) -۱۶۷J؛ (چ) ۲۹۶J؛ (ح) ۱۲۹J، ۳- (الف) ۴/۳۱mJ؛ (ب) -۴/۳۱mJ؛ (پ) ۴/۳۱mJ؛ (ت) -۴/۳۱mJ؛ (ث) همه افزایش. ۵- ۸۹N/cm، ۷- (الف) ۱۳/۱J؛ (ب) -۱۳/۱J؛ (پ) ۱۳/۱J؛ (ت) همه افزایش، ۹- (الف) $۲/۶\times۱۰^{۲}$ m؛ (ب) یکسان؛ (پ) کاهش ۱۱- (الف) ۲/۰۸m/s (ب) ۲/۰۸m/s؛ (پ) افزایش، ۱۳- (الف) ۱۷/۰m/s؛ (ب) ۲۶/۵m/s؛ (پ) ۳۳/۴m/s؛ (ت) ۵۶/۷m؛ (ث) همه یکسان، ۱۵- (الف) ۰/۹۸J؛ (ب) -۰/۹۸J؛ (پ) ۳/۱N/cm، ۱۷- (الف) ۸/۳۵m/s؛ (ب) ۴/۳۳m/s؛ (پ) ۷/۴۵m/s؛ (ت) هردو افزایش، ۱۹- (الف) ۳/۵N؛ (ب) ۰/۳۱N؛ (پ) ۳۰cm، ۲۱- (الف) ۴/۸۵m/s؛ (ب) ۲/۴۲m/s، ۲۳- $-۳/۲\times۱۰^{۲}$ J، ۲۵- (الف) خیر؛ (ب) $۹/۳\times۱۰^{۲}$ N، ۲۷- (الف) ۷۸۴N/m؛ (ب) ۶۲/۷J؛ (پ) ۶۲/۷J؛ (ت) ۸۰/۰cm، ۲۹- (الف) ۳۹/۲J؛ (ب) ۳۹/۲J؛ (پ) ۴/۰۰m، ۳۱- (الف) ۳۵cm؛ (ب) ۱/۷m/s ۳۳- (الف) ۲/۴۰m/s، (ب) ۴/۱۹m/s، ۳۵- (الف) -۱۸mJ، ۳۷- (الف) ۳۹/۶cm؛ (ب) ۳/۶۴cm، ۳۹- (الف) ۲/۱m/s، (ب) ۱۰N؛ (پ) جهت $+x$؛ (ت) ۵/۷m؛ (ث) ۳۰N؛ (ج) جهت $-x$ ۴۱- (الف) -۳/۷J؛ (پ) ۱/۳m؛ (ت) ۹/۱m؛ (ث) ۲/۲J؛ (ج) ۴/۰m؛ (چ) $(۴-x)e^{-x/۴}$؛ (ح) ۴/۰m، ۴۳- (الف) ۵/۶J؛ (ب) ۳/۵J، ۴۵- (الف) ۳۰/۱J؛ (ب) ۳۰/۱J؛ (پ) ۰/۲۲۵ ۴۷- (الف) -۲/۹kJ؛ (ب) $۳/۹\times۱۰^{۲}$ J؛ (پ) $۲/۱\times۱۰^{۲}$ N، ۴۹- ۰/۵۳J ۵۱- (الف) ۱/۵MJ؛ (ب) ۰/۵۱MJ؛ (پ) ۱/۰MJ؛ (ت) ۶۳m/s، ۵۳- ۱/۲m، ۵۵- (الف) ۶۷J؛ (ب) ۶۷J؛ (پ) ۴۶cm؛ ۵۷- (الف) $۱/۵\times۱۰^{-۲}$ N (ب) $(۳/۸\times۱۰^{۲})g$، ۵۹- (الف) -۰/۹۰J؛ (ب) ۰/۴۶J؛ (پ) ۱/۰m/s، ۶۱- (الف) ۱۹/۴m؛ (ب) ۱۹/۰m/s، ۶۳- ۲۰cm، ۶۵- (الف) ۷/۴m/s؛ (ب) ۹۰cm؛ (پ) ۲/۸m؛ (ت) ۱۵m ۶۷- (الف) ۱۰m؛ (ب) ۴۹N؛ (پ) ۴/۱m؛ (ت) $۱/۲\times۱۰^{۲}$ N، ۶۹- ۴/۳۳m/s، ۷۱- (الف) ۵/۵m/s؛ (ب) ۵/۴m؛ (پ) یکسان، ۷۳- (الف) ۱۰۹J؛ (ب) ۶۰/۳J؛ (پ) ۶۸/۲J؛ (ت) ۴۱/۰J، ۷۵- ۳/۷J ۷۷- ۱۵J، ۷۹- (الف) ۲/۷J؛ (ب) ۱/۸J؛ (پ) ۰/۳۹m، ۸۱- ۸۰mJ ۸۳- (الف) ۷/۰J؛ (ب) ۲۲J، ۸۵- (الف) $۷/۴\times۱۰^{۲}$ J؛ (ب) $۲/۴\times۱۰^{۲}$ J، ۸۷- ۲۵J، ۸۹- ۲۴W، ۹۱- -۱۲J، ۹۳- (الف) ۸/۸m/s؛ (ب) ۲/۶kJ؛ (پ) ۱/۶kW، ۹۵- (الف) ۳۰۰J (ب) ۹۳/۸J؛ (پ) ۶/۳۸m ۹۷- ۷۳۸m، ۹۹- (الف) -۰/۸۰J؛ (ب) ۰/۸۰J؛ +۱/۱J، ۱۰۱- (الف) $۲/۳۵\times۱۰^{۳}$ J؛ (ب) ۳۵۲J، ۱۰۳- (الف) -۳/۸kJ؛ ۳۱kN، ۱۰۵- (الف) $۲/۱\times۱۰^{۶}$ kg؛ (ب) $(۱۰۰+۱/۵t)^{۰/۵}$m/s؛ (پ) $(۱/۵\times۱۰^{۶})/(۱۰۰+۱/۵t)^{۰/۵}$N (ت) ۶/۷km، ۱۰۷- (الف) ۵/۶J؛ (پ) ۱۲J؛ ۱۳J، ۱۰۹- (الف) ۴/۹m/s؛ (ب) ۴/۵N

؛ (پ) ۷۱°؛ (ت) یکسان، **۱۱۱**- (الف) ۱/۲J ؛ (ب) ۱۱m/s ؛ (پ) خیر؛ (ت) خیر، **۱۱۳**- ۵۴٪ **۱۱۵**- (الف) ۲/۷×۱۰$^{۹}$ J ؛ (ب) ۲/۷×۱۰$^{۹}$ W ؛ (پ) ۲/۴×۱۰$^{۸}$ دلار، **۱۱۷**- (الف) ۵/۰۰J ؛ (ب) ۹/۰۰J ؛ (پ) ۱۱/۰J ؛ (ت) ۳/۰۰J ؛ (ث) ۱۲/۰J ؛ (ج) ۲/۰۰J ؛ (چ) ۱۳/۰J ؛ (ح) ۱/۰۰J ؛ (خ) ۱۳/۰J ؛ (د) ۱/۰۰J (ذ) ۱۱/۰J ؛ (ر) ۱۰/۸m ؛ (ز) به $x=۰$ برمی‌گردد و می‌ایستد. **۱۱۹**- (الف) ۳/۷J ؛ (ب) ۴/۳J ؛ (پ) ۴/۳J ، **۱۲۱**- (الف) ۴/۸N ؛ (ب) جهت $+x$ ؛ (پ) ۱/۵m ؛ (ت) ۱۳/۵m؛ (ث) ۳/۵m/s ، **۱۲۳**- (الف) ۲۴kJ ؛ (ب) ۴/۷×۱۰$^{۲}$ N ، **۱۲۵**- (الف) ۳/۰mm ؛(ب) ۱/۱J ؛ (ت) بلی؛ (ث) ≈۴۰J ؛ (ج) خیر، **۱۲۷**- (الف) ۶/۰kJ ؛ (ب) ۶/۰×۱۰$^{۲}$ W ؛ (پ) ۳/۰×۱۰$^{۲}$ W ؛ (ت) ۹/۰×۱۰$^{۲}$ W ، **۱۲۹**- ۳/۱×۱۰$^{۱۱}$ W ، **۱۳۱**- ۸۸۰MW ، **۱۳۳**- (الف) $v_0=(2gl)^{0/5}$ ؛ (ب) ۵mg ؛ (پ) −mgL ؛ (ت) −۲mgL ، **۱۳۵**- چون نیروی وارد از طرف شما بر جسم (وقتی آن را پایین می‌آورید) کار انجام می‌دهد.

## فصل ۹

### نکته‌های وارسی

**۱**- (الف) مبدأ؛ (ب) ربع چهارم؛ (پ) روی محور $y$ زیر مبدأ؛ (ت) مبدأ؛ (ث) ربع سوم؛ (ج) مبدأ، **۲**- (الف)- (پ) در مرکز جرم، هنوز در مبدأ (نیروهای آنها نسبت به دستگاه داخلی هستند و نمی‌توانند مرکز جرم را حرکت دهند) **۳**- (شیبها و معادله ۹-۲۳ را درنظر بگیرید) (الف) ۱، ۳ و سپس ۲ و ۴ یکسان (نیروی صفر) ؛ (ب) ۳، **۴**- (الف) بدون تغییر؛ (ب) بدون تغییر (معادلهٔ ۹-۳۲ را ببینید)؛ (پ) کاهش (معادلهٔ ۹-۳۵ را ببینید)، **۵**- (الف) صفر؛ (ب) مثبت (در ابتدا $p_y$ رو به پایین $y$ ؛ در پایان $p_y$ به بالای $y$)؛ (پ) جهت مثبت $y$ ، **۶**- (بدون نیروی خارجی خالص؛ $\vec{P}$ پایسته است.) (الف) ۰ ؛ (ب) خیر؛ (پ) $-x$ **۷**- (الف) ۱۰kg.m/s ؛ (ب) ۱۴kg.m/s ؛ (پ) ۶kg.m/s ، **۸**- (الف) ۴kg.m/s ؛ (ب) ۸kg.m/s ؛ (پ) ۳J ، **۹**- ۲kg.m/s (پایستگی اندازه حرکت در راستای $x$ ) ؛ (ب) ۳kg.m/s (پایستگی اندازه حرکت در راستای $y$ )

### پرسشها

**۱**- (الف) ۲N ، به طرف راست؛ (ب) ۲N ، به طرف راست ؛ (پ) بیشتر از ۲N ، به طرف راست، **۳**- (الف) $x$ بلی، $y$ خیر؛ (ب) $x$ بلی ، $y$ خیر؛ (پ) $x$ خیر، $y$ بلی، **۵**- a ، c ، b ، **۷**- (الف) یکی ساکن بود؛ (ب) ۲ ؛ (پ) ۵ ؛ (ت) برابر (جمع نتیجهٔ بازیکن) **۹**- (الف) c ؛ (ب) B ؛ (پ) ۳ ، **۱۱**- (الف) c ، انرژی جنبشی نمی‌تواند منفی باشد؛ d ، تمام انرژی جنبشی نمی‌تواند افزایش یابد؛ (ب) a ؛ (پ) b

### مسئله‌ها

**۱**- (الف) −۱/۵۰m ؛ (ب) −۱/۴۳m ، **۳**- (الف) −۰/۴۵cm ؛ (ب) −۲/۰cm ، **۵**- (الف) ۰ ؛ (ب) ۳/۱۳×۱۰$^{-۱۱}$ m ، **۷**- (الف) −۶/۵cm ؛ (ب) ۸/۳cm ؛ (پ) ۱/۴cm ، **۹**- (الف) ۲۸cm ؛ (ب) ۲/۳m/s ، **۱۱**- $(-۴/۰m)\hat{i}+(۴/۰m)\hat{j}$ ، **۱۳**- (الف) $(۲/۳۵\hat{i}-۱/۵۷\hat{j})m/s^{۲}$ ؛ (ب) $(۲/۳۵\hat{i}-۱/۵۷\hat{j})t\,m/s$ ، $t$ برحسب ثانیه؛ (پ) مستقیم، با زاویهٔ ۳۴° به پایین، **۱۵**- ۵۳m ، **۱۷**- ۴/۲m ، **۱۹**- (الف) ۷/۵×۱۰$^{۴}$ J ؛ (ب) ۳/۸×۱۰$^{۴}$ kg.m/s ؛ (پ) ۳۹° جنوب شرق، **۲۱**- (الف) ۵/۰kg.m/s ؛ (ب) ۱۰kg.m/s ، **۲۳**- (الف) ۶۷m/s ؛ (ب) $-x$ ؛ (پ) ۱/۲kN ؛ (ت) $-x$ ؛ **۲۵**- ۱/۰×۱۰$^{۳}$ تا ۱/۲×۱۰$^{۳}$ kg.m/s ، **۲۷**- (الف) ۴۲N.s ؛ (ب) ۲/۱kN ، **۲۹**- ۵N ، **۳۱**- (الف) ۵/۸۶kg.m/s ؛ (ب) ۵۹/۸° ؛ (پ) ۲/۹۳kN ؛ (ت) ۵۹/۸° ، **۳۳**- (الف) ۲/۳۹×۱۰$^{۳}$ N.s ، (ب) ۴/۷۸×۱۰$^{۵}$ N ؛ (پ) ۱/۷۶×۱۰$^{۳}$ N.s ؛ (ت) ۳/۵۲×۱۰$^{۵}$ N **۳۵**- (الف) ۹/۰kg.m/s ؛ (ب) ۳/۰kN ؛ (پ) ۴/۵kN ؛ (ت) ۲۰m/s ، **۳۷**- ۹/۹×۱۰$^{۲}$ N ، **۳۹**- ۳/۰mm/s ، **۴۱**- ۵۵cm **۴۳**- (الف) $-(۰/۱۵m/s)\hat{i}$ ؛ (ب) ۰/۱۸m ؛ **۴۵**- (الف) ۱۴m/s ؛ (ب) ۴۵° ، **۴۷**- (الف) $(۱/۰۰\hat{i}-۰/۱۶۷\hat{j})km/s$؛ (ب) ۳/۲۳MJ ، **۴۹**- ۳/۱×۱۰$^{۲}$ m/s ، **۵۱**- (الف) ۳۳٪ ؛ (ب) ۲۳٪ ؛ (پ) کاهش **۵۳**- (الف) ۷۲۱m/s ؛ (ب) ۹۳۷m/s ، **۵۵**- ۴/۴m/s ؛ (ب) ۰/۸۰ ، **۵۷**- (الف) +۲/۰m/s ؛ (ب) −۱/۳J ؛ (پ) +۴۰J ؛ (ت) دستگاه از منبع انرژی می‌گیرد، مثل یک انفجار کوچک، **۵۹**- ۲۵cm ، **۶۱**- (الف) ۹۹g ؛ (ب) ۱/۹m/s ؛ (پ) ۰/۹۳m/s ، **۶۳**- (الف) ۱/۲kg ؛ (ب) ۲/۵m/s **۶۵**- −۲۸cm ، **۶۷**- (الف) ۳/۰۰m/s ؛ (ب) ۶/۰۰m/s ، **۶۹**- (الف) ۰/۲۱kg ؛ (ب) ۷/۲m ، **۷۱**- (الف) ۴۳۳m/s ؛ (ب) ۲۵۰m/s ، **۷۳**- (الف) ۴/۱۵×۱۰$^{۵}$ m/s ؛ (ب) ۴/۸۴×۱۰$^{۵}$ m/s ، **۷۵**- ۱۲۰° ، **۷۷**- (الف) ۱/۵۷×۱۰$^{۶}$ N ؛ (ب) ۱/۳۵×۱۰$^{۵}$ kg ؛ (پ) ۲/۰۸km/s ، **۷۹**- (الف) ۴۶N ؛ (ب) هیچ کدام، **۸۱**- (الف) ۱/۷۸m/s ؛ (ب) کمتر؛ (پ) کمتر؛ (ت) بیشتر، **۸۳**- (الف) ۱/۹۲m ؛ (ب) ۰/۶۴۰m ، **۸۵**- ۲۸/۸N ، **۸۷**- ۱/۱۰m/s ، **۸۹**- (الف) ۷۲۹۰m/s ؛ (ب) ۸۲۰۰m/s ؛ (پ) ۱/۲۷۱×۱۰$^{۱۰}$ J ؛ ۱/۲۷۵×۱۰$^{۱۰}$ J ، **۹۱**- (الف) ۱/۰kg.m/s ؛ (ب) ۲/۵×۱۰$^{۲}$ J ؛ (پ) ۱۰N ؛ (ت) ۱/۷kN ؛ (ث) پاسخ (پ) زمان بین برخوردها را شامل می‌شود، **۹۳**- (الف) $(۷/۴\times۱۰^{۳}\,N.s)\hat{i}-(۷/۴\times۱۰^{۳}\,N.s)\hat{j}$ ؛ (ب) $(-۷/۴\times۱۰^{۳}\,N.s)\hat{i}$ ؛ (پ) ۲/۳×۱۰$^{۳}$ N ؛ (ت) ۲/۱×۱۰$^{۴}$ N (ج) −۴۵° ، **۹۵**- (الف) ۳/۷m/s ؛ (ب) ۱/۳N.s ؛ (پ) ۱/۸×۱۰$^{۲}$ N ، **۹۷**- ۱/۱۸×۱۰$^{۴}$ kg ، **۹۹**- +۴/۴m/s ، **۱۰۱**- (الف) ۱/۹m/s ؛ (ب) −۳۰° ؛ (پ) کشسان، **۱۰۳**- (الف) ۶/۹m/s ؛ (ب) ۳۰° ؛ (پ) ۶/۹m/s ؛ (ت) −۳۰° ؛ (ث) ۲/۰m/s ؛ (ج) −۱۸۰° ، **۱۰۵**- (الف) ۲۵mm ؛ (ب) ۲۶mm ؛ (پ) پایین؛ (ت) ۱/۶×۱۰$^{-۲}$ m/s$^{۲}$ ، **۱۰۷**- (الف) ۰/۷۴۵mm ؛ (ب) ۱۵۳° ؛ (پ) ۱/۶۷mJ ، **۱۰۹**- (الف) $(۲/۶۷m/s)\hat{i}+(-۳/۰۰m/s)\hat{j}$ ؛ (ب) ۴/۰۱m/s ؛ (پ) ۴۸/۴° ، **۱۱۱**- ۰/۲۲٪ ، **۱۱۳**- ۱۹۰m/s ، **۱۱۵**- (الف)

$۴/۶\times۱۰^{۳}$ km ؛ (ب) ۷۳٪، **۱۱۷**– (الف) ۵۰kg/s ؛ (ب) $۱/۶\times۱۰^{۲}$ kg/s ، **۱۱۹**– (الف) ۰/۵۰m– ؛ (ب) ۱/۸cm– (پ) ۰/۵۰m ، **۱۲۱**– (الف) ۰/۸۰۰kg.m/s ؛ (ب) ۰/۴۰۰kg.m/s **۱۲۳**– ۲۹J ، **۱۲۵**– $۵/۰\times۱۰^{۶}$ N ، **۱۲۷**– (الف) ۱ ؛ (ب) $۱/۸۳\times۱۰^{۳}$ ؛ (پ) $۱/۸۳\times۱۰^{۳}$ ؛ (ت) همگی یکسان، **۱۲۹**– ۵/۰kg ، **۱۳۱**– ۲/۲kg ، **۱۳۳**– (الف) ۱۱/۴m/s ؛ (ب) ۹۵/۱° **۱۳۵**– (الف) ۰ ؛ (ب) ۰؛ (پ) ۰

## فصل ۱۰

### نکته‌های وارسی

**۱**– b و c ، **۲**– (الف) و (ت) ( $\alpha = d^{2}/dt^{2}$ باید ثابت باشد) **۳**– (الف) بلی؛ (ب) خیر؛ (پ) بلی؛ (ت) بلی، **۴**– همگی یکسان، **۵**– ۱ ، ۲ ، ۴ ، ۳ (به معادلهٔ ۱۰-۳۶ نگاه کنید)، **۶**– (به معادلهٔ ۱۰-۴۰ نگاه کنید) ۱ و ۳ یکسان، ۴ و سپس ۲ و ۵ یکسان (صفر) **۷**– (الف) به طرف پایین در شکل ($\tau_{net} = ۰$) ؛ (ب) کمتر (بازوهای گشتاور را درنظر بگیرید)

### پرسشها

**۱**– (الف) c ، a ، سپس b و d یکسان؛ (ب) b ، سپس a و c یکسان، سپس d **۳**– a، c ، b **۵**– بزرگتر، **۷**– (الف) کاهش؛ (ب) ساعتگرد ؛ (پ) پادساعتگرد **۹**– همگی یکسان

### مسئله‌ها

**۱**– ۱۴rev ، **۳**– ۱۱rad/s ، **۵**– (الف) ۴/۰rad/s ؛ (ب) ۱۱/۹rad/s **۷**– (الف) ۴/۰m/s؛ (ب) خیر، **۹**– (الف) ۳۰s؛ (ب) $۱/۸\times۱۰^{۳}$ rad، **۱۱**– (الف) ۳/۰۰s؛ (ب) ۱۸/۹rad، **۱۳**– ۸/۰s، **۱۵**– (الف) ۴۴rad؛ (ب) ۵/۵s؛ (پ) ۳۲s؛ (ت) –۲/۱s؛ (ث) ۴۰s، **۱۷**– (الف) $۳/۴\times۱۰^{۲}$ s؛ (ب) $-۴/۵\times۱۰^{-۳}$ rad/s$^{۲}$؛ (پ) ۹۸s، **۱۹**– $۶/۹\times۱۰^{-۱۳}$ rad/s، **۲۱**– (الف) ۲۰/۹ rad/s؛ (ب) ۱۲/۵ m/s؛ (پ) ۸۰۰ rev/min$^{۲}$؛ (ت) ۶۰۰rev، **۲۳**– (الف) $۲/۵۰\times۱۰^{-۳}$ rad/s؛ (ب) ۲۰/۲m/s$^{۲}$؛ (پ) ۰، **۲۵**– (الف) ۴۰s؛ (ب) ۲/۰rad/s$^{۲}$، **۲۷**– (الف) $۳/۸\times۱۰^{۳}$ rad/s؛ (ب) $۱/۹\times۱۰^{۲}$ m/s، **۲۹**– (الف) $۷/۳\times۱۰^{-۵}$ rad/s؛ (ب) $۳/۵\times۱۰^{۲}$ m/s؛ (پ) $۷/۳\times۱۰^{-۵}$ rad/s؛ (ت) $۴/۶\times۱۰^{۲}$ m/s، **۳۱**– (الف) ۷۳cm/s$^{۲}$؛ (ب) ۰/۰۷۵؛ (پ) ۰/۱۱، **۳۳**– ۱۲/۳kg·m$^{۲}$، **۳۵**– ۰/۰۹۷kg·m$^{۲}$، **۳۷**– (الف) ۱/۱ kJ؛ (ب) ۹/۷kJ، **۳۹**– (الف) ۰/۰۲۳kg·m$^{۲}$؛ (ب) ۱۱mJ، **۴۱**– $۴/۷\times۱۰^{-۴}$ kg·m$^{۲}$، **۴۳**– (الف) ۴۹MJ؛ (ب) $۱/۰\times۱۰^{۲}$ min، **۴۵**– ۴/۶N·m، **۴۷**– ۳/۸۵N·m–، **۴۹**– (الف) ۲۸/۲rad/s$^{۲}$؛ (ب) ۳۳۸N·m، **۵۱**– ۰/۰۱۴۰N، **۵۳**– $۲/۵۱\times۱۰^{-۴}$ kg·m$^{۲}$، **۵۵**– (الف) ۶/۰۰cm/s$^{۲}$؛ (ب) ۴/۸۷N؛ (پ) ۴/۵۴N؛ (ت) ۱/۲۰ rad/s$^{۲}$؛ (ث) ۰/۰۱۳۸kg·m$^{۲}$، **۵۷**– (الف) $۴/۲\times۱۰^{۲}$ rad/s$^{۲}$؛ (ب) $۵/۰\times۱۰^{۲}$ rad/s، **۵۹**– (الف) ۱۹/۸kJ؛ (ب) ۱/۳۲kW، **۶۱**– ۳۹۶N·m، **۶۳**– ۵/۴۲m/s، **۶۵**– ۹/۸۲rad/s، **۶۷**– (الف) ۵/۳۲m/s$^{۲}$؛ (ب) ۸/۴۳m/s$^{۲}$؛ (پ) ۴۱/۸°، **۶۹**– (الف) ۳۱۴rad/s$^{۲}$؛ (ب) ۷/۵۴m/s$^{۲}$؛ (پ) ۱۴/۰N؛ (ت) ۴/۳۶N، **۷۱**– $۶/۱۶\times۱۰^{-۵}$ kg·m$^{۲}$، **۷۳**– (الف) ۱/۵۷m/s$^{۲}$؛ (ب) ۴/۵۵N؛ (پ) ۴/۹۴N، **۷۵**– (الف) $۴/۸۱\times۱۰^{۵}$ N؛ (ب) $۱/۱۲\times۱۰^{۴}$ N·m؛ (پ) $۱/۲۵\times۱۰^{۶}$ J، **۷۷**– ۳۰rev، **۷۹**– ۳/۱rad/s، **۸۱**– (الف) ۰/۷۹۱kg·m$^{۲}$؛ (ب) $۱/۷۹\times۱۰^{-۲}$ N·m، **۸۳**– (الف) ۲/۳ rad/s$^{۲}$؛ (ب) ۱/۴ rad/s$^{۲}$، **۸۵**– $۱/۴\times۱۰^{۲}$ N·m، **۸۷**– ۴/۶rad/s$^{۲}$، **۸۹**– (الف) –۶۷rev/min$^{۲}$؛ (ب) ۸/۳rev، **۹۳**– ۰/۰۵۴kg·m$^{۲}$، **۹۵**– (الف) $۵/۹۲\times۱۰^{۴}$ m/s$^{۲}$؛ (ب) $۴/۳۹\times۱۰^{۴}$ s$^{-۲}$، **۹۷**– ۲/۶J، **۹۹**– (الف) ۰/۳۲rad/s؛ (ب) $۱/۰\times۱۰^{۲}$ km/h، **۱۰۱**– (الف) ۷/۰kg·m$^{۲}$؛ (ب) ۷/۲m/s؛ (پ) ۷۱°، **۱۰۳**– (الف) $۱/۴\times۱۰^{۲}$ rad؛ (ب) ۱۴s، **۱۰۵**– (الف) ۲۲۱kg·m$^{۲}$؛ (ب) $۱/۱۰\times۱۰^{۴}$ J، **۱۰۷**– ۰/۰۱۳rad/s، **۱۰۹**– $۶/۷۵\times۱۰^{۱۲}$ rad/s، **۱۱۱**– (الف) $۱/۵\times۱۰^{۲}$ cm/s؛ (ب) ۱۵rad/s؛ (پ) ۱۵rad/s؛ (ت) ۷۵cm/s؛ (ث) ۳/۰rad/s، **۱۱۳**– ۱۸rad، **۱۱۵**– (الف) ۱۰J؛ (ب) ۰/۲۷m.

## فصل ۱۱

### نکته‌های وارسی

**۱**– (الف) یکسان؛ (ب) کمتر، **۲**– کمتر (تبدیل انرژی از انرژی جنبشی چرخشی به انرژی پتانسیل گرانشی)، **۳**– (بردارها را رسم کنید، قاعدهٔ دست راست را به کار برید) (الف) $\pm z$؛ (ب) $\pm y$؛ (پ) $-x$، **۴**– (به معادلهٔ ۱۱-۲۱ نگاه کنید) (الف) ۱ و ۳ یکسان؛ سپس ۲ و ۴ یکسان، سپس ۵ (صفر)، (ب) ۲ و ۳، **۵**– به معادله‌های ۱۱-۲۳ و ۱۱-۱۶ نگاه کنید) (الف) ۳، ۱؛ سپس ۲ و ۴ یکسان (صفر)؛ (ب) ۳، **۶**– (الف) همگی یکسان ($\tau$ یکسان، $t$ یکسان، بنابراین $\Delta L$ یکسان)؛ (ب) کره، قرص، حلقه (عکس $I$) **۷**– (الف) کاهش؛ (ب) یکسان ($\tau_{net} = ۰$، پس $L$ پایسته است)؛ (پ) افزایش

### پرسشها

**۱**– (الف) ۱، ۲، ۳ (صفر)؛ (ب) ۱ و ۲ یکسان، سپس ۳؛ (پ) ۱ و ۳ یکسان، سپس ۲، **۳**– (الف) در جا می‌چرخند؛ (ب) غلتش به طرف شما؛ (پ) غلتش از طرف شما، **۵**– $a$ ، سپس $b$ و $c$ یکسان، سپس $e$ ، $d$ (صفر)، **۷**– $D$ ، $B$ ، سپس $A$ و $C$ یکسان، **۹**– (الف) یکسان؛ (ب) افزایش؛ (پ) کاهش؛ (ت) یکسان، کاهش، افزایش

### مسئله‌ها

**۱**– (الف) ۰ ؛ (ب) $(۲۲m/s)\hat{i}$ ؛ (پ) $(-۲۲m/s)\hat{i}$ ؛ (ت) ۰ ؛ (ث) $۱/۵\times۱۰^{۳}$ m/s$^{۲}$ ؛ (ج) $۱/۵\times۱۰^{۳}$ m/s$^{۲}$ ؛ (چ)

(۲۲m/s)$\hat{i}$؛ (ح) (۴۴m/s)$\hat{i}$؛ (خ) ۰؛ (د) ۰؛ (ذ) ۱/۵×۱۰$^{۳}$ m/s$^{۲}$؛ (ر) ۱/۵×۱۰$^{۳}$ m/s$^{۲}$، ۳- ۰/۰۲۰، ۵- ۳/۵J-، ۷- (الف) (۴/۰N-)$\hat{i}$؛ (ب) ۰/۶۰kg.m$^{۲}$، ۹- (الف) ۶۳rad/s؛ (ب) ۴/۰m، ۱۱- ۴/۸m، ۱۳- (الف) $\omega$(۰/۱۱m)-؛ (ب) ۲/۱m/s$^{۲}$-؛ (پ) ۴۷rad/s$^{۲}$-؛ (ت) ۱/۲s؛ (ث) ۸/۶m؛ (ج) ۶/۱m/s، ۱۵- ۰/۵۰، ۱۷- (الف) ۱۳cm/s$^{۲}$؛ (ب) ۴/۴s؛ (پ) ۵۵cm/s؛ (ت) ۱۸mJ؛ (ث) ۱/۴J؛ (ج) ۲۷rev/s، ۱۹- (الف) (۶/۰N·m)$\hat{j}$+(۸/۰N·m)$\hat{k}$؛ (ب) (۲۲N·m-)$\hat{i}$، ۲۱- (۲/۰N·m-)$\hat{i}$، ۲۳- (الف) (۵۰N·m)$\hat{k}$؛ (ب) ۹۰°، ۲۵- (الف) (۱/۵N·m-)$\hat{i}$-(۴/۰N·m)$\hat{j}$-(۱/۰N·m)$\hat{k}$؛ (ب) (۱/۵N·m-)$\hat{i}$-(۴/۰N·m)$\hat{j}$-(۱/۰N·m)$\hat{k}$، ۲۷- (الف) ۹/۸kg·m$^{۲}$/s؛ (ب) جهت $+z$، ۲۹- (الف) ۰؛ (ب) (۸/۰N·m)$\hat{i}$+(۸/۰N·m)$\hat{k}$، ۳۱- (الف) ۰؛ (ب) ۲۲/۶kg·m$^{۲}$/s-؛ (پ) ۷/۸۴N·m-؛ (ت) ۷/۸۴N·m-، ۳۳- (الف) (۱/۷×۱۰$^{۲}$ kg·m$^{۲}$/s-)$\hat{k}$؛ (ب) (۵۶N·m+)$\hat{k}$؛ (پ) (۵۶kg·m$^{۲}$/s$^{۲}$+)$\hat{k}$، ۳۵- (الف) ۴۸$t\hat{k}$ N·m؛ (ب) افزایش، ۳۷- (الف) ۱/۴۷N·m؛ (ب) ۲۰/۴rad؛ (پ) ۲۹/۹J-؛ (ت) ۱۹/۹W، ۳۹- (الف) ۴/۶×۱۰$^{-۳}$ kg·m$^{۲}$؛ (ب) ۱/۱×۱۰$^{-۳}$ kg·m$^{۲}$/s؛ (پ) ۳/۹×۱۰$^{-۳}$ kg·m$^{۲}$/s، ۴۱- (الف) ۱/۶kg·m$^{۲}$؛ (ب) ۴/۰kg·m$^{۲}$/s، ۴۳- (الف) ۳/۶rev/s؛ (ب) ۳/۰؛ (پ) نیروهای وارد بر آجرها از طرف مرد انرژی را از انرژی داخلی مرد به انرژی جنبشی تبدیل می‌کنند، ۴۵- (الف) ۲۶۷rev/min؛ (ب) ۰/۶۶۷، ۴۷- (الف) ۷۵۰rev/min؛ (ب) ۴۵۰rev/min؛ (پ) ساعتگرد، ۴۹- ۰/۱۷rad/s، ۵۱- (الف) ۱/۵m؛ (ب) ۰/۹۳rad/s؛ (پ) ۹۸J؛ (ت) ۸/۴rad/s؛ (ث) ۸/۸×۱۰$^{۲}$ J؛ (ج) انرژی داخلی اسکیت‌بازها، ۵۳- ۳/۴rad/s، ۵۵- ۱/۳×۱۰$^{۳}$ m/s، ۵۷- ۱۱/۰m/s، ۵۹- (الف) ۱۸rad/s؛ (ب) ۰/۹۲؛ ۶۱- ۱/۵rad/s، ۶۳- (الف) ۰/۱۸۰m؛ (ب) ساعتگرد، ۶۵- ۰/۰۷۰rad/s، ۶۷- (الف) ۰/۱۴۸rad/s؛ (ب) ۰/۰۱۲۳؛ (پ) ۱۸۱°، ۶۹- ۰/۰۴۱rad/s، ۷۱- ۳۹/۱J، ۷۳- (الف) ۶/۶۵×۱۰$^{-۵}$ kg·m$^{۲}$/s؛ (ب) خیر؛ (پ) صفر؛ (ت) بلی، ۷۵- (الف) ۰/۳۳۳؛ (ب) ۰/۱۱۱، ۷۷- (الف) ۵۸/۸J؛ (ب) ۳۹/۲J، ۷۹- (الف) ۰/۸۱mJ؛ (ب) ۰/۲۹؛ (پ) ۱/۳×۱۰$^{-۲}$ N، ۸۱- (الف) $mR^2$/۲؛ (ب) یک استوانه دایره‌ای توپر، ۸۳- تندی چرخشی کاهش می‌یابد؛ روز به اندازهٔ تقریباً ۰/۸s بلندتر می‌شود. ۸۵- (الف) ۱۴۹kg·m$^{۲}$؛ (ب) ۱۵۸kg·m$^{۲}$/s؛ (پ) ۰/۷۴۴rad/s، ۸۷- (الف) ۰؛ (ب) ۰؛ (پ) ۳۰$t^3\hat{k}$ kg·m$^{۲}$/s-؛ (ت) ۹۰$t^2\hat{k}$ N·m-؛ (ث) ۳۰$t^3\hat{k}$ kg·m$^{۲}$/s؛ (ج) ۹۰$t^2\hat{k}$ N·m، ۸۹- (الف) ۶۱/۷J؛ (ب) ۳/۴۳m؛ (پ) خیر، ۹۱- (الف) ۱۲/۷rad/s؛ (ب) ساعتگرد. ۹۳- (الف) $mvR/(I+MR^2)$؛ (ب) $mvR^2/(I+MR^2)$، ۹۵- (الف) ۱/۶m/s$^{۲}$، (ب) ۱۶rad/s$^{۲}$؛ (پ) (۴/۰N)$\hat{i}$، ۹۷- ۰/۴۷kg·m$^{۲}$/s

## فصل ۱۲

### نکته‌های وارسی

۱- $c$، $e$، $f$ ۲- (الف) خیر؛ (ب) در محل $\vec{F}_1$، عمود بر صفحهٔ شکل؛ (پ) ۴۵N، ۳- $d$

### پرسشها

۱- $a$، $c$ (نیروها و گشتاورها متعادل هستند)، ۳- (الف) ۱۲kg؛ (ب) ۳kg؛ (پ) ۱kg، ۵- (الف) ۱ و ۳ یکسان، سپس ۲؛ (ب) همه یکسان؛ (پ) ۱ و ۳ یکسان، سپس ۲ (صفر) ۷- افزایش ۹- (الف) در $C$ (برای حذف نیروها در آنجا از یک معادلهٔ گشتاور)؛ (ب) بعلاوه؛ (پ) منها؛ (ت) برابر

### مسئله‌ها

۱- (الف) ۱/۰۰m؛ (ب) ۲/۰۰m؛ (پ) ۰/۹۸۷m؛ (ت) ۱/۹۷m، ۳- ۷/۹۲kN، ۵- (الف) ۹/۴N؛ (ب) ۴/۴N، ۷- (الف) ۱/۲kN؛ (ب) پایین؛ (پ) ۱/۷kN؛ (ت) بالا؛ (ث) چپ؛ (ج) راست، ۹- (الف) ۲/۸×۱۰$^{۲}$ N؛ (ب) ۸/۸×۱۰$^{۲}$ N؛ (پ) ۷۱°، ۱۱- ۷۴/۴g، ۱۳- (الف) ۵/۰N؛ (ب) ۳۰N؛ (پ) ۱/۳m، ۱۵- ۸/۷N، ۱۷- (الف) ۲/۷kN؛ (ب) بالا؛ (پ) ۳/۶kN؛ (ت) پایین، ۱۹- (الف) ۰/۶۴m؛ (ب) افزایش، ۲۱- ۱۳/۶N، ۲۳- (الف) ۱/۹kN؛ (ب) بالا؛ (پ) ۲/۱kN؛ (ت) پایین، ۲۵- (الف) ۱۹۲N؛ (ب) ۹۶/۱N؛ (پ) ۵۵/۵N، ۲۷- (الف) ۶/۶۳kN؛ (ب) ۵/۷۴kN؛ (پ) ۵/۹۶kN، ۲۹- ۲/۲۰m، ۳۱- (الف) (۸۰N)$\hat{i}$+(۱/۳×۱۰$^{۲}$ N)$\hat{j}$؛ (ب) (۸۰N-)$\hat{i}$+(۱/۳×۱۰$^{۲}$ N)$\hat{j}$، ۳۳- (الف) ۴۴۵N؛ (ب) ۰/۵۰؛ (پ) ۳۱۵N، ۳۵- (الف) ۶۰/۰°؛ (ب) ۳۰۰N، ۳۷- ۰/۳۴، ۳۹- (الف) می‌لغزد؛ (ب) ۳۱°؛ (پ) نوکها؛ (ت) ۳۴°، ۴۱- (الف) ۲۱۱N؛ (ب) ۵۳۴N؛ (پ) ۳۲۰N، ۴۳- (الف) ۶/۵×۱۰$^{۶}$ N/m$^{۲}$؛ (ب) ۱/۱×۱۰$^{-۵}$ m، ۴۵- (الف) ۸۶۶N؛ (ب) ۱۴۴N؛ (پ) ۰/۱۶۵، ۴۷- (الف) ۰/۸۰؛ (ب) ۰/۲۰؛ (پ) ۰/۲۵، ۴۹- (الف) ۱/۴×۱۰$^{۹}$ N؛ (ب) ۷۵، ۵۱- (الف) ۱/۲×۱۰$^{۲}$ N؛ (ب) ۶۸N، ۵۳- ۷۶N، ۵۵- (الف) ۸/۰۱kN؛ (ب) ۳/۶۵kN؛ (پ) ۵/۶۶kN، ۵۷- ۷۱/۷N، ۵۹- (الف) $L$/۲؛ (ب) $L$/۴؛ (پ) $L$/۶؛ (ت) $L$/۸؛ (ث) ۲۵$L$/۲۴، ۶۱- (الف) ۱/۸×۱۰$^{۷}$ N؛ (ب) ۱/۴×۱۰$^{۷}$ N؛ (پ) ۱۶، ۶۳- ۰/۲۹، ۶۵- ۶۰°، ۶۷- (الف) ۲۷۰N؛ (ب) ۷۲N؛ (پ) ۱۹°، ۶۹- (الف) ۱۰۶N؛ (ب) ۶۴/۰°، ۷۱- ۲/۴×۱۰$^{۹}$ N/m$^{۲}$، ۷۳-

(الف) ۸۸N؛ (ب) $(۳۰\hat{i}+۹۷\hat{j})$N، **۷۵**- (الف) $a_۱=L/۲$، $a_۲=۵L/۸$، $h=۹L/۸$؛ (ب) $b_۱=۲L/۳$، $b_۲=L/۲$، $h=۷L/۶$، **۷۷**- (الف) $BC$، $CD$، $DA$؛ (ب) ۵۳۵N؛ (پ) ۷۵۷N، **۷۹**- (الف) ۱/۳۸kN؛ (ب) ۱۸۰N، **۸۱**- (الف) $\mu<۰/۵۷$؛ (ب) $\mu>۰/۵۷$، **۸۳**- $L/۴$، **۸۵**- (الف) $(۳۵\hat{i}+۲۰۰\hat{j})$N؛ (ب) $(-۴۵\hat{i}+۲۰۰\hat{j})$N؛ (پ) $۱/۹\times۱۰^{۲}$ N

## فصل ۱۳

### نکته‌های وارسی

**۱**- همگی یکسان **۲**- (الف) ۱، ۲ و ۴ یکسان، سپس ۳، (ب) خط $d$ **۳**- (الف) افزایش؛ (ب) منفی. **۴**- (الف) ۲؛ (ب) ۱؛ **۵**- (الف) مسیر ۱ ($E$ کاهش می‌یابد (بیشتر منفی می‌شود) کاهش $a$ را به دنبال دارد)؛ (ب) کمتر (کاهش $a$ کاهش $T$ را به دنبال دارد)

### پرسشها

**۱**- $Gm^۲/r^۲$، به طرف بالا، **۳**- $b$ و $c$ یکسان، سپس $a$ (صفر)، **۵**- $۳GM^۲/d^۲$، به طرف چپ، **۷**- (الف) مثبت $y$؛ (ب) بلی، پادساعتگرد می‌چرخد تا در جهت ذرهٔ $B$ قرار گیرد، **۹**- ۱، ۲ و ۴ یکسان، سپس ۳، **۱۱**- $b$، $d$ و $f$ همگی یکسان، سپس $e$، $c$، $a$

### مسئله‌ها

**۱**- ۱۹m، **۳**- $\frac{۱}{۲}$، **۵**- ۵/۰۰d-، **۷**- $۲/۶۰\times۱۰^{۵}$ km، **۹**- ۰/۸m، **۱۱**- (الف) $M=m$؛ (ب) ۰، **۱۳**- $۸/۳۱\times۱۰^{-۹}$ N، **۱۵**- (الف) $-۱/۸۸d$؛ (ب) $-۳/۹۰d$؛ (پ) $۰/۴۸۹d$، **۱۷**- $۲/۶\times۱۰^{۶}$ m، **۱۹**- (الف) ۱۷N؛ (ب) ۲/۴، **۲۱**- (الف) ۷/۶m/s$^{۲}$؛ (ب) ۴/۲m/s$^{۲}$، **۲۳**- $۵\times۱۰^{۲۴}$ kg، **۲۵**- (الف) ۹/۸۳m/s$^{۲}$؛ (ب) ۹/۸۴m/s$^{۲}$؛ (پ) ۹/۷۹m/s$^{۲}$، **۲۷**- (الف) $(۳/۰\times۱۰^{-۷}$ N/kg$)m$؛ (ب) $(۳/۳\times۱۰^{-۷}$ N/kg$)m$؛ (پ) $(۶/۷\times۱۰^{-۷}$ N/kg·m$)mr$، **۲۹**- (الف) ۰/۷۴؛ (ب) ۳/۸m/s$^{۲}$؛ (پ) ۵/۰km/s، **۳۱**- (الف) ۰/۰۴۵۱؛ (ب) ۲۸/۵، **۳۳**- $۵/۰\times۱۰^{۹}$ J، **۳۵**- (الف) ۰/۵۰pJ؛ (ب) ۰/۵۰pJ-، **۳۷**- (الف) ۱/۷km/s؛ (ب) $۲/۵\times۱۰^{۵}$ m؛ (پ) ۱/۴km/s، **۳۹**- (الف) ۸۲km/s؛ (ب) $۱/۸\times۱۰^{۴}$ km/s، **۴۱**- $-۴/۸۲\times۱۰^{-۱۳}$ J، **۴۳**- $۶/۵\times۱۰^{۲۳}$ kg، **۴۵**- $۵\times۱۰^{۱۱۰}$ ستاره، **۴۷**- (الف) $۶/۶۴\times۱۰^{۳}$ km؛ (ب) ۰/۰۱۳۶، **۴۹**- (الف) ۷/۸۲km/s؛ (ب) ۸۷/۵min، **۵۱**- (الف) $۱/۹\times۱۰^{۱۳}$ m؛ (ب) $۳/۶R_P$، **۵۵**- ۰/۷۱y، **۵۷**- $۵/۸\times۱۰^{۶}$ m، **۵۹**- $(GM/L)^{۰/۵}$، **۶۱**- (الف) ۲/۸y؛ (ب) $۱/۰\times۱۰^{-۴}$، **۶۳**- (الف) $۳/۱۹\times۱۰^{۳}$ km؛ (ب) بلند کردن، **۶۵**- (الف) $r^{۱/۵}$؛ (ب) $r^{-۱}$؛ (پ) $r^{۰/۵}$؛ (ت) $r^{-۰/۵}$، **۶۷**- (الف) ۷/۵km/s؛ (ب) ۹۷min؛ (پ) $۴/۱\times۱۰^{۲}$ km؛ (ت) ۷/۷ km/s؛ (ث) ۹۳min؛ (ج) $۳/۲\times۱۰^{-۳}$ N؛ (چ) خیر؛ (ح) بلی، **۶۹**- ۱/۱s، **۷۱**- (الف) $۱/۰\times۱۰^{۳}$ kg؛ (ب) ۱/۵km/s، **۷۳**- $-۰/۰۴۴\hat{j}\,\mu$N، **۷۵**- (الف) $۲/۱۵\times۱۰^{۴}$ s؛ (ب) ۱۲/۳km/s؛ (پ) ۱۲/۰km/s؛ (ت) $۲/۱۷\times۱۰^{۱۱}$ J؛ (ث) $-۴/۵۳\times۱۰^{۱۱}$ J؛ (ج) $-۲/۳۵\times۱۰^{۱۱}$ J؛ (چ) $۴/۰۴\times۱۰^{۷}$ m، (ح) $۱/۲۲\times۱۰^{۳}$ s؛ (خ) بیضوی، **۷۷**- $۰/۳۷\hat{j}\,\mu$N، **۷۹**- ۲۹pN، **۸۱**- $۲/۵\times۱۰^{۴}$ km، **۸۳**- (الف) $۲/۲\times۱۰^{-۷}$ rad/s؛ (ب) ۸۹ km/s، **۸۵**- $۳/۲\times۱۰^{-۷}$ N، **۸۷**- (الف) ۰؛ (ب) $۱/۸\times۱۰^{۳۲}$ J؛ (پ) $۱/۸\times۱۰^{۳۲}$ J؛ (ت) ۰/۹۹km/s، **۸۹**- $GM_Em/۱۲R_E$، **۹۱**- (الف) $۱/۴\times۱۰^{۶}$ m/s؛ (ب) $۳\times۱۰^{۶}$ m/s، **۹۳**- $۲\pi r^{۱/۵}G^{-۰/۵}(M+m/۴)^{-۰/۵}$، **۹۵**- $۲/۴\times۱۰^{۴}$ m/s، **۹۷**- ۱/۸۷GJ-، **۹۹**- (الف) $GMmx(x^۲+R^۲)^{-۳/۲}$؛ (ب) $[۲GM(R^{-۱}-(R^۲+x^۲)^{-۱/۲})]^{۱/۲}$، **۱۰۱**- (الف) $Gm^۲/R_i$؛ (ب) $Gm^۲/۲R_i$؛ (پ) $(Gm/R_i)^{۰/۵}$؛ (ت) $۲(Gm/R_i)^{۰/۵}$؛ (ث) $Gm^۲/R_i$؛ (ج) $(۲Gm/R_i)^{۰/۵}$؛ (چ) چارچوب مرکز جرم یک چارچوب لخت است و در آن اصل پایستگی انرژی به صورت فصل ۸ می‌تواند نوشته شود؛ چارچوب مرجع متصل به جسم $A$ غیرلخت است و این اصل نمی‌تواند به صورت فصل ۸ نوشته شود. پاسخ (ت) درست است. **۱۰۳**- (الف) $۱/۹\times۱۰^{۱۱}$ m؛ (ب) $۴/۶\times۱۰^{۴}$ m/s

## فصل ۱۴

### نکته‌های وارسی

**۱**- (الف) همگی یکسان؛ (ب) ۵۰°X، ۵۰°Y، ۵۰°W، **۲**- (الف) ۲ و ۳ یکسان، سپس ۱، سپس ۴؛ (ب) ۳، ۲، سپس ۱ و ۴ یکسان (از معادله‌های ۱۴-۹ و ۱۴-۱۰، فرض کنید که تغییر در مساحت متناسب با مساحت اولیه است)، **۳**- $A$ (معادلهٔ ۱۴-۱۴ را ببینید)، **۴**- $c$ و $e$ (مساحت محصور با چرخهٔ ساعتگرد بیشینه است) **۵**- (الف) همگی یکسان ($\Delta E_{\text{int}}$ به $i$ و $f$ بستگی دارد نه به مسیر)؛ (ب) ۴، ۳، ۲، ۱ (مساحتهای زیر منحنیها را مقایسه کنید)؛ (پ) ۴، ۳، ۲، ۱، (به معادلهٔ ۱۴-۲۶ نگاه کنید)، **۶**- (الف) صفر (چرخهٔ بسته)؛ (ب) منفی ($W_{\text{net}}$ منفی است؛ به شکل ۱۴-۲۶ نگاه کنید)، **۷**- $b$ و $d$ یکسان، سپس $a$، $c$ ($P_{\text{cond}}$ یکسان؛ به معادلهٔ ۱۴-۳۲ نگاه کنید)

### پرسشها

**۱**- $B$، سپس $A$ و $C$ یکسان، **۳**- $c$، سپس بقیه یکسان، **۵**- (الف) هردو ساعتگرد؛ (ب) هردو ساعتگرد؛ **۷**- $c$، $b$، $a$، **۹**- (الف) $f$، چون دمای یخ تا نقطه انجماد افزایش نمی‌یابد و سپس سقوط کند؛ (ب) $b$ و $c$ در نقطهٔ انجماد، $d$ بالا، $e$ پایین؛ (پ) در $b$ مایع مقداری منجمد می‌شود و یخ ذوب نمی‌شود؛ در $c$ مایع یخ نمی‌زند و یخ ذوب نمی‌شود؛ در $d$ مایع یخ نمی‌زند و یخ کامل ذوب می‌شود، در $e$ مایع به طور کامل یخ می‌زند و

یخ ذوب نمی‌شود. **۱۱-** (الف) بیشتر؛ (ب) ۱، ۲، ۳؛ (پ) ۱، ۳، ۲؛ (ت) ۱، ۲، ۳؛ (ث) ۲، ۳، ۱

**مسئله‌ها**

**۱-** ۳۴۸K، **۳-** ۱/۳۶۶، **۵-** (الف) ۳۲۰°F؛ (ب) ۱۲/۳°F-، **۷-** ۹۲/۱°X-، **۹-** $۲۹\,cm^{۳}$، **۱۱-** ۲/۷۳۱cm، **۱۳-** $۴۹/۸۷\,cm^{۳}$، **۱۵-** $۰/۲۶\,cm^{۳}$، **۱۷-** ۳۶۰°C، **۱۹-** ۰/۱۳mm، **۲۱-** ۷/۵cm، **۲۳-** ۹۴/۶L، **۲۵-** ۴۲/۷kJ، **۲۷-** ۱۶۰s، **۲۹-** ۳۳g، **۳۱-** ۳/۰min، **۳۳-** $۳۳\,m^{۲}$، **۳۵-** ۱۳/۵C°، **۳۷-** ۷۴۲kJ، **۳۹-** (الف) ۵/۳°C؛ (ب) ۰؛ (پ) ۰°C؛ (ت) ۶۰g، **۴۱-** (الف) ۰°C؛ (ب) ۲/۵°C، **۴۳-** ۳۰J-، **۴۵-** (الف) $۱/۲\times۱۰^{۲}$ J؛ (ب) ۷۵J؛ (پ) ۳۰J، **۴۷-** ۶۰J، **۴۹-** (الف) ۶/۰cal؛ (ب) ۴۳cal-؛ (پ) ۴۰cal؛ (ت) ۱۸cal؛ (ث) ۱۸cal، **۵۱-** ۱/۶۶kJ/s، **۵۳-** (الف) ۱۶J/s؛ (ب) ۰/۰۴۸g/s، **۵۵-** (الف) ۱/۲۳kW؛ (ب) ۲/۲۸kW؛ (پ) ۱/۰۵kW، **۵۷-** ۰/۵۰min، **۵۹-** (الف) $۱/۷\times۱۰^{۴}\,W/m^{۲}$؛ (ب) $۱۸\,W/m^{۲}$، **۶۱-** ۴/۲°C-، **۶۳-** ۱/۱m، **۶۵-** ۰/۴۰cm/h، **۶۷-** ٪۱۰، **۶۹-** $۴/۵\times۱۰^{۲}$ J/kg·K، **۷۱-** $۰/۴۳۲\,cm^{۳}$، **۷۳-** (الف) $۱۱p_۱V_۱$؛ (ب) $۶p_۱V_۱$، **۷۵-** $۴/۸۳\times۱۰^{-۲}\,cm^{۳}$، **۷۷-** ۲۳J، **۷۹-** $۳/۱\times۱۰^{۲}$ J، **۸۱-** ۱۰/۵°C، **۸۳-** ۷۹/۵°C، **۸۵-** ۸/۶J، **۸۷-** ۳۳۳J، **۸۹-** (الف) ۹۰W؛ (ب) $۲/۳\times۱۰^{۲}$ W؛ (پ) $۳/۳\times۱۰^{۲}$ W، **۹۱-** (الف) $۱/۸۷\times۱۰^{۴}$؛ (ب) ۱۰/۴h، **۹۳-** (الف) ۴۵J-؛ (ب) ۴۵J+، **۹۵-** (الف) ۸۰J؛ (ب) ۸۰J، **۹۷-** ۶/۱nW-، **۹۹-** ۱/۱۷C°

## فصل ۱۵

### نکته‌های وارسی

**۱-** همه غیر از $c$ **۲-** (الف) همگی یکسان؛ (ب) ۳، ۲، ۱، **۳-** گاز $A$، **۴-** ۵ (بیشترین تغییر در $T$)، سپس یکسان بودن ۱، ۲، ۳، ۴، **۵-** ۱، ۲، ۳ ($Q_۳ = ۰$ ، $Q_۲$ به کار $W_۲$ تبدیل می‌شود ولی $Q_۱$ به کار بیشتر $W_۱$ تبدیل می‌شود و دمای گاز را افزایش می‌دهد).

### پرسش

**۱-** ۲۰J، **۳-** $d$، سپس $a$ و $b$ یکسان، سپس $c$، **۵-** (الف) ۳؛ (ب) ۱؛ (پ) ۴؛ (ت) ۲؛ (ث) بلی، **۷-** فرایند حجم ثابت، **۹-** (الف) ۱، ۲، ۳، ۴؛ (ب) ۱، ۲، ۳

### مسئله‌ها

**۱-** (الف) ۰/۰۱۲۷mol؛ (ب) $۷/۶۷\times۱۰^{۲۱}$ اتم، **۳-** ۲۵ مولکول/$cm^{۳}$ **۵-** ۱۸۶kPa، **۷-** (الف) ۰/۰۳۸۸mol؛ (ب) ۲۲۰°C، **۹-** (الف) $۳/۱۴\times۱۰^{۳}$ J؛ (ب) از ، **۱۱-** ۳۶۰K، **۱۳-** ۵/۶۰kJ، **۱۵-** (الف) ۱/۵mol؛ (ب) $۱/۸\times۱۰^{۳}$ K؛ (پ) $۶/۰\times۱۰^{۲}$ K؛ (ت) ۵/۰kJ، **۱۷-** $۲/۰\times۱۰^{۵}$ Pa، **۱۹-** $۱/۸\times۱۰^{۲}$ m/s، **۲۱-** (الف) ۵۱۱m/s؛ (ب) ۲۰۰°C-؛ (پ) ۸۹۹°C، **۲۳-** ۱/۹kPa، **۲۵-** (الف) $۵/۶۵\times۱۰^{-۲۱}$ J؛ (ب) $۷/۷۲\times۱۰^{-۲۱}$ J؛ (پ) ۳/۴۰kJ؛ (ت) ۴/۶۵kJ، **۲۷-** (الف) $۶/۷۶\times۱۰^{-۲۰}$ J؛ (ب) ۱۰/۷، **۲۹-** (الف) $۶\times۱۰^{۹}$ km، **۳۱-** (الف) $۳/۲۷\times۱۰^{۱۰}$ مولکول/$cm^{۳}$؛ (ب) ۱۷۲m، **۳۳-** (الف) ۴۲۰m/s؛ (ب) ۴۵۸m/s؛ (پ) بلی، **۳۵-** (الف) ۶/۵km/s؛ (ب) ۷/۱km/s، **۳۷-** (الف) $۱/۰\times۱۰^{۴}$ K؛ (ب) $۱/۶\times۱۰^{۵}$ K؛ (پ) $۴/۴\times۱۰^{۲}$ K؛ (ت) $۷/۰\times۱۰^{۳}$ K؛ (ث) خیر؛ (ج) بلی، **۳۹-** (الف) $۲/۰\times۱۰^{-۸}$ cm؛ (ب) ۷/۰km/s؛ (پ) $۳/۵\times۱۰^{۱۰}$ برخورد/s، **۴۱-** (الف) ۰/۶۷؛ (ب) ۱/۲؛ (پ) ۱/۳؛ (ت) ۰/۳۳، **۴۳-** (الف) صفر؛ (ب) ۳۷۴J+؛ (پ) ۳۷۴J+؛ (ت) $۳/۱۱\times۱۰^{-۲۲}$ J+، **۴۵-** ۱۵/۸J/mol·K، **۴۷-** (الف) $۶/۶\times۱۰^{-۲۶}$ kg؛ (ب) ۴۰g/mol، **۴۹-** (الف) ۳/۴۹kJ؛ (ب) ۲/۴۹kJ؛ (پ) ۹۷۷J؛ (ت) ۱/۰۰kJ، **۵۱-** ۸/۰kJ، **۵۳-** (الف) ۶/۹۸kJ؛ (ب) ۴/۹۹kJ؛ (پ) ۱/۹۹kJ؛ (ت) ۲/۹۹kJ، **۵۵-** (الف) ۱۴atm؛ (ب) $۶/۲\times۱۰^{۲}$ K، **۵۷-** ۱۵J-، **۵۹-** ۲۰J-، **۶۱-** (الف) دو اتمی؛ (ب) ۴۴۶K؛ (پ) ۸/۱۰mol، **۶۳-** (الف) ۳/۷۴kJ؛ (ب) ۳/۷۴kJ؛ (پ) ۰؛ (ت) ۰؛ (ث) ۱/۸۱kJ-؛ (ج) ۱/۸۱kJ؛ (چ) ۳/۲۲kJ-؛ (ح) ۱/۹۳kJ-؛ (خ) ۱/۲۹kJ-؛ (د) ۵۲۰J؛ (ذ) ۰؛ (ر) ۵۲۰J؛ (ز) $۰/۰۲۴۶\,m^{۳}$؛ (ژ) ۲/۰۰atm؛ (س) $۰/۰۳۷۳\,m^{۳}$؛ (ش) ۱/۰۰atm، **۶۵-** (الف) ۹۰۰cal؛ (ب) ۰؛ (پ) ۹۰۰cal؛ (ت) ۴۵۰cal؛ (ث) ۱۲۰۰cal؛ (ج) ۳۰۰cal؛ (چ) ۹۰۰cal؛ (ح) ۴۵۰cal؛ (خ) ۰؛ (د) ۹۰۰cal-؛ (ذ) ۹۰۰cal؛ (ر) ۴۵۰cal، **۶۷-** ۳۴۹K؛ **۶۹-** (الف) ۳۷۴J-؛ (ب) ۰؛ (پ) ۳۷۴J+؛ (ت) $۳/۱۱\times۱۰^{-۲۲}$ J+، **۷۱-** $۷/۰۳\times۱۰^{۹}\,s^{-۱}$، **۷۳-** (الف) ۲/۰۰atm؛ (ب) ۳۳۳J؛ (پ) ۰/۹۶۱atm؛ (ت) ۲۳۶J، **۷۵-** (الف) یک اتمی؛ (ب) $۲/۷\times۱۰^{۴}$ K؛ (پ) $۴/۵\times۱۰^{۴}$ mol؛ (ت) ۳/۴kJ؛ (ث) $۳/۴\times۱۰^{۲}$ kJ؛ (ج) ۰/۰۱۰، **۷۷-** (الف) ۸/۰atm؛ (ب) ۳۰۰K؛ (پ) ۴/۴kJ؛ (ت) ۳/۲atm؛ (ث) ۱۲۰K؛ (ج) ۲/۹kJ؛ (چ) ۴/۶atm؛ (ح) ۱۷۰K؛ (خ) ۳/۴kJ، **۷۹-** (الف) ۳۸L؛ (ب) ۷۱g، **۸۱-** (الف) $۳/v_۰^{۳}$؛ (ب) $۰/۷۵v_۰$؛ (پ) $۰/۷۷۵v_۰$، **۸۳-** (الف) ۲/۳۷kJ-؛ (ب) ۲/۳۷kJ، **۸۵-** ۳/۰J-، **۸۷-** (ب) ۱۲۵J؛ (پ) به

## فصل ۱۶

### نکته‌های وارسی

**۱-** a ، b ، c **۲-** کوچکتر ($Q$ کوچکتر است)، **۳-** c ، b ، a **۴-** a ، d ، c ، b **۵-** b

**پرسشها**

**۱-** $a$ و $c$ یکسان، سپس $b$ و $d$ یکسان، **۳-** $b$ ، $a$ ، $c$ ، $d$ ، **۵-** بدون تغییر **۷-** A ، اول؛ B اول و دوم؛ C ، دوم؛ D هیچ‌کدام ، **۹-** (الف) یکسان؛ (ب) افزایش؛ (پ) کاهش

**مسئله‌ها**

**۱-** ۱۴/۴J/K ، **۳-** (الف) $۵/۷۹\times۱۰^{۴}$ J؛ (ب) ۱۷۳ J/K ، **۵-** (الف) ۹/۲۲kJ؛ (ب) ۲۳/۱J/K؛ (پ) ۰، **۷-** (الف) ۵۷/۰°C؛ (ب) −۲۲/۱J/K؛ (پ) +۲۴/۹J/K؛ (ت) +۲/۸J/K، **۹-** (الف) −۷۱۰mJ/K؛ (ب) +۷۱۰mJ/K؛ (پ) +۷۲۳mJ/K؛ (ت) −۷۲۳mJ/K؛ (ث) +۱۳mJ/K؛ (ج) ۰، **۱۱-** (الف) ۳۲۰K؛ (ب) ۰؛ (پ) +۱/۷۲J/K، **۱۳-** (الف) ۰/۳۳۳؛ (ب) ۰/۲۱۵؛ (پ) ۰/۶۴۴؛ (ت) ۱/۱۰؛ (ث) ۱/۱۰؛ (ج) ۰؛ (چ) ۱/۱۰؛ (ح) ۰؛ (خ) −۰/۸۸۹؛ (د) −۰/۸۸۹؛ (ذ) −۱/۱۰؛ (ر) −۰/۸۸۹؛ (ز) ۰؛ (ژ) ۰/۸۸۹؛ (س) ۰، **۱۵-** +۰/۷۶J/K، **۱۷-** (الف) −۹۴۳J/K؛ (ب) +۹۴۳J/K؛ (پ) بلی، **۱۹-** −۱/۱۸J/K، **۲۱-** (الف) ۰/۶۹۳؛ (ب) ۴/۵۰؛ (پ) ۰/۶۹۳؛ (ت) ۰؛ (ث) ۴/۵۰؛ (ج) ۲۳/۰J/K؛ (چ) −۰/۶۹۳؛ (ح) ۷/۵۰؛ (خ) −۰/۶۹۳؛ (د) ۳/۰؛ (ذ) ۴/۵۰؛ (ر) ۲۳/۰J/K، **۲۳-** (الف) ۲۶۶K؛ (ب) ۳۴۱K، **۲۵-** (الف) ۲۳/۶٪؛ (ب) $۱/۴۹\times۱۰^{۴}$ J، **۲۷-** ۹۷K، **۲۹-** (الف) ۱/۴۷kJ؛ (ب) ۵۵۴J؛ (پ) ۹۱۸J؛ (ت) ۶۲/۴٪، **۳۱-** (الف) ۲/۲۷kJ؛ (ب) ۱۴/۸kJ؛ (پ) ۱۵/۴٪؛ (ت) ۷۵/۰٪؛ (ث) بیشتر، **۳۳-** (الف) ۳۳kJ؛ (ب) ۲۵kJ؛ (پ) ۲۶kJ؛ (ت) ۱۸kJ، **۳۵-** (الف) ۳/۰۰؛ (ب) ۱/۹۸؛ (پ) ۰/۶۶۰؛ (ت) ۰/۴۹۵؛ (ث) ۰/۱۶۵؛ (ج) ۳۴/۰٪، **۳۷-** ۲۰J، **۳۹-** ۴۴۰W، **۴۱-** ۲/۰۳، **۴۳-** ۰/۲۵hp، **۴۷-** (الف) $W = N!/(n_۱!n_۲!n_۳!)$؛ (ب) $[(N/۲)!(N/۲)!]/[(N/۳)!(N/۳)!(N/۳)!]$؛ (پ) $۴/۲\times۱۰^{۱۶}$، **۴۹-** (الف) ۸۷m/s؛ (ب) $۱/۲\times۱۰^{۲}$ m/s؛ (پ) ۲۲J/K، **۵۱-** (الف) ۷۸٪؛ (ب) ۸۲kg/s، **۵۳-** (الف) ۴۰/۹°C؛ (ب) −۲۷/۱J/K؛ (پ) ۳۰/۵J/K؛ (ت) ۳/۴J/K، **۵۵-** $۱/۱۸\times۱۰^{۳}$ J/K، **۵۷-** (الف) ۰؛ (ب) ۰؛ (پ) −۲۳/۰J/K؛ (ت) ۲۳/۰J/K، **۵۹-** (الف) ۲۵/۵kJ؛ (ب) ۴/۷۳kJ؛ (پ) ۱۸/۵٪، **۶۱-** ۰/۰۱۴۱J/K·s، **۶۳-** (الف) ۴۲/۶kJ؛ (ب) ۷/۶۱ kJ، **۶۵-** (الف) ۴/۴۵J/K؛ (ب) خیر؛ **۶۷-** (الف) ۱؛ (ب) ۱؛ (پ) ۳؛ (ت) ۱۰؛ (ث) $۱/۵\times۱۰^{-۲۳}$ J/K؛ (ج) $۳/۲\times۱۰^{-۲۳}$ J/K، **۶۹-** +۳/۵۹J/K، **۷۱-** (الف) ۱/۹۵J/K؛ (ب) ۰/۶۵۰J/K؛ (پ) ۰/۲۱۷J/K؛ (ت) ۰/۰۷۲J/K؛ (ث) کاهش، **۷۳-** (الف) $۱/۲۶\times۱۰^{۱۴}$؛ (ب) $۴/۷۱\times۱۰^{۱۳}$؛ (پ) ۰/۳۷؛ (ت) $۱/۰۱\times۱۰^{۲۹}$؛ (ث) $۱/۳۷\times۱۰^{۲۸}$؛ (ج) ۰/۱۴g؛ (چ) $۹/۰۵\times۱۰^{۵۸}$؛ (ح) $۱/۶۴\times۱۰^{۵۷}$؛ (خ) ۰/۰۱۸g؛ (د) کاهش

# واژه‌نامه

| فارسی | English |
|---|---|
| اختر نما | Quasar |
| استقامت تسلیم | Yield strength |
| استقامت نهایی | Ultimate strength |
| اصطکاک | Friction |
| اصطکاک ایستایی | Static friction |
| اصل | Principle |
| افق رویداد | Event horizon |
| القایش | Inductance |
| انبساط تکدما | Isothermal expansion |
| انبساط حجمی | Volume expansion |
| انبساط خطی | Linear expansion |
| انبساط گرمایی | Thermal expansion |
| اندازه حرکت (تکانه) | Momentum |
| اندازه‌گیری | Measurement |
| انرژی پتانسیل گرانشی | Gravitational potential energy |
| انرژی درونی | Internal energy |
| انرژی‌زا | Exothermic |
| انرژی گیر | Endothermic |
| بازهٔ زمانی | Time interval |
| بازوی گشتاور | Moment arm |
| بر هم نهی | Superspoition |
| برایند | Resultant |
| برخورد | Collision |
| برخورد رودررو | Head - on collision |
| برد افقی | Horizontal range |
| بردار یکه | Unit vector |
| برش | Shear |
| بره | Slab |
| برهم کنش | Interaction |
| برونیابی | Extrapolate |
| بزرگی | Magnitude |
| بسامد | Frequency |
| بعد | Dimension |
| بیشینه | Maximum |
| پادساعتگرد | Anticlockwise |
| پایستار | Conservative |
| پایستگی | Conservation |
| پرتابه | Projectile |
| پروکسیما قنطورس | Proxima Centauri |
| پوسته | Crust |
| پیکان زمان | Arrow of time |
| پیکربندی مرجع | Reference Configuration |
| تابش | Radiation |
| تابش گرمایی | Thermal radiation |
| تابشگر جسم سیاه | Blackbody radiator |
| تجزیهٔ نیرو | Resolving a force |
| تراکم تکدما | Isothermal compression |
| تعادل بی‌تفاوت | Neutral equilibrium |
| تعادل گرمایی | Thermal equilibrium |
| تعادل ناپایدار | Unstable equilibrium |
| تقارن دایره‌ای | Circular symmetry |
| تقریب استرلینگ | Stirling approximation |
| تندی | Speed |
| تندی حد | Terminal speed |
| تندی سنج | Speedometer |
| تندی فرار | Escape speed |
| تنش | Stress |
| ثابت فنر | Spring constant |
| جابه‌جایی | Displacement |
| جابه‌جایی زاویه‌ای | Angular displacement |
| جبه | Mantle |
| جذر میانگین مربعی | Root - mean - square (rms) |
| جرم | Mass |
| جسم صلب | Rigid body |
| جنوبگان | Antarctica |

| | |
|---|---|
| چارچوب لخت | Inertial frame |
| چارچوب مرجع | Refernce frame |
| چارچوب نالخت | Noninertial Frame |
| چپگرد | Left - handed |
| چرخ طیار | Flywheel |
| چرخانه | Rotor |
| چرخزاد | Cycloid |
| چرخش | Rotation |
| چرخه | Cycle |
| چگالی | Density |
| چندتایگی | Multiplicity |
| حالت | State |
| حالت واهلیده | Relaxed state |
| حرکت پرتابی | Projectile motion |
| حرکت تقدیمی | Precession motion |
| حرکت دایره‌ای | Circular motion |
| حرکت غلتشی | Rolling motion |
| حرکت لغزشی | Sliding motion |
| حرکت نسبی | Relative motion |
| حلقه | Loop |
| خروج از مرکز | Eccentricity |
| خمیدگی فضا | Curvature of space |
| درجهٔ آزادی | Degree of freedom |
| درستی | Accuracy |
| دستگاه بین المللی یکاها | International System of Units (SI) |
| دقت | Precise |
| دما | Temperature |
| دماسنج | Thermometer |
| دمانما | Thermoscope |
| ذره | Particle |
| راستگرد | Right - handed |
| رقمهای با معنی | Significant figures |
| ریسمان | Cord |
| زمان | Time |
| سازوکار | Mechanism |
| ساعتگرد | Clockwise |
| سال نوری | Light - year |
| ستارهٔ نوترونی | Neutron star |
| سرعت متوسط | Average velocity |
| سطح بدون اصطکاک | Fricltionless surface |
| سطح مقطع مؤثر | Effective cross - section |
| سقوط آزاد | Free - fall |
| سهموی | Parabolic |
| سیارک | Asteroid |
| سیاهچاله | Blackhole |
| سیاهچالهٔ ابرجرمی | Supermassive blackhole |
| شارهٔ آرمانی | Ideal fluid |
| شتاب | Acceleration |
| شیب | Slope |
| صفحهٔ تقارن | Plane of symmetry |
| ضرب برداری | Vector product |
| ضرب ضربدری | Cross product |
| ضرب نرده‌ای | Scalar product |
| ضرب نقطه‌ای | Dot product |
| ضربه | Impulse |
| ضریب تبدیل | Conversion factor |
| ضریب کارایی | Coefficient of performance |
| طول | Length |
| ظرفیت گرمایی | Heat capacity |
| عایق‌بندی | Insulation |
| عکس فوری | Snapshot |
| غلتش | Rolling |
| فرایند بی‌دررو | Adiabatic process |
| فرایند برگشت‌پذیر | Rerversible procoss |
| فشار پیمانه‌ای | Gauge pressure |
| فشار جو | Atmospheric pressure |
| فضاپیما | Spacecraft |
| فناوری | Technology |
| فیزیک کوانتومی | Quantum physics |
| قاعدهٔ دست راست | Right - hand rule |
| قرص | Disk |
| قرقره | Pulley |
| قضیهٔ محورهای موازی | Parallel - axis theorem |
| قضیهٔ همپاری انرژی | Equipartition of energy theorem |

| | |
|---|---|
| قطعه | Block |
| کاتوره‌ای | Random |
| کرنش | Strain |
| کشسان | Elastic |
| کششی | Tensile |
| کمیت برداری | Vector quantity |
| کمیت نرده‌ای | Scalar quantity |
| کهکشان امرأة المسلسله | Andromeda galaxy |
| گاز آرمانی | Ideal gas |
| گاز تک اتمی | Monoatomic gas |
| گاز چند اتمی | Polyatomic gas |
| گاز دو اتمی | Diatomic gas |
| گداخت هسته‌ای | Nuclear fusion |
| گرانش | Gravitation |
| گرانیگاه | Center of gravity |
| گرماسنج | Calorimeter |
| گرمانگار | Thermogram |
| گرمای تبخیر | Heat of vaporization |
| گرمای ویژهٔ مولی | Molar specific heat |
| گره | knot |
| گسیلندگی | Emissivity |
| گشتاور | Moment |
| گشتاور ماند | Moment of inertia |
| گشتاور نیرو | Torque |
| گوشته | Mantle |
| لحظه‌ای | Instantaneous |
| لختی چرخشی | Rotational inertia |
| مؤلفهٔ برداری | Vector component |
| مؤلفهٔ شعاعی | Radial component |
| مؤلفهٔ مماسی | Tangential component |
| مبدأ | Origin |
| محور چرخش | Axis of rotation |
| مدول کپه‌ای | Bulk modulus |
| مرکز جرم | Center of mass |
| مرکز گرا | Centripetal |
| مقدارفرین | Extreme value |
| مقیاس سلسیوس | Celsius scale |
| مکان | Position |
| مکانیک نیوتونی | Newtonian mechanics |
| مماسی | Tangential |
| منزوی | Isolated |
| مهبانگ | Big Bang |
| ناکشسان | Inelastic |
| نسبیت خاص | Special relativity |
| نسبیت عام | General relativity |
| نظریهٔ کوانتومی | Quantum theory |
| نقطهٔ سه گانه | Triple - point |
| نکتهٔ کلیدی | Key idea |
| نکتهٔ وارسی | Check point |
| نماد | Symbol |
| نمودار | Graph |
| نمودار جسم - آزاد | Free - body diagram |
| نوار دو فلزه | Bimetal strip |
| نیروی اصطکاک ایستایی | Static frictional force |
| نیروی اصطکاک جنبشی | Kinetic frictional force |
| نیروی پیشران | Thrust |
| نیروی خارجی | External force |
| نیروی خالص | Net force |
| نیروی عمودی | Normal force |
| نیروی گرانشی | Gravitational force |
| هدف | Target |
| هسته | Core |
| همرفت | Convection |
| هموار | Smoothly |
| وزن | Weight |
| وزن ظاهری | Apparent weight |
| وصل خط | On - line |
| یکا | Unit |
| یکاهای اصلی | Base units |
| یکاهای فرعی | Derived units |
| یکای جرم اتمی | Atomic mass unit |
| یکای نجومی | Astronomical unit |

# نمایه